МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

Г. И. Лебедева
Г. А. Романюк
И. М. Мартыненко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методическое пособие

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

Г. И. Лебедева
Г. А. Романюк
И. М. Мартыненко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методическое пособие

Минск
БНТУ
2013

УДК 517.53/55(075.8)
ББК 22.12я7
Л33

Р е ц е н з е н т ы :
А. Д. Корзников, *В. П. Грибкова*

Лебедева, Г. И.
Л33 Функции нескольких переменных : методическое пособие / Г. И. Лебедева, Г. А. Романюк, И. М. Мартыненко. – Минск : БНТУ, 2013. – 88 с.
ISBN 978-985-550-030-9.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой дисциплины «Математика» для студентов инженерных специальностей. В нем освещены теоретические вопросы, приведены примеры решения задач, даны задания для аудиторной и домашней работы. По всем примерам указаны ответы. В конце пособия даны задания по вариантам для самостоятельной работы студентов.

УДК 517.53/55(075.8)
ББК 22.12я7

ISBN 978-985-550-030-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«Функции нескольких переменных» являются одним из разделов дисциплины «Высшая математика».

Знание теоретической части, умение решать примеры и выбор оптимального решения являются важным для будущих инженеров.

Настоящее пособие предназначено для оказания помощи в изучении соответствующего раздела, повышения уровня знаний студентов.

Пособие разбито на практические занятия. По каждому из них, кроме теоретического освещения вопросов, приведены примеры решения задач, даны задания для аудиторной и домашней работы студентов. По всем примерам указаны ответы. В пособии даны и задания по вариантам для самостоятельной работы студентов.

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Определение функции нескольких переменных

Пусть $D \subset R^n$ – произвольное множество точек n-мерного пространства.

Определение 1.1. Если правило f каждой точке $M(x_1, \ldots, x_n) \in D$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве D *задана числовая функция* f от n *переменных*: $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Множество D называется *областью определения*, а множество $E = \{u \in R\}$ – *множеством значений* функции $u = f(M)$. В случае $n = 2$ имеем функцию 2-х переменных. Ее можно рассматривать как функцию точек плоскости OXY. *Частное* значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0, y = y_0$ обозначают $f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$.

Функция 2-х переменных (x, y) может быть задана *аналитическим*, *табличным*, *графическим* и другими способами. Функцию 3-х и более переменных изобразить графически невозможно.

Примеры. Найти области определения следующих функций.

1.1. $z = x^2 + y^2$.

Решение. Областью определения является вся область $D \in R^2$. Областью значений является $[0;\infty)$. Графиком функции является параболоид вращения (рис. 1.1).

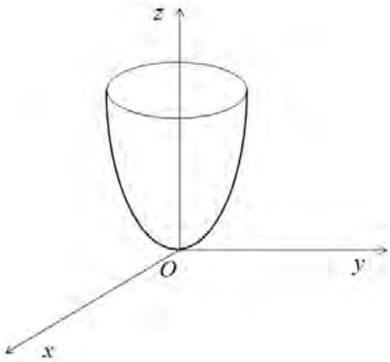

Рис. 1.1

1.2. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Для существования функции z необходимо, чтобы выполнялось неравенство $1 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 1$. Этому неравенству удовлетворяет внутренняя часть круга единичного радиуса. Причем граница не входит в область определения.

1.3. $z = y + \sqrt{x}$.

Решение. Функция существует для всех $x \geq 0$, т. е. в правой полуплоскости (рис. 1.2).

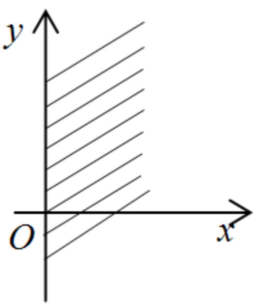

Рис. 1.2

Функции нескольких переменных могут быть заданы *явно* $\left(z=f(x,y), u=f(x,y,z)\right)$ либо *неявно* уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной $\left(\text{например, } F(x,y,z)=0\right)$. Например, функция z двух переменных x и y, определяемая уравнением $xyz-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$, задана неявно.

1.2. Предел функции

Рассмотрим последовательность т. $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$, $\ldots, M_k(x_k,y_k)=\{M_k\}$ плоскости XOY. Говорят, что эта последовательность сходится к т. $M_0(x_0,y_0)$, если расстояние $\rho(M_k,M_0)=\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}$ стремится к нулю при $k\to\infty$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\rho(M_k,M_0)=\lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}=0.$$

Либо предел последовательности т. $\{M_k\}$ равен M_0: $\lim\limits_{k\to\infty}M_k=M_0$.

Пусть функция $z=f(x,y)=f(M)$ определена в некоторой ε-окрестности т. $M_0(x_0,y_0)$, т. е. при условии $\rho(M,M_0)<\varepsilon$.

Определение 1.2 (по Гейне). Число z_0 называется *пределом* функции $z=f(x,y)$ в т. $M_0(x_0,y_0)$, если для любой сходящейся к $M_0(x_0,y_0)$ последовательности точек $\{M_k\}$, соответствующая последовательность $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_k)$ значений функции сходится к z_0:

$$z_0=\lim_{M\to M_0}f(M), \text{ если } \forall\{M_k(x_k,y_k)\}:\lim_{k\to\infty}M_k=$$

$$=M_0(x_0,y_0)\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}f(M_k)=f(M_0).$$

Обозначается $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = z_0$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = z_0$.

Определение 1.3 (по Коши). Число z_0 называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, (т. е. в т. $M_0(x_0,\ y_0)$), если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \rho > 0$: для $\forall$ т. $M(x, y)$ из δ-окрестности т. M_0 выполняется неравенство $\left| f(x, y) - z_0 \right| < \varepsilon$.

Эти определения предела функции в точке эквивалентны.

Примеры. Вычислить пределы.

1.4.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(x^2 + xy + y^2\right)(x - y)}{(x - y)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + xy + y^2 = 0\right).$$

1.5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x}$. Умножим и разделим эту функцию на $y \neq 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{\operatorname{tg} xy \cdot y}{xy} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ где } \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy} = 1.$$

1.6. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{x^3 - y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1 - 2}{1 + 4} = \dfrac{-1}{5}$.

1.3. Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью пределов.

Определение 1.4. Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *непрерывной* в т. $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если выполняются следующие три условия:

1) $f(M)$ определена в т. M_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если в т. M_0 не выполняется хотя бы одно из отмеченных условий, то она является точкой *разрыва* функции $u = f(M)$.

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных *точки разрыва могут быть изолированными* или образовывать *линию*. Для функции $u = f(x, y, z)$ точки разрыва могут быть либо изолированными, либо образовывать линию, либо поверхность разрыва.

Примеры. Найти точки разрыва.

1.7. $z = \dfrac{1}{(x+4)^2 + y^2}$. Данная функция определена на R^2 всюду, кроме т. $M(-4, 0)$, которая является *точкой разрыва*.

1.8. $z = \dfrac{1}{x + y - 4}$. Данная функция определена для таких значений x, y, при которых $x + y - 4 \neq 0$. Следовательно, прямая $y = 4 - x$ является линией разрыва.

1.9. $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$. Эта функция определена для любых x, y, z таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. В данном случае имеем *поверхность разрыва*, которая является сферой с центром в начале координат и $R = 3$.

Определение 1.5. Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функции нескольких переменных, непрерывные на замкнутых ограниченных множествах, обладают свойствами, аналогичными свойствам функции одной переменной, непрерывной на отрезке.

Отметим основные из них.

Теорема 1.1. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве* $D \in R^n$*, то она ограничена на нем и достигает в некоторых т.* M_1 *и* M_2 *этого множества своих точных верхней и нижней граней*:

$$f(M_1) = \sup f(M), \quad f(M_2) = \inf f(M).$$

Замечание. Т. M_1 и M_2 могут определяться неоднозначно.

Теорема 1.2. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом связном ограниченном множестве D, то она принимает на нем все промежуточные значения.*

Другими словами, если $\inf f(M) \le \mu \le \sup f(M)$, то существует такая т. $M_0 \in D$, что $f(M_0) = \mu$.

В частности, если $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то на множестве D существует по крайней мере одна т. M_0 такая, что $f(M_0) = 0$.

Определение 1.6. Множество называется *связным*, если любые две его точки могут быть соединены линией, принадлежащей этому множеству.

Теорема 1.3. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она равномерно-непрерывна на этом множестве, т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$: *для любых точек* M_1 *и* M_2 *множества D, находящихся на расстоянии, меньшем* δ*, выполняется неравенство:*

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon.$$

Замечание. Для функций, непрерывных на незамкнутых или неограниченных множествах, указанные теоремы могут и не выполняться.

1.4. **Аудиторные задания**

1. Найти область определения функции.

1.1. $z=2x+y-3$. (*Ответ:* вся плоскость XOY.)

1.2. $z=\sqrt{x^2+y^2-16}$. (*Ответ:* $x^2+y^2\geq 16$.)

1.3. $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (*Ответ:* $x^2+y^2\neq 0$.)

1.4. $f=\sqrt{xyz}$. (*Ответ:* множество точек, для которых $xyz\geq 0$.)

1.5. $f=\arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$. (*Ответ:* $-1\leq\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\leq 1$.)

1.6. $f=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(9-x^2-y^2\right)}$. (*Ответ:* кольцо $4\leq\left(x^2+y^2\right)\leq 9$.)

1.7. $f=x+\sqrt{yz}$. (*Ответ:* 1) $y\geq 0$, $z\geq 0$; 2) $y\leq 0$, $z\leq 0$.)

2. Найти разрыв функции.

2.1. $z=\dfrac{1}{x+y}$. (*Ответ:* линия $y=-x$.)

2.2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$. (*Ответ:* круг $x^2+y^2-4\leq 0$.)

2.3. $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$. (*Ответ:* конус $x^2+y^2-z^2\leq 0$.)

2.4. $z=\dfrac{2x}{x+y-5}$. (*Ответ:* линия $y=5-x$.)

2.5. $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (*Ответ:* точка $O(0;0)$.)

3. Найти предел функции.

3.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2x+y}{x-y}$. (*Ответ:* –4.)

3.2. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to -1}} \dfrac{4}{x+5y}$. (*Ответ:* –2.)

3.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \left(2x^2+4y^2-5\right)$. (*Ответ:* 19.)

3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$. (*Ответ:* 2.)

3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$. (*Ответ:* 4.)

3.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. (*Ответ:* 27.)

3.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y}{x^2+y^2}$. (*Ответ:* не существует.)

3.8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{x^4+y^4}$. (*Ответ:* ∞.)

1.5. **Домашние задания**

1. Найти область определения функции.

1.1. $f = x+y-4$. (*Ответ:* $x\in R$; $y\in R$.)

1.2. $z = \dfrac{x+y}{x-y-7}$. (*Ответ:* $y\neq x-7$.)

1.3. $z = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}}$. (*Ответ:* все точки (x, y), кроме $x=0$; $y=4$.)

1.4. $z = \dfrac{5-y}{\sqrt{x^2+y^2-z^2-4}}$. (*Ответ:* $x^2+y^2-z^2-4>0$.)

2. Найти разрыв функции.

2.1. $z=\sqrt{xy}$. (*Ответ:* $xy<0$.)

2.2. $z=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2-8}}$. (*Ответ:* $x^2+y^2\le 8$.)

2.3. $z=\dfrac{1}{x-2y+6}$. (*Ответ:* $x-2y+6=0$.)

3. Найти пределы.

3.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 4}}\dfrac{2x}{x+y}$. (*Ответ:* 6/7.)

3.2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{4+y}{x-y}$. (*Ответ:* –3.)

3.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{x}{\sin(xy)}$. (*Ответ:* 1/2.)

3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$. (*Ответ:* 5.)

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.1. Понятие частных производных функций нескольких переменных

Пусть рассматривается функция двух переменных $z=z(x,\ y)$. Если один из аргументов получит приращение, то будет иметь место частное приращение функции:

$$\Delta_x z = z(x+\Delta x;\ y)-z(x,\ y), \tag{2.1}$$

$$\Delta_y z = z(x;\ y+\Delta y)-z(x,\ y). \tag{2.2}$$

Если приращение получат x и y, то имеем полное приращение функции:

$$\Delta z = z(x+\Delta x;\ y+\Delta y) - z(x,\ y). \tag{2.3}$$

Геометрически частные и полное приращения функции $\Delta_x z, \Delta_y z, \Delta z$ можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 соответственно (рис. 2.1).

