Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методическое пособие по математике

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методическое пособие
по математике

М и н с к 2009

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я7
Т 33

А в т о р ы:
Г.И. Лебедева, *И.Н. Катковская*,
Г.К. Воронович, *Е.В. Сагарда*

Р е ц е н з е н т ы:
д-р физ.-мат. наук, зав. каф. ММТУ БГУ В.Г. Кротов;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. высшей математики № 1
БНТУ Е.А. Федосик

Т 33 Теория поля: методическое пособие по математике / Г.И. Лебедева [и др.]. – Минск: БНТУ, 2009. – 46 с.

ISBN 978-985-525-129-4.

Методическое пособие составлено в соответствии с программой курса высшей математики для инженерных специальностей. В нем дано краткое описание теории по разделу математики «Теория поля», приведены примеры решения, даны задания для аудиторной и домашней работы. Для всех заданий даны ответы. Излагаемый материал разбит по занятиям, каждое из которых посвящено отдельной теме. Издание будет полезным при организации практических и лабораторных занятий, а также может использоваться для самостоятельной работы студентов.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я7

ISBN 978-985-525-129-4

Занятие 1

Скалярное поле и его характеристики

Пространственным скалярным полем называется функция

$$u = u(x, y, z), \tag{1.1}$$

заданная в некоторой области трехмерного евклидового пространства.

Аналогично *плоским скалярным полем* называется функция $u = u(x, y)$, заданная в некоторой области двумерного евклидового пространства.

Характеристики поля

1. Геометрической характеристикой скалярного поля служат *поверхности уровня* – множества точек области определения поля, в которых оно принимает постоянное значение:

$$u(x, y, z) = C, \tag{1.2}$$

где C – любое фиксированное число из области значений функции.

Аналогично определяются линии уровня для плоского поля: $u(x, y) = C$.

2. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения поля $u = u(x, y, z)$ по направлению координатных осей OX, OY, OZ соответственно. Точки, в которых выполнено условие $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, называются *стационарными* (иногда говорят критическими) для поля.

Пусть $\vec{l}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор (α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}$ с осями координат). Тогда *производной по направлению* $\vec{l}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,. \tag{1.3}$$

Если вектор не является единичным, то следует сначала найти его направляющие косинусы.

3. *Градиентом скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ в точке *M* называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,, \tag{1.4}$$

где частные производные вычислены в точке *M*, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей.

Если в качестве вектора $\vec{l}$ взять направление градиента $\operatorname{grad} u / |\operatorname{grad} u|^{-1}$, то

$$\frac{du}{d\vec{l}} = |\operatorname{grad}\, u|\,. \tag{1.5}$$

В направлении градиента производная принимает наибольшее значение, то есть в этом направлении поле имеет наибольшую скорость возрастания.

П р и м е р ы

1. Найти линии уровня скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Р е ш е н и е. По (1.2) имеем $2x + 3y = c$ – это семейство прямых линий (рис. 1.1).

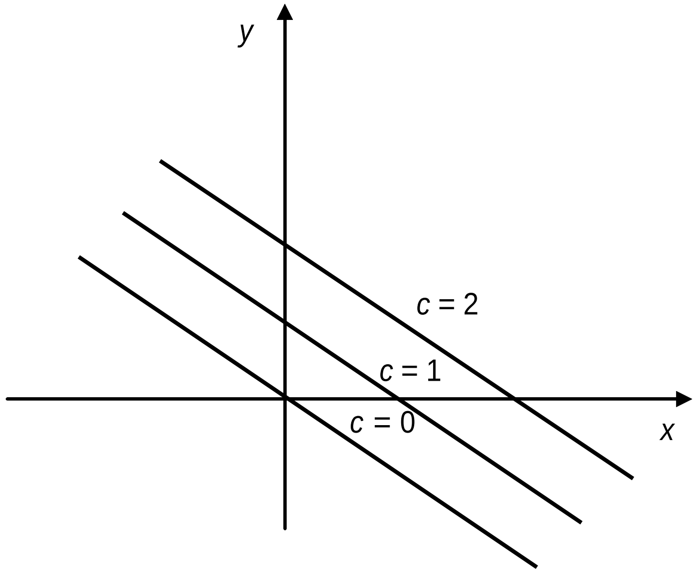

Рис. 1.1

2. Для скалярного поля $u = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2$ найти стационарные точки, поверхности уровня и записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $M(2; -1; 2)$.

