



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

**Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»**

**Ч. А. Якубовский
А. Ч. Якубовский**

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Методическое пособие

**Минск
БНТУ
2013**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Соппротивление материалов
машиностроительного профиля»

Ч. А. Якубовский
А. Ч. Якубовский

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

*Методическое пособие
для студентов
технических специальностей
высших учебных заведений*

Минск
БНТУ
2013

УДК 620.1 (075.4)
ББК 30.3я7
Я49

Рецензенты:
Ю. В. Василевич, В. А. Сидоров

Якубовский, Ч. А.

Я49 Механика материалов. Статически неопределимые системы : методическое пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений / Ч. А. Якубовский, А. Ч. Якубовский. – Минск : БНТУ, 2013. – 56 с.
ISBN 978-985-550-152-8.

Методическое пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений для самостоятельного освоения учебного материала и отработки навыков решения задач на тему «Статически неопределимые системы» по курсу «Механика материалов» («Сопротивление материалов»). В пособии приведены основные методы расчета статически неопределимых систем различного конструктивного исполнения.

Учебное издание содержит необходимую информацию для самостоятельного изучения данной темы курса: основные сведения из теории, методики раскрытия статической неопределимости систем, испытывающих различные виды сопротивления, с примерами решения задач.

Данное методическое пособие будет полезно студентам при подготовке к практическим занятиям по теме «Статически неопределимые системы», а также может способствовать качественному выполнению студентами различных форм обучения расчетно-графических и контрольных работ.

УДК 620.1 (075.4)
ББК 30.3я7

ISBN 978-985-550-152-8

© Якубовский Ч. А., Якубовский А. Ч., 2013
© Белорусский национальный
технический университет, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Для решения широкого круга задач механики твердого деформированного тела, связанных с расчетом на прочность, жесткость и устойчивость при статических, динамических и переменных нагрузках, на первоначальном этапе необходимо, как правило, определить реакции внешних и внутренних связей рассчитываемой конструкции и ее отдельных элементов (стержней). В качестве внешних связей служат опоры, фиксирующие конструкцию в пространстве. При расчете конструкции действие внешних связей заменяют их реакциями. Внутренние связи обусловлены силами взаимодействия атомов и отдельных частиц тела. Они обеспечивают целостность твердого тела. Силы внешнего воздействия стремятся нарушить эти связи и изменить расположение отдельных частиц и сил их взаимодействия. Усилия внутренних связей являются внутренними силами (или внутренними силовыми факторами). Для их определения применяют известный метод сечений.

Для определения как реакций внешних связей, так и внутренних силовых факторов используют независимые уравнения статического равновесия. Если все реакции внешних связей и внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции, могут быть определены из уравнений статики, то такие конструкции (системы) называются *статически определимыми*.

Однако на практике часто встречаются стержневые системы и отдельные стержни, у которых реакции внешних связей и все внутренние силовые факторы не могут быть определены при помощи одних лишь уравнений статики. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

Характерной особенностью статически неопределимых систем (СНС) является то обстоятельство, что на распределение усилий в конструктивных элементах системы влияют не только внешние силы, но и соотношения между поперечными размерами отдельных элементов, а также свойства их материала.

Другой особенностью СНС является возникновение дополнительных усилий в стержнях при смещении опор, температурном воздействии, а также после сборки конструкции при неточном изготовлении отдельных ее элементов, что не имеет места в статически определимых системах.

Степень статической неопределимости системы равна числу лишних связей и определяется как разность между числом неизвестных усилий (реакций связей и внутренних сил) и числом независимых уравнений статического равновесия, которые можно составить для заданной системы в зависимости от вида внешней нагрузки.

Связи, минимальное количество которых обеспечивает геометрическую неизменяемость системы, называются необходимыми. Всякие связи, наложенные на систему сверх необходимых, являются избыточными (лишними). Другими словами, *лишние связи* – это связи, удаление которых превращает систему в статически определимую, не нарушая ее геометрической неизменяемости.

Геометрически неизменяемой называется система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформацией ее элементов.

Изменяемая система не в состоянии уравновесить внешние силы и под их действием приходит в движение, изменяя при этом свою первоначальную форму. Такие системы не могут быть использованы в качестве инженерных сооружений. Изменяемость заданной внутренней структуры и подвижность элементов сооружения относительно основания определяются *степенью свободы*.

Степень свободы системы – это число независимых параметров (координат), определяющих положение всех ее элементов. Степень свободы W показывает, сколько дополнительных связей необходимо наложить на систему с тем, чтобы она стала неподвижной и геометрически неизменяемой. При этом, число L , равное числу W и взятое с обратным знаком, будет

определять число избыточных (лишних) связей, наложенных на систему, а следовательно, устанавливать ее степень статической неопределимости.

Простейшим геометрически неизменяемым элементом сооружения является диск (стержень). Его положение на плоскости определяется тремя независимыми параметрами (рис. 1): координатами x_A и y_A его точки A и углом α между осью стержня и координатной осью x . Поэтому стержень на плоскости имеет три степени свободы.

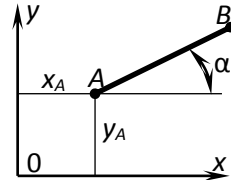


Рис. 1

Тогда для D дисков (стержней) число степеней свободы равно $W = 3D$. Однако наложенные на систему связи в виде шарниров и жестких узлов, соединяющих между собой два или несколько стержней, а также опорных стержней, отнимают у нее степени свободы. Поэтому формула для установления числа степеней свободы или степени статической неопределимости системы может быть записана в следующем виде:

$$L = -W = C_o + C_b - 3D, \quad (1)$$

где C_o – число опорных связей, равное числу опорных реакций;
 C_b – число внутренних связей.

Различают следующие типы расчетных схем опорных устройств:

- шарнирно-подвижная (катковая) опора (рис. 2, а). Она препятствует перемещению конца стержня по нормали к опорной плоскости и поэтому накладывает на стержень одну связь;

- шарнирно-неподвижная опора. Она накладывает на стержень две внешние связи, препятствующие горизонтальному и вертикальному перемещению конца стержня. Ее условное изображение показано на рис. 2, б;

- жестко защемленная неподвижная опора, или жесткая заделка. Такая опора запрещает все три возможных перемещения опорного конца стержня в плоскости (рис. 2, в).

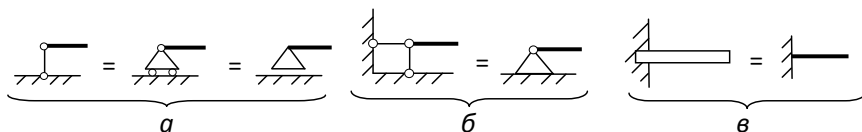


Рис. 2

При подсчете числа внутренних связей следует иметь в виду, что шарнирное соединение двух стержней эквивалентно двум связям, а их жесткое узловое соединение – трем связям (рис. 3). Если несколько стержней соединены кратным шарниром, то число внутренних связей $C_B = 2(n - 1)$. При жестком соединении нескольких стержней $C_B = 3(n - 1)$, где n – число соединяемых стержней.



Рис. 3

Для простых СНС (не имеющих замкнутых контуров), в том числе, работающих на растяжение-сжатие, степень статической неопределимости может быть установлена по формуле

$$L = N_{\text{неизв.}} - N_{\text{ур.ст.}}, \quad (2)$$

где $N_{\text{неизв.}}$ – число неизвестных усилий;

$N_{\text{ур.ст.}}$ – число независимых уравнений статического равновесия, которое можно составить для заданной системы сил.

Существует несколько методов расчета статически неопределимых систем. Рассмотрим основные из них.

1. МЕТОД СИЛ

В настоящее время в учебной литературе по сопротивлению материалов излагаются различные методы расчета СНС в зависимости от вида деформации, испытываемой элементами системы (растяжение, сжатие, кручение, изгиб), а также от конструкции самой системы. Так СНС, элементы которой работают на растяжение-сжатие, рассчитываются с помощью уравнений статики с добавлением к ним уравнений совместности перемещений, основанных на определении перемещений отдельных точек системы, одновременно принадлежащих к разным ее элементам. Такой метод является громоздким, особенно для асимметричных СНС с числом лишних неизвестных $L \geq 2$.

Для СНС, элементы которой работают в основном на изгиб, применяются другие методы. Так, расчет рамных конструкций производится методом сил, в то время как для балочных конструкций применяется уже другой метод – метод «уравнений трех моментов». Он применим только для расчета неразрезных балок и является неэффективным и устаревшим, поскольку требует трудоемких вычислений и выполнения дополнительных условий, а именно:

- 1) жесткие заделки на крайних опорах балки в основной системе необходимо условно заменить дополнительными пролетами бесконечно малой длины;
- 2) консоли балки условно отбрасываются, а внешняя нагрузка, приложенная к консолям, приводится к ближайшей опоре;
- 3) метод применим только для балок с постоянной жесткостью по длине.

Кроме того, применение метода «уравнений трех моментов» не дает никаких преимуществ по сравнению с универсальными методами (методом сил и энергетическим методом), а является искусственным преобразованием метода сил.

Разнообразный подход к решению СНС является неприемлемым. Он значительно усложняет усваиваемость материала и

вносит путаницу в умы студентов. Поэтому целесообразно применять единый метод, обеспечивающий общность подхода при решении любых СНС. Таким методом может быть метод сил. Он широко изучен и освещен в учебной литературе. Рассмотрим некоторые особенности его применения для СНС, элементы которых испытывают различные виды деформаций.

Порядок расчета СНС методом сил

1. Устанавливается степень статической неопределимости системы.

Вычисление числа лишних связей L системы производят с использованием формул (1) или (2).

2. Выбирается основная и составляется эквивалентная системы.

Основной системой называется статически определимая система, полученная из заданной СНС путем удаления лишних связей. При этом всегда имеется несколько вариантов основной системы. На практике выбирают наиболее простой и удобный для расчета вариант. Основная система, нагруженная заданной внешней нагрузкой и неизвестными силовыми факторами, приложенными взамен отброшенных лишних связей, называется *эквивалентной системой*. При этом, усилия и перемещения в заданной и эквивалентной системах одинаковы.

3. Записывается система канонических уравнений метода сил.

Для n раз СНС эти уравнения имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Каждое из этих уравнений выражает условие отсутствия перемещений по направлению каждой неизвестной силы (если отброшенные лишние связи – внешние) или условие отсутствия взаимных перемещений сечений (если отброшенные лишние связи – внутренние). Коэффициенты, имеющие одинаковые индексы, называются *главными* и являются всегда положительными ($\delta_{kk} > 0$). Коэффициенты с разными индексами δ_{jk} называются *побочными* и могут быть, как и свободные члены Δ_{iF} уравнений, положительными, отрицательными и равными нулю.