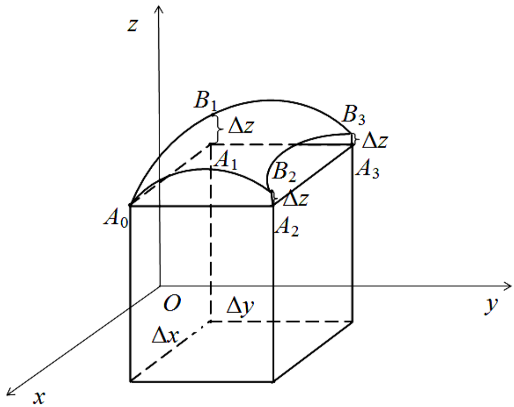

Рис. 2.1

Пример 2.1. Найти частные и полное приращения функции $z = x^2y^3$ в т. $M(2;3)$, если $\Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = 0{,}3.$

Решение. В соответствии с формулами (2.1)–(2.3) имеем:

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 y^3 - x^2y^3 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)y^3 - x^2y^3 =$$

$$= y^3\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right) = y^3\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) =$$

$$= 3^3\left(2\cdot 2\cdot 0{,}2 + 0{,}2^2\right) = 27\cdot 0{,}84 = 22{,}68\,,$$

$$\Delta_y z = x^2 (y + \Delta y)^3 - x^2 y^3 =$$

$$= x^2 \left(y^3 + 3y^2 \Delta y + 3(\Delta y)^2 y + (\Delta y)^3 - y^3 \right) =$$

$$= x^2 \left(3y^2 \Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3 \right) = 4\left(27 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,3^2 + 0,3^3 \right) = 35,748,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)^3 - x^2 y^3 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \right) \times$$

$$\times \left(y^3 + 3y^2 \Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3 \right) - x^2 y^3 =$$

$$= \left(2^2 + 0,8 + 0,04 \right) (27 + 8,1 + 0,8 + 0,027) - 4 \cdot 27 =$$

$$= 4,84 \cdot 35,937 - 108 = 65,935.$$

Определение 2.1. *Частной производной* функции $z = z(x, y)$ по переменной x в т. $M(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Частные производные определяют скорость изменения функции в т. $M(x_0, y_0)$ в направлении изменения независимой переменной.

Вычисляются частные производные по тем же правилам, формулам и свойствам, что и функции одной переменной, при условии, что остальные переменные остаются постоянными.

Пример 2.2. Найти частные производные функции $z = 2^{xy}$.

Решение. Частную производную z'_x вычисляем как производную показательной функции, считая y постоянной:

$$z'_x = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot y.$$

Аналогично $z'_y = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot x.$.

Пример 2.3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = xy + \cos^2\left(z - x^2 y^3\right).$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = y + 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right)\left(-2xy^3\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right)\left(-x^2 \cdot 3y^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right) = -\sin\left(2z - 2x^2 y^3\right).$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных состоит в том, что они равны тангенсам углов, образованных касательными, проведенными к линиям пересечения поверхности $z = z(x, y)$ с соответствующими плоскостями ($y = y_0,\ x = x_0,\ z = z_0$).

Механический смысл частных производных функции двух переменных: они характеризуют скорость изменения функции $z = z(x, y)$ в т. $M(x_0, y_0)$ в направлении соответствующей прямой ($y = y_0$ или $x = x_0$).

2.2. Дифференцируемость функции двух переменных

Функция $z = z(x, y)$ является дифференцируемой в т. $M(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α и β – бесконечно малые, т. е. $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 2.1. *Если функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x_0, y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По определению дифференцируемости функции имеем

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$, A и B – некоторые коэффициенты, не зависящие от Δx и Δy.

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это значит, что функция $z = z(x, y)$ непрерывна в т. $M(x_0, y_0)$.

Теорема 2.2 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x_0, y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $z'_x(x_0, y_0) = A$ и $z'_y(x_0, y_0) = B$.*

Доказательство. Пусть $z = z(x, y)$ – дифференцируема в т. $M(x_0, y_0)$. Ее приращение

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Пусть $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделим последнее равенство на Δx и возьмем предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = z'_x(x_0, y_0).$$

То есть в т. $M(x_0, y_0)$ существует частная производная $z'_x(x_0, y_0)$. Аналогично доказывается существование частной производной $z'_y(x_0, y_0) = B$.

Обратное утверждение теорем 2.1 и 2.2 – неверно.

Например, функция $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ непрерывна в т. $O(0,0)$, но не имеет в этой точке частных производных. Производная $z'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}$ не существует в т. $O(0,0)$. Аналогично $z'_y = \dfrac{2y}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}$ также не существует в т. $O(0,0)$.

Теорема 2.3 (достаточное условие дифференцируемости функции)*. Если функция $z = z(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности т. $M(x_0, y_0)$, непрерывные в этой точке, то $z(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x_0, y_0)$.*

Доказательство. Полное приращение функции имеет вид

$$\Delta z(x_0, y_0) = z(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0).$$

Добавим и вычтем из правой части $z(x_0, y_0 + \Delta y)$:

$$z = z(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0 + \Delta y) +$$

$$+ z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0).$$

По теореме Лагранжа:

$$z(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-z(x_0,\, y_0+\Delta y)=z'_x(\xi,\, y_0+\Delta y)\Delta x,$$

где $x_0<\xi<x_0+\Delta x$.

Аналогично

$$z(x_0,\, y_0+\Delta y)-z(x_0,\, y_0)=z'_x(x_0,\, \omega)\Delta y,$$

где $y_0<\omega<y_0+\Delta y.$

Следовательно, $\Delta z(x_0,\, y_0)=z'_x(\xi,\; y_0+\Delta y)\Delta x+z'_y(x_0,\omega)\Delta y.$ По условию теоремы z'_x и z'_y непрерывны в т. $M(x_0,\, y_0)$. Значит,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_x(\xi,\, y_0+\Delta y)=z'_x(x_0,\, y_0) \text{ и } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_y(x_0,\omega)=z'_y(x_0,\, y_0).$$

Из полученных равенств, согласно определению предела, имеем:

$$z'_x(\xi,\, y_0+\Delta y)=z'_x(x_0,\, y_0)+\alpha,$$

$$z'_y(x_0,\, \omega)=z'_y(x_0,\, y_0)+\beta.$$

Это значит, что

$$\Delta z(x_0,\, y_0)=z'_x(x_0,\, y_0)\Delta x+z'_y(x_0,\, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

То есть функция $z=z(x,\, y)$ – дифференцируема в т. $M(x_0,\, y_0)$, что и требовалось доказать.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Например, функция $z=2^{xy}$ дифференцируема в любой т. $M(x, y)\in R^2$, т. к. ее частные производные $z'_x=2^{xy}\cdot\ln 2\cdot y$ и $z'_y=2^{xy}\cdot\ln 2\cdot x$ являются непрерывными при любых x и y.

2.3. Дифференциал функции нескольких переменных

Пусть $z=z(x, y)$ – дифференцируемая в т. $M(x_0, y_0)$ функция. Ее полное приращение

$$\Delta z=z'_x(x_0, y_0)\Delta x+z'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Дифференциалом рассматриваемой функции является главная линейная часть ее полного приращения. Обозначается $dz=z'_x(x_0, y_0)\Delta x+z'_y(x_0, y_0)\Delta y$. Приращения Δx и Δy являются дифференциалами независимых переменных и поэтому равны dx и dy соответственно. Тогда полный дифференциал функции $z=z(x, y)$ будет иметь вид

$$dz=z'_x dx+z'_y dy\,. \tag{2.4}$$

Для функции 3-х переменных $u=u(x, y, z)$ дифференциал будет равен

$$du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz\,. \tag{2.5}$$

Чтобы найти дифференциал функции, нужно найти ее частные производные и подставить их в соответствующие формулы (2.4), (2.5).

Пример 2.4. Найти дифференциал функции $z=x^2y+x+y$.

Решение. Частные производные заданной функции равны

$$z'_x = 2xy + 1,$$

$$z'_y = x^2 + 1.$$

Тогда дифференциал заданной функции будет равен

$$\mathrm{d}z = (2xy + 1)\mathrm{d}x + \left(x^2 + 1\right)\mathrm{d}y\,.$$

Пример 2.5. Найти дифференциал функции $z = \cos\dfrac{x}{y}$.

Решение. Находим частные производные $\mathrm{d}u = u'_x\mathrm{d}x + u'_y\mathrm{d}y + u'_z\mathrm{d}z$:

$$z'_x = -\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Подставляем их в формулу (2.4):

$$\mathrm{d}z = -\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}x - \sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$$

Пример 2.6. Найти дифференциал функции

$$u = x^2yz + 2xz - 3y^2z.$$

Решение. Находим частные производные: $u'_x = 2xyz + 2z$; $u'_y = x^2z - 6yz$; $u'_z = x^2y + 2x - 3y^2$. Подставляем их в формулу (2.5) и получаем дифференциал исходной функции:

$$\mathrm{d}u = (2xyz + 2z)\mathrm{d}x + \left(x^2z - 6yz\right)\mathrm{d}y + \left(x^2y + 2x - 3y^2\right)\mathrm{d}z\,.$$

2.4. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Если функция $z = z(x, y)$ – дифференцируема, то ее полное приращение $\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$.

Откуда $z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta z$. Поскольку $\Delta z \approx \mathrm{d}z$, то

$$\boxed{z(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx z(x, y) + \mathrm{d}z \approx z(x, y) + z'_x \Delta x + z'_y \Delta y. \qquad (2.6)}$$

Полученная формула является формулой применения дифференциалов в приближенных вычислениях.

Чтобы воспользоваться формулой (2.6), нужно:

1) по заданному числу записать функцию $z = z(x, y)$;

2) выделить $x, \Delta x, y$ и Δy. В качестве x и y берутся целые значения заданного числа, при которых записанная функция легко вычисляется. Выделенные Δx и Δy должны быть достаточно малыми;

3) вычисляем все составляющие формулы (2.6) и определяем приближенное значение заданного числа.

Пример 2.7. Вычислить приближенно $1{,}01^{2{,}03}$.

Решение. По заданному числу запишем функцию $z = x^y$.

Выделяем $x, \Delta x, y$ и Δy: $x = 1,\ \Delta x = 0{,}01,\ y = 2,\ \Delta y = 0{,}03.$

Значение функции при выделенных x и y будет равно $z(2, 2) = 1^2 = 1$. Частные производные будут равны:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad z'_y = x^y \cdot \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1^2 \cdot \ln 1 = 0,$$

т. е. $1{,}01^{2{,}03} \approx 1 + 2 \cdot (0{,}01) + 0 \cdot 0{,}03 \approx 1 + 0{,}02 + 0 \approx 1{,}02.$

Пример 2.8. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}02)^2 + (1{,}99)^2}$.

Решение. По заданному числу запишем функцию $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Выделяем:

$$x=2,\ \Delta x=0,01,$$

$$y=1,\ \Delta y=0,02,$$

$$z=2,\ \Delta z=-0,01.$$

Значение функции при выделенных x, y и z будет равно $f=\sqrt{4+1+4}=3.$

Частные производные:

$$f'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}}=\frac{2}{3},$$

$$f'_y=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}}=\frac{1}{3},$$

$$f'_z=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}}=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$\sqrt{(2,01)^2+(1,02)^2+(1,99)^2}\approx 3+\frac{2}{3}\cdot 0,01+\frac{1}{3}\cdot 0,02+\frac{2}{3}(-0,01)\approx$$

$$\approx 3+\frac{1}{3}(0,02+0,02-0,02)\approx 3+\frac{1}{3}\cdot 0,02\approx 3\frac{1}{150}.$$

2.5. **Аудиторные задания**

1. Найти частные производные функций.

1.1. $z = 2x^2 + 4y^2 - xy + 2x + 5y - 4.$

(*Ответ:* $z'_x = 4x - y + 2; z'_y = 8y - x + 5.$)

1.2. $z = y\sin(2x - y).$

(*Ответ:* $z'_x = 2y\cos(2x - y); z'_y = \sin(2x - y) - y\cos(2x - y).$)

1.3. $z = x^2\cos(x + 5y).$

(*Ответ:* $z'_x = 2x\cos(x + 5y) - x^2\sin(x + 5y); z'_y = -5x^2\sin(x + 5y).$)

1.4. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$. (*Ответ:* $z'_x = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$; $z'_y = \dfrac{-2x}{(x + y)^2}$.)

1.5. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. (*Ответ:* $z'_x = \dfrac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $z'_y = \dfrac{-4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.)