Р е ш е н и е. Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z .$$

одновременно обращаются в нуль в точке $N(1; -1; 0)$, которая является стационарной.

По определению поверхности уровня имеем:

$$2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = c$$

или

$$2(x-1)^2 - 2 + (y+1)^2 - 1 + z^2 = c ;$$

$$2(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=c+3;$$

$$\frac{(x-1)^2}{1/2}+\frac{(y+1)^2}{1}+\frac{z^2}{1}=c+3;$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{c+3}{2}}+\frac{(y+1)^2}{c+3}+\frac{z^2}{c+3}=1.$$

Последнее уравнение при различных $c>-3$ определяет семейство эллипсоидов с центром в точке $O(1;\,-1;\,0)$ и полуосями

$$a=\sqrt{\frac{c+3}{2}},\quad b=\sqrt{c+3},\quad d=\sqrt{c+3}.$$

Поверхность уровня, проходящая через точку $M(2;\,-1;\,2)$, имеет уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{6}+\frac{z^2}{6}=1,$$

где $c=2\cdot 2^2-4\cdot 2+(-1)^2+2(-1)+2^2=3$.

3. Найти производную скалярного поля $u=xy+y^2-4z$ в точке $M(1;\,2;\,3)$ по направлению вектора $\vec{l}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$.

Р е ш е н и е. Вектор $\vec{l}$ имеет координаты (2; 3; 5). Найдем его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha=\frac{l_x}{|\vec{l}|}=\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\frac{2}{\sqrt{38}}=\frac{1}{\sqrt{38}},$$

$$\cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{3}{\sqrt{38}},$$

$$\cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{-5}{\sqrt{38}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(1;\ 2;\ 3)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\big|_M = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x+2y)\big|_M = 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -4.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{38}} + 5\cdot\frac{3}{\sqrt{38}} - 4\frac{-5}{\sqrt{38}} = \frac{2}{\sqrt{38}} + \frac{15}{\sqrt{38}} + \frac{20}{\sqrt{38}} = \frac{37}{\sqrt{38}}.$$

4. Найти производную скалярного поля $u = 4xy + y^2$ в точке $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

Р е ш е н и е. Направление $\vec{l}$ внешней нормали к эллипсу в точке M перпендикулярно к направлению вектора $\vec{a}$, касательного к эллипсу в этой точке (рис. 1.2).

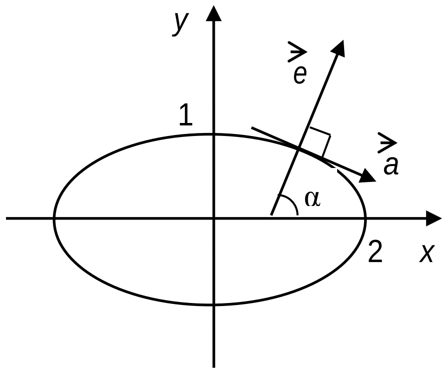

Рис. 1.2

Точка $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ лежит на верхней части эллипса $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$.

Обозначим через φ угол, который образует касательный вектор $\vec{a}$ с осью *OX*. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = y'\big|_M = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_M = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Если обозначить через α угол, образованный вектором $\vec{l}$ с осью *OX*, то из условия ортогональности $\vec{l}$ и $\vec{a}$ получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}}\ .$$

Значения частных производных функции $u = 4xy + y^2$ в точке $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y\Big|_M = 2\sqrt{3}\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + 2y\Big|_M = 4 + \sqrt{3}\ .$$

Следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}} + (4+\sqrt{3})\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}(5+\sqrt{3})\ .$$

5. Найти вектор-градиент скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

В нашем случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2;\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u = (2;\,3)$.

