МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задания и методические указания
к выполнению самостоятельных работ

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задания и методические указания
к выполнению самостоятельных работ
для студентов I курса

Минск
БНТУ
2013

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
И73

Составители:
Е. В. Емеличева, С. Ю. Лошкарева, Л. Д. Матвеева

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Карпук*;
канд. физ.-мат. наук, доцент *Н. А. Шавель*

Издание предназначено для студентов инженерно-педагогических и инженерных специальностей I курса и содержит подробные решения типовых примеров.

Задачи составлены так, чтобы студенты могли полностью усвоить изучаемый материал и справиться самостоятельно с подобными заданиями.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Метод непосредственного интегрирования

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\int\left(x+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

Решение.

$$\int\left(x+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2+2x\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x+2\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}+2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Задание 1. Вычислить интегралы.

1.1. $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^3\mathrm{d}x.$

1.2. $\int\left(x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^3}+3\right)\mathrm{d}x.$

1.3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}.$

1.4. $\int\left(4x^3-7x^2+x-5\right)\mathrm{d}x.$

1.5. $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x.$

1.6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[7]{x}}.$

1.7. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{10}{x}\right)\mathrm{d}x.$

1.8. $\int\left(3\sin x-10\cos x\right)\mathrm{d}x.$

1.9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^2}}.$

1.10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5+x^2}.$

1.11. $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x.$

1.12. $\int\frac{3x^4-x^3-4x^2+x-11}{x^3}\mathrm{d}x.$

1.13. $\int\left(2+\sqrt{x}\right)^3\mathrm{d}x.$

1.14. $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}\mathrm{d}x.$

1.15. $\int\left(5x^6-2\sqrt[5]{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)\mathrm{d}x.$

1.16. $\int\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

1.17. $\int\left(2+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

1.18. $\int\left(3x+5\right)^3\mathrm{d}x.$

1.19. $\int\frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

1.20. $\int\frac{3x+2\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x.$

Ответы: 1) $x-2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{x^4}{4}-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{2x^2}+$ $+3x+C$; 3) $\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C$; 4) $x^4-\frac{7}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-5x+C$.

2. **Вычисление интегралов с помощью подведения под знак дифференциала**

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int(2x-11)^{11}\,\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int(2x-11)^{11}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-11)^{11}\,d(2x-11)=\frac{1}{2}\frac{(2x-11)^{12}}{12}+C=$$
$$=\frac{1}{24}(2x-11)^{12}+C.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int ctg7x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int ctg7x\mathrm{d}x=\int\frac{\cos 7x}{\sin 7x}\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\frac{\mathrm{d}(\sin 7x)}{\sin 7x}=\frac{1}{7}\ln|\sin 7x|+C.$$

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Решение. $\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{arctg}x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(\mathrm{arctg}x)=\frac{3}{4}(\mathrm{arctg}x)^{\frac{4}{3}}+C.$

Задание 2.1. **Вычислить интегралы**.

2.1. $\int\sqrt{2+x}\mathrm{d}x$. 2.2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx}$. 2.3. $\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x$.

2.4. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\mathrm{d}x$. 2.5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+7}$. 2.6. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{4x^2+7}$.

2.7. $\int e^{-2x}\mathrm{d}x.$ 2.8. $\int \frac{x^3}{x^8+1}\mathrm{d}x.$ 2.9. $\int (2x+5)^{31}\mathrm{d}x.$

2.10. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$ 2.11. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\mathrm{d}x.$ 2.12. $\int \frac{\cos\ln x}{x}\mathrm{d}x.$

2.13. $\int e^x\sqrt{4+e^x}\mathrm{d}x.$ 2.14. $\int \mathrm{tg}(5+3)\mathrm{d}x.$ 2.15. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x.$

2.16. $\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1}.$ 2.17. $\int e^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x.$ 2.18. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3-5x^2}.$

2.19. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x.$ 2.20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3+5x)}.$

Ответы: 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}+C$; 2) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$;

3) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}}+C.$

3. Метод замены переменной

Пример 3.1. Вычислить $\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x.$

Решение.

$$\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\sqrt{x-2}=t\\ x-2=t^2\\ x=t^2+2\\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int\left(t^2+2\right)t2t\mathrm{d}t=2\left(\int t^4\mathrm{d}t+2\int t^2\mathrm{d}t\right)=$$

$$=\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Задание 3.1. **Вычислить интегралы**.