1.6. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. (*Ответ:* $z'_x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \dfrac{1}{y}$; $z'_y = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$.)

1.7. $z = x^{y^2}$. (*Ответ:* $z'_x = y^2 x^{y^2 - 1}$; $z'_y = x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y$.)

1.8. $z = \sqrt{xy}$. (*Ответ:* $z'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$; $z'_y = \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$.)

2. Вычислить значения частных производных функции в точке.

2.1. $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $M_0(3; 2)$.

(*Ответ:* $z'_x(M_0) = -4$; $z'_y(M_0) = 6.$)

2.2. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$, $M_0(1; -2; 2)$.

(*Ответ:* $u'_x = \dfrac{2}{3}$; $u'_y = -\dfrac{1}{3}$; $u'_z = \dfrac{1}{6}$.)

2.3. $u = x^{y^z}$, $M_0(1;2;3)$.

(*Ответ:* $u'_x(M_0) = 8;\ u'_y(M_0) = 0;\ u'_z(M_0) = 0.$)

3. Доказать, что функция $z = y\sin(2x - y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

4. Доказать, что функция $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1.$

5. Найти дифференциал функции.

5.1. $z = y^{3x}$. (*Ответ:* $\mathrm{d}z = 3y^{3x}\ln y\mathrm{d}x + 3xy^{3x-1}\mathrm{d}y$.)

5.2. $z = x^4 + y^4 - 3x^2y^2 + 5xy^3$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}z = \left(4x^4 - 6xy^2 + 5y^3\right)\mathrm{d}x + \left(4y^3 - 6x^2y + 15xy^2\right)\mathrm{d}y.$)

5.3. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. (*Ответ:* $\mathrm{d}z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$.)

5.4. $z = \arccos\dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x + \dfrac{1}{1 + y^2}\mathrm{d}y.$)

5.5. $u = z^{y^x}$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}z = y^x z^{y^x}\ln y\ln z\mathrm{d}x + y^{x-1}z^{y^x}x\ln z\mathrm{d}y + y^x z^{y^x - 1}\mathrm{d}z.$)

5.6. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. (*Ответ:* $\mathrm{d}z = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z.$)

6. Вычислить приближенно.

6.1. $1{,}98^{2{,}02}$. (*Ответ:* 3,976.)

6.2. $\sqrt{(1{,}03)^2 + (2{,}98)^2}$. (*Ответ:* 3,153.)

6.3. $1{,}003(1{,}998)^2(3{,}005)^2$. (*Ответ:* 108,648.)

6.4. $\sqrt{(2,02)^2+(1,03)^2+(1,97)^2}$. (*Ответ:* 3,003.)

6.5. $(1,99)^{2,01}$. (*Ответ:* 3,987.)

6.6. $(1,99)^2(2,03)^3$. (*Ответ:* 9,41.)

6.7. $\ln(1,98)^{2,03}$. (*Ответ:* 3,963.)

2.6. Домашние задания

1. Найти частные производные функций.

1.1. $z=\cos\left(x^2y\right)$.

(*Ответ:* $z'_x=-2xy\sin\left(x^2y\right)$; $z'_y=-x^2\sin\left(x^2y\right)$.)

1.2. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$. (*Ответ:* $z'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.)

1.3. $z=e^{xy}$. (*Ответ:* $z'_x=e^{xy}\cdot y$; $z'_y=e^{xy}\cdot x$.)

1.4. $z=2^{y^2x}$. (*Ответ:* $z'_x=y^2\cdot 2^{y^2x}\cdot\ln 2$; $z'_y=2yx\cdot 2^{y^2x}\cdot\ln 2$.)

1.5. $z=x^2+y^2-4xy$. (*Ответ:* $z'_x=2x-4y$; $z'_y=2y-4x$.)

2. Найти частные производные функций в точке.

2.1. $z=y^x$, $M_0(2;1)$. (*Ответ:* $z'_x=0$; $z'_y=2$.)

2.2. $z=x\sqrt{y}$, $M_0(1;1)$. (*Ответ:* $z'_x=1$; $z'_y=\dfrac{1}{2}$.)

2.3. $z=3^{\frac{x}{y}}$, $M_0(2;2)$. (*Ответ:* $z'_x=-\dfrac{3}{2}\ln 3$; $z'_y=\dfrac{3}{2}\ln 3$.)

3. Найти дифференциал функции.

3.1. $z=2x+3y-5$. (*Ответ:* $dz=2dx+3dy$.)

3.2. $z=x^2y+y^2x-4$.

(*Ответ:* $dz=\left(2xy+y^2\right)dx+\left(x^2+2xy\right)dy$.)

3.3. $u = xyz + x^2 - y^2 + z^2$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}u = (yz + 2x)\mathrm{d}x + (xz - 2y)\mathrm{d}y + (xy + 2z)\mathrm{d}z$.)

4. Вычислить приближенно.

4.1. $(1{,}06)^{1{,}88}$. (*Ответ:* 1,12.)

4.2. $(1{,}02)^2 (2{,}03)^3$. (*Ответ:* 8,68.)

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Правила дифференцирования неявных и сложных функций. Приложения частных производных

Пусть имеется функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, неявно заданная уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$. Частные производные данной функции определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

Для функции 2-х переменных $F(x,\ y) = 0$ будет

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

***Пример** 3.1.* Найти y'_x, если $x^2 y + y^2 - 5x + 2y = 0$.

Решение. $F'_x = 2xy - 5, \quad F'_y = x^2 + 2y + 2, \quad y'_x = -\dfrac{2xy - 5}{x^2 + 2y + 2}$.

***Пример** 3.2.* Найти x'_y, если $\cos(xy) + e^x + e^y = 0$.

Решение. $F'_x = -\sin(xy) \cdot y + e^x, \quad F'_y = -\sin(xy) \cdot x + e^y$.

Тогда $x'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -\dfrac{-\sin(xy)\cdot x + e^y}{-\sin(xy)\cdot y + e^x}$.

Если $u = F(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где $v_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$v_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ldots, \ v_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то функция u называется *сложной функцией* независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Переменные $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются *промежуточными* аргументами.

Частные производные сложной функции по одной из независимых переменных определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Если рассматривается функция 2-х переменных $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.2)$$

Пример 3.3. Найти частные производные функции $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=\mathrm{tg}^2\,3x$, $v=2^{yx}$.

Решение. В соответствии с записанными формулами (3.1) и (3.2) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

где $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{1}{u^2+v^2}\cdot 2u=\dfrac{2u}{u^2+v^2}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{u^2+v^2}\cdot 2v=\dfrac{2v}{u^2+v^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\,\mathrm{tg}\,3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3=\frac{6\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos^2 3x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2^{yx}\cdot\ln 2\cdot x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot\frac{6\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos^2 3x}+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y=\frac{2\,\mathrm{tg}^2\,3x}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}\times$$

$$\times\frac{6\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos^2 3x}+\frac{2\cdot 2^{yx}}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y=\frac{12\,\mathrm{tg}^3\,3x}{\left(\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}\right)\cos^2 3x}+$$

$$+\frac{2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot y}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}=\frac{12\,\mathrm{tg}^3\,3x+2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot y\cdot\cos^2 3x}{\left(\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}\right)\cos^2 3x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\,\mathrm{tg}^2\,3x}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}\cdot 0+\frac{2\cdot 2^{yx}}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot x=\frac{2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot x}{\mathrm{tg}^4\,3x+2^{2yx}}.$$

3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности G в т. M_0 называется плоскость, в которой лежат все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Рассечем поверхность G плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Линия пересечения L_1 поверхности G плоскостью $x = x_0$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} z = z(x, y), \\ x = x_0. \end{cases}$$

Линия пересечения L_2 поверхности G плоскостью $y = y_0$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} z = z(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Линии L_1 и L_2 показаны на рис. 3.1.

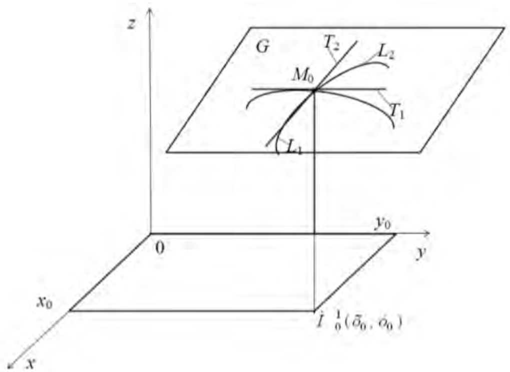

Рис. 3.1

Линии T_1 и T_2 являются касательными к линиям L_1 и L_2 в т. $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Они задаются системами:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases} \text{– для линии } L_1$$

и

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases}$$ – для линии L_2.

Уравнение плоскости, проходящей через точку с $x = x_0$, $y = y_0$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.3)$$

Касательные T_1 и T_2 получаются сечением двумя плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Следовательно, уравнение касательной T_1

$$z - z_0 = (-B/C)(y - y_0), \quad x = x_0.$$

Уравнение касательной T_2

$$z - z_0 = (-A/C)(x - x_0), \quad y = y_0,$$

где $-A/C = f'_x(x_0, y_0)$, $-B/C = f'_y(x_0, y_0)$.

Подставляя эти выражения в (3.3), получаем уравнение плоскости β, проходящей через касательные T_1 и T_2:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (3.4)$$

Это уравнение (3.4) – для поверхности, заданной явно.

Для неявно заданной поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$$\begin{aligned} &F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ &+ F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Нормалью к поверхности G в данной т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (3.6)$$

Пример 3.4. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$ в т. $M(2, 2, 1)$.

Решение. Поверхность задана неявно. Частные производные имеют вид

$$F'_x = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}\bigg|_M = 1, \quad F'_y = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2}\bigg|_M = 1, \quad F'_z = \frac{-2z}{9}\bigg|_M = -\frac{2}{9}.$$

Уравнение касательной плоскости (3.5)

$$1(x - 2) + 1(y - 2) - \frac{2}{9}(z - 1) = 0$$

или после преобразований $x + y - \frac{2}{9}z = \frac{34}{9}$.

Уравнение касательной плоскости $9x + 9y - 2z = 34$.

Уравнение нормали (3.6) $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-2/9}$.

3.3. Вектор-градиент. Производная функции по направлению вектора

Вектор-градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего роста функции. Его координатами являются частные производные функции

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Для функции 3-х переменных $f = f(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}.$$

Пример 3.5. Найти вектор-градиент функции

$$z = x^2 + 2y^2 - 4x + 5y.$$

Решение. Частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y + 5.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z = (2x-4)\vec{i} + (4y+5)\vec{j}$.

Пример 3.6. Найти вектор-градиент функции

$$f = x^2 y + 3xz - z^2 + 4xyz - 2 \text{ в т. } M(1, 2, 3).$$

Решение. Частные производные заданной функции в т. M равны

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left.(2xy + 3z + 4yz)\right|_M = 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot2\cdot3 = 37,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left.\left(x^2 + 4xz\right)\right|_M = 1 + 12 = 13,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M = \left.(3x - 2z + 4xy)\right|_M = 3 - 6 + 8 = 5.$$

Тогда $\operatorname{grad} f(M) = 37\vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k}$.

Производной функции z по направлению вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{z(N) - z(M)}{\Delta l},$$

где Δl – приращение функции z в направлении $\overrightarrow{MN}$.

Для дифференцируемой функции $z = z(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

где α – угол вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ с осью Ox;

β – угол с осью OY.

Для функции 3-х переменных $u = u(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где γ – угол вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ с осью OZ;

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$. Они удовлетворяют условию:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ равно модулю вектора-градиента:

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right) = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Пример 3.7. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz - 2x + 6y + 5$$

в т. $M(1, 2, 3)$ и ее наибольшее значение в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(3, 4, 6)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Частные производные в т. M равны

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.(2x + 4yz - 2)\right|_M = 2 + 4\cdot 2\cdot 3 - 2 = 24,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.(2y + 4xz + 6)\right|_M = 4 + 12 + 6 = 22,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.(2z + 4xy)\right|_M = 6 + 8 = 14.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M = 24\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 22\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 14\frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{48+44+42}{\sqrt{17}} = \frac{134}{\sqrt{17}}.$$

Наибольшее значение производной функции u по направлению вектора $\overrightarrow{MN}$ в т. M будет равно

$$\max\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{24^2 + 22^2 + 14^2} = \sqrt{1256} = 35{,}44009.$$

3.4. Аудиторные задания

1. Найти частные производные неявной функции.