6. Для скалярного поля $u = \operatorname{tg}(yz) + e^{z\ln x} - z$ в точке $M(1;\,0;\,2)$ найти вектор-градиент и наибольшую скорость возрастания.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}e^{z\ln x}\Bigg|_M=2;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{\cos^2(yz)}\Bigg|_M=2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\cos^2(yz)}+e^{z\ln x}\cdot\ln x-1\Bigg|_M=-1.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u=(2;\,2;\,-1)$.

Наибольшую скорость возрастания поля u в точке M найдем по формуле

$$\max\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\left|\operatorname{grad} u(M)\right|=\sqrt{4+4+1}=3.$$

Аудиторные задания

1. Для заданного скалярного поля u записать линии уровня.

1.1. $u=x+3y$. (Отв.: $c=x+3y$);

1.2. $u=x+2y+5z$. (Отв.: $c=x+2y+5z$);

1.3. $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{6}$. (Отв.: $c=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{6}$).

2. Для заданного скалярного поля u: а) записать уравнение линии уровня, проходящей через точку M; б) определить в точке M производную поля u по направлению вектора $\vec{l}$; в) определить градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке, если: $u=\ln(x\operatorname{tg} y)$, $M\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{l}=-3\vec{i}+2\vec{j}$.

$$\left(\text{Отв.: } y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\quad \frac{du}{d\vec{l}}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad \operatorname{grad} u=\vec{i}+2\vec{j},\quad \max\frac{du}{d\vec{l}}=\sqrt{5}.\right)$$

3. Пусть заданы скалярное поле u, точки M_1 и M_2, направление $\vec{l}$ и угол φ. Определить в точке M_1: а) производную поля по направлению $\vec{l}$; б) производную поля по направлению $\overrightarrow{M_1M_2}$; в) градиент; г) производную по направлению вектора $\vec{l}_1$, образующего с градиентом в точке M_1 угол φ, если

$$u = x^2y + xz^2 - 2z, \quad M_1(1, 1, -1), \; M_2(2, -1, 2),$$
$$\vec{l}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, \quad \varphi = 180^\circ.$$

$$\left(\text{Отв.: } \frac{du}{d\vec{l}} = \frac{8}{\sqrt{26}}, \quad \frac{du}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = -\frac{11}{\sqrt{14}}, \quad \operatorname{grad} u = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, \quad \frac{du}{d\vec{l}} = -\sqrt{26}.\right)$$

4. Вычислить производную поля $u = u(x, y)$ в направлении:

а) биссектрисы первого координатного угла XOY от его вершины.

$$\left(\text{Отв.: } 0{,}5\sqrt{2}\left(u'_x + u'_z\right)\right);$$

б) отрицательной полуоси OX.

$$\left(\text{Отв.: } -u'_x\right).$$

5. В каких точках плоскости XOY градиент поля $u = x^2 + y^2 - 3xy$

а) перпендикулярен к оси OY;

$$\left(\text{Отв.: } y = 1{,}5x\right);$$

б) параллелен оси OY.

$$\left(\text{Отв.: } y = \frac{2}{3}x\right).$$

Домашнее задание

1. Для заданного скалярного поля записать уравнение линии уровня, проходящей через точку M. Определить в точке M

производную поля u по направлению $\vec{l}$, градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

$$u = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 2,$$
$$M(-1;\ 2),\quad \vec{l} = -3\vec{i} + 4\vec{j}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Отв.:}\quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 10 \\ \dfrac{du}{d\vec{l}} = \dfrac{18}{5},\quad \operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 6\vec{j} \\ \max\dfrac{du}{d\vec{l}} = 2\sqrt{10}. \end{array}\right)$$

2. Для заданного скалярного поля u определить в точке M_1 производную поля по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, градиент, производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке M_1 угол φ.