4. *Определяются коэффициенты и свободные члены уравнений.*

Их вычисление производится с помощью интегралов Максвелла–Мора:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} dz + \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_k}{EA} dz + \sum K_y \int_0^l \frac{\bar{Q}_i \cdot \bar{Q}_k}{GA} dz, \\ \Delta_{iF} &= \sum \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EI} dz + \sum \int_0^l \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EA} dz + \sum K_y \int_0^l \frac{Q_F \cdot \bar{Q}_i}{GA} dz. \end{aligned} \quad (4)$$

В этих уравнениях $\bar{M}_i, \bar{M}_k, \bar{N}_i, \bar{N}_k, \bar{Q}_i, \bar{Q}_k$ представляют собой внутренние силовые факторы при действии на систему единичной силы $\bar{X}_i = 1$ (внутренние усилия в «единичном» состоянии). Величины M_F, N_F, Q_F представляют собой внутренние силовые факторы при действии на систему внешней нагрузки (внутренние усилия в «грузовом» состоянии). Произведения величин EI, EA и GA есть жесткости соответственно при изгибе, растяжении-сжатии и сдвиге. Коэффициент K_y учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению стержня при изгибе и зависит от формы поперечного сечения стержня. Для прямоугольного сечения $K_y = 1,2$; для кругового $K_y = 32/27$. Интегрирование производится по длине стержня (или по длине отдельного участка стержня), а суммирование распространяется на все стержни (или все участки).

В балках, рамах, арках, работающих в основном на изгиб, влиянием деформации сдвига и растяжения-сжатия обычно пренебрегают. Тогда интегралы Максвелла–Мора (4) принимают вид

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} dz; \quad \Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EI} dz. \quad (5)$$

Для шарнирно-стержневых систем, работающих на растяжение-сжатие, учитываются лишь продольные силы, которые постоянны по длине стержней. Поэтому при расчете таких систем используются только вторые слагаемые уравнений (4), операция интегрирования в которых опускается, и они принимают следующий вид:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_k}{EA} \cdot l; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EA} \cdot l. \quad (6)$$

Применение интегральных формул Максвелла–Мора имеет определенные неудобства, заключающиеся в том, что первоначально необходимо составить аналитические выражения подынтегральных функций для стержня в целом или каждого его участка в отдельности. Это приводит к большому объему вычислений. Поэтому на практике эти интегралы для прямолинейных стержней с постоянной жесткостью по длине вычисляют по известному правилу А. Н. Верещагина. Это правило формулируется следующим образом: *определенный интеграл от произведения двух функций (эпюр), одна из которых прямолинейна, равен произведению площади криволинейной эпюры ω_F на ординату y_C , взятую из прямолинейной эпюры под центром тяжести криволинейной*. То есть

$$\int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz = \omega_1 \cdot f_2(z_{0.б.}) \quad \text{или} \quad \int_0^l M_F \cdot \bar{M}_i \cdot dz = \omega_F \cdot \bar{y}_C.$$

В случае, если обе функции (эпюры) линейные, то операция перемножения обладает свойством *коммутативности*. В этом случае можно брать площадь любой эпюры, умножая ее на ординату другой.

Для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений (3) существует общее правило, которое заключается в следующем.

Основная система поочередно загружается единичными силами $\bar{X}_1=1, \bar{X}_2=1, \dots, \bar{X}_n=1$ и отдельно заданной нагрузкой. От каждого нагружения в отдельности находятся внутренние силовые факторы во всех стержнях системы или на всех участках одного стержня. После чего вычисляются коэффициенты уравнений (3) с применением интегралов Максвелла–Мора. Если же вычисление коэффициентов производится по правилу Верещагина, то от каждого нагружения в отдельности строятся эпюры внутренних силовых факторов – единичные эпюры от каждой единичной силы $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ и грузовая эпюра от заданной нагрузки, которые затем «перемножаются» по правилу Верещагина.

5. Решается система канонических уравнений.

Подставляя найденные коэффициенты и свободные члены в исходные уравнения (3), определяются неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_n . После чего система становится статически определимой.

Расчет на действие температуры

Расчет СНС методом сил на температурное воздействие имеет некоторые особенности по сравнению с расчетом на силовое воздействие. Так при силовом воздействии для определения свободных членов канонических уравнений основная статически определимая система загружается фактором внешнего воздействия – силой, после чего определяются усилия в стержнях от действия данного силового фактора. Такой под-

ход при расчете на температурное воздействие не приемлем, так как изменение температуры не вызывает в стержнях статически определимых систем никаких усилий. Однако это не мешает применять к расчету на температурное воздействие общий метод сил. В этом случае свободные члены канонических уравнений определяются по формуле

$$\Delta_{jt} = \sum \alpha_j \cdot \bar{N}_j \cdot l_j \cdot \Delta t_j, \quad (7)$$

где α_j – коэффициент линейного расширения материала стержня;

\bar{N}_j – усилия в стержнях в основной системе от действия единичных сил $\bar{X}_j = 1$;

l_j – длины стержней;

Δt_j – температура нагрева стержней.

Расчет на монтажную нагрузку

В стержневых СНС в результате неточности изготовления отдельных ее элементов после сборки возникают дополнительные продольные усилия и напряжения в стержнях, вызванные принудительной деформацией стержней в процессе сборки. Такие напряжения называются *монтажными*.

Расчет монтажных напряжений в учебной литературе производится путем совместного решения уравнений равновесия статики и геометрических уравнений совместности перемещений, записанных для стержневой системы после ее сборки. Однако эти уравнения, как правило, являются громоздкими и требуют большого объема вычислений. Применение метода сил к расчету монтажных напряжений значительно упрощает весь объем вычислений.

Рассмотрим применение метода сил на конкретных примерах.

1.1. Расчет на внешнюю нагрузку

Пример 1. Стальной ступенчатый стержень, жестко закрепленный в опоре C и установленный с зазором у опоры B , нагружен внешними продольными силами (рис. 4). Построить эпюры внутренних продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, если $F = 10$ кН; $a = 0,2$ м; $\Delta = 0,1$ мм; $A = 4$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

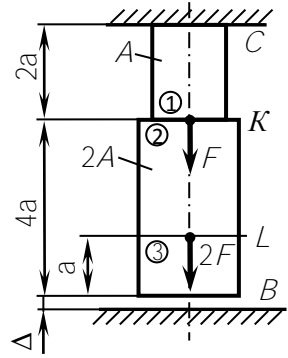


Рис. 4

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости стержня

$$E = N_{\text{и.д.с.}} - N_{\text{о.д.н.}} = 2 - 1 = 1.$$

2. Выбираем основную и составляем эквивалентную систему (рис. 5).

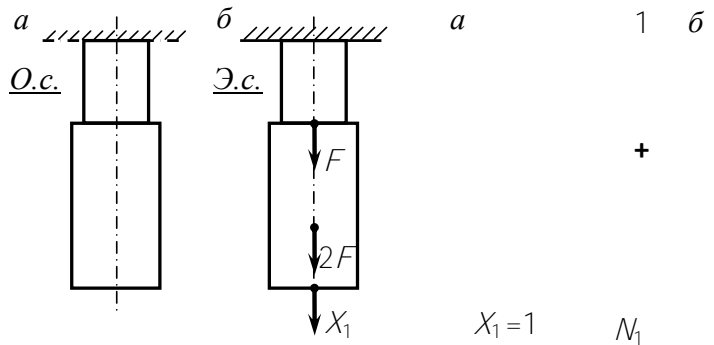


Рис. 5

3. Записываем каноническое уравнение метода сил для стержня, имеющего технологический зазор Δ

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = \Delta.$$

4. Прикладываем к основной системе поочередно единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ и внешнюю нагрузку и строим единичную и грузовую эпюры продольных сил от этих нагружений (рис. 6).

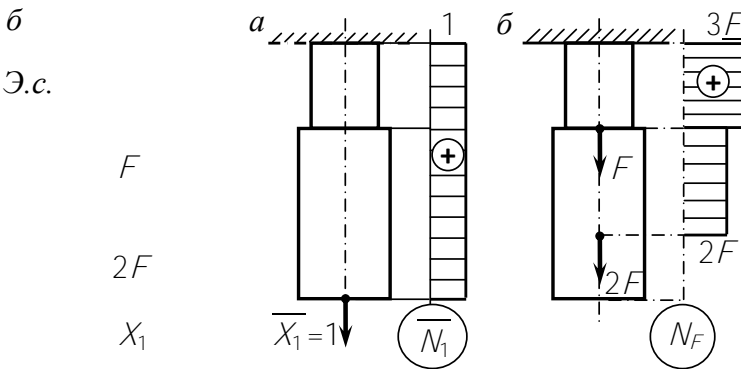


Рис. 6

5. Вычисляем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1F} канонического уравнения по формулам (6) с применением правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_1^2 \cdot l_i}{EA_i} = \frac{1 \cdot 2a \cdot 1}{EA_1} + \frac{1 \cdot 3a \cdot 1}{EA_2} + \frac{1 \cdot a \cdot 1}{EA_3} = \frac{2a}{EA} + \frac{3a}{2EA} + \frac{a}{2EA} = \frac{4a}{EA};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_F \cdot \bar{N}_1}{EA_i} \cdot l_i = \frac{3F \cdot 2a \cdot 1}{EA_1} + \frac{2F \cdot 3a \cdot 1}{EA_2} = \frac{6Fa}{EA} + \frac{6Fa}{2EA} = \frac{9Fa}{EA}.$$

6. Находим лишнее неизвестное усилие X_1

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\Delta - \Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta - 9Fa/EA}{4a/EA} = \frac{EA\Delta - 9Fa}{4a} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 0,1 - 9 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{4 \cdot 0,2 \cdot 10^3} = \\ &= -12,5 \cdot 10^3 \text{ Ё} = -12,5 \text{ ё} = -1,25 F. \end{aligned}$$

Знак «−» указывает на то, что направление реакции X_1 противоположно показанному на рис. 5, б.

7. Определяем продольные силы на всех участках стержня

$$N_1 = N_{1F} + \bar{N}_1 \cdot X_1 = 3F + 1 \cdot (-1,25F) = 1,75F = 17,5 \text{ ё} ;$$

$$N_2 = N_{2F} + \bar{N}_2 \cdot X_1 = 2F + 1 \cdot (-1,25F) = 0,75F = 7,5 \text{ ё} ;$$

$$N_3 = N_{3F} + \bar{N}_3 \cdot X_1 = 0 + 1 \cdot (-1,25F) = -1,25F = -12,5 \text{ ё} .$$

8. Вычисляем напряжения

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{17,5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 43,7 \text{ Ё} ;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{7,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 9,4 \text{ Ё} ;$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-12,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = -15,6 \text{ Ё} .$$

Строим эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ (рис. 7).

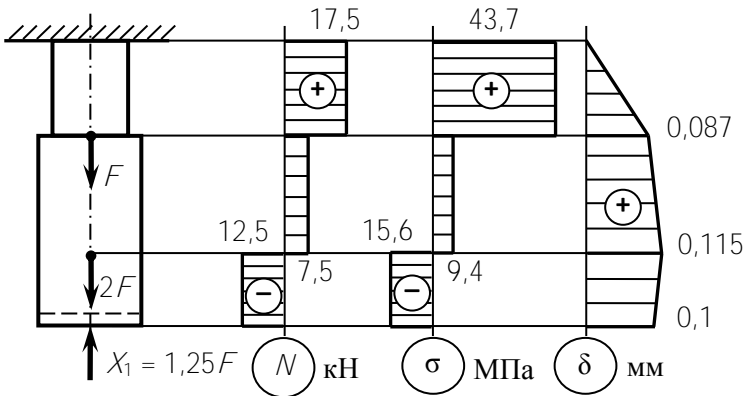


Рис. 7

9. Проверим правильность выполненных расчетов.