1.1. $x^2 + y^4 = y^2$. (*Ответ:* $F'_x = 2x$; $F'_y = 4y^3 - 2y$.)

1.2. $x + 2y + 3z = e^z$. (*Ответ:* $F'_x = 1$; $F'_y = 2$; $F'_z = 3 - e^z$.)

1.3. $e^x + e^y - 2xy = 0$. (*Ответ:* $F'_x = e^x - 2y;\ F'_y = e^y - 2x.$)

1.4. $\cos(xy) + x^2 y - 5x = 0$.

(*Ответ:* $F'_x = -\sin(xy)\cdot y + 2xy - 5;\ F'_y = -\sin(xy)\cdot x + x^2.$)

1.5. $x^2 y + \cos y = 0$. (*Ответ:* $F'_x = 2xy;\ F'_y = x^2 - \sin y.$)

2. Найти y'_x и x'_y, если $x^2 + y^2 - e^x + e^{2y} = 0$.

(*Ответ:* $x'_y = -\dfrac{2y + 2e^{2y}}{2x - e^x};\ y'_x = -\dfrac{2x - e^x}{2y + 2e^y}.$)

3. Найти частные производные сложной функции.

3.1. $u = x^y$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

(*Ответ:* $u'_t = y \cdot x^{y-1} \cdot x'_t + x^y \cdot \ln x \cdot y'_t.$)

3.2. $u = \cos\left(x^2 + y^2\right)$, где $x = e^t$, $y = 2^t$.

(*Ответ:* $u'_t = -\sin\left(e^{2t} + 2^{2t}\right)\cdot 2e^t \cdot e^t - \sin\left(e^{2t} + 2^{2t}\right)\cdot 2^{2t+1} \cdot \ln 2.$)

4. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной т. M.

4.1. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1$, $M(3, -2, -1)$.

(*Ответ:* $2x - 3y - 6z - 18 = 0;\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-6}.$)

4.2. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $M(1, -2, -2)$.

(*Ответ:* $x - 2y + 2z - 9 = 0;\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}.$)

4.3. $2z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$, $M(3, -2, -1)$.

(*Ответ:* $2x - 3y - 6z - 6 = 0;\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-6}.$)

4.4. $z = xy$, $M(1, -1, -1)$.

(*Ответ:* $x - y + z - 1 = 0;\ x - 1 = -y - 1 = z + 1.$)

5. Найти градиент функции.

5.1. $F = 2x + 3y - 5$. (*Ответ:* $dz = 3y^{3x} \ln y dx + 3xy^{3x-1} dy$.)

5.2. $F = 2xy + y^2 + 4x$.

(*Ответ:* $\operatorname{grad} F = (2y+4)\vec{i} + (2x+2y)\vec{j}$.)

5.3. $F = e^x + e^y + xy$. (*Ответ:* $\operatorname{grad} F = \left(e^x + y\right)\vec{i} + \left(e^y + x\right)\vec{j}$.)

5.4. $F = \cos x + \sin y + 2x - 3y$.

(*Ответ:* $\operatorname{grad} F = (-\sin x + 2)\vec{i} + (\cos y - 3)\vec{j}$.)

5.5. $F = 7xy + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y$.

(*Ответ:* $\operatorname{grad} F = \left(7y + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\vec{i} + \left(7x + \dfrac{1}{\sin^2 y}\right)\vec{j}$.)

6. Найти производные функции u по направлению вектора $\vec{l}$:

6.1. $u = 2x^3 - 3y^2 + xz - z^3$, $\vec{l}(1, 2, 4)$. (*Ответ:* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{126\sqrt{21}}{21}$.)

6.2. $u = 3x + 4y - z$, $\vec{l}(1, 2, 3)$. (*Ответ:* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}$.)

6.3. $u = 4x - 5y + z + 4$, $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$, $M(2, -1, 3)$, $N(3, -1, 7)$.

(*Ответ:* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{8\sqrt{17}}{17}$.)

6.4. $u = x^2 - y^2 + z^3, \vec{l}(1, 2, 1)$. (*Ответ:* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.)

6.5. $u = x^2 + y^2 - z + 4$, $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$, $M(1, 0, 3)$, $N(3, 1, 8)$.

(*Ответ:* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.)

3.5. Домашние задания

1. Найти частные производные неявной функции.

1.1. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5y = 0$. (*Ответ:* $F'_x = 2x - 6$; $F'_y = 8y + 5$.)

1.2. $e^x + 4^{5y} + x - y = 0.$

$$\left(\textit{Ответ: } F'_x = 3e^{3x} + 1;\ F'_y = 5 \cdot 4^{5y} \cdot \ln 4 - 1.\right)$$

2. Найти y'_x и x'_y, если $3x^2 + 6y^3 - 2x + 5y + 7 = 0.$

$$\left(\textit{Ответ: } y'_x = -\frac{(6x-2)}{18y^2+5}.\right)$$

3. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ в т. $M(2, 3, 2)$.

$$\left(\textit{Ответ: } 3x + 2y - z = 10;\ \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2/3} = \frac{z-2}{-1}.\right)$$

4. Найти вектор-градиент функции $u = x + 2y - 5z.$

$$\left(\textit{Ответ: } \operatorname{grad} u = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}.\right)$$

5. Найти производную функции u по направлению вектора $\vec{l}$:

$u = x^2 - 2y^3 + xy + z, \vec{l}\,(1,1,1).$ $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right).$

4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

4.1. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z = f(x; y), (x; y) \in D.$ Ее частные производные $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*; они являются функциями аргументов x и y; $(x; y) \in D$. Частные производные этих функций называются *частными производными второго порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}= f''_{yx}(x;\,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}= f''_{xy}(x;\,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}= f''_{y^2}(x;\,y).$$

Аналогично вводятся понятия частных производных 3-го, 4-го, …, n-го порядка, причем и для случая 3-х, 4-х и более переменных.

Частная производная 2-го и более высокого порядка, взятая по различным аргументам, называется *смешанной частной производной*. Так, смешанными производными для $f(x;\,y)$ являются, например, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x},\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$.

***Пример** 4.1.* Найти частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$ для функции $z= f(x;\,y)=x^3\sin y$.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2\sin y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3\cos y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2\sin y\right)=3x^2\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\cos y\right)=3x^2\cos y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2\cos y\right)=-3x^2\sin y.$$

Заметим, что в этом примере получено $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Оказывается, что это равенство не является случайным. Имеет место следующая теорема.

Теорема (Шварц). *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

В частности, для $z = f(x; y)$ *справедливо равенство*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{4.1}$$

Доказательство равенства (4.1).

Рассмотрим выражение

$$A = \left(f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x + \Delta x; y) - f(x; y + \Delta y) - f(x; y) \right).$$

Если ввести вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x; y + \Delta y) - f(x; y) = \Delta f_y(x; y),$$

то $A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$.

Так как (по условию) f'_x определена, то $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x; x + \Delta x]$. Тогда по теореме Лагранжа:

$$A = \Delta x \cdot \varphi'(\bar{x}), \tag{4.2}$$

где $\bar{x} \in (x; x + \Delta x)$.

Но

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x};\, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x};\, y). \qquad (4.3)$$

Так как f'_{xy} определена и непрерывна, то f'_x дифференцируема на отрезке $[y;\, y+\Delta y]$. Тогда еще раз применим к разности (4.3) теорему Лагранжа (по переменной y):

$$f'_x(\bar{x};\, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x};\, y) = \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x};\, \bar{y}), \qquad (4.4)$$

где $\bar{y} \in (y;\, y+\Delta y)$.

В итоге из (4.2)–(4.4)

$$A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \qquad (4.5)$$

Запишем теперь выражение A по другому. Переставим слагаемые в A:

$$A = \big(f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) - f(x;\, y+\Delta y) \big) - \big(f(x+\Delta x;\, y) - f(x;\, y) \big).$$

Введем вспомогательную функцию $\psi(\bar{x}) = f'(x+\Delta x;\, y) - f'(x;\, y)$; тогда

$$A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y). \qquad (4.6)$$

Снова применяя два раза теорему Лагранжа к функции (4.6), получим тем же путем, что и ранее:

$$A = \Delta y \cdot \Delta x \cdot f''_{yx}\left(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}\right), \tag{4.7}$$

где $\overline{\overline{x}} \in (x; x + \Delta x)$; $\quad \overline{\overline{y}} \in (y; y + \Delta y)$.

Из сравнения формул (4.5) и (4.7) следует:

$$f''_{xy}(\overline{x}; \overline{y}) = f''_{yx}(\overline{\overline{x}}; \overline{\overline{y}}).$$

Перейдем к пределу в последнем равенстве при $\Delta x \to 0$; $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\overline{x}; \overline{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\overline{\overline{x}}; \overline{\overline{y}}). \tag{4.8}$$

Ясно, что $\overline{x} \to x$, $\overline{\overline{x}} \to x$, $\overline{y} \to y$, $\overline{\overline{y}} \to y$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Так как (по условию) f''_{xy}, f''_{yx} – непрерывные функции, то равенство (4.8) становится следующего вида:

$$f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y),$$

что означает справедливость равенства (4.1).

4.2. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Полный дифференциал $\mathrm{d}u$ функции от нескольких переменных есть в свою очередь функция тех же переменных. Следовательно, можно найти полный дифференциал этой новой функции. Таким образом получается так называемый *дифференциал 2-го порядка* d^2u исходной функции u, который будет также функцией тех же переменных. Его полный дифференциал называется *дифференциалом 3-го порядка* d^3u первоначальной функции и т. д.

Пусть функция $u = f(x; y)$ – функция двух переменных x и y.

Рассмотрим случай, когда x и y *являются независимыми переменными.* Тогда $\mathrm{d}x = \Delta x$; $\mathrm{d}y = \Delta y$ – величины постоянные. Следовательно,

$$\mathrm{d}^2 u = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \right) =$$

= /используем линейность полного дифференциала/ =

$$= \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}f(x;y)}{\partial x} \right) + \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}f(x;y)}{\partial y} \right) =$$

$$= \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial x^2} \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y \right) +$$

$$+ \mathrm{d}y \left(\frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial y \partial x} \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial y^2} \mathrm{d}y \right) = \qquad (4.9)$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial x^2} \mathrm{d}x^2 + 2 \frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}^2 f(x;y)}{\partial y^2} \mathrm{d}y^2.$$

Получили формулу дифференциала 2-го порядка для функции 2-х переменных. Для дифференциала 3-го порядка будем иметь

$$\mathrm{d}^3 u = \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^3} \cdot \mathrm{d}x^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^2 \partial y} \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}y +$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x \partial y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y^3} \cdot \mathrm{d}y^3. \qquad (4.10)$$

Пример 4.2. Найти дифференциал 2-го порядка для функции $u = x^2 y^5$.

Решение. Найдем частные производные рассматриваемой функции:

$$u'_x = 2xy^5,\ u'_y = 5x^2y^4,\ u''_{x^2} = 2y^5,\ u''_{xy} = 10xy^4,\ u''_{y^2} = 20x^2y^3.$$

Подставляем найденные частные производные 2-го порядка в формулу (4.9): $\mathrm{d}^2u = 2y^5\mathrm{d}x^2 + 20xy^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 20x^2y^3\mathrm{d}y^2$.

Пример 4.3. Найти дифференциал 3-го порядка для функции $u = x^5 + y^4 - 3x^3y^2 + 2x - 5y + 6$.

Решение. Найдем частные производные 3-го порядка, входящие в формулу (4.10):

$$u'_x = 5x^4 - 9x^2y^2 + 2,\quad u''_{x^2} = 20x^3 - 18xy^2,\quad u'''_{x^3} = 60x^2 - 18y^2,$$

$$u'_y = 4y^3 - 6x^3y - 5,\quad u''_{y^2} = 12y^2 - 6x^3,\quad u'''_{y^3} = 24y,$$

$$u'''_{x^2y} = -36xy,\quad u''_{xy} = -18x^2y,\quad u'''_{xy^2} = -18x^2.$$

В соответствии с формулой (4.10) имеем

$$\mathrm{d}^3u = \left(60x^2 - 18y^2\right)\mathrm{d}x^3 - 108xy\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y - 54x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + 24y\mathrm{d}y^3.$$

Рассматривая выражения для d^2u, d^3u, …, приходим к следующей *символической формуле для дифференциала произвольного порядка* $n \in N$:

$$\mathrm{d}^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f.$$

Важно, *что если* $\mathrm{d}x$ *и* $\mathrm{d}y$ *нельзя считать постоянными*, то последняя *формула уже не будет верна*. Например, при $n = 2$ имеем

$$\mathrm{d}^2u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\cdot\mathrm{d}^2x +$$

$$+\mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\cdot\mathrm{d}^2y.$$

Сумма 1-го и 3-го слагаемых даст выражение, ранее полученное для d^2u. Поэтому в итоге

$$\mathrm{d}^2u = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 +$$

$$+\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\mathrm{d}^2x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\mathrm{d}^2y,$$

т. е. в данном общем случае выражение для d^2u содержит слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y, чего не было ранее в формуле (4.9) при $n = 2$.