3.1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$. 3.2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$. 3.3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$.

3.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. 3.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}$. 3.6. $\int \sqrt{1+x^2}\,xdx$.

3.7. $\int x^2\sqrt{x^2+5}dx$. 3.8. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-3}dx$. 3.9. $\int x\sqrt{x+10}dx$.

3.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-10}}$. 3.11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. 3.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

3.13. $\int x\sqrt{x^2+7}dx$. 3.14. $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$. 3.15. $\int \frac{dx}{(x+11)\sqrt{x}}$.

3.16. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$. 3.17. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$. 3.18. $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

3.19. $\int \sqrt{1-x}dx$. 3.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}$.

Ответы: 1) $2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$;

3) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2+a\right)^2}+C$; 4) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$; 5) $-2\mathrm{ctg}\sqrt{x}+C$.

4. Интегрирование функций содержащих квадратный трехчлен

Пример 4.1. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}=\int \frac{dx}{\left(x^2+6x+9\right)-9+10}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+1}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{array}\right]=\int \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

Задание 4.1. **Вычислить интегралы.**

4.1. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$. 4.2. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$. 4.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

4.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$. 4.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+5}}$. 4.6. $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$.

4.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x}}$. 4.8. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$. 4.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+3}}$.

4.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$. 4.11. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$. 4.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

4.13. $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$. 4.14. $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$. 4.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x-1}}$.

4.16. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$. 4.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+2}}$. 4.18. $\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$.

4.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. 4.20. $\int \frac{dx}{x^2-x-30}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+C$;

3) $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$.

5. Интегрирование по частям

Пример 5.1. $\int x\ln x\,dx.$

Решение.

$$\int x\ln x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=\ln x;\quad du=\dfrac{1}{x}dx. \\ \\ dv=xdx;\quad v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right]=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Пример 5.2. $\int(4x+1)e^x dx.$

Решение.

$$\int(4x+1)e^x dx=\left[\begin{array}{l} u=4x+1;\quad du=4dx. \\ dv=e^x dx;\quad v=\int e^x dx=e^x. \end{array}\right]=$$

$$=(4x+1)e^x-\int e^x 4dx=(4x+1)e^x-4e^x+C.$$

Задание 5.1. **Вычислить интегралы.**

5.1. $\int x\cos x2xdx.$ 5.2. $\int \arccos xdx.$ 5.3. $\int \ln(x+5)dx.$

5.4. $\int x\mathrm{arctg}xdx.$ 5.5. $\int x\ln 5xdx.$ 5.6. $\int x\mathrm{arctg}2xdx.$

5.7. $\int x^2\cos 3xdx.$ 5.8. $\int \ln(2-x)dx.$ 5.9. $\int \arcsin\dfrac{x}{3}dx.$

5.10. $\int x^2\sin\dfrac{x}{2}dx.$ 5.11. $\int(x+2)e^{-x}dx.$ 5.12. $\int xe^{-5x}dx.$

5.13. $\int x^4\ln xdx.$ 5.14. $\int \arccos 5xdx.$ 5.15. $\int x^2e^{10x}dx.$

5.16. $\int\sqrt{x}\ln xdx.$ 5.17. $\int\left(x^2+1\right)e^x dx.$ 5.18. $\int x^2\cos\dfrac{x}{3}dx.$

5.19. $\int \arcsin 5xdx.$ 5.20. $\int \mathrm{arc\,tg}\dfrac{x}{2}dx.$

Ответы: 1) $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$; 2) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

3) $x\ln(x+5)-x+5\ln|x+5|+C$; 4) $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

6. Интегрирование рациональных дробей

Пример 6.1. $\displaystyle\int\frac{x^2+7}{x-3}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} x^2+7 & x-3 \\ \hline -\underline{x^2-3x} & x+3 \\ 3x+7 & \\ -\underline{3x-9} & \\ 16 & \end{array}$$

. $\Rightarrow \dfrac{x^2+7}{x-3}=x+3+\dfrac{16}{x-3}$. Тогда

$$\int\frac{x^2+7}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int\left(x+3+\frac{16}{x-3}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+3\int\mathrm{d}x+16\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+3x+16\ln|x-3|+C.$$