Статическая проверка. Реакции опор равны:

$$R_B = \bar{Q}_1 = 1,25F (\uparrow); \quad R_C = N_1 = 1,75F (\uparrow).$$

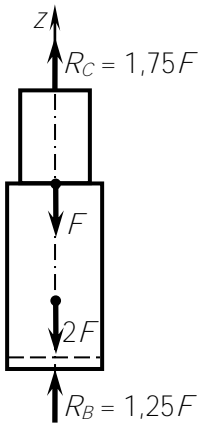


Рис. 8

Записываем уравнение статики для всего стержня (рис. 8):

$$\sum F_z = 0; \quad R_B + R_C - F - 2F = 0;$$

$$1,25F + 1,75F - 3F = 0;$$

$$3F - 3F = 0.$$

Деформационная проверка.

Суть ее заключается в том, что полная деформация стержня должна равняться величине зазора: $\Delta_{\text{полн}} = \Delta$. Для нахождения $\Delta_{\text{полн}}$ умножаем суммарную эпюру продоль-

ных сил N (см. рис. 7) на единичную эпюру \bar{M}_1 (см. рис. 6, а) по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{i\hat{r}\hat{e}\hat{r}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{N \cdot \bar{M}_1}{EA_j} \cdot l_j = \frac{17,5 \cdot 0,4 \cdot 1}{EA} + \frac{7,5 \cdot 0,6 \cdot 1}{2EA} - \frac{12,5 \cdot 0,2 \cdot 1}{EA} = \\ &= \frac{8 \text{ [éí · ì]}}{EA} = \frac{8 \cdot 10^6 \text{ [í · ì ì]}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,1 \text{ ì ì } = \Delta . \end{aligned}$$

Следовательно, все расчеты выполнены правильно.

10. Находим перемещения характерных сечений стержня:

$$\delta_C = 0;$$

$$\begin{aligned} \delta_K &= \sum_{i=1} \frac{N \cdot \bar{M}_1}{EA_j} \cdot l_j = \frac{17,5 \cdot 0,4 \cdot 1}{EA} = \frac{7 \text{ [éí · ì]}}{EA} = \\ &= \frac{7 \cdot 10^6 \text{ [í · ì ì]}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,087 \text{ ì ì } ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_L &= \sum_{i=1}^2 \frac{N \cdot \bar{M}_1}{EA_j} \cdot l_j = \frac{17,5 \cdot 0,4 \cdot 1}{EA} + \frac{7,5 \cdot 0,6 \cdot 1}{2EA} = \frac{9,25 \text{ [éí · ì]}}{EA} = \\ &= \frac{9,25 \cdot 10^6 \text{ [í · ì ì]}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 0,115 \text{ ì ì } ; \end{aligned}$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^3 \frac{N \cdot \bar{M}_1}{EA_j} \cdot l_j = \Delta_{i\hat{r}\hat{e}\hat{r}} = \Delta = 0,1 \text{ ì ì } .$$

Строим эпюру перемещений δ (см. рис. 7).

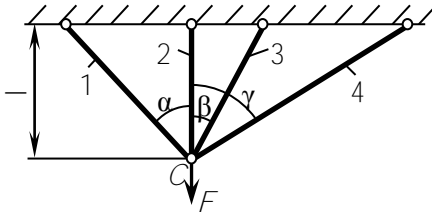


Рис. 9

Пример 2. Проверить прочность стержневой системы, составленной из стальных стержней с одинаковой площадью поперечных сечений $A = 5 \text{ см}^2$ и нагруженной внешней силой $F = 160 \text{ кН}$ в узле C (рис. 9), если $l = 1 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$,

$\gamma = 60^\circ$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Найти величину и направление перемещения узла C .

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости системы

$$E = N_{\text{н.д.с.}} - N_{\text{о.д.н.}} = 4 - 2 = 2.$$

2. Выбираем основную систему, разрезая два стержня системы, и составляем эквивалентную систему (рис. 10).

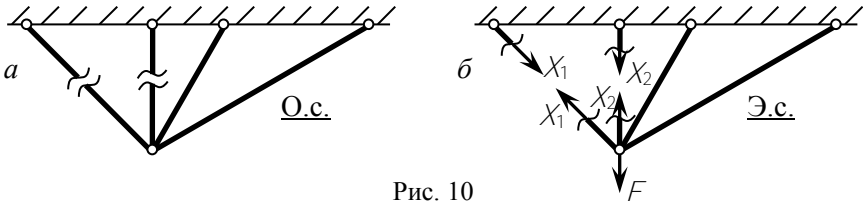


Рис. 10

3. Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

4. Загружаем основную систему поочередно единичными продольными силами $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ и заданной внешней

нагрузкой F (рис. 11, а–в). От каждой нагрузки в отдельности находим продольные усилия в стержнях системы.

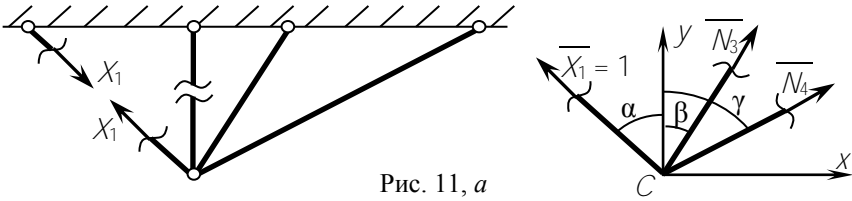


Рис. 11, а

$$\begin{aligned} \sum x=0; & \quad -1 \cdot \sin \alpha + \bar{N}_3 \cdot \sin \beta + \bar{N}_4 \cdot \sin \gamma = 0; \\ \sum y=0; & \quad 1 \cdot \cos \alpha + \bar{N}_3 \cdot \cos \beta + \bar{N}_4 \cdot \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$\bar{N}_3 = \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\gamma - \beta) - \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \sin(\gamma - \beta)}; \quad \bar{N}_4 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)}.$$

Подставляя значения углов, вычисляем

$$\bar{N}_1 = 1; \quad \bar{N}_2 = 0; \quad \bar{N}_3 = -1,932; \quad \bar{N}_4 = 1,932.$$

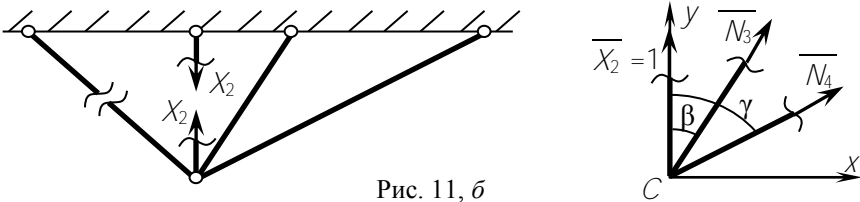


Рис. 11, б

$$\begin{aligned} \sum x=0; & \quad \bar{N}_3 \cdot \sin \beta + \bar{N}_4 \cdot \sin \gamma = 0; \\ \sum y=0; & \quad 1 + \bar{N}_3 \cdot \cos \beta + \bar{N}_4 \cdot \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$\bar{N}_3 = -\frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \beta)}; \quad \bar{N}_4 = \frac{\sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)};$$

При заданных значениях углов получим

$$\bar{N}_1 = 0; \quad \bar{N}_2 = 1; \quad \bar{N}_3 = -1,732; \quad \bar{N}_4 = 1.$$

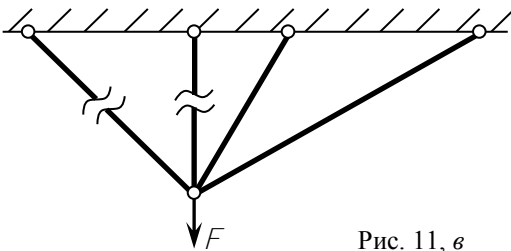
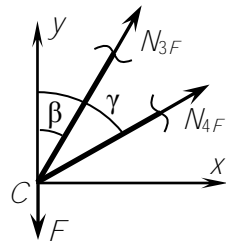


Рис. 11, в



$$\begin{aligned} \sum x = 0; & \quad N_{3F} \cdot \sin \beta + N_{4F} \cdot \sin \gamma = 0; \\ \sum y = 0; & \quad N_{3F} \cdot \cos \beta + N_{4F} \cdot \cos \gamma - F = 0. \end{aligned}$$

Решение данной системы дает

$$N_{3F} = \frac{F \cdot \sin \gamma}{\sin(\gamma - \beta)}; \quad N_{4F} = -\frac{F \cdot \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)}.$$

Подставляя значения углов, находим

$$N_{3F} = 1,732 \cdot F; \quad N_{4F} = -F; \quad N_{1F} = N_{2F} = 0.$$

Строим эпюры продольных сил (рис. 12).

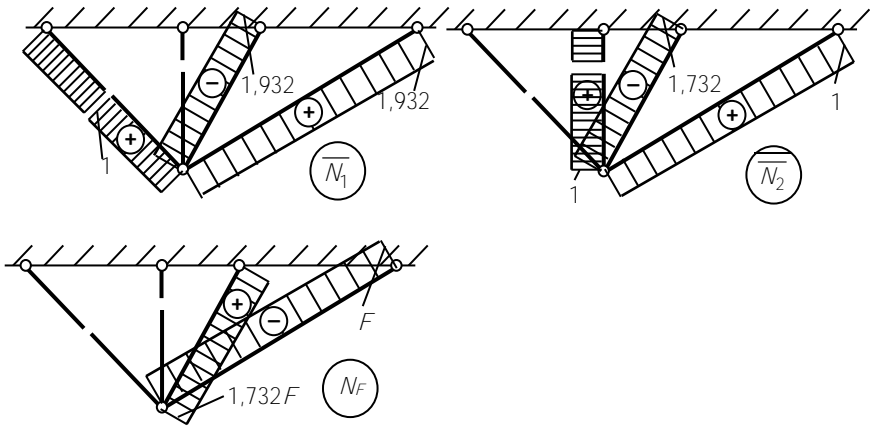


Рис. 12

5. Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_1^2}{EA} \cdot l_i =$$

$$= \frac{1}{EA} \cdot (1 \cdot 1 + 1,932 \cdot 1,155 / 1,932 + 1,932 \cdot 2 / 1,932) = \frac{13,190}{EA};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{EA} \cdot l_i =$$

$$= \frac{1}{EA} \cdot (1,732 \cdot 1,155 / 1,932 + 1 \cdot 2 / 1,932) = \frac{7,729}{EA};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\bar{N}_2^2}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{EA} \cdot (1 \cdot 1 + 1,732 \cdot 1,155 / 1,732 + 1 \cdot 2 / 1) = \frac{6,465}{EA};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_F \cdot \bar{N}_1}{EA} \cdot l_i =$$

$$= \frac{1}{EA} \cdot (-1,732F \cdot 1,155 / 1,932 - F \cdot 2 / 1,932) = -\frac{7,729F}{EA};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{N_F \cdot \bar{N}_2}{EA} \cdot l_i =$$

$$= \frac{1}{EA} \cdot (-1,732F \cdot 1,155l \cdot 1,732 - F \cdot 2l \cdot 1) = -\frac{5,465Fl}{EA},$$