2.1. $u = xy^2z + yz^2 - 3z$, $M_1(0;1;2)$, $M_2(-2;3;-1)$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\varphi = 30^\circ$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Отв.:}\quad \dfrac{du}{d\vec{e}} = 0;\quad \dfrac{du}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \\ \dfrac{du}{d\vec{l}_1} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}. \end{array}\right)$$

2.2. $u = \dfrac{y}{xz} + \dfrac{x}{yz} + \dfrac{z}{xy}$, $M_1(1;2;3)$, $M_2(-2;1;-1)$, $\vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\varphi = 225^\circ$.

$$\left(\text{Отв.:}\quad \frac{du}{d\vec{l}} = -\frac{4}{3\sqrt{29}},\quad \frac{du}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{101}{18\sqrt{26}}\right.$$
$$\operatorname{grad} u = -2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{2}{9}\vec{k},$$
$$\left.\frac{du}{d\vec{l}_1} = -\frac{\sqrt{2786}}{36}.\right)$$

3. Вычислить производную поля $u = \ln\left(xz^2 + 2yz\right)$ в точке $M(1;\ 3;\ 2)$ по положительному направлению окружности
$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \sin t \\ z = 2 \end{cases}.$$

$$\left(\text{Отв.:}\quad -\frac{1}{4}\right).$$

4. Найти угол φ между градиентами функций $u = x + yz + 2\sqrt{xz}$ и $\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(2;3;2)$.

$$\left(\text{Отв.:}\quad \varphi = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{102}}\right)\right).$$

З а н я т и е 2

Векторное поле и его характеристики

Векторное поле задается вектор-функцией

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

принимающей значения в трехмерном евклидовом пространстве.

В случае двумерного векторного плоского поля

$$\vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}\ .$$

1. Векторной линией поля $\vec{F}$ называется линия, касательная в каждой точке которой параллельна вектору поля в этой точке (рис. 2.1).

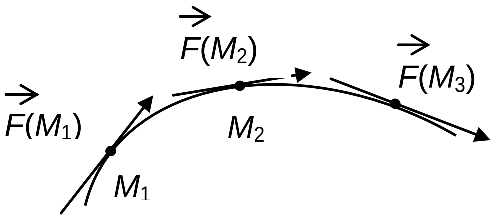

Рис. 2.1

В трехмерном случае векторные линии определяются из уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}\ . \tag{2.1}$$

А для плоского векторного поля

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{P(x, y)} = \dfrac{dy}{Q(x, y)} \\ \dfrac{dx}{P(x, z)} = \dfrac{dz}{R(x, z)} \\ \dfrac{dy}{Q(y, z)} = \dfrac{dz}{R(y, z)} \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

2. Потоком векторного поля через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на единичный вектор нормали $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$:

$$\varPi_S = \oiint\limits_{(S)} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \iint\limits_{(S)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS\,. \quad (2.3)$$

Напомним, что ориентация гладкой поверхности определяется выбором одного из двух возможных векторов нормали, который изменяется на поверхности непрерывным образом.

В случае замкнутой поверхности S в качестве вектора $\vec{n}$ берется вектор к внешней стороне этой поверхности, а поток записывается в виде

$$\varPi_S = \iint\limits_{S} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS\,. \quad (2.4)$$

Свойства потока

1. При изменении ориентации поверхности поток изменяет знак на противоположный.

2. $\Pi_S\left(\vec{F}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Pi_{S_i}\left(\vec{F}\right)$, где $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Физический смысл потока зависит от природы поля $\vec{F}$. Если, например, $\vec{F}$ – поле скоростей текущей жидкости в области V, а S – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}$, то поток $\Pi_S\left(\vec{F}\right)$ будет равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность S в направлении $\vec{n}$.