4.3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Рассмотрим случай функции $z = f(x;y)$ от двух независимых переменных. Введем новую вспомогательную независимую переменную t, полагая

$$\boxed{x = a + ht;\ \ y = b + kt\ , \qquad (4.11)}$$

где a, b, h, k – числа.

Тогда $f(x;y)=f(a+ht;b+kt)=\varphi(t)$ – функция одной независимой переменной t. Причем

$$\varphi(0)=f(a;b);\quad \varphi(1)=f(a+h;b+k). \tag{4.12}$$

По формуле Маклорена с остаточным членом Лагранжа получаем

$$\varphi(1)=\varphi(0)=\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \tag{4.13}$$

где $0<\theta<1$.

Выразим теперь производные $\varphi^{(m)}(0)$ и $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ через функцию $f(x;y)$. Из (4.11) следует, что x и y – линейные функции аргумента t; $\mathrm{d}x=h\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}y=k\mathrm{d}t$. Поэтому применяем символическую формулу для определения дифференциала порядка m функции $\varphi(t)$:

$$\mathrm{d}^m\varphi(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^{(m)}\cdot f(x;y)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x;y)\mathrm{d}t^m.$$

Откуда $\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)}\cdot f(x;y)$. При $t=0$ будет $x=a$; $y=b$; при $t=\theta$ будет $x=a+\theta h$; $y=b+\theta k$. Следовательно,

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(m)}\cdot f(a;b)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)}\cdot f(x;y)\Big|_{\substack{x=a\\ y=b}},$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)}\cdot f(a+\theta h;b+\theta k).$$

Подставим эти выражения в формулу (4.13), с учетом равенств (4.12) получим *формулу Тейлора*:

$$f(a+h;\ b+k)=f(a;\ b)+\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a;\ b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}f(a;\ b)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)}f(a;\ b)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)}f(a+\theta h;\ b+\theta k).$$

Заменим $a=x;\ b=y;\ h=\mathrm{d}x;\ k=\mathrm{d}y$. Получаем *формулу Тейлора* в виде

$$f(x+\mathrm{d}x;\ y+\mathrm{d}y)=f(x;\ y)+\mathrm{d}f(x;\ y)+\frac{\mathrm{d}^2 f(x;\ y)}{2!}+\ldots+$$
$$+\frac{\mathrm{d}^n f(x;\ y)}{n!}+\frac{\mathrm{d}^{n+1} f(x+\theta\mathrm{d}x;\ y+\theta\mathrm{d}y)}{(n+1)!}. \tag{4.14}$$

Отметим, что правая часть *формулы Тейлора* (4.14) содержит $f(x;\ y)$ и ее *дифференциалы различных порядков*.

Пример 4.4. Разложить по формуле Тейлора функцию $f=x^5+y^4$ в т. $M(1;\ 2)$ до 2-го порядка включительно.

Решение. Формула Тейлора в этом случае будет иметь вид

$$f(x,\ y)=f(M)+\mathrm{d}f(M)+\frac{\mathrm{d}^2 f(M)}{2!},$$

$$f(M)=1+16=17,$$

$$\mathrm{d}f(M)=f'_x(M)(x-x_0)+f'_y(M)(y-y_0),$$

$$f'_x=5x^4,\quad f'_y=4y^3.$$

Следовательно,

$$\mathrm{d}f(M) = 5\cdot 1^4(x-1) + 4\cdot 2^3(y-2) = 5(x-1) + 32(y-2),$$

$$\mathrm{d}^2 f(M) = f''_{x^2}(M)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(M)(x-1)(y-2) + f''_{y^2}(M)(y-2)^2,$$

где $f''_{x^2} = 20x^3$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = 12y^2$, $\mathrm{d}^2 f(M) = 20(x-1)^2 + 48(y-2)^2$.

Тогда разложение (4.14) будет иметь вид

$$f(x, y) = 17 + 5(x-1) + 32(y-2) + 10(x-1)^2 + 24(y-2)^2.$$

4.4. Аудиторные задания

1. Найти частные производные 2-го порядка.

1.1. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

(*Ответ:* $z''_{x^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(y^2 + x^2\right)^2}$; $z''_{xy} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $z''_{y^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.)

1.2. $z = x^2 + y^2 - xy$. (*Ответ:* $z''_{x^2} = 2$; $z''_{xy} = -1$; $z''_{y^2} = 2$.)

1.3. $z = \cos(2x - 3y)$.

(*Ответ:* $z''_{x^2} = -4\cos(2x - 3y)$; $z''_{xy} = 6\cos(2x - 3y)$; $z''_{y^2} = -9\cos(2x - 3y)$.)

1.4. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$.

(*Ответ:* $z''_{x^2} = -\dfrac{4y}{(x+y)^3}$; $z''_{xy} = \dfrac{2x - 2y}{(x+y)^3}$; $z''_{y^2} = \dfrac{4x}{(x+y)^3}$.)

1.5. $u = e^{xyz}$.

(*Ответ:* $u''_{x^2} = y^2 z^2 e^{xyz}$; $u''_{xy} = 2(1 + xyz)e^{xyz}$;

$u''_{y^2} = x^2 z^2 e^{xyz}$; $u''_{z^2} = x^2 z^2 e^{xyz}$.)

2. Найти частные производные 3-го порядка.

2.1. $z = x^3 + y^3$. (*Ответ:* $z'''_{x^3} = z'''_{y^3} = 6$; $z'''_{x^2 y} = z'''_{xy^2} = 0$.)

2.2. $u = xyz$ (*Ответ:* $u'''_{xyz} = 1$. Все остальные частные производные 3-го порядка равны нулю.)

3. Найти дифференциал 2-го порядка.

3.1. $z = x^2 y^2$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^2 z = 2y^2 \mathrm{d}x^2 + 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2x^2 \mathrm{d}y^2$.)

3.2. $z = \dfrac{x}{x+y}$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}^2 z = -\left(2y\mathrm{d}x^2 + 2(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2x\mathrm{d}y^2\right) / (x+y)^3$.)

3.3. $z = e^{x-y^2} + \cos x$.

$$(\textit{Ответ: } \mathrm{d}^2 z = \left(e^{x-y^2} - \cos x\right)\mathrm{d}x^2 -$$

$$-4ye^{x-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2e^{x-y^2} + \left(2y^2 - 1\right)\mathrm{d}y^2.)$$

3.4. $z = x^3 + y^3 + xy$. (Ответ: $\mathrm{d}^2 z = 6x\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6y\mathrm{d}y^2$.)

3.5. $z = x^2 y^3 + x - y - 5$.

(*Ответ:* $\mathrm{d}^2 z = 2y^3 \mathrm{d}x^2 + 12xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6x^2 y\mathrm{d}y^2$.)

4. Найти дифференциал 3-го порядка.

4.1. $z = e^x + e^y - xy + 2$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^3 z = e^x \mathrm{d}x^3 + e^y \mathrm{d}y^3$.)

4.2. $z = 2x^4 + xy^2$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^3 z = 24x\mathrm{d}x^3 + (24y + 10)\mathrm{d}y^3$.)

4.3. $z = x^4 y^3$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^3 z = 48x\mathrm{d}x^3 + 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2$.)

4.4. $z = 3y^2 + 4x^3$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^3 z = 24\mathrm{d}x^3$.)

5. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

в окрестности т. $M(1; -2)$.

(*Ответ:* $f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.)

6. Разложить по формуле Маклорена до 4-го порядка включительно функцию $f(x, y)=\left(1-x^2-y^2\right)^{1/2}$.

$$\left(\textit{Ответ: } f(x, y)=1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2.\right)$$

4.5. **Домашние задания**

1. Найти частные производные 2-го порядка.

1.1. $u=2xyz-e^{x+y}$.

$$\left(\textit{Ответ: } u''_{x^2}=-e^{x+y};\ u''_{y^2}=-e^{x+y};\ u''_{xy}=2z-e^{x+y};\ u''_{yz}=2x;\right.$$
$$\left. u''_{xz}=2y;\ u''_{z^2}=0.\right)$$

1.2. $u=\cos\left(x^2y\right)$. (*Ответ:* $u''_{x^2}=-2y\sin\left(x^2y\right)-4x^2y^2\cos\left(x^2y\right)$; $u''_{y^2}=-x^4\cos\left(x^2y\right)$; $u''_{xy}=-2x\sin\left(x^2y\right)-2x^3y\cos\left(x^2y\right)$.)

2. Найти дифференциал 2-го порядка.

2.1. $z=x^2y^3$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^2z=2y^3\mathrm{d}x^2+12xy^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+6x^2y\mathrm{d}y^2$.)

2.2. $z=\cos x+\sin y$. (*Ответ:* $\mathrm{d}^2z=-\cos x\mathrm{d}x^2-\sin y\mathrm{d}y^2$.)

2.3. $z=\ln(x-y)+\sqrt{xy}$.

$$\left(\textit{Ответ: } \mathrm{d}^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)\mathrm{d}x^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)\mathrm{d}y^2.\right)$$

3. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y)=2^{xy}$ в т. $M(1;1)$.

$$\left(\textit{Ответ: } f(x, y)=2+2\ln 2(x-1)+2\ln 2(y-1)+\ln^2 2(x-1)^2+\right.$$
$$\left.+(1-2\ln 2)\ln 2(x-1)(y-1)+\ln 2(y-1)^2.\right)$$

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

5.1. Локальные экстремумы функций нескольких переменных

Пусть функция $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$ определена в области D переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а т. $M_0(x_{01},\ x_{02},\ \ldots, x_{0n})$ является внутренней точкой этой области D.

Т. M_0 называется *точкой (локального) максимума (минимума) функции* f, если существует такая δ-окрестность т. M_0, что для любой т. $M(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n) \in D$ выполняется неравенство

$$f(M) \le f(M_0) \text{ (соответственно } - \ge).$$

Если же для некоторой указанной δ-окрестности знак равенства может быть только в т. $M = M_0$, то соответствующий максимум (минимум) называется *собственным* или *строгим* (в противном случае – нестрогим, несобственным).

Для обозначения максимумов и минимумов применяется и общий термин – *экстремум*, *локальный экстремум*.

Теорема 5.1 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть функция* $u = f(x_1, x_2,\ \ldots, x_n)$ *в некоторой т.* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ *имеет экстремум. Тогда, если в этой т.* M_0 *существуют конечные частные производные 1-го порядка, то* ***все эти частные производные равны нулю****:*

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0, \\
\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{M_0} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{M_0} = 0.
\end{cases}
\qquad (5.1)
$$

Т. M_0 *с таким свойством называются* ***стационарными критическими точками функции*** f.

Доказательство*.* Зафиксируем $x_2 = x_{02}, \ x_3 = x_{03}, \ \dots, \ x_n = x_{0n}$, сохраняя x_1 переменной величиной. Тогда получаем *функцию от одной переменной* x_1: $u = f\left(x_1, \ x_{02}, \ x_{03}, \dots, x_{0n}\right)$. Так как по предположению в т. $M_0\left(x_{01}, \ x_{02}, \ \dots, x_{0n}\right)$ достигается экстремум (пусть это будет максимум для определенности), то отсюда следует, что в некоторой δ-окрестности точки $x_1 = x_{01}$ должно выполняться неравенство

$$f\left(x_1, \ x_{02}, \ x_{03}, \ \dots, x_{0n}\right) \le f\left(x_{01}, \ x_{02}, \ x_{03}, \ \dots, x_{0n}\right),$$

и поэтому указанная функция одной переменной в точке $x_1 = x_{01}$ достигает максимума. Откуда по необходимому условию экстремума функции одной переменной получаем

$$f'_{x_1}\left(x_{01}, \ x_{02}, \ x_{03}, \ \dots, x_{0n}\right) = 0.$$

То есть доказано первое из равенств (5.1). Аналогично доказываются и все остальные равенства (5.1). Теорема доказана.