где длины стержней с учетом значений углов равны

$$l_1 = l / \cos \alpha = 1,414 l; \quad l_2 = l; \quad l_3 = l / \cos \beta = 1,155 l;$$

$$l_4 = l / \cos \gamma = 2 l.$$

6. Подставляем найденные коэффициенты и свободные члены в канонические уравнения и решаем полученную систему

$$\begin{aligned} 13,190l \cdot X_1 + 7,729l \cdot X_2 - 7,729Fl &= 0; & \rightarrow & X_1 = N_1 = 0,303F; \\ 7,729l \cdot X_1 + 6,465l \cdot X_2 - 5,465Fl &= 0. & & X_2 = N_2 = 0,483F. \end{aligned}$$

Усилия в других стержнях находим путем сложения усилий в основной системе от найденных неизвестных и от заданной силы F по формулам

$$N_3 = \bar{N}_3' \cdot X_1 + \bar{N}_3'' \cdot X_2 + N_{3F} =$$

$$= -1,932 \cdot 0,303F + (-1,732) \cdot 0,483F + 1,732F = 0,310F;$$

$$N_4 = \bar{N}_4' \cdot X_1 + \bar{N}_4'' \cdot X_2 + N_{4F} =$$

$$= 1,932 \cdot 0,303F + 1 \cdot 0,483F - F = 0,069F.$$

Строим суммарную эпюру продольных сил (рис. 13).

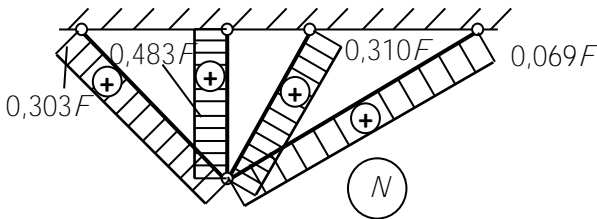


Рис. 13

7. Проверяем правильность расчетов.

Для этого умножаем по правилу Верещагина суммарную эпюру N на каждую из единичных эпюр \bar{N}_1 и \bar{N}_2 . Результат умножения должен равняться нулю, так как взаимные перемещения смежных сечений стержней, в которых прикладывались неизвестные силы X_1 и X_2 , отсутствуют

$$\Delta_1 = \sum \frac{N \cdot \bar{N}_1}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{EA} \cdot [0,303F \cdot 1,414 / \cdot 1 + 0,310F \cdot 1,155 / \cdot (-1,932) + 0,069F \cdot 2 / \cdot 1,932] = \frac{Fl}{EA} \cdot [0,695 - 0,692] = \frac{0,003Fl}{EA};$$

$$\Delta_2 = \sum \frac{N \cdot \bar{N}_2}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{EA} \cdot [0,483F \cdot / \cdot 1 + 0,310F \cdot 1,155 / \cdot (-1,732) + 0,069F \cdot 2 / \cdot 1] = \frac{Fl}{EA} \cdot [0,621 - 0,620] = \frac{0,001Fl}{EA}.$$

Погрешность вычислений составила

$$\delta_1 = \frac{0,003}{0,692} \cdot 100 \% = 0,43 \% < 1 \%;$$

$$\delta_2 = \frac{0,001}{0,620} \cdot 100 \% = 0,16 \% < 1 \%,$$

что допустимо.

8. Находим напряжения в стержнях

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_1}{A_1} = \frac{0,303F}{A} = \frac{0,303 \cdot 160 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 97 \text{ л ÿ à};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,483F}{A} = \frac{0,483 \cdot 160 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 154,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,310F}{A} = \frac{0,310 \cdot 160 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 99,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{N_4}{A_4} = \frac{0,069F}{A} = \frac{0,069 \cdot 160 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 22,1 \text{ МПа}.$$

Проверяем прочность стержневой системы по наиболее нагруженному стержню

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(2)} = 154,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность заданной стержневой системы обеспечивается.

Примечание. Так как в стержневых системах, работающих на растяжение-сжатие, продольные усилия распределяются равномерно по длине стержня, то эпюры продольных усилий очевидны, и строить их не обязательно. Тогда коэффициенты и свободные члены канонических уравнений находятся по формулам (6) без применения правила Верещагина, которое, впрочем, при расчете стержневых СНС, работающих на растяжение-сжатие, не приводит к упрощению расчетов.

9. Находим величину и направление перемещения узла С.

Величина перемещения определяется по формуле

$$\delta_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2},$$

где x_C и y_C – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение узла С.

При этом, вертикальное перемещение равно удлинению стержня 2

$$y_N = \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA} = \frac{0,483 F \cdot l}{EA} = \frac{0,483 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,77 \text{ мм}.$$

Чтобы определить горизонтальное перемещение x_C , воспользуемся методом единичной нагрузки. Для этого прикладываем в основной системе к узлу C горизонтальную единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 14) и находим усилия в стержнях:

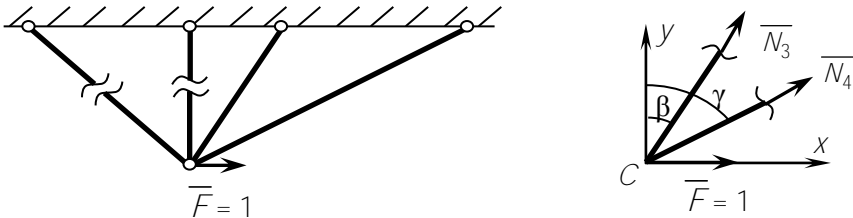


Рис. 14

$$\begin{aligned} \sum x = 0; & \quad \bar{N}_3 \cdot \sin \beta + \bar{N}_4 \cdot \sin \gamma + 1 = 0; \\ \sum y = 0; & \quad \bar{N}_3 \cdot \cos \beta + \bar{N}_4 \cdot \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, с учетом заданных значений углов получим

$$\bar{N}_3 = 1; \quad \bar{N}_4 = -1,732.$$

Затем строим единичную эпюру продольных сил (рис. 15). После чего, перемножив суммарную эпюру продольных сил N (см. рис. 13) и построенную единичную эпюру, находим ис-

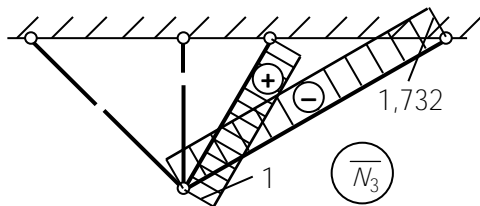


Рис. 15

комое перемещение.

$$x_C = \sum \frac{N \cdot \overline{N_3}}{EA} \cdot l_i = \frac{F}{EA} \cdot [0,310 \cdot 1,155 / \cdot 1 + 0,069 \cdot 2 / \cdot (-1,732)] =$$

$$= \frac{0,119 F l}{EA} = \frac{0,119 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,19 \text{ м}.$$

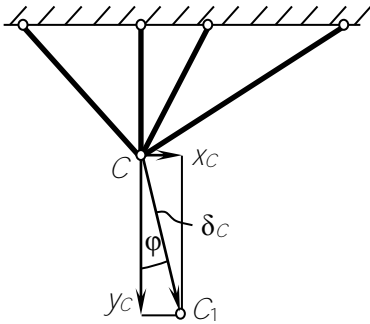


Рис. 16

Тогда

$$\delta_N = \sqrt{0,19^2 + 0,77^2} = 0,79 \text{ м}.$$

Определяем направление перемещения узла C (рис. 16)

$$\varphi = \arctg \frac{x_C}{y_C} = \arctg \frac{0,19}{0,77} = 13,86^\circ.$$

Пример 3. Стальной ступенчатый вал жестко установлен в опорах A и B и нагружен в сечении C скручивающим моментом T (рис. 17). Построить

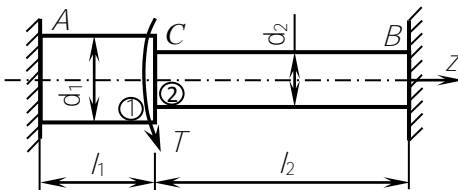


Рис. 17

эпюры внутренних крутящих моментов и углов закручивания сечений вала, если $T = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $l_1 = 0,4 \text{ м}$; $l_2 = 0,8 \text{ м}$; $d_1 = 6 \text{ см}$; $d_2 = 4 \text{ см}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости вала

$$E = N_{\text{всг.}} - N_{\text{од. н.}} = 2 - 1 = 1.$$

2. Выбираем основную и составляем эквивалентную системы (рис. 18).

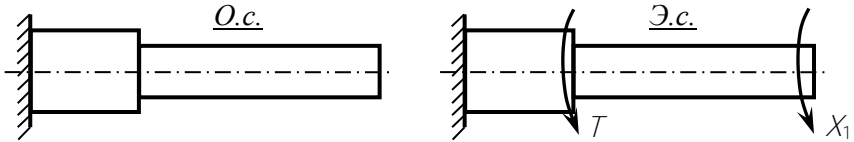


Рис. 18

3. Записываем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Строим эпюры крутящих моментов от действия на основную систему единичного $\overline{X}_1 = 1$ и внешнего скручивающего T моментов (рис. 19).

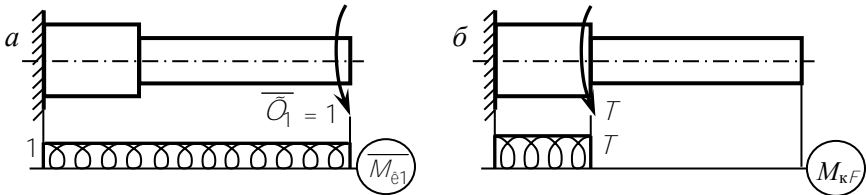


Рис. 19

Примечание. Крутящий момент в сечении вала считаем положительным, если внешний момент стремится повернуть отсеченную часть вала по часовой стрелке при взгляде на эту часть со стороны сечения.

5. Вычисляем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1F} канонического уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\overline{M_{\hat{e}1}}^2}{Gl_{pi}} \cdot l_i = \frac{1^2 \cdot l_1}{Gl_{p1}} + \frac{1^2 \cdot l_2}{Gl_{p2}} = \frac{l_1}{Gl_{p1}} \cdot \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) = \\ &= \frac{l_1}{Gl_{p1}} \cdot \left(1 + \frac{0,8}{0,4} \cdot \left(\frac{6}{4} \right)^4 \right) = \frac{11,1 l_1}{Gl_{p1}}; \\ \Delta_{1F} &= \sum \frac{M_{\hat{e}F} \cdot \overline{M_{\hat{e}1}}}{Gl_{pi}} \cdot l_i = \frac{T \cdot 1 \cdot l_1}{Gl_{p1}} = \frac{T l_1}{Gl_{p1}}. \end{aligned}$$

6. Находим лишнее неизвестное

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{T}{11,1} = -0,09T.$$

Знак «−» указывает, что направление X_1 противоположно показанному на рис. 18.