Если $\vec{F}$ – силовое поле, то поток $\Pi_S\left(\vec{F}\right)$ выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих поверхность S в единицу времени в направлении $\vec{n}$.

Если S – часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченная поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(z_1(x, y) \le z_2(x, y))$, то в цилиндрических координатах поток векторного поля через рассматриваемую поверхность вычисляется по формуле

$$\Pi_S(\vec{F}) = \pm \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)} \left(x \cdot P(x, y) + yQ(x, y)dz\right), \qquad (2.5)$$

где $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ – цилиндрические координаты, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Если S – часть сферы, то

$$\Pi_S(\vec{F}) = \pm\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \left(xP(x, y, z) + y \cdot Q(x, y, z) + zR(x, y, z)\right)\sin\theta \, d\theta, \quad (2.6)$$

где $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$

П р и м е р ы

1. Для плоского поля $\vec{F} = (5x - y)i + 2y\vec{j}$ найти векторные линии.

Р е ш е н и е. Данное поле дифференцируемо во всех точках плоскости XOY.

$$P(x, y) = 5x - y$$
$$Q(x, y) = 2y.$$

Согласно (2.2) имеем: $\dfrac{dx}{5x-y}=\dfrac{dy}{2y}$.

Отсюда $2ydx=(5x-y)dy$ или $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{5x-y}$. Мы получили однородное уравнение, которое решаем с помощью подстановки

$$y=t\cdot x$$
$$y'=t'x+t:$$

$$t'x+t=\frac{2tx}{5x-tx} \qquad\qquad \frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{t^2-3t}{-t+5}$$

$$t'x+t=\frac{2t}{5-t} \qquad \text{или} \qquad \frac{(5-t)dt}{t^2-3t}=\frac{dx}{x}$$

$$t'x=\frac{2t}{5-t}-t \qquad\qquad \int\frac{(5-t)}{t^2-3t}dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$t'x=\frac{2t-5t+t^2}{5-t}$$

Разложим подынтегральную дробь:

$$\frac{5-t}{t^2-3t}=\frac{5-t}{t(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}=\frac{At-3A+Bt}{t(t-3)}.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} t^\circ:&\quad 5=-3A\\ t^1:&\quad -1=A+B\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} A&=-\frac{5}{3}\\ B&=\frac{2}{3}\end{aligned}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{-\frac{5}{3}}{t}\,dt+\int\frac{\frac{2}{3}}{t-3}\,dt=\int\frac{dx}{x}$$

или

$$-\frac{5}{3}\ln|t|+\frac{2}{3}\ln|t-3|=\ln|x|+\ln C\,,$$

$$\ln\frac{(t-3)^{2/3}}{t^{5/3}}=\ln(x\cdot C)\,,$$

$$\frac{(t-3)^{2/3}}{t^{t^{5/3}}}=x\cdot C;\quad t={}^{y}\!/_{x}\;.$$

Следовательно, $C=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}-3\right)^{2/3}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{5/3}\cdot x}$ – семейство векторных линий.

1. Найти векторные линии поля $\vec{F}=(x-y+z)\vec{i}+(x+y-z)\vec{j}+$ + $(2z-y)\vec{k}$.

Р е ш е н и е. Запишем систему дифференциальных уравнений (2.1), используя дифференцирование по параметру t:

$$\frac{dx}{dt}=x-y+z;\quad \frac{dy}{dt}=x+y-z;\quad \frac{dz}{dt}=2z-y\,.$$

Найдем общее решение этой системы. Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -1 & 1\\ 1 & (-1-\lambda) & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\;\Rightarrow\;\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1.$$

а) Рассмотрим $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} -e_1 - e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 - e_2 - e_3 = 0 \\ -e_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $e_1 = e_3, \quad e_2 = 0$. Следовательно, (1, 0, 1) – собственный вектор и

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 0 \\ z = e^{2t} \end{cases} -$$

частное решение системы.