Достаточные условия существования экстремума функции 2-х переменных. Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x, y)$. Для нее справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2 (достаточное условие экстремума). *Пусть т.* $M_0(x_0, y_0)$ *является стационарной критической для функции* $u = f(x, y)$. *Пусть в т.* M_0 *и некоторой ее* δ*-окрестности* $f(x, y)$ *имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Обозначим*

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (5.2)$$

Возможны следующие случаи:

1) если $\Delta(M_0) > 0$, *то* $f(x, y)$ *в т.* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет экстремум, причем максимум, если* $A < 0$ *и минимум, если* $A > 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0$, *то* $f(x, y)$ *в т.* $M_0(x_0, y_0)$ *экстремума не имеет;*

3) если $\Delta(M_0) = 0$, *то экстремум в т.* $M_0(x_0, y_0)$ *может быть, а может и не быть (т. е. требуется дополнительное исследование).*

Доказательство этого утверждения получается путем анализа формулы Тейлора для функции $f(x, y)$ при $n = 1$.

Пример 5.1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - 4xy + 8y^2 + x - 5y + 2.$$

Решение. Определяем стационарные точки исходной функции из условия:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 4y + 1 = 0 \\ z'_y = -4x + 16y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -4x + 16y = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 8y = -2 \\ -4x + 16y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y = 3 \\ x = \dfrac{16y - 5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{8} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Получили одну стационарную т. $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$. Достаточное условие будем проверять с помощью определителя (5.2):

$$\Delta = AB - C^2,$$

где $A = z''_{x^2} = 2$; $B = z''_{y^2} = 16$; $C = z''_{xy} = -4$.

Определитель

$$A(M) = \left(A \cdot B - C^2\right)\Big|_M = 2 \cdot 16 - (-4)^2 = 16 > 0.$$

Следовательно, экстремум существует. Так как $A = z''_{x^2} = 2 > 0$, то в т. M будет минимум:

$$z_{\min} = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{9}{8} + \frac{1}{4} - \frac{15}{8} + 2 = \frac{19}{16}.$$

Пример 5.2. Найти экстремум функции

$$z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y + 4.$$

Решение. По необходимому условию существования экстремума имеем

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 18 = 0 \\ z'_y = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ \dfrac{9}{y^2} + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y^2 = 1; 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y_{1,2} = \pm 3. \\ y_{3,4} = \pm 1 \end{cases}$$

Получили четыре точки, подозреваемые на экстремум:

$$M_1(1, 3),\ M_2(-1, -3),\ M_3(3, 1),\ M_4(-3, -1).$$

Достаточное условие проверяем с помощью определителя

$$\Delta = AB - C^2,$$

где $A = z''_{x^2} = 6y;\ B = z''_{y^2} = 6y;\ C = z''_{xy} = 6x.$

Определитель будет равен

$$\Delta = 6y \cdot 6y - (6x)^2 = 36y^2 - 36x^2.$$

В т. $M_1(1, 3)$ $\Delta(M_1) = 36 \cdot 9 - 36 \cdot 1 > 0$. Следовательно, в этой точке существует экстремум. Так как $A(M_1) = 18 > 0$, в т. M_1 будет минимум:

$$z_{\min} = z(M_1) = 3 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3^3 - 18 \cdot 1 - 30 \cdot 3 + 4 = -68.$$

В т. $M_2(-1,-3)$ $\Delta(M_2)=36\cdot 9-36\cdot 1>0$ тоже существует экстремум. $A(M_2)=-18<0$. Следовательно, в т. M_2 будет максимум:

$$z_{\max}=3\cdot(-1)^2\cdot(-3)+(-3)^3-18\cdot(-1)-30\cdot(-3)+4=76.$$

Для т. $M_3(3,1)$ имеем $\Delta(M_3)=36\cdot 1-36\cdot 9<0\Rightarrow$ в т. M_3 экстремум не существует.

Для т. $M_4(3,1)$ будет $\Delta(M_4)=36\cdot 1-36\cdot 9<0\Rightarrow$ в т. M_4 тоже не существует экстремум.

5.2. Условный экстремум

Условным экстремумом функции $z=f(x,y)$ называется экстремум, который достигается при условии, что переменные x и y связаны дополнительным условием (ограничением) $\varphi(x,y)=b.$

Исследования на условный экстремум удобно проводить с помощью *функции Лагранжа:*

$$\boxed{F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(\varphi(x,y)-b), \qquad (5.3)}$$

где λ – множитель Лагранжа. Он неизвестен и подлежит определению.

Если задано n ограничений, то функция Лагранжа имеет вид

$$\boxed{F(x,y,\lambda_1,\ldots\lambda_n)=f(x,y)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\varphi_i(x,y)-b_i), \qquad (5.4)}$$

т. е. функция Лагранжа содержит столько λ_i, сколько задано дополнительных условий.

Необходимым условием существования условного экстремума является равенство нулю частных производных 1-го порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \text{ – для функции (5.3)}\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0;
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x, y) = 0), \text{ – для функции} (5.4)\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x, y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Решая полученные системы, определяем точки условного экстремума.

Достаточное условие проверяется с помощью дифференциала 2-го порядка от функции Лагранжа в точке экстремума:

$$\mathrm{d}^2 F(M) = F''_{x^2}(M)\mathrm{d}x^2 + 2F''_{xy}(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + F''_{y^2}(M)\mathrm{d}y^2.$$

Если в рассматриваемой т. M $\mathrm{d}^2F(M)>0$, то в этой точке минимум, если $\mathrm{d}^2F(M)<0$, то – максимум.

Пример 5.3. Найти экстремум функции $z=x^2+y^2-4$ при условии, что $2x+y=4$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z к поверхности $z=x^2+y^2-4$ для точек ее пересечения с плоскостью $2x+y=4$. Составляем функцию Лагранжа, определяемую формулой (5.3):

$$F(x,y)=x^2+y^2-4+\lambda(2x+y-4).$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=2x+y-4.$$

Система уравнений необходимого условия примет вид

$$\begin{cases}2x+2\lambda=0\\ 2y+\lambda=0\\ 2x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\lambda\\ y=-\dfrac{\lambda}{2}\\ -2\lambda-\dfrac{\lambda}{2}-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{8}{5}\\ y=-\dfrac{4}{5}.\\ \lambda=\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

Получили т. $M\left(-\dfrac{8}{5};\,-\dfrac{4}{5}\right)$. Находим частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F''_{x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F''_{y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F''_{xy}=0.$$

Дифференциал 2-го порядка $d^2F(M)=2dx^2+2dy^2>0.$ Следовательно, в т. $M\left(-\frac{8}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$ будет минимум. Минимальное значение функции:

$$z_{\min}=\frac{64}{25}+\frac{16}{25}-4=-\frac{20}{25}=-\frac{4}{5}.$$

Пример 5.4. Найти экстремум функции

$$z=x^2+10xy+y^2-2x+3y$$

при условии, что $x+y=4.$

Решение. В соответствии с формулой (5.3) функция Лагранжа будет иметь вид

$$F(x,\,y,\,\lambda)=x^2+10xy+y^2-2x+3y+\lambda(x+y-4).$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+10y-2+\lambda,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=10x+2y+3+\lambda,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-4.$$

Система уравнений необходимого условия существования условного экстремума будет равна

$$\begin{cases}2x+10y+\lambda-2=0,\\ 10x+2y+\lambda+3=0,\\ x+y-4=0.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} -8x+8y-5=0, \\ x+y-4=0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 8:

$$\begin{cases} -8x+8y=5, \\ 8x+8y=32, \end{cases} \quad 16y=37 \Rightarrow y=\frac{37}{16}, \quad x=4-y=4-\frac{37}{16}=\frac{27}{16}.$$

Получили т. $M\left(\frac{27}{16},\frac{37}{16}\right)$. Частные производные 2-го порядка:

$$F''_{x^2}=2, \quad F''_{y^2}=2, \quad F''_{xy}=10.$$

Дифференциал 2-го порядка исходной функции z в т. M будет равен

$$\mathrm{d}^2F(M)=2\mathrm{d}x^2+20\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\mathrm{d}y^2.$$

По выражению полученного дифференциала нельзя сделать заключение о его знаке. Поэтому обращаемся к ограничению и выражаем, например, x:

$$x=4-y \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}y.$$

Подставляем вместо $\mathrm{d}x$ его выражение в дифференциал 2-го порядка:

$$\mathrm{d}^2F(M)=2(-\mathrm{d}y)^2+20(-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y+2\mathrm{d}y^2=-16\mathrm{d}y^2<0.$$

Следовательно, в т. $M\left(\frac{27}{16},\frac{37}{16}\right)$ будет максимум.

5.3. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\bar{D} \subset OXY$ и имеет в ней конечные частные производные. Тогда в этой области найдется т. $M_0(x_0, y_0)$, в которой функция достигает самое большое (самое малое) из всех значений (теорема Вейерштрасса). Такие значения называются *глобальными экстремумами функции* $f(x, y)$ *в области* $\bar{D}$. Если указанная т. M_0 лежит *внутри* области $\bar{D}$, то в ней функция, очевидно, достигает и локального максимума (минимума), поэтому такая точка должна быть стационарной критической для $f(x, y)$. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x, y)$ может достигать и на границе области (линия Г). Кривая Г может состоять из одного или нескольких участков, описываемых уравнениями, например, $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$), устанавливающими связь между переменными x и y; при этом $z = f(x, y)$ обращается в функцию *от одной переменной* (x или y). Экстремум этой функции может достигаться только в ее критических точках внутри соответствующего участка линии границы либо в «точках стыковки» участков линий границы.

В итоге *правило нахождения наибольшего и наименьшего значений* указанной функции $z = f(x, y)$ в области $\overline{D}$ будет заключаться в следующем:

1) находятся критические т. $M_1, M_2, \ldots, M_k$ функции $f(x, y)$ во внутренней части $\overline{D}$;

2) определяются критические т. $N_1,\ N_2,\ \ldots, N_l$ функции *одной переменной*, получаемые внутри участков линии границы области $\overline{D}$;

3) находятся и сравниваются по величине значения $f(x, y)$ во всех т. $M_1, M_2, \ldots, M_k$, $N_1, N_2, \ldots, N_l$, а также в т. *A, B*, …, *C* «стыковки» участков линии границы области $\overline{D}$;

4) из всех полученных значений функции выбираются наибольшее и наименьшее значения.

Пример 5.5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 + 10xy - 4x - 8y + 3$ в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Решение. Исходная область имеет вид, показанный на рис. 5.1.

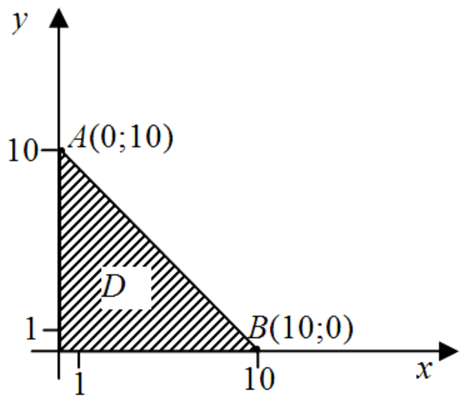

Рис. 5.1

Найдем стационарные точки рассматриваемой функции, принадлежащие области D. Имеем

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 10y - 4 = 0 \\ z'_y = 2y + 10x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 2 \\ 5x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 25y = 10 \\ 5x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24y = 2 \\ x = \dfrac{8 - y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{12} \\ x = \dfrac{8 - \dfrac{1}{12}}{5} = \dfrac{19}{12} \end{cases}.$$

Полученная т. $M\left(\frac{19}{12},\frac{1}{12}\right)$ принадлежит области D. Значение функции в этой точке будет равно

$$z(M)=\left(\frac{19}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2+10\cdot\frac{19}{12}\cdot\frac{1}{12}-\frac{36}{12}-\frac{152}{12}+3=5,6804.$$

Далее исследуем границу области D. Исследование проводим по всем участкам области.