Пример 6.2. $\displaystyle\int\frac{x+4}{x^3-9x}\,\mathrm{d}x$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{x+4}{x^3-9x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x+4}{x(x-3)(x+3)}\mathrm{d}x$. Представим дробь $\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+3)}$ в виде $\dfrac{x+4}{x(x-3)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+3}$ или

$$\frac{x+4}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A\left(x^2-9\right)+Bx(x+3)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+3)}.$$

Последнее равенство приводит к системе уравнений относительно *A, B* и *C*: $\begin{cases} A+B+C=0, \\ 3B-3C=1, \\ -9A=4. \end{cases}$ Ее решениями являются числа

$$A=-\frac{4}{9};\ B=\frac{7}{18};\ C=\frac{1}{18}.\ \Rightarrow\ \frac{x+4}{x(x-3)(x+3)}=\frac{-\frac{4}{9}}{x}+\frac{\frac{7}{18}}{x-3}+\frac{\frac{1}{18}}{x+3}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x+4}{x^3-9x}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{7}{18}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}+\frac{1}{18}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}=$$

$$=-\frac{4}{9}\ln|x|+\frac{7}{18}\ln|x-3|+\frac{1}{18}\ln|x+3|+C.$$

Задание 6.1. **Вычислить интегралы.**

6.1. $\int\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x.$ 6.2. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x.$ 6.3. $\int\frac{x+2}{x^3-x^2}\mathrm{d}x.$

6.4. $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\mathrm{d}x.$ 6.5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}.$ 6.6. $\int\frac{x^2-2}{x+6}\mathrm{d}x.$

6.7. $\int\frac{x^2+5}{x-2}\mathrm{d}x.$ 6.8. $\int\frac{x^4+2}{x^4-2}\mathrm{d}x.$ 6.9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+6x}.$

6.10. $\int\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x.$ 6.11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-x^2}.$ 6.12. $\int\frac{x^3-x+1}{x^4-x^2}\mathrm{d}x.$

6.13. $\int\frac{4x^2-2}{x^4-x^2}\mathrm{d}x.$ 6.14. $\int\frac{x^2+2x+8}{(x-2)(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x.$

6.15. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}.$ 6.16. $\int\frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x.$ 6.17. $\int\frac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x.$

6.18. $\int \frac{x-3}{x-1}\mathrm{d}x.$ 6.19. $\int \frac{x^2}{x+4}\mathrm{d}x.$ 6.20. $\int \frac{7x+8}{(2x+3)(x-2)}\mathrm{d}x.$

Ответы: 1) $\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.$

2) $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$ 3) $\frac{2}{x}-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C.$

4) $\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+C.$

7. Интегрирование тригонометрических функций

I) Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x.$

Пример 7.1.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t;\\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2};\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2\mathrm{d}t\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\cdot 2t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|+C.$$

Задание 7.1. **Вычислить интегралы.**

7.1.1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}.$ 7.1.2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{4\sin x+3\cos x+5}.$

7.1.3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x+\cos x}.$ 7.1.4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+1}.$

7.1.5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2-5\sin x}.$ 7.1.6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3-2\cos x}.$

7.1.7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{9+4\cos x}.$ 7.1.8. $\int\frac{\mathrm{d}x}{4+3\sin x}.$

7.1.9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3\sin x}.$ 7.1.10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}.$

7.1.11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5+2\sin x+3\cos x}$.

7.1.12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x-5\sin x}$.

7.1.13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x+3\cos x}$.

7.1.14. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x+3\cos x+5}$.

7.1.15. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x}$.

7.1.16. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

7.1.17. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

7.1.18. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{3\sin x-\cos x}$.

7.1.19. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2-3\cos x+\sin x}$.

7.1.20. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{8+2\cos x}$.

Ответы. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C$; 2) $-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2}+C$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C$. 4) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$.

II) Интегралы вида

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n x\mathrm{d}x;\ \int \sin ax\cdot\cos bx\mathrm{d}x;\ \int \cos ax\cdot\cos bx\mathrm{d}x.$$

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\int \sin^2 3x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \sin^2 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x-\frac{1}{12}\int \cos 6x\mathrm{d}(6x)=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

Пример 7.3. Вычислить интеграл $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \sin^5 x\mathrm{d}x=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\mathrm{d}x=$$

$$=-\int\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)\mathrm{d}(\cos x)=$$

$$= -\int d(\cos x) + 2\int \cos^2 x d(\cos x) - \int \cos^4 x d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Пример 7.4. Вычислить интеграл $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$.