б) Рассмотрим $\lambda_1 = 1$.

Система линейных уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} -e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 - e_3 = 0 \\ -e_2 + e_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность, равную 2. Поэтому решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x = (a + bt)\, e^t \\ y = (c + dt)\, e^t \\ z = (k + \ell t)\, e^t. \end{cases}$$

Подставив правые части последних равенств в систему дифференциальных уравнений, записанных через параметр t, после преобразований получим:

$$\left.\begin{matrix} -d+\ell=0 & b=-c+k \\ b-\ell=0 & d=\ a-k \\ 2\ell-d=\ell & \ell+k=2k-c \end{matrix}\right\}.$$

Приняв $\ell=C_1,\quad k=C_2$, получим:

$$d=C_1,\quad b=C_1,\quad c=-C_1+C_2,$$
$$a=C_1+C_2,\quad \ell=C_1,\quad k=C_2.$$

Подставив эти значения в выражения для x,y,z и прибавив частное решение $(x=e^{2t},\ y=0,\ z=e^{2t})$, умноженное на C_3, получим общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x=(C_1+C_2+C_1t)\,e^t+C_3e^{2t} \\ y=(-C_1+C_2+C_1t)\,e^t \\ z=(C_2+C_1t)\,e^t+C_3e^{2t}, \end{cases}$$

определяющее параметрические уравнения семейства векторных линий поля.

1. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z=4-x^2-y^2$, отсеченной плоскостью $z=0$.

Р е ш е н и е. Поверхность $z=4-x^2-y^2$ представляет собой параболоид вращения (рис. 2.2).

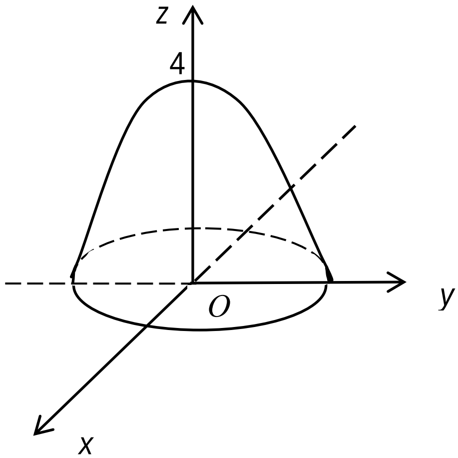

Рис. 2.2

Проекцией (G) рассматриваемой поверхности на плоскость XOY является круг радиуса 2. Так как верхняя сторона параболоида видна со стороны положительного направления оси OZ, то перед интегралом по проекции G надо взять знак плюс.

Находим нормаль $\vec{n} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$ к нашей поверхности и скалярное произведение

$$(\vec{F}\cdot\vec{n}) = x\cdot 2x + y\cdot 2y + 1\cdot(-z) = 2x^2 + 2y^2 - z =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - 4 + x^2 + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 4 = 3(x^2+y^2) - 4.$$

Следовательно,

$$\Pi_S(\vec{F}) = +\iint\limits_G (3(x^2+y^2-4)\,dx\,dy = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ |J|=\rho \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3\rho^2-4)\cdot\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 - \frac{4\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,(12-8) = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (4x - 3)\vec{i} +$ $+ (2y - 6x)\vec{j} - y^2 z^3 \vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте (рис. 2.3).

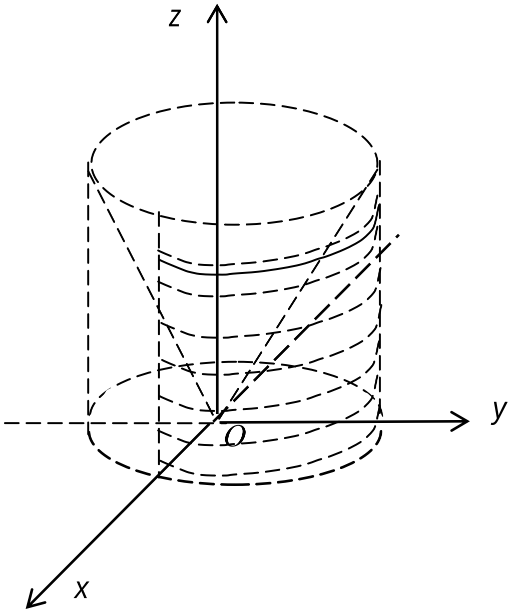

Рис. 2.3

Р е ш е н и е. Для решения используем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \\ |I| = \rho. \end{cases}$$