7. Определяем крутящие моменты на участках вала по формуле $\hat{l}_{\hat{e}} = \hat{l}_{\hat{e}F} + \overline{M_{\hat{e}1}} \cdot X_1$ и строим эпюру крутящих моментов M_k (рис. 20, а):

$$\hat{l}_{\hat{e}1} = T + 1 \cdot (-0,09T) = 0,91T = 0,91 \cdot 50 = 45,5 \text{ êí} \cdot \text{í};$$

$$\hat{l}_{\hat{e}2} = 0 + 1 \cdot (-0,09T) = -0,09T = -0,09 \cdot 50 = -4,5 \text{ êí} \cdot \text{í}.$$

8. Для построения эпюры углов закручивания сечений вала находим значение угла поворота характерного сечения (ступеньки вала) методом единичной нагрузки. Для этого прикладываем единичный момент $\overline{T} = 1$ в сечении C и строим эпюру крутящих моментов $\overline{T}_{\hat{e}2}$ от этой нагрузки (рис. 20, б). Далее вычисляем

$$\varphi_C = \sum \frac{\hat{l}_{\hat{e}} \cdot \overline{T}_{\hat{e}2}}{Gl_{pi}} \cdot l_i = \frac{0,91T \cdot 1 \cdot l_1}{G \cdot \pi d_1^4 / 32} = \frac{45,5 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 60^4 / 32} = 0,179 \text{ ðàä}.$$

Строим эпюру углов закручивания φ (рис. 20, в).

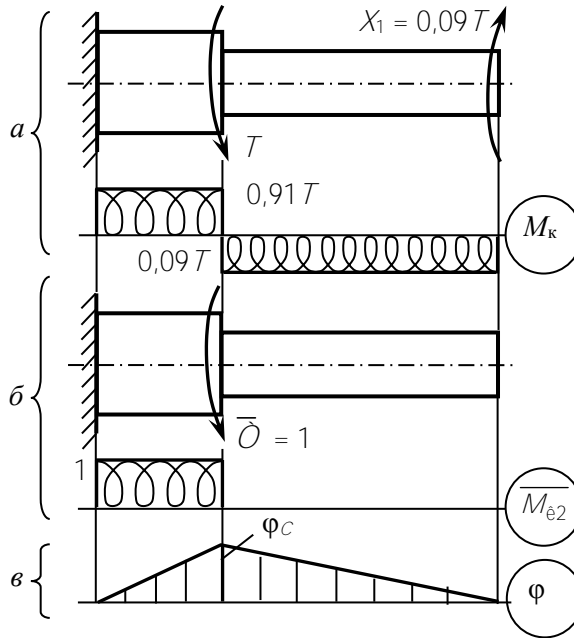


Рис. 20

9. Для проверки правильности решения находим угол закручивания сечения B , который должен равняться нулю. Перемножая эпюры M_k (рис. 20, а) и \bar{T}_{e1} (рис. 19), получим

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \sum \frac{\bar{l}_{e1} \cdot \bar{T}_{e1}}{Gl_{\rho i}} \cdot l_i = \frac{0,91T \cdot 1 \cdot l_1}{Gl_{\rho 1}} + \frac{(-0,09T) \cdot 1 \cdot l_2}{Gl_{\rho 2}} = \frac{32T}{\pi G} \cdot \left(\frac{0,91l_1}{d_1^4} - \frac{0,09l_2}{d_2^4} \right) = \\ &= \frac{32 \cdot 50 \cdot 10^6}{\pi \cdot 8 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{0,91 \cdot 0,4}{6^4} - \frac{0,09 \cdot 0,8}{4^4} \right) \cdot \frac{10^3}{10^4} = 625 \cdot (0,028 - 0,028) = \\ &= 0,176 - 0,176 = 0. \end{aligned}$$

Пример 4. Подобрать двуглавое сечение неразрезной балки с постоянной жесткостью по длине, находящейся под внешним силовым воздействием (рис. 21, а), при $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости балки

$$E = N_{\text{всв.}} - N_{\text{оп. н.}} = 6 - 3 = 3.$$

2. Выбираем основную систему. Для этого устанавливаем в сечениях над промежуточными опорами 2 и 3 и в защемлении 1 шарниры (рис. 21, б). В качестве неизвестных принимаем опорные изгибающие моменты X_1, X_2, X_3 .

3. Составляем канонические уравнения метода сил. Для трижды статически неопределимой балки с учетом того, что $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$, матрица системы канонических уравнений приобретает трехдиагональную структуру

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + 0 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$0 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

При этом, такая структура уравнений сохраняется при любом числе пролетов.

4. Строим единичные (рис. 21, в) и грузовые (рис. 21, г) эпюры изгибающих моментов, рассматривая каждый пролет балки как отдельную двухопорную балку, причем последний пролет рассматривается вместе с консолью.

5. Находим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений по формулам (5) с применением правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{T}_1^{-2} \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{T}_2^{-2} \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{T}_3^{-2} \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \sum \int \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_3 \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1,5}{EI}.$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \sum \int \dot{\lambda}_F \cdot \bar{T}_1 \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \right] = \frac{45}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \sum \int \dot{\lambda}_F \cdot \bar{T}_2 \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{525}{EI};$$

$$\Delta_{3F} = \frac{1}{EI} \sum \int \dot{\lambda}_F \cdot \bar{T}_3 \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 360 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{430}{EI}.$$

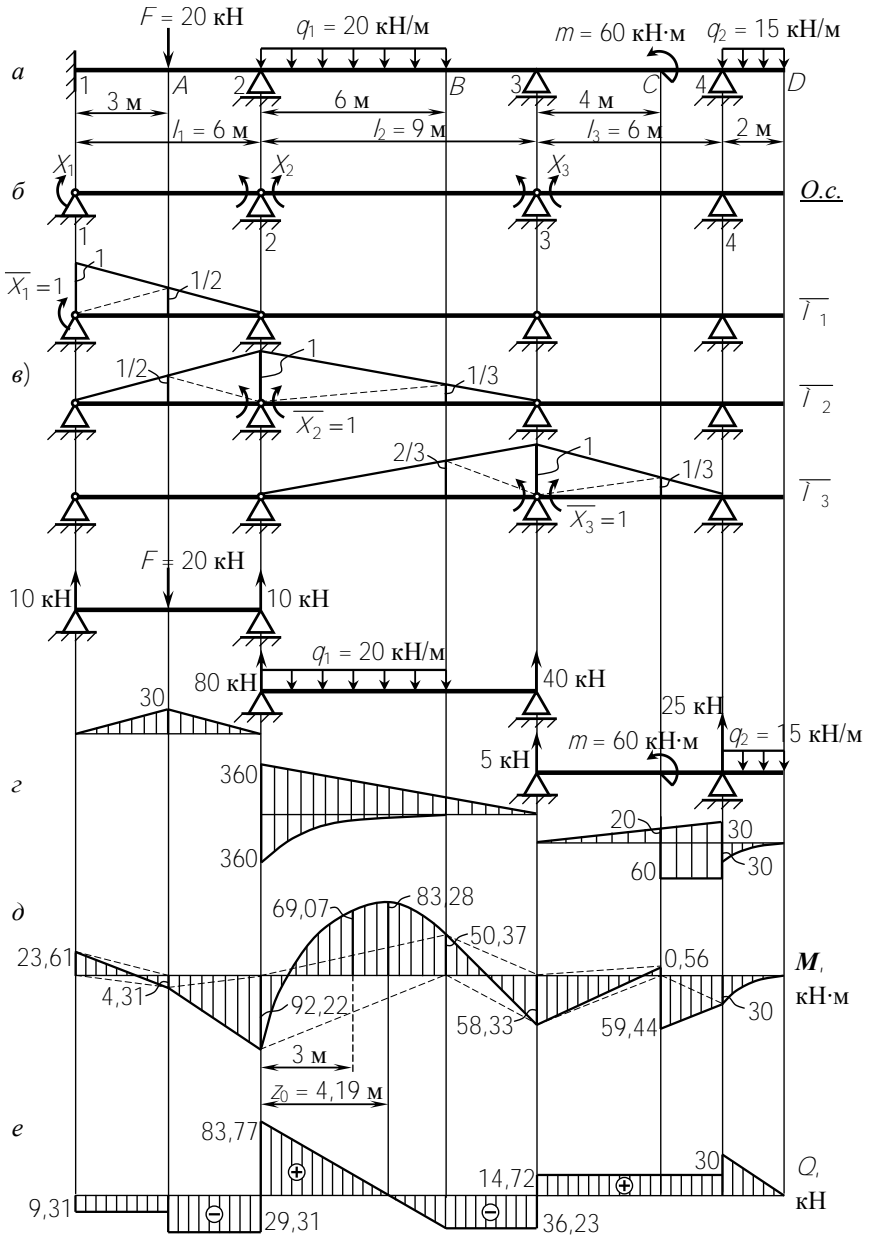


Рис. 21

6. Подставляя найденные величины в систему канонических уравнений и решая ее, находим

$$X_1 = 23,61 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = -92,22 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_3 = -58,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7. Для вычисления внутренних изгибающих моментов в характерных сечениях балки используем формулу

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3 + M_F.$$

Вычисляем

$$I_1 = 1 \cdot 23,61 = 23,61 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot 23,61 + \frac{1}{2} \cdot (-92,22) + 30 = -4,31 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_2 = 1 \cdot (-92,22) = -92,22 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_A = \frac{1}{3} \cdot (-92,22) + \frac{2}{3} \cdot (-58,33) + 120 = 50,37 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_3 = 1 \cdot (-58,33) = -58,33 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_4 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad I_D = 0;$$

$$I_N^{\text{éää}} = \frac{1}{3} \cdot (-58,33) + 20 = 0,56 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_N^{\text{ïöää}} = 0,56 - 60 = -59,44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Изгибающий момент посередине участка с распределенной нагрузкой q_1 равен

$$M_{z=3} = \frac{1+1/3}{2} \cdot (-92,22) + \frac{2/3}{2} \cdot (-58,33) + \left(\frac{360+120}{2} - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \right) = 69,07 \text{ е́л} \cdot \text{м}.$$

По результатам расчетов строим эпюру изгибающих моментов M (рис. 21, д).