1. Участок OA. Уравнение этой стороны: $x=0$. Подставляем это значение x в исходную функцию:

$$z_1=y^2-8y+3.$$

Получили функцию одной переменной. Найдем ее стационарные точки:

$$z_1'=2y-4=0.$$

Откуда $y=2$. Найденная т. $M_1(0,2)$ принадлежит стороне AB. Значение функции в этой точке:

$$z(M_1)=z_1(M_1)=2^2-8\cdot2+3=-9.$$

Значение функции в граничных точках O и A:

$$z(O)=3,\quad z(A)=100-80+3=23.$$

2. Участок OB. Уравнение стороны *OB*: $y=0$. Подставив вместо y его значение в исходную функцию, получим

$$z_2=x^2-4x+3.$$

Стационарная точка этой функции определяется из условия $z_2' = 0$, т. е. $z_2' = 2x - 4 = 0, x = 2$. Полученная т. $M_2(2, 0)$ принадлежит линии *OB*. Значение функции в этой точке

$$z(M_2) = z_2(M_2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Значение функции в точке границы

$$z(B) = z_2(B) = 100 - 40 + 3 = 63.$$

3. Участок AB. Уравнение этой стороны: $y = 10 - x$. Подставив в исходную функцию это выражение для y, получим

$$z_3 = x^2 + (10 - x)^2 + 10x(10 - x) - 4x - 8(10 - x) + 3 = x^2 + 100 -$$

$$-20x + x^2 + 100x - 10x^2 - 4x - 80 + 8x + 3 = -8x^2 + 84x + 23.$$

Критические точки полученной функции определяем из условия

$$z_3' = 0: \ z_3' = -16x + 84 = 0.$$

Откуда $x = \frac{844}{16} = \frac{21}{4}$, $y = 10 - x = 10 - \frac{21}{4} = 19.$

Полученная т. $M_3\left(\frac{21}{4}, \frac{19}{4}\right)$ принадлежит области D. Значение функции в этой точке:

$$z(M_3) = z_3(M_3) = -8\left(\frac{21}{4}\right)^2 + 84 \cdot \frac{21}{4} = -1 + 23 = 243,5.$$

Из всех найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб.}} = z(M_3) = 243,5; \quad z_{\text{наим.}} = z(M_1) = -9.$$

5.4. **Аудиторные задания**

1. Найти экстремум функции.

1.1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

(*Ответ:* $z_{\min} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -8$; $z_{\min} = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.)

1.2. $z = e^{-x^2-y^2}\left(3x^2 + y^2\right)$.

(*Ответ:* $z_{\max} = (-1, 0) = 3e^{-1}$; $z_{\max} = (1, 0) = 3e^{-1}$; $z_{\min} = (0, 0) = 0$.)

1.3. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

(*Ответ:* $z_{\max} = (-4, -1) = 152$; $z_{\min} = (4, 1) = -152$.)

1.5. $z = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 6y + 7$. (*Ответ:* $z_{\min} = (1, 0) = 6$.)

1.6. $z = 2x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x + 16y + 19$.

(*Ответ:* $z_{\min} = (1, -1) = 7$.)

1.7. $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$. (*Ответ:* $z_{\min} = (2, -3) = -22$.)

1.8. $z = (x-1)^2 + 4y^2$. (*Ответ:* $z_{\min} = (1, 0) = 0$.)

2. Найти условный экстремум функции.

2.1. $z = 9 - 8x - 6y$ при условии, что $x^2 + 2y^2 = 25$.

(*Ответ:* $z_{\min} = -41$.)

2.2. $z = x^2 - y^2$ при условии, что $x + 2y = 6$.

(*Ответ:* $z_{\min} = -12$.)

2.3. $z = 8 - 2x - 4y$ при условии, что $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

(*Ответ:* $z_{\min} = -4$; $z_{\max} = 20$.)

2.4. $z = x^2 - y^2 + xy - 5x - 4y - 10$ при условии, что $x + y = 4$.

(*Ответ:* $z_{\min} = \dfrac{15}{4}$.)

2.5. $z = 5xy$ при условии, что $2x + y = 100$.

(*Ответ:* $z_{\max} = 50$.)

2.6. $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x - 4y - 17 = 0$.

(*Ответ:* $z_{\min} = 17.$)

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D.

3.1. $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, $D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4$.

(*Ответ:* $z_{\text{наим.}} = z(2,1) = 3$; $z_{\text{наиб.}} = z(0,0) = z(0,4) = 10.$)

3.2. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7$, $D: x \geq 0,\ y \leq 0,\ x - y \leq 3$.

(*Ответ:* $z_{\text{наим.}} = z(1,-1) = 4$; $z_{\text{наиб.}} = z(0,0) = z(0,-3) = z(3,0) = 7.$)

3.3. $z = 1 + 2x + 3y$, $D: x \geq 0,\ y \leq 0,\ x + y \leq 6$.

(*Ответ:* $z_{\text{наим.}} = z(0,0) = 1$; $z_{\text{наиб.}} = z(0,6) = 19.$)

3.4. $z = x^2 + y^2$, $D: x^2 + y^2 \leq 9$.

(*Ответ:* $z_{\text{наим.}} = z(0,0) = 0$; $z_{\text{наиб.}} = 9$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 9.$)

3.5. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$, $D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + 3y = 6$.

(*Ответ:* $z_{\text{наим.}} = z(3,0) = -9$; $z_{\text{наиб.}} = z(0,0) = 0.$)

5.5. Домашние задания

1. Найти экстремум функции.

1.1. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

(*Ответ:* $z_{\max} = z(-4,-1) = 152$; $z_{\min} = z(4,1) = -152.$)

1.2. $z = 3x^2 + y^3 - 18x - 30y$.

(*Ответ:* $z_{\min} = z(1,3) = -72$; $z_{\max} = z(-1,-3) = 72.$)

1.3. $z = \dfrac{1 + 2x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$. (*Ответ:* $z_{\max} = z(2,-2) = 3.$)

2. Найти условный экстремум функции.

2.1. $z = 4 - 2x - 6y$ при условии, что $x^2 + 4y^2 = 8$.

(*Ответ:* $z_{\min} = 4 - 2\sqrt{2}$, $z_{\max} = 4 + 2\sqrt{2}.$)

2.2. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 4y + 2$ при условии, что $x + y = 4$.

(*Ответ:* $z_{\min} = -2.$)

2.3. $z = x^2 + y^2 + 8xy - 4x - 6y - 7$ при условии, что $x - y = 4$.

(*Ответ:* $z_{\min} = 30{,}5.$)

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области.

3.1. $z = x^2 + y^2 - xy + 6x - 7y + 10,\ D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 8 - 2x.$

(*Ответ:* $z_{\text{наиб.}} = z(4,0) = 50;\ z_{\text{наим.}} = z(0;3,5) = -2,25.$)

3.2. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 5x - y + 6,\ D: x \geq 0,\ y \geq x,\ x \leq 4.$

(*Ответ:* $z_{\text{наиб.}} = z(8,8) = 230;\ z_{\text{наим.}} = z(0;0) = 6.$)

6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

6.1. Суть метода наименьших квадратов

Пусть в процессе эксперимента получены пары значений.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Требуется установить зависимость вида $y = f(x)$. Если зависимость не задана, то на плоскости XOY строим исходные точки и соединяем их отрезками прямых. По форме полученной ломаной линии устанавливаем (приближенно) формулу связи между x и y (линейная, нелинейная).

1. **Пусть рассматривается *линейная* зависимость**

$$y = a_0 + a_1 x,$$

где a_0 и a_1 – неизвестные параметры, подлежащие определению.

Значения этих параметров $(a_0,\ a_1)$ определяем по методу наименьших квадратов. Суть метода состоит в том, что сумма квадратов отклонений расчетных значений от фактических должна быть величиной минимальной:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-y\right)^2\to\min. \qquad (6.1)$$

Подставляем в (6.1) исследуемую линейную зависимость:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)^2\to\min.$$

Функция I является функцией 2-х переменных (a_0 и a_1). Необходимое условие существования экстремума вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I}{\partial a_0}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)\left(-1\right)=0,\\ \dfrac{\partial I}{\partial a_1}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)\left(-x_i\right)=0.\end{cases}$$

Сократим уравнения системы на (–2):

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_ix_i-a_0x_i-a_1x_i^2\right)=0.\end{cases}$$

Известно, что сумма разности равна разности сумм:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}a_1x_i=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum\limits_{i=1}^{n}a_0x_i-\sum\limits_{i=1}^{n}a_1x_i^2=0.\end{cases}$$

Коэффициенты a_0 и a_1 являются постоянными по отношению к суммам. Следовательно, их можно вынести за знак суммы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} na_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Полученная система является системой для определения неизвестных параметров a_0 и a_1. Решая эту систему, определяем числовые значения a_0 и a_1. Подставив найденные числовые значения a_0 и a_1 в рассматриваемую зависимость, получаем конечный результат.

Пример 6.1. По данным эксперимента построить линейную зависимость $y = a_0 + a_1 x$.

x	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	5

Решение. Построим исходные точки на плоскости (рис. 6.1). Соответствующая ломаная линия близка к отрезку прямой.

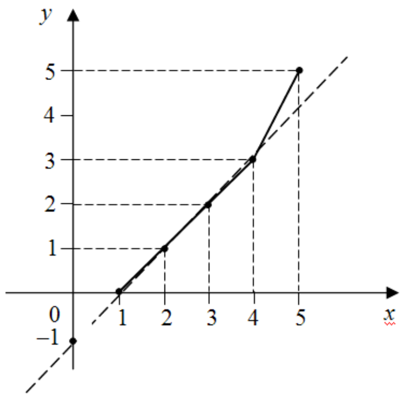

Рис. 6.1

По исходным данным имеем

$$n=5, \quad \sum x_i = 15, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum y_i = 11. \quad \sum y_i x_i = 45.$$

Подставляем эти данные в систему (6.2)

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 11, \\ 15a_0 + 55a_1 = 45. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–3):

$$\begin{cases} -15a_0 - 45a_1 = -33 \\ 15a_0 + 55a_1 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a_1 = 12 \\ a_1 = 1,2 \end{cases} \quad a_0 = \frac{11-15a_1}{5} = \frac{11-15\cdot 1,2}{5} = -1,4.$$

Подставляем найденные числовые значения a_0 и a_1 в функцию y:

$$y = -1,4 + 1,2x.$$

Расчетная линия показана на рис. 6.1 пунктиром. Она близко подходит к исходной линии.

2. **Рассмотрим параболическую зависимость (*нелинейную*)**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Функция

$$I = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i^2\right)^2 \to \min.$$

Это функция 3-х переменных (a_0, a_1, a_2). Необходимое условие существования экстремума имеет

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial I}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\right)(-1) = 0,\\
\dfrac{\partial I}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\right)(-x_i) = 0,\\
\dfrac{\partial I}{\partial a_2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\right)\left(-x_i^2\right) = 0.
\end{cases}
$$

Откуда

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_1x_i^2\right) = 0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_ix_i - a_0x_i - a_1x_i^2 - a_2x_i^3\right) = 0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_ix_i^2 - a_0x_i^2 - a_1x_i^3 - a_2x_i^4\right) = 0
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a_0 - a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_ix_i^2 - a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 - a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = 0.
\end{cases}
$$

Окончательно имеем

$$
\begin{cases}
na_0 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i,\\
a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i,\\
a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_ix_i^2.
\end{cases}
$$

Полученная система является системой для определения коэффициентов a_i.

Пример 6.2. Построить зависимость $y = y(x)$ по данным.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	2	4	1	–1

Решение. На плоскости XOY строим данные точки и соответствующую ломаную линию (рис. 6.2).

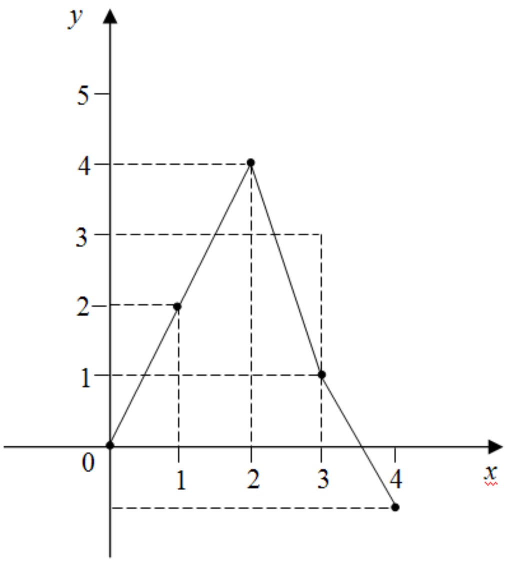

Рис. 6.2

Видно, что зависимость между x и y близка к параболической. По исходным данным имеем

$$n = 5,\ \sum x_i = 10,\ \sum x_i^2 = 30,\ \sum x_i^4 = 354,\ \sum y_i = 6,$$

$$\sum y_i x_i = 10,\ \sum y_i x_i^2 = 11.$$

Подставляем в расчетную систему:

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 + 30a_2 = 6, \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 10, \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 11. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$a_0 = -\frac{41}{35}, \quad a_1 = \frac{169}{35}, \quad a_2 = \frac{17}{14}.$$

Исходная зависимость

$$y = -\frac{41}{35} + \frac{169}{35}x - \frac{17}{14}x^2.$$

Замечание. Для каждой зависимости получается своя расчетная система или уравнение, т. е. каждый раз в функцию I (6.1) подставляем свою рассматриваемую зависимость.