Решение.

$$\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin(-2x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4}\sin 2x d(2x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Задание 7.2. Вычислить интегралы.

7.2.1. $\int \cos^2 5x dx$. 7.2.2. $\int \cos^5 x dx$. 7.2.3. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

7.2.4. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$. 7.2.5. $\int \sin^3 x 6x dx$. 7.2.6. $\int \cos^2 7x dx$.

7.2.7. $\int \cos^4 2x dx$. 7.2.8. $\int \sin 5x \cdot \sin 6x dx$.

7.2.9. $\int \cos 2x \cdot \sin 6x dx$. 7.2.10. $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$.

7.2.11. $\int \cos \frac{4}{3} x \cdot \cos 3x dx$. 7.2.12. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} dx$.

7.2.13. $\int \sin \frac{2}{3} x \cdot \cos \frac{x}{6} dx$. 7.2.14. $\int \sin^5 3x dx$.

7.2.15. $\int \cos 2x \cdot \cos 3x dx$. 7.2.16. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$.

7.2.17. $\int \cos^5 3x dx$. 7.2.18. $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

7.2.19. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. 7.2.20. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

Ответы: 1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{20}\sin 10x + C$; 2) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

3) $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 4) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

8. Интегрирование простейших иррациональных функций

Пример 8.1. Найти интеграл $\int x\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int x\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}x=\sin t;\\ \mathrm{d}x=\cos t dt\end{matrix}\right|=\int\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=$$

$$=\int\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t=-\int\cos^2 t\mathrm{d}(\cos t)=-\frac{\cos^3 t}{3}+C=$$

$$=-\frac{\left(\sqrt{1-\sin^2 t}\right)^3}{3}+C=-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}+C.$$

Пример 8.2. Найти интеграл $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}x=t^4;\\ \mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t\end{matrix}\right|=\int\frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3\mathrm{d}t=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}\mathrm{d}t=$$

$$=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=4\left(\int\mathrm{d}t+\int\frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right)=$$

$$=4t+2\ln\left(t^2+1\right)-4\mathrm{arctg}t+C=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-4\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$$

Задание 8.1. **Найти интегралы:**

8.1. $\int x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$. 8.2. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\mathrm{d}x$. 8.3. $\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}\mathrm{d}x$.

8.4. $\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. 8.5. $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$. 8.6. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

8.7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}$. 8.8. $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. 8.9. $\int\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

8.10. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ 8.11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{3+x}}.$ 8.12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-5}}.$

8.13. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$ 8.14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}}.$

8.15. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x.$ 8.16. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x.$

8.17. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$ 8.18. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x.$

8.19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+\sqrt{x-5}}.$ 8.20. $\int \frac{\sqrt{x+10}}{x}\,\mathrm{d}x.$

Ответы:

1) $\frac{2}{5}\left(x^2-x-6\right)\sqrt{3-x}+C;$ 2) $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+C;$

3) $-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{x^5}+C;$ 4) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin x}{2}+C.$

9. **Вычисление определенных интегралов**

9.1. **Формула Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Пример 9.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{13}} x^2\cdot\sqrt[3]{2x^3+1}\,\mathrm{d}x.$

Решение. Найдем первообразную подынтегрального выражения, вычисли неопределенный интеграл

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{2x^3+1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\text{Замена}\\ u=2x^3+1\\ \mathrm{d}u=6x^2\mathrm{d}x\end{array}\right|=\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\cdot\frac{3u^{\frac{1}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(2x^3+1\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Применив формулу Ньютона-Лейбница, вычислим определенный интеграл

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{13}} x^2\cdot\sqrt[3]{2x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\left(2x^3+1\right)^{\frac{4}{3}}\Bigg|_{-1}^{\sqrt[3]{13}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\left(\sqrt[3]{13}\right)^3+1\right)^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{8}\left(2(-1)^3+1\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{8}\cdot 27^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{8}\cdot(-1)^{\frac{4}{3}}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 81-\frac{1}{8}\cdot 1=10.$$

Задание 9.1. **Вычислить интегралы.**

9.1.1. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\cos 3x\mathrm{d}x.$ 9.1.2. $\int\limits_{-\pi/7}^{\pi/7}\sin 7x\mathrm{d}x.$ 9.1.3. $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/8}\cos 4x\mathrm{d}x.$