8. Для вычисления внутренних поперечных сил используем дифференциальную зависимость Журавского при изгибе и формулу для определения поперечной силы на участке, где действует распределенная нагрузка

$$Q = \frac{dM}{dz}, \quad Q = Q_0 + \frac{M_i \text{ ðàà} - M_{\text{éàà}}}{l}.$$

Здесь Q_0 – поперечная сила в сечении от распределенной нагрузки. При этом знак поперечной силы при рассмотрении балки слева направо устанавливается по следующему правилу: *на участках с возрастающим изгибающим моментом поперечная сила положительная, и наоборот*. Вычисляем

$$Q_{A1} = -\frac{23,61 + 4,31}{3} = -9,31 \text{ кН};$$

$$Q_{A2} = -\frac{92,22 - 4,31}{3} = -29,3 \text{ е́л};$$

$$Q_2^{\text{ ðàà}} = \frac{q_1 \cdot (l_2 - 3)}{2} + \frac{M_B - M_2}{l_2 - 3} = \frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{50,37 - (-92,22)}{6} = 83,77 \text{ кН};$$

$$Q_A = -\frac{q_1 \cdot (l_2 - 3)}{2} + \frac{M_B - M_2}{l_2 - 3} = -\frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{50,37 - (-92,22)}{6} = -36,23 \text{ кН};$$

$$Q_{A3} = -\frac{50,37 + 58,33}{3} = -36,23 \text{ кН};$$

$$Q_{3N} = \frac{58,33 + 0,56}{4} = 14,72 \text{ кН};$$

$$Q_{N4} = \frac{59,44 - 30}{2} = 14,72 \text{ кН};$$

$$Q_4^j = q_2 \cdot a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кН}; \quad Q_D = 0.$$

По результатам расчетов строим эпюру поперечных сил Q (рис. 21, *e*).

Вычисляем максимальный изгибающий момент на участке с распределенной нагрузкой q_1 . По эпюре Q находим

$$z_0 = \frac{Q_{\max}}{q_1} = \frac{83,77}{20} = 4,19 \text{ м};$$

$$M_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot z_0}{2} + M_2 = \frac{83,77 \cdot 4,19}{2} - 92,22 = 83,28 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9. Проверяем правильность выполненных расчетов.

Статическая проверка. Из эпюры Q находим опорные реакции неразрезной балки по формуле $R_n = Q_{i \text{ } \partial \text{ } \partial \text{ } \partial}^n - Q_{\text{ } \partial \text{ } \partial \text{ } \partial}^n$, где $Q_{i \text{ } \partial \text{ } \partial \text{ } \partial}^n$ и $Q_{\text{ } \partial \text{ } \partial \text{ } \partial}^n$ – поперечные силы, действующие справа и слева от n -й опоры. Вычисляем

$$R_1 = -9,31 \text{ кН}; \quad R_2 = 83,77 - (-29,31) = 113,08 \text{ кН};$$

$$R_3 = 14,72 - (-36,23) = 50,95 \text{ кН}; \quad R_4 = 30 - 14,72 = 15,28 \text{ кН}.$$

Проверяем равновесие всей балки:

$$\sum y = 0; \quad \sum R_n + \sum F = 0;$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - F - q_1 \cdot (l_2 - 3) - q_2 \cdot a = 0;$$

$$-9,31 + 113,08 + 50,95 + 15,28 - 20 - 20 \cdot 6 - 15 \cdot 2 = 0;$$

$$\underline{-179,31 + 179,31 = 0.}$$

Кинематическая (деформационная) проверка.

Она заключается в проверке равенства нулю угла поворота сечения в защемлении $\theta_1 = 0$, а также взаимного угла поворота сечений над промежуточными опорами (например, $\theta_2 = 0$). Проверяем последнее условие:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \sum \int \frac{\dot{l} \cdot \overline{l}}{EI} \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{3 \cdot 23,61}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 4,31}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 4,31}{2} \right] \times \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{3 \cdot 92,22}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1+1/3}{2} + \frac{6 \cdot 50,37}{2} \times \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{6 \cdot 92,22}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{3 \cdot 50,37}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3 \cdot 58,33}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Big| = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot (346,64 - 346,64) = 0. \end{aligned}$$

10. Подбираем двутавровое сечение балки. Для этого из условия прочности при изгибе находим требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{92,22 \cdot 10^6}{160} = 576,35 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 576,35 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр № 33, у которого $W_x = 597 \text{ см}^3$.

1.2. Расчет на действие температуры

Пример 5. Абсолютно жесткий брус BD закреплен в шарнирной опоре B и поддерживается посредством шарниров C и D двумя стержнями 1 и 2, изготовленными из разных материалов (рис. 22). Вычислить напряжения в стержнях и вертикальное перемещение точки D при нагреве всей конструкции на $\Delta t = 50^\circ$, если $a = 2$ м; $h_1 = 1$ м; $h_2 = 1,5$ м; $A_1 = 16 \text{ см}^2$; $A_2 = 10 \text{ см}^2$; $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;

$E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_1 = 110 \cdot 10^{-7}$; $\alpha_2 = 220 \cdot 10^{-7}$.

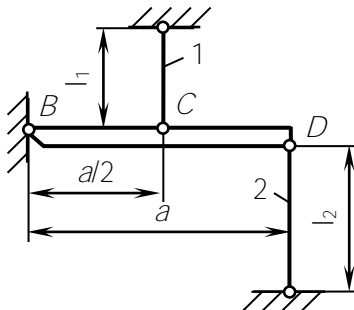


Рис. 22

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости системы:

$$E = N_{\text{вс}} - N_{\text{од. н.}} = 3 - 2 = 1.$$

2. Выбираем основную и составляем эквивалентную систему (рис. 23).

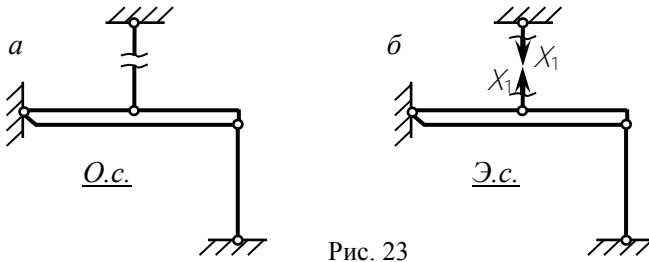


Рис. 23

3. Записываем каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

4. Определяем продольные усилия в стержнях от действия на основную систему единичной нагрузки $\bar{Q}_1 = 1$ (рис. 24):

$$\bar{N}_1 = \bar{X}_1 = 1; \quad \sum m_B = 0; \quad \bar{X}_1 \cdot a/2 - \bar{N}_2 \cdot a = 0; \quad \rightarrow \quad \bar{N}_2 = 1/2.$$

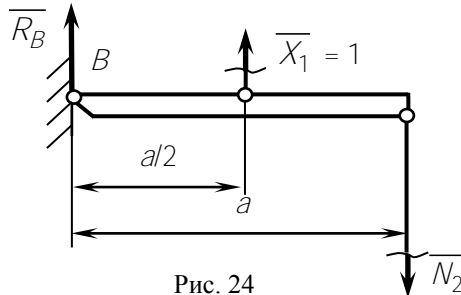


Рис. 24

По формуле (6) находим коэффициент δ_{11} канонического уравнения

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 \cdot l_i}{E_i A_i} = \frac{\bar{N}_1^2 \cdot l_1}{E_1 A_1} + \frac{\bar{N}_2^2 \cdot l_2}{E_2 A_2} = \frac{\bar{N}_1^2 \cdot l_1}{E_1 A_1} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\bar{N}_2^2}{\bar{N}_1^2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \right) = \frac{l^2 \cdot h}{E_1 A_1} \cdot \left(1 + \frac{(1/2)^2}{1^2} \cdot \frac{1.5}{1} \cdot \frac{(2,1 \cdot 10^5) \cdot 16}{(0,7 \cdot 10^5) \cdot 10} \right) = \frac{2,8h}{E_1 A_1}.$$

По формуле (7) находим свободный член Δ_{1t} уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \sum \alpha_j \cdot \bar{N}_j \cdot l_j \cdot \Delta t_j = \alpha_1 \cdot \bar{N}_1 \cdot h \cdot \Delta t + \alpha_2 \cdot \bar{N}_2 \cdot l_2 \cdot \Delta t = \alpha_1 \cdot \bar{N}_1 \cdot h \cdot \Delta t \times \\ &\times \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_1} \cdot \frac{l_2}{h} \right) = \alpha_1 \cdot 1 \cdot h \cdot \Delta t \cdot \left(1 + \frac{220 \cdot 10^{-7}}{110 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1/2}{1} \cdot \frac{1,5}{1} \right) = \\ &= 2,5 \cdot \alpha_1 \cdot h \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

5. Вычисляем лишнее неизвестное усилие

$$\begin{aligned} X_1 = N_1 &= -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{2,5 \cdot \alpha_1 \cdot h \cdot \Delta t}{2,8h} \cdot E_1 A_1 = -0,893 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t \cdot E_1 A_1 = \\ &= -0,893 \cdot (110 \cdot 10^{-7}) \cdot 50 \cdot (2,1 \cdot 10^5) \cdot (16 \cdot 10^2) = -165026 \text{ л}. \end{aligned}$$

Известно, что в статически определимых системах при их нагреве продольные усилия в стержнях не возникают. Поэтому усилие в стержне 2 основной системы от нагрева $N_{2t} = 0$. Тогда получим

$$N_2 = N_{2t} + \bar{N}_2 \cdot X_1 = 0 + 0,5 \cdot (-165026) = -82513 \text{ л}.$$

6. Вычисляем напряжения в стержнях

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-165026}{16 \cdot 10^2} = -103,1 \text{ л/л}^2;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-82513}{10 \cdot 10^2} = -82,5 \text{ л/л}^2.$$

7. Определяем вертикальное перемещение точки D

$$\delta_D = \Delta l_{2t} + \Delta l_{2R_t} = \alpha_2 \cdot l_2 \cdot \Delta t + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 A_2} = 220 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 50 - \frac{82513 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = 1,65 (\uparrow) - 1,77 (\downarrow) = -0,12 \text{ м} (\downarrow) - \text{точка } D$$

перемещается вниз.

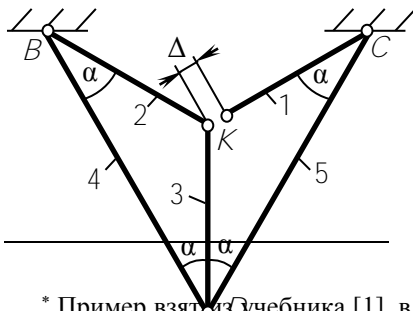
8. Проверяем правильность расчетов. Для этого вычисляем вертикальное перемещение точки C . Исходя из геометрических размеров элементов системы, должно выполняться равенство $\delta_D = 2\delta_C$. Вычисляем:

$$\delta_C = \Delta l_{1t} + \Delta l_{1R_t} = \alpha_1 \cdot l_1 \cdot \Delta t + \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 A_1} = 110 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 50 - \frac{165026 \cdot 1 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^2} = 0,55 (\downarrow) - 0,49 (\uparrow) = 0,06 \text{ м} (\downarrow) - \text{точка } C$$

также перемещается вниз.

При этом $\delta_D = 0,12 \text{ м} = 2\delta_C = 2 \cdot 0,06 = 0,12 \text{ м}$. Следовательно, все расчеты выполнены правильно.

1.3. Расчет на монтажную нагрузку



Пример 6.* При сборке стержневой системы, состоящей из пяти стальных стержней одинакового поперечного сечения A (рис. 25), оказалось, что один из стержней (стержень 1) выполнен

* Пример взят из учебника [1], в котором решение выполнено с использованием уравнений статики и уравнений совместности перемещений, что приводит к большому объему вычислений. При этом в [1] многие громоздкие вычисления опущены.