6.2. Аудиторные задания

1. Найти зависимость $y = ax$.

1.1.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,2	0,5	0,7	1	1,3	1,5

(*Ответ:* $y = 0,25x$.)

1.2.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2,2	4,5	6,7	9	11	13,5

(*Ответ:* $y = 2,23x$.)

1.3.

x_i	10	20	30	40	50
y_i	–21	–42,5	–64	–85	–106

(*Ответ:* $y = -2,12x$.)

2. Найти зависимость $y = a_0 + a_1 x$.

2.1.

x_i	2	4	5	6	8
y_i	–1	5	8,5	12	18

(*Ответ:* $y = -7,5 + 3,2x$.)

2.2.

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,1	2,2	2,7	2,8	2,85

(Ответ: $y = 1,69 + 0,42x$.)

2.3.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

(*Ответ:* $y = -1,081 + 3,023x$.)

2.4.

x_i	0,2	0,5	0,7	0,9	1,3	1,5
y_i	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2

(*Ответ:* $y = 3,626 + 0,381x$.)

3. Найти параболическую зависимость $y = a_0 + a_1 x^2$.

3.1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	6	13	24	37

(*Ответ:* $y = 1,5x^2 - 0,3$.)

3.2.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0	–2	–6	–11	–18

(*Ответ:* $y = -0,75x^2 + 0,85$.)

3.3.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	–1	–1,5	–2	–3	–4,5

($Ответ$: $y = -0{,}14x^2 - 0{,}86.$)

4. Найти зависимость $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

4.1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

($Ответ$: $y = 1{,}936x^2 + 0{,}394x + 0{,}502.$)

4.2.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
y_i	6,8	5,7	2,5	1,6	3,1	5,9

($Ответ$: $y = 0{,}684x^2 - 1{,}061x + 2{,}631.$)

4.3.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	4	7	3	1

($Ответ$: $y = 27{,}41 + 0{,}033x - 2{,}21x^2.$)

6.3. **Домашние задания**

1 Найти зависимость $y = ax$.

1.1.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2,5	5	7,5	10	13

(Ответ: $y = 1{,}27x.$)

1.2.

x_i	10	20	30	40	50
y_i	–7,5	–15	–20	–30	–37

($Ответ$: $y = -0{,}73x.$)

2. Найти зависимость $y = a_0 + a_1x$.

2.1.

x_i	–2	0	1	2	4
y_i	0,5	1	1,5	2	3

(*Ответ:* $y = 1{,}175 + 0{,}425x$.)

2.2.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
y_i	2,3	2,8	3,6	4	4,7	5

(*Ответ:* $y = 3{,}45 + 0{,}56x$.)

3. Найти зависимость $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7	3	0	2	6

(*Ответ:* $y = 19 - 9{,}3x + 1{,}5x^2$.)

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для данной функции найти:

1) полный дифференциал в т. M при $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}03$;

2) градиент в т. M;

3) производную в т. M в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$;

4) используя полный дифференциал, вычислить приближенное значение функции в т. P;

5) экстремумы;

6) условные экстремумы, если переменные связаны заданным условием;

7) наименьшее и наибольшее значение функции в заданной области.

2. В таблице приведены значения Y и X. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a_i уравнений, полагая, что между этими величинами существует:

1) линейная зависимость вида $y = ax + b$;

2) квадратичная зависимость вида $y = ax^2 + bx + c$.

Вариант 1

1. $z = xy(4 - x - y)$.

1) $M(1, -1)$; 2) $M(1, -1)$; 3) $M(1, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}02; -0{,}98)$; 5) $2x - y + 5 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

2.

X	1	3	4	6	7
Y	2	2,5	3	3,5	5

Вариант 2

1. $z = \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{4} + 3$.

1) $M(2,1)$; 2) $M(2,1)$; 3) $M(2,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}03; 1{,}01)$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 4$.

2.

X	2	2,5	4	4,5	5
Y	1,5	3	3,5	4	3,5

Вариант 3

1. $z = x^3 + y^3 - 12xy$.

1) $M(1,1)$; 2) $M(1,1)$; 3) $M(1,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(-0{,}98; 1{,}01)$; 5) $2x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	2,5	3	3,5	4,5	6
Y	2	4	3,5	4	4,5

Вариант 4

1. $z = x^2 + y^2 - 12xy + 3.$

1) $M(-1, -1)$; 2) $M(-1, -1)$; 3) $M(-1, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}03;\ 0{,}98)$;
6) $2x + y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -1$.

2.

X	1,5	2	2,5	3,5	4
Y	1	2	2,5	3	2,5

Вариант 5

1. $z = 4x^2 - y^2 - 4x + 2y + 5.$

1) $M(1, 2)$; 2) $M(1, 2)$; 3) $M(1, 2)$; $N(2, 3)$; 4) $P(0{,}97; -0{,}98)$;
5) $x - y + 5 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5,5
Y	1	1,5	2	3	3,5

Вариант 6

1. $z = 5x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y + 1.$

1) $M(2, -1)$; 2) $M(2, -1)$; 3) $M(2, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(0{,}95;\ 1{,}03)$;
5) $3x - y + 5 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	5
Y	2	3	3,5	4	4

Вариант 7

1. $z = 8(x - y) - x^2 - 2y^2$.

1) $M(1,0)$; 2) $M(1,0)$; 3) $M(1,0)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}01; -0{,}98)$; 5) $x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	3,5	4	5	5,5	6
Y	1	1,5	2	2,5	4

Вариант 8

1. $z = x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 12y + 1$.

1) $M(0,-1)$; 2) $M(0,-1)$; 3) $M(0,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}02; -0{,}98)$; 5) $3x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	5
Y	4	3	2,5	2	1

Вариант 9

1. $z = \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} + 1$.

1) $M(1,1)$; 2) $M(1,1)$; 3) $M(1,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05; 1{,}02)$; 5) $x - y + 3 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	3	3,5	4
Y	3,5	2	2,5	3	2,5

Вариант 10

1. $z = (x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4}$.

1) $M(1,-2)$; 2) $M(1,-2)$; 3) $M(1,-2)$; $N(2,3)$; 4) $P(0,96;-0,98)$; 5) $2x-y+1=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=-2$.

2.

X	1,5	2	3	3,5	4,5
Y	2	2,5	4	3	3,5

Вариант 11

1. $z=x^2+4xy+3y^2-2x+4y+4$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1,02;-1,05)$; 5) $2x-3y+6=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

2.

X	2	2,5	3,5	4	4,5
Y	3	3,5	2,5	2	2,5

Вариант 12

1. $z=2xy-3x^2+2y^2+6$.

1) $M(0,-1)$; 2) $M(0,-1)$; 3) $M(0,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1,03;-0,95)$; 5) $2x-3y-6=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=-2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	6
Y	1	1,5	2,5	2	2,5

Вариант 13

1. $z=x^2-4xy+2y^2+4x-4y+3$.

1) $M(1,-1)$; 2) $M(1,-1)$; 3) $M(1,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1,02;-0,98)$; 5) $3x-y+6=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4,5
Y	2,5	3	4	3,5	4

Вариант 14

1. $z = x^2 + 2y^2 - 6xy + 5.$

1) $M(1,-2)$; 2) $M(1,-2)$; 3) $M(1,-2)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}98)$; 5) $2x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 5$.

2.

X	2,5	3	3,5	4	5
Y	3	3,5	4	3,5	4,5

Вариант 15

1. $z = x^2 + 3y^2 + 4xy - 3x + 6y + 10.$

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 5) $x - y + 5 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -1$.

2.

X	2	3	4	4,5	5
Y	4	4,5	5	4,5	5,5

Вариант 16

1. $z = -x^2 + 3y^2 + 6xy - 2x + 3.$

1) $M(1,1)$; 2) $M(1,1)$; 3) $M(1,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}95)$; 5) $x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	3	3,5	4,5	4	4,5

Вариант 17

1. $z = 2xy - x^2 + y^2 - 2x + 3.$

1) $M(3,-1)$; 2) $M(3,-1)$; 3) $M(3,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 5) $3x - y + 6 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -2$.

2.

X	1,5	2	2,5	3	3,5
Y	2	2,5	3,5	4	4,5

Вариант 18

1. $z = x^2 + 4y^2 + 2xy - 4x + 8y + 5.$

1) $M(1,0)$; 2) $M(1,0)$; 3) $M(1,0)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}95)$; 5) $x - 2y + 4 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

2.

X	1	1,5	2	3	4
Y	3	3,5	4,5	4	5

Вариант 19

1. $z = xy^2(2 - x - y).$

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(-0{,}98;1{,}02)$; 5) $2x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5
Y	2	2,5	3	2,5	3

Вариант 20

1. $z = -x^2 + y^2 + 6xy - 2x + 3.$

1) $M(3,-1)$; 2) $M(3,-1)$; 3) $M(3,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}95)$; 5) $2x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -1$.

2.

X	3,5	4	4,5	6	6,5
Y	1	1,5	2	3	3,5

Вариант 21

1. $z = xy^2(1 - x - y)$.

1) $M(1, 2)$; 2) $M(1, 2)$; 3) $M(1, 2)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}01; -0{,}95)$; 5) $2x - y + 4 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4
Y	2,5	3	4	3,5	3,5

Вариант 22

1. $z = x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 4$.

1) $M(1, -1)$; 2) $M(1, -1)$; 3) $M(1, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}05; -0{,}96)$; 5) $x - y + 3 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5
Y	2	2,5	3,5	3	4

Вариант 23

1. $z = x^2 - 6xy + 2y^2 + 4x - 4y + 3$.

1) $M(2, -1)$; 2) $M(2, -1)$; 3) $M(2, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(0{,}98; 1{,}02)$; 5) $x - 3y + 3 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	2	2,5	3	2,5	3,5

Вариант 24

1. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 - 4x + 8y + 5$.

1) $M(1, -2)$; 2) $M(1, -2)$; 3) $M(1, -2)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}03; -0{,}95)$; 5) $2x - y + 4 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

2.

X	3,5	4	4,5	5	6
Y	1,5	2	2,5	4	3,5

Вариант 25

1. $z=-x^2+y^2+6xy-2x+3.$

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}98)$; 5) $2x-y+5=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4
Y	1,2	1,4	1,4	1,6	1,7

Вариант 26

1. $z=2x^2+y^2-4xy+6x-8y+1.$

1) $M(-1,-1)$; 2) $M(-1,-1)$; 3) $M(-1,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}97)$; 5) $x-y+3=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=-2$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 27

1. $z=xy^2(1-x-y).$

1) $M(-2,1)$; 2) $M(-2,1)$; 3) $M(-2,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}01;-0{,}95)$; 5) $x-2y+12=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=-1$.

2.

X	1	3	4	4,5	5
Y	1,1	1,5	1,6	1,5	1,7

Вариант 28

1. $z=x^2+2y^2-4xy+8x-6y+1.$

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 5) $3x-y+3=0$; 6) в треугольнике: $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 29

1. $z = x^2 + 4y^2 - 8xy + x - y + 1.$

1) $M(-1, 2)$; 2) $M(-1, 2)$; 3) $M(-1, 2)$; $N(2, 3)$; 4) $P(1{,}05; -0{,}96)$; 5) $x - 3y + 6 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 30

1. $z = x^2 + 6y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1.$

1) $M(-1, -1)$; 2) $M(-1, -1)$; 3) $M(-1, -1)$; $N(2, 3)$; 4) $P(0{,}98; -0{,}97)$; 5) $x - y + 1 = 0$; 6) в треугольнике: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	1,2	1,5	1,7	1,5	1,8

ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер [и др.]. – М. : [Б. м.], 1997.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 4 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк, 1992–1996.

3. Кузнецов, А. В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: общий курс / А. В. Кузнецов [и др.]. – Минск : Выш. шк, 1994.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М.: Высш. шк, 1974. – Ч 1.

Учебное издание

ЛЕБЕДЕВА Галина Ивановна
РОМАНЮК Георгий Александрович
МАРТЫНЕНКО Игнат Михайлович

**ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Методическое пособие

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 06.02.2013. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 250. Заказ 904.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.