9.1.4. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$ 9.1.5. $\int\limits_{0}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}.$ 9.1.6. $\int\limits_{-1}^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x)^2}.$

9.1.7. $\int\limits_{1}^{5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}}.$ 9.1.8. $\int\limits_{-1/2}^{1/2}(2x+1)^4\,\mathrm{d}x.$ 9.1.9. $\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x.$

9.1.10. $\int\limits_{1}^{\sqrt{10}} x\cdot\sqrt{2x^2+5}\,\mathrm{d}x.$ 9.1.11. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^3 x\cdot\sin x\mathrm{d}x.$

9.1.12. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} x\cdot\cos x\mathrm{d}x.$ 9.1.13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot\sin 4x\mathrm{d}x.$ 9.1.14. $\int\limits_{1}^{2} x\cdot e^x\mathrm{d}x.$

9.1.15. $\int\limits_{1}^{3} x\cdot\ln x\mathrm{d}x.$ 9.1.16. $\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}\cdot\ln x\mathrm{d}x.$ 9.1.17. $\int\limits_{0}^{\pi/3}\mathrm{tg}x\mathrm{d}x.$

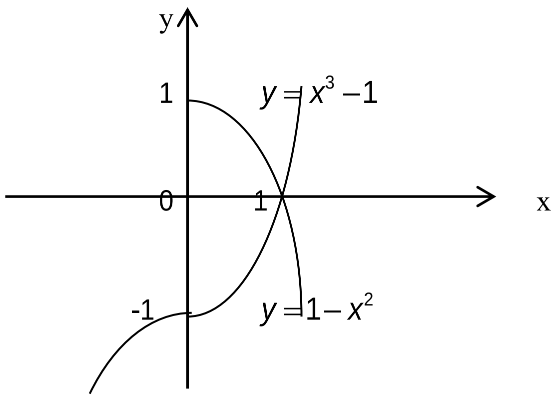
9.1.18. $\int_0^{\pi} \cos^2 3x dx$. 9.1.19. $\int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{43}} x^3 \cdot \sqrt[4]{2x^4-5} dx$. 9.1.20. $\int_0^1 \mathrm{arctg} 2x dx$.

Ответы: 1.1) $\frac{1}{3}$; 1.2) $-\frac{2}{7}$; 1.3) $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$; 1.4) $\frac{\pi}{6}$; 1.5) $\frac{\pi}{12}$; 1.6) $\frac{4}{5}$; 1.7) 3; 1.8) 16; 1.9) 0; 1.10) $\frac{5-\sqrt{5}}{6}$; 1.11) $-\frac{1}{4}$; 1.12) $1-\frac{\pi}{2}$; 1.13) $-\frac{\pi}{8}$; 1.14) e^2; 1.15) $\frac{9}{2}\ln 3-2$. 1.16) $\frac{16}{3}\ln 4-\frac{28}{9}$; 1.17) ln2; 1.18) $\frac{\pi}{2}$; 1.19) $\frac{242}{10}$; 1.20) $\mathrm{arctg}2-\frac{1}{4}\ln 5$.

9.2. **Вычисление площадей фигур**

Пример 9.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - 1$; $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$.

Решение. Построим графики заданных функций и определим пределы интегрирования и верхнюю и нижнюю функцию.



Воспользуемся формулой вычисления площади для явно заданных функций

$$S=\int_a^b\left(f_{\text{верхн.}}(x)-f_{\text{нижн.}}(x)\right)\mathrm{d}x;$$

$$S=\int_0^1\left(\left(1-x^2\right)-\left(x^3-1\right)\right)\mathrm{d}x;$$

$$S=\int_0^1\left(2-x^2+x^3\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{4}.$$

Пример 9.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=\cos t\end{cases};\ 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой вычисления площади для функций, заданных параметрически $S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)\mathrm{d}t$.

$$S=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot(1+\cos)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left(\sin t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