короче номинального размера на величину $\Delta = 5$ мм. Вычислить напряжение в стержнях после сборки, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

$\alpha = 30^\circ$. Длина стержней $l_1 = l_2 = l_3 = l = 3$ м.

Решение

Вычисляем длины других стержней:

$$l_4 = l_5 = \sqrt{2l^2 - 2l^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)} = l\sqrt{2(1 - \cos 120^\circ)} = l\sqrt{3}.$$

1. Устанавливаем степень статической неопределимости системы. Имеем: $N_{\text{неизв.}} = 5$ (пять стержней); $N_{\text{ур.ст.}} = 4$ (можно записать для каждого из узлов K и D по два уравнения статики). Тогда $\Pi = 5 - 4 = 1$ – система один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему, разрезав стержень 1 , и составляем эквивалентную систему (рис. 26).

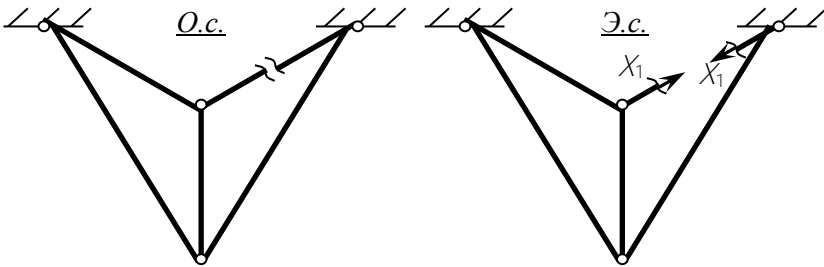


Рис. 26

3. Записываем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = \Delta.$$

4. Нагружаем основную систему единичной силой $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 27) и находим усилия в стержнях, вырезая из системы поочередно узлы K и D и рассматривая их равновесие.

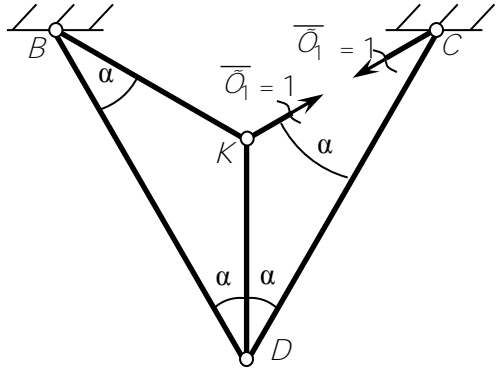
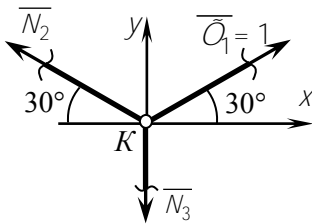


Рис. 27

a Узел K



б Узел D

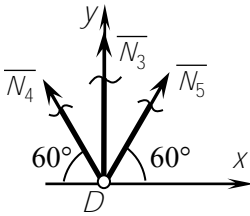


Рис. 28

Для узла K (рис. 28, а)

$$\sum x=0; 1 \cdot \cos 30^\circ - \bar{N}_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum y=0; -\bar{N}_3 + (\bar{N}_2 + 1) \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$\bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1; \quad \bar{N}_1 = \bar{N}_4 = 1.$$

Для узла D (рис. 28, б)

$$\sum x=0; (\bar{N}_5 - \bar{N}_4) \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum y=0; (\bar{N}_5 + \bar{N}_4) \cdot \cos 30^\circ + \bar{N}_3 = 0.$$

Отсюда получим

$$\bar{N}_4 = \bar{N}_5 = -\frac{\bar{N}_3}{2 \cdot \cos 30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,577.$$

Строим эпюру единичных усилий (рис. 29).

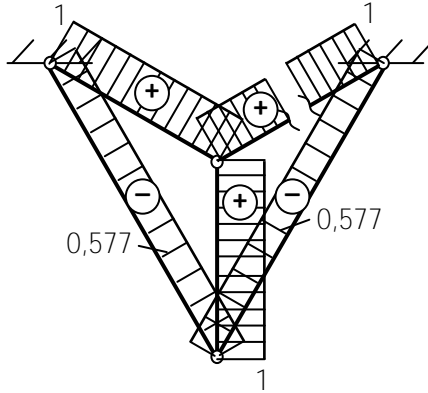


Рис. 29

5. Вычисляем коэффициент δ_{11} канонического уравнения

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 \cdot l_i}{EA} = \frac{1}{EA} \cdot [(1 \cdot 1) \cdot 3 + (0,577 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,577) \cdot 2] = \frac{4,155}{EA}.$$

Свободный член канонического уравнения при расчете на монтажные напряжения равен нулю, так как отсутствует внешнее силовое воздействие на систему.

6. Находим лишнее неизвестное X_1

$$X_1 = \frac{\Delta}{\delta_{11}} = \frac{\Delta \cdot EA}{4,155 l} = \frac{0,241 \Delta}{l} \cdot EA.$$

7. Определяем усилия в стержнях

$$N_1 = N_2 = N_3 = X_1 = \frac{0,241 \Delta}{l} \cdot EA.$$

Усилия в других стержнях находятся по формуле

$$N_j = \bar{N}_j \cdot X_1 + N_{jM},$$

где N_{iM} – усилия в стержнях основной системы, вызванные неточностью изготовления стержней; $N_{iM} = 0$, так как основная система статически определима.

Тогда

$$N_4 = N_5 = \bar{N}_4 \cdot X_1 = -0,577 \cdot \frac{0,241\Delta}{l} \cdot EA = -\frac{0,139\Delta}{l} \cdot EA.$$

8. Вычисляем напряжения в стержнях

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = \frac{N_1}{A} = \frac{0,241\Delta}{l} \cdot E = \frac{0,241 \cdot 5}{3 \cdot 10^3} \cdot 2 \cdot 10^5 = 80,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \sigma_{(5)} = \frac{N_4}{A} = -\frac{0,139\Delta}{l} \cdot E = -\frac{0,139 \cdot 5}{3 \cdot 10^3} \cdot 2 \cdot 10^5 = -46,3 \text{ МПа}.$$

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Энергетический метод наряду с методом сил, может также успешно применяться для расчета различных СНС. Этот метод позволяет не только находить перемещения и раскрывать статическую неопределимость в стержневых и рамных системах, но и является основой ряда приближенных методов, применяемых в сопротивлении материалов и теории упругости для прочностного расчета конструкций. Он основан на законе минимума потенциальной энергии деформации. Согласно этому закону любое напряженное состояние равновесия упругого тела дает минимум потенциальной энергии деформации. Следовательно, все неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_i , от которых зависит потенциальная энергия деформации тела, могут быть определены из условий минимума энергии, а именно:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0. \quad (8)$$

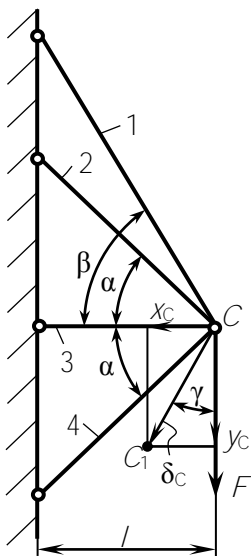


Рис. 30

Этот метод особенно эффективен при определении перемещений узлов или сечений элементов СНС. Он широко применяется в вузах западных стран (Франция, Канада и др.). В высших учебных заведениях Республики Беларусь он, к сожалению, не находит применения.

Рассмотрим применение энергетического метода на конкретных примерах.

Пример 7. Определить усилия в стержнях 4-стержневой системы, нагруженной силой F (рис. 30). Найти величину и направление полного перемещения узла C . Все стержни имеют одинаковое поперечное сечение A и выполнены из одного материала. Принять $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $l = 1$ м, $F = 40$ кН, $A = 5$

см^2 , $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

Решение этой задачи традиционным методом является трудновыполнимой задачей. Система является два раза статически неопределимой. Вырезаем узел C и рассматриваем его равновесие. Полагаем, что все стержни растянуты (рис. 31). Записываем уравнения статики:

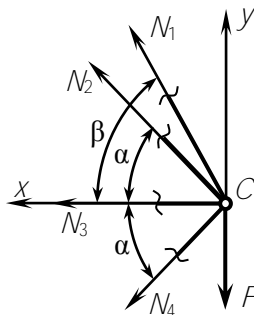


Рис. 31

$$\sum x = 0; \quad N_1 \cdot \cos \beta + N_2 \cdot \cos \alpha + N_3 + N_4 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum \delta = 0; \quad N_1 \cdot \sin \beta + N_2 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \alpha - F = 0.$$

Выражаем усилия в стержнях 3 и 4 через усилия N_1 и N_2 :

$$N_4 = N_1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + N_2 - \frac{F}{\sin \alpha} = 1,225 N_1 + N_2 - 1,414 F;$$

$$N_3 = -N_1 \cdot \cos \beta - N_2 \cdot \cos \alpha - \left(N_1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + N_2 - \frac{F}{\sin \alpha} \right) \cdot \cos \alpha =$$

$$-1,366 N_1 - 1,414 N_2 + F.$$

Вычисляем потенциальную энергию деформации системы по формуле

$$U = \sum \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i} = \frac{1}{2EA} \cdot \left(N_1^2 l_1 + N_2^2 l_2 + N_3^2 l_3 + N_4^2 l_4 \right) = \frac{l}{2EA} \times$$

$$\times \left[2N_1^2 + 1,414 N_2^2 + (-1,366 N_1 - 1,414 N_2 + F)^2 + \right.$$

$$\left. + 1,414 (1,225 N_1 + N_2 - 1,414 F)^2 \right],$$

где длины стержней равны

$$l_1 = \frac{l}{\cos \beta} = \frac{l}{\cos 60^\circ} = 2l;$$

$$l_2 = l_4 = \frac{l}{\cos \alpha} = \frac{l}{\cos 45^\circ} = 1,414 l; \quad l_3 = l.$$

Далее вычисляем

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{l}{2EA} \left[4N_1 - 2 \cdot (-1,366 N_1 - 1,414 N_2 + F) \cdot 1,366 + \right.$$

$$\left. + 2,828 \cdot (1,225 N_1 + N_2 - 1,414 F) \cdot 1,225 \right] = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{l}{2EA} \left[2,828 N_2 - 2 \cdot (-1,366 N_1 - 1,414 N_2 + F) \cdot 1,414 + 2,828 \cdot (1,225 N_1 + N_2 - 1,414 F) \right] = 0.$$

После преобразований получим

$$11,976 N_1 + 7,327 N_2 - 7,632 F = 0;$$

$$9,656 N_2 + 7,327 N_1 - 6,828 F = 0.$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$N_1 = 0,382 F = 0,382 \cdot 40 = 15,28 \text{ êl} ;$$

$$N_2 = 0,417 F = 0,417 \cdot 40 = 16,68 \text{ êl} .$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_3 &= -1,366 \cdot 0,382 F - 1,414 \cdot 0,417 F + F = -0,112 F = \\ &= -0,112 \cdot 40 = -4,48 \text{ êl} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4 &= 1,225 \cdot 0,382 F + 0,417 F - 1,414 F = -0,529 F = \\ &= -0,529 \cdot 40 = -21,16 \text{ êl} . \end{aligned}$$

Знаки показывают, что стержни 1 и 2 растянуты, а стержни 3 и 4 сжаты.