По внутренней стороне поверхности интеграл берем со знаком «минус», т.к. заданная поверхность видна с отрицательной стороны оси OY:

$$\Pi_\rho\left(\vec{F}\right) = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(x(4x-3y) + y(2y-6x)\right)dz =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4x^2 - 12xy + 2y^2 - 6xy\right)dz =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4\cdot\rho^2\cos^2\varphi - 12\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - 6\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right)dz =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - 18\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\Big|_{\rho=3} dz =$$

$$= -9\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi - 18\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi \cdot z\Big|_0^9 =$$

$$= -81\int_0^{\pi/2} \left(\frac{4(1+\cos 2\varphi)}{2} + 1 - \cos 2\varphi - 18\cos\varphi\,\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= -81\left(2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + 18\frac{\cos^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= -81\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{18}{2}\right) = -81\left(\frac{3}{2}\pi - 9\right).$$

3. Вычислить поток поля $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + 2z\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезанной конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 2.4).

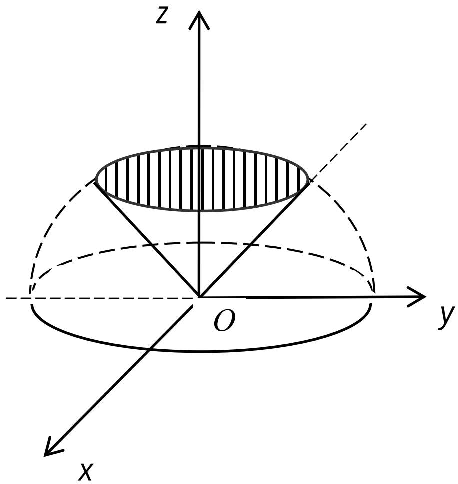

Рис. 2.4

Р е ш е н и е. Для решения используем сферические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ z = \rho\cos\theta \\ |I| = \rho^2\sin\theta, \end{cases}$$

в которых уравнение сферы задается равенством $\rho = 1$.

В соответствии с формулой (2.6) имеем:

$$\Pi_S\left(\vec{F}\right) = +\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(x \cdot x^3 + y(-y)^3 + z \cdot 2z\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\cos^4\varphi - \sin^4\theta\sin^4\varphi + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\left(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi\right) + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\cdot\cos 2\varphi+2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^5\theta\, d\theta+2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta \sin\theta d\theta-2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, d(\cos\theta)=$$

$$=\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta\, d(\cos\theta)-2\int_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/4}=$$

$$=-\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi\cdot\left(\int_0^{\pi/4}\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d\left(\cos\theta\right)\right)-2\int_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/4}=$$

$$=-\left(\frac{43\sqrt{2}}{120}-\frac{8}{15}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)=\frac{4\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Аудиторные задания

1. Найти векторные линии для поля $\vec{F}$.

1.1. $\vec{F}=\left(3x-y^2\right)\vec{i}+y\vec{j}$.

$\left(\text{Отв.:}\quad x=y^2\right)$

1.2. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}$ $\left(\text{Отв.:}\quad \begin{array}{l} x = c\cdot\cos t \\ y = c\cdot\sin t \\ z = 2t + c_1 \end{array}\right).$

1.3. $\vec{F} = \left(x + y^2 + z^2\right)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\left(\text{Отв.:}\quad \begin{array}{l} x - y^2 - z^2 = c_1 z \\ y = c_2 z \end{array}\right).$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

$\left(\text{Отв.:}\quad 2\pi\right).$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

$\left(\text{Отв.:}\quad 6\right).$

4. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ через нижнюю сторону части поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$.