Пример 9.4. Вычислить площадь фигуры

$$\rho=2\sqrt{\cos 2\varphi};\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Воспользуемся формулой вычисления площади для фигур, заданных в полярных координатах $S=\int_\alpha^\beta\left(r(\varphi)\right)^2\mathrm{d}\varphi.$

$$S=\int_0^{\pi/4}4\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=2.$$

Задание 9.2. **Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.**

9.2.1. $y=-x^2+4;\ y=0.$

9.2.2. $y=-x^2-1;\ y=8.$

9.2.3. $y=-x^2+3;\ y=-3x+1.$

9.2.4. $y=(x-2)^2;\ y=7-2x.$

9.2.5. $y^2=x+2;\ x=1.$

9.2.6. $y=\sqrt[3]{x};\ y=0,\ x=8.$

9.2.7. $y=x^3-1;\ y=1-x,\ x=0.$

9.2.8. $y=x^2-3;\ y=5-x^2.$

9.2.9. $y=x^2-4x-5;\ y=-x^2+2x+3.$

9.2.11. $y=\cos x;\ y=0,\ x=-\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{\pi}{2}.$

9.2.11. $y=\cos x;\ y=\sin x,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4}.$ 9.2.12. $y=\dfrac{-2}{x};\ y=x-3.$

9.2.13. Найти площадь эллипса $\begin{cases} x=4\cos t; \\ y=3\sin t. \end{cases}$

9.2.14. Найти площадь астроида $\begin{cases} x=2\cos^3 t; \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

9.2.15. Найти площадь фигуры, ограниченной одной веткой линии трохоида $\begin{cases} x=4t-3\sin t; \\ y=4-3\cos t. \end{cases}$

9.2.16. Найти площадь трехлепестковой розы $r=a\sin 3\varphi$.

9.2.17. Найти площадь четырехлепестковой розы $r=a\cos 2\varphi$.

9.2.18. Найти площадь фигуры, ограниченной спиралью Архимеда $r=a\varphi$ и лучами $\varphi_1=\dfrac{\pi}{6};\ \varphi_2=\dfrac{\pi}{2}.$

9.2.19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=e^{2\varphi}$ и лучами $\varphi_1=0,\ \varphi_1=2.$

9.2.20. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} y=\sin 2t \\ x=\cos t \end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Ответы. 1) $\frac{32}{3}$; 2) 36; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{32}{3}$; 5) $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}$; 6) 12; 7) $\frac{5}{4}$; 8) $\frac{64}{3}$; 9) $44\frac{1}{3}$; 10) 2; 11) $\sqrt{2}-1$; 12) $2\ln 2-\frac{3}{2}$; 13) 12π; 14) $\frac{3}{2}\pi$; 15) 41π; 16) $\frac{\pi a^2}{4}$; 17) $\frac{\pi a^2}{2}$; 18) $\frac{13\pi^3 a^2}{648}$; 19) $\frac{1}{4}\left(e^8-1\right)$; 20) $\frac{2}{3}$.

9.3. Вычисление длины дуги

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\mathrm{d}x,\quad \text{если} \quad l:\ y=y\left(x\right).$$

$$l=\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\mathrm{d}t,\quad \text{если} \quad l:\ \begin{cases} y=y\left(t\right); \\ x=x\left(t\right). \end{cases}$$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(r'\right)^2}\mathrm{d}\varphi,\quad \text{если} \quad l:\ r=r\left(\varphi\right).$$

Пример 9.5. Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{x^3}$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=5$.

Решение. Воспользуемся формулой $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\mathrm{d}x$.

$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $l=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\left(4+9x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5=$

$$=\frac{1}{18}\left(343-8\right)=\frac{335}{18}.$$

Пример 9.6. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой $l=\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\mathrm{d}t$.

Тогда

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8.$$

Пример 9.8. Вычислить длину первого витка логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le 1$.

Решение. Воспользуемся формулой $l=\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+\left(r'\right)^2}\mathrm{d}\varphi$. Тогда

$$l=\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{\varphi}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

Задание 9.3. **Вычислить длину дуги**.

9.3.1. $y=(x-2)^{\frac{3}{2}}$ от $x_1=2$ до $x_2=7$.

9.3.2. $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ $\quad 0\le x\le 4$.

9.3.3. $y=\ln\sin x$ от $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ до $x_2=\dfrac{2\pi}{3}$.

9.3.4. $(y-1)^2=(x+1)^3$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(3;9)$.