Потенциальная энергия деформации стержневой системы будет равна

$$U = \frac{l}{2EA} \left[2 \cdot (0,382F)^2 + 1,414 \cdot (0,417F)^2 + (-0,112F)^2 + 1,414 \cdot (-0,529F)^2 \right] =$$

$$= \frac{0,473F^2 l}{EA}.$$

Находим величину перемещения узла C . Горизонтальное перемещение находится просто

$$x_{\bar{N}} = \Delta/l_3 = \frac{N_3/l_3}{EA} = \frac{-0,112Fl}{EA} = -\frac{0,112 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = -0,045 \text{ м} \quad (\leftarrow).$$

Вертикальное перемещение y_C находим, используя закон сохранения энергии $U = W$, где W – работа внешней силы на перемещении в ее направлении. При этом по теореме Клапейрона $W = Fy_C/2$. Тогда получим

$$y_{\bar{N}} = \frac{2W}{F} = \frac{2U}{F} = 2 \cdot \frac{0,473F^2 l}{EAF} = \frac{0,946Fl}{EA} = \frac{0,946 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} =$$

$$= 0,378 \text{ м} \quad (\downarrow).$$

Перемещение y_C можно также определить по теореме Кастigliано:

$$\delta_F = y_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{0,473F^2 l}{EA} \right) = \frac{0,946Fl}{EA} = 0,378 \text{ м}.$$

Таким образом, полное перемещение узла C равно

$$\delta_{\bar{N}} = \bar{N}\bar{N}_1 = \sqrt{x_{\bar{N}}^2 + y_{\bar{N}}^2} = \sqrt{0,045^2 + 0,378^2} = 0,381 \text{ мм}.$$

Находим направление перемещения узла C :

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{x_{\bar{N}}}{y_{\bar{N}}} = \operatorname{arctg} \frac{0,045}{0,378} = 6,789^\circ.$$

Пример 8. Стальной ступенчатый вал (см. пример 3, рис. 17) жестко установлен в опорах A и B и нагружен в сечении C скручивающим моментом T . Построить эпюры внутренних крутящих моментов и углов закручивания вала.

Решение

Находим потенциальную энергию деформации при кручении стержня:

$$U = \sum \frac{M_{\bar{e}i}^2 l_i}{2G_i I_{\rho i}} = \frac{T_1^2 l_1}{2GI_{\rho 1}} + \frac{T_2^2 l_2}{2GI_{\rho 2}} = \frac{l_1}{2GI_{\rho 1}} \cdot \left(T_1^2 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{I_{\rho 1}}{I_{\rho 2}} \cdot T_2^2 \right) = \frac{l_1}{2GI_{\rho 1}} \times$$

$$\times \left(T_1^2 + \frac{0,8}{0,4} \cdot \left(\frac{6}{4} \right)^4 \cdot T_2^2 \right) = \frac{l_1}{2GI_{\rho 1}} \cdot \left(T_1^2 + 10,125 \cdot T_2^2 \right).$$

Из рассмотрения равновесия стержня имеем

$$\sum M_z = 0; \quad T - T_1 - T_2 = 0; \quad \rightarrow \quad T_2 = T - T_1.$$

Тогда

$$U = \frac{l_1}{2GI_{\rho 1}} \cdot \left[T_1^2 + 10,125 \cdot (T - T_1)^2 \right];$$

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = \frac{l_1}{2GI_{\rho 1}} \cdot \left[2T_1 + 2 \cdot 10,125 \cdot (T - T_1) \cdot (-1) \right] = 0; \quad \rightarrow \quad 22,25T_1 - 20,25T = 0;$$

$$T_1 = \frac{20,25T}{22,25} = 0,91T; \quad T_2 = T - T_1 = 0,09T.$$

Здесь знаки «плюс» показывают, что оба реактивных момента первоначально (при составлении уравнения равновесия) направлены правильно, т. е. в сторону, противоположную направлению внешнего момента. Дальнейшие расчеты по построению эпюр остаются такими же и опускаются.

Пример 9. Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 32) и определить угловое и вертикальное перемещение сечения C .

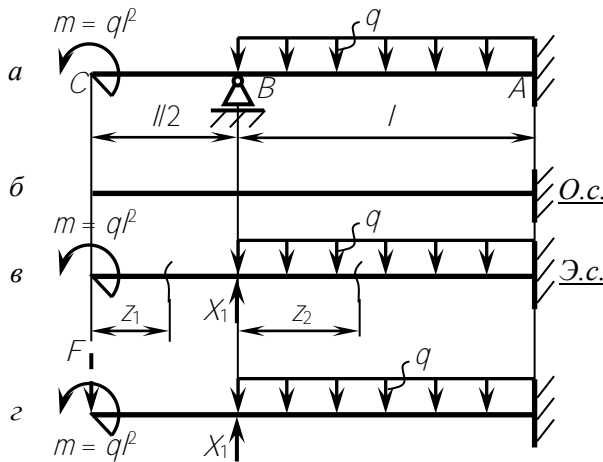


Рис. 32

Решение

Балка один раз статически неопределима. Выбираем основную и составляем эквивалентную системы (см. рис. 32). Выражаем внутренние изгибающие моменты в сечениях балки:

$$M_{\bar{N}A} = -m; \quad M_{AA} = -m + X_1 z_2 - \frac{q z_2^2}{2}.$$

Находим неизвестную реакцию X_1 , применяя теорему Кастилиано для определения вертикального перемещения сечения B , которое равно нулю

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \text{где} \quad U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

Чтобы избежать необходимости возведения в квадрат изгибающих моментов, используем метод дифференцирования сложной функции. Например, если

$$U = f_1(M), \quad \text{а} \quad M = f_2(X), \quad \text{то} \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}.$$

Далее вычисляем

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial X_1} \right)}{EI} dz = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_{\bar{N}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{N}\bar{A}}}{\partial X_1} \right) dz + \int_0^l M_{\bar{A}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{A}\bar{A}}}{\partial X_1} \right) dz \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-m)(0) dz + \int_0^l \left(-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} \right) z \cdot dz \right] = \frac{1}{EI} \left(-\frac{ml^2}{2} + \frac{X_1 l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$X_1 = R_B = \frac{12m + 3ql^2}{8l} = \frac{15ql}{8}.$$

Угол поворота сечения C также определяем по теореме Кастилиано:

$$\begin{aligned}
\theta_C &= \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_{\bar{N}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{N}\bar{A}}}{\partial m} \right) dz + \int_0^l M_{\bar{A}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{A}\bar{A}}}{\partial m} \right) dz \right] = \\
&= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-m)(-1) dz + \int_0^l \left(-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} \right) (-1) dz \right] = \\
&= \frac{1}{EI} \left(\frac{ml}{2} + ml - X_1 \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{q}{2} \cdot \frac{l^3}{3} \right) = \frac{35ql^3}{48EI}.
\end{aligned}$$

Для определения вертикального перемещения сечения C прикладываем в этом сечении фиктивную силу F (рис. 32, z). После интегрирования принимаем $F = 0$ и находим искомое перемещение.

Записываем выражения моментов в сечениях с учетом силы F .

$$M_{\bar{N}\bar{A}} = -m - Fz_1;$$

$$M_{\bar{A}\bar{A}} = -m + X_1 z_2 - \frac{qz_2^2}{2} - F \left(\frac{l}{2} + z_2 \right).$$

Далее вычисляем

$$y_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_{\bar{N}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{N}\bar{A}}}{\partial F} \right) dz + \int_0^l M_{\bar{A}\bar{A}} \left(\frac{\partial M_{\bar{A}\bar{A}}}{\partial F} \right) dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-m - Fz) \cdot (-z) \cdot dz + \int_0^l \left[-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} - F \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right) \right] \cdot \left(-\frac{l}{2} - z \right) \cdot dz \right] =$$

$$= \frac{23ql^4}{96EI}.$$

Как уже отмечалось, расчет сложных стержневых СНС методом сравнения деформаций может представлять трудновыполнимую задачу (см. пример 7). Кроме того, этот метод может приводить к ошибочным результатам вследствие несоответствия между напряженным и деформированным состояниями (так называемые статическая и геометрическая стороны задачи). Такие ошибочные решения имеются в некоторых учебниках и руководствах к решению задач по сопротивлению материалов [2, с. 68]. Поэтому этот метод наряду с методом «уравнений трех моментов» для расчета неразрезных балок следует полностью исключить из программы курса сопротивления материалов как громоздкие, устаревшие методы. Для расчета любых СНС следует применять метод сил или энергетический метод. Рассмотренные примеры убедительно показывают их высокую эффективность.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1967 (1986; 1999). – 552 (512; 591) с.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1968 (1973; 1987). – 424 (328; 367) с.
3. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1975 (1989). – 742 (624) с.

4. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.
5. Бородин, Н. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / Н. А. Бородин. – М. : Дрофа, 2001. – 288 с.
6. Горшков, А. Г. Сопротивление материалов : учебное пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М. : Физматлит, 2002. – 544 с.
7. Сапунов, В. Т. Классический курс сопротивления материалов в решениях задач : учебное пособие / В. Т. Сапунов. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 160 с.
8. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов : учебник / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 376 с.
9. Василевич, Ю. В. Механика материалов : учебное пособие / Ю. В. Василевич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2005. – 155 с.
10. Якубовский, Ч. А. Механика материалов. Практикум : учебное пособие / Ч. А. Якубовский, А. Ч. Якубовский. – Минск : БНТУ, 2006. – 168 с.
11. Крылов, Г. С. Методическое пособие для самостоятельной работы и решения задач по сопротивлению материалов для студентов заочной формы обучения механических специальностей / Г. С. Крылов [и др.]. – Минск : БПИ, 1990. – 72 с.
12. Лаптев, В. П. Методические указания по расчету статически неопределимых неразрезных балок / В. П. Лаптев, Ч. А. Якубовский, И. В. Яркина. – Минск : БПИ, 1985. – 16 с.
13. Качурин, В. К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В. К. Качурин. – М. : Наука, 1970. – 432 с.
14. Винокуров, Е. Ф. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.
15. Bazergui, André. Résistance des matériaux / André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georges McIntyre, Charles Laberge. – École Polytechnique de Montréal, 2003. – 466 p.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МЕТОД СИЛ	7
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД	44
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	53

Учебное издание

ЯКУБОВСКИЙ Чеслав Андреевич
ЯКУБОВСКИЙ Андрей Чеславович

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

*Методическое пособие
для студентов
технических специальностей
высших учебных заведений*

Редактор *К. П. Юройть*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 18.01.2013. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,21. Уч.-изд. л. 2,54. Тираж 100. Заказ 1553.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.