9.3.5. $y=1-\ln\cos x$ $\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$. 9.3.6. $\begin{cases}x=3\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases}$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

9.3.7. $\begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t)\\ y=2(\sin t-t\cos t)\end{cases}$, $0\le t\le\pi$. 9.3.8. $\begin{cases}x=\sqrt{3}t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$, $0\le t\le 1$.

9.3.9. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$. 9.3.10. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 5\sin^2 t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

9.3.11. $r = \sin^3 + \left(\dfrac{\varphi}{3}\right)$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. 9.3.12. $r = 3\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

9.3.13. $r = 1 - \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 9.3.14. $r = 2\cos^3\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

9.3.15. $r = 4\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 9.3.16. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

9.3.17. $r = e^{4\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{1}{2}$. 9.3.18. $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

9.3.19. $x^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 8$. 9.3.20. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 4$.

Ответы: 1) $\dfrac{1}{27}\left(35^{\frac{3}{2}} - 8\right)$; 2) $e^2 - \dfrac{1}{e^2}$; 3) $\dfrac{1}{2}\ln 3$; 4) $\dfrac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 8\right)$; 5) $\dfrac{1}{2}\ln 3$; 6) $\dfrac{9}{2}$; 7) π^2; 8) 2; 9) 8; 10) $\dfrac{\sqrt{50}}{2}$; 11) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$; 12) 3π; 13) 2; 14) $\dfrac{1}{2}$; 15) 3π; 16) 12; 17) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}\left(e^2 - 1\right)$; 18) $\dfrac{9}{2}$; 19) 12; 20) $\dfrac{28}{3}$.

10. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Пример 10.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$.

Решение. Применим признак сравнения. Так как

$\dfrac{dx}{\sqrt{x^5+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$, $\forall x \geq 1$, то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$, учитывая, что $\alpha = \dfrac{5}{2} > 1$, следует сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Пример 10.2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{x dx}{\sqrt[3]{x^7+5}}$

Решение. Применим предельный признак сравнения. Для сравнения подберем такую функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0$, где $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^7+5}}$.

При $\alpha = \dfrac{4}{3}$ имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} \cdot x}{\sqrt[3]{x^7+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[3]{x^7+5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{x^7}}} = 1 > 0.$$

Так как $\alpha = \dfrac{4}{3} > 1$, то несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{x dx}{\sqrt[3]{x^7+5}}$ так же как и интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ сходится.

Пример 10.3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin 8x\, dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла и его свойствами. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 8x dx = \int_{-\infty}^{0} \sin 8x dx + \int_{0}^{+\infty} \sin 8x dx =$$

$$= \lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{0} \sin 8x dx + \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \sin 8x dx =$$

$$= \lim_{B\to-\infty} \left(-\frac{1}{8}\cos 8x \right)\Bigg|_{B}^{0} + \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{8}\cos 8x \right)\Bigg|_{0}^{A} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty} \left(\frac{1}{8}\cos 8B - \frac{1}{8} \right) + \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 8A \right).$$

Так как указанные пределы не существуют, то несобственный интеграл расходится.

Пример 10.4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{4}^{+\infty} x^3 \ln x dx$.

Решение. Имеем

$$\int_{4}^{+\infty} x^3 \ln x dx = \lim_{A\to\infty} \int_{4}^{A} x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = x^3 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^4}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\ln x \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_{4}^{A} - \frac{1}{4}\int_{4}^{A} x^4 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{A\to\infty} \left(\ln A \cdot \frac{A^4}{4} - 64\ln 4 - \frac{x^4}{16}\Bigg|_{4}^{A} \right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\ln A \cdot \frac{A^4}{4} - 64\ln 4 - \frac{A^4}{16} + \frac{1}{16} \right) = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 10.5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{arctg}^3 x}{1+x^2} dx.$

Решение. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$

$$=\lim_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{0}\operatorname{arctg}^2 x\,\mathrm{d}(\operatorname{arctg}x)+\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\operatorname{arctg}^2 x\,\mathrm{d}(\operatorname{arctg}x)=$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\left.\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}\right|_{B}^{0}+\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}\right|_{0}^{A}=$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}^3 0}{3}-\frac{\operatorname{arctg}^3 B}{3}\right)+\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}^3 A}{3}-\frac{\operatorname{arctg}^3 0}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=\frac{\pi^3}{12}.$$

Задание 10.1. **Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.**

10.1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ 10.2. $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\infty}x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$ 10.3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{x^2+4x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

10.4. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}.$ 10.5. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$ 10.6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}x\cdot e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

10.7. $\displaystyle\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}.$ 10.8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x}}.$ 10.9. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

10.10. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.$ 10.11. $\displaystyle\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}.$ 10.12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4+8x^2}.$

10.13. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{6+x^9}}.$ 10.14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$ 10.15. $\displaystyle\int\limits_{6}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+5}.$

10.16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x+4)^2}.$ 10.17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{x^4+4x^2+8}.$ 10.18. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}x\cdot e^{-3x}\mathrm{d}x.$

10.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^2}$. 10.20. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{\text{arctg}3x}}{1+9x^2}dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) -3) расходится; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi^2}{16}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) -9) расходится; 10) 1; 11) $\ln\sqrt[3]{4}$; 12) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$; 13) сходится; 14) расходится; 15) $\ln\sqrt[4]{5}$; 16) расходится; 17) 0; 18) $\frac{1}{9}$; 19) расходится; 20) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{6}$.

11. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

Пример 11.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$..

Решение. Подынтегральная функция не определена в точках $x_1=-2;\ x_2=2$: при $x\to-2$ и $x\to 2$ эта функция неограниченно возрастает.

Имеем

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}+\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-2+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}+\lim_{\eta\to0}\int\limits_{0}^{2-\eta}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2+\varepsilon}^{0}+\lim_{\eta\to0}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{0}^{2-\eta}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin0-\arcsin\frac{-2+\varepsilon}{2}\right)+$$

$$+\lim_{\eta\to0}\left(\arcsin\frac{2-\eta}{2}-\arcsin0\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Пример 11.2. $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Решение. Подынтегральная функция не определена в точке 0, т.к. она неограниченно возрастает при $x \to 0$.

Имеем

$$\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} + \int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-2}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{5}{3}} dx + \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{0+\eta}^{3} x^{-\frac{5}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} \right) \Bigg|_{-2}^{-\varepsilon} + \lim_{\eta \to 0} \left(-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} \right) \Bigg|_{\eta}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{3}{2\sqrt[3]{\varepsilon^2}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \right) + \lim_{\eta \to 0} \left(-\frac{3}{2\sqrt[3]{9}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{\eta^2}} \right) = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 11.3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция не определена в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

Имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{-\left(1 - \cos^2 x\right) d\left(\cos x\right)}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{\pi/2-\varepsilon} \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) d\left(\cos x\right) =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\left(\cos^2 x\right)}{2}-\ln|\cos x|\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{2}-\frac{1}{2}-\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|+\ln 1\right)=-\frac{1}{2}-\ln\cos\frac{\pi}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}-\ln 0=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Задание 11.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

11.1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

11.2. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

11.3. $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

11.4. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^5}}$.

11.5. $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

11.6. $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

11.7. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

11.8. $\int_0^{1/4} \frac{xdx}{1-x^4}$.

11.9. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{1-\sin 3x}}$.

11.10. $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

11.11. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos x}}$.

11.12. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

11.13. $\int_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31\left(x^3-1\right)}}$.

11.14. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

11.15. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

11.16. $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}dx$.

11.17. $\int_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}}$.

11.18. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt[7]{\sin^2 x}}$.

11.19. $\int\limits_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$. 11.20. $\int\limits_0^1 \frac{e^{-\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Ответы: 1) 0; 2) -6) расходится; 7) $\frac{1}{\ln 2}$; 8) расходится; 9) $\frac{2}{5}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{7}{6}$; 12) $\frac{24}{5}$; 13) $\frac{4}{3}$; 14) $\frac{\pi}{6}$; 15) $\frac{5}{3}$; 16) 1; 17) 80; 18) $-\frac{7}{5}$; 19) расходится; 20) $e^{-\frac{\pi}{2}}-1$.

Литература

1. Высшая математика: общий курс / под ред. С. А. Самоля. – Минск : Вышэйшая шк., 2000.
2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998.
3. Шипачев, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М. : Высшая шк., 1985.
4. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак – 3-е изд., стер. – Минск. : ТетраСистемс, 2001.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 4 ч. / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая шк., 1990.

Учебное издание

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задания и методические указания
к выполнению самостоятельных работ
для студентов I курса

С о с т а в и т е л и:

ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 25.02.2013. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 200. Заказ 939.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.