$\left(\text{Отв.:}\quad -2\pi\right).$

5. Вычислить поток поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + \frac{1}{2}yz\vec{j} + x^2z\vec{k}$ через нижнюю сторону части параболоида $z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2$.

$\left(\text{Отв.:}\quad \frac{2\pi}{3}\right).$

Домашнее задание

1. Найти векторные линии поля $\vec{F}$.

1.1. $\vec{F}=(2x+y)\vec{i}+2(y+2z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$.

$$\left(\begin{array}{ll}\text{Отв.:} & x=C_1+C_2t+4C_3e^{3t}\\ & y=C_2-2C_1-2C_2t+4C_3e^{3t}\\ & z=C_1-C_2+C_2t+C_3e^{3t}\end{array}\right).$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(4x-3y)\vec{i}+$ $+(2y-6x)\vec{j}-y^2z\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2+y^2=4$, ограниченной плоскостью $z=0$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и расположенной в первом октанте.

$\left(\text{Отв.:}\quad 72-3\pi\right)$.

3. Вычислить поток поля $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоскости треугольника *ABC*, где $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$.

$\left(\text{Отв.:}\quad -4\right)$.

4. Вычислить поток поля $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}-z^2\cos y\vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2+y^2=4$, лежащей в третьем октанте и ограниченной плоскостями $z=0$ и $x+y+z=4$.

$\left(\text{Отв.:}\quad \dfrac{80}{3}\right)$.

З а н я т и е 3

Формула Остроградского. Дивергенция. Циркуляция. Ротор. Формула Стокса

Если векторное поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ дифференцируемо в некоторой окрестности замкнутой области V, границей которой является гладкая или кусочногладкая поверхность S (которую считаем положительно ориентированной), то справедлива *формула Остроградского*:

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) dxdydz \,. \quad (3.1)$$

Дивергенцией векторного поля $\vec{F}$ в точке $M(x, y, z)$ называется

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \,. \quad (3.2)$$

Если $\mathrm{div}F(M) > 0$, то в точке M – источник, если $\mathrm{div}F(M) < 0$, то в точке M – сток, если $\mathrm{div}F(M)$ = 0, то в точке M нет ни источника, ни стока. Поле в этом случае называется *соленоидальным*.

С учетом равенства (2.4) формула Остроградского примет вид

$$\oiint_S \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \iiint_V \mathrm{div}F dV \,. \quad (3.3)$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вдоль замкнутой линии L называется криволинейный интеграл

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \,, \quad (3.4)$$

где обход линии L осуществляется в положительном направлении. Циркуляция имеет простой физический смысл: циркуляция – это работа силы поля вдоль кривой L, расположенной в области действия силового поля.

Ротором векторного поля $\vec{F}$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \quad (3.5)$$

где частные производные вычислены в этой точке. Его можно записать в символической форме следующим образом:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Ротор является характеристикой вихревых движений в поле. Если $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, то поле называется *безвихревым*.

Для любой незамкнутой поверхности $S\subset V$, опирающейся на контур L, имеет место формула Стокса

$$\oint_L\left(\vec{F}\cdot d\vec{\ell}\right)=\iint_S\left(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\right)dS. \quad (3.7)$$

Формула Стокса позволяет свести вычисления циркуляции векторного поля $\vec{F}$ по контуру L к вычислению потока поля $\operatorname{rot}\vec{F}$ через незамкнутую поверхность S, опирающуюся на контур L (L – граница незамкнутой поверхности S):

$$Ц_L\left(\vec{F}\right)=\pm\iint_{D_{xy}}\left(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)}dxdy, \quad (3.8)$$

где D_{xy} – проекция S на плоскость XOY;

$\vec{n}=-z'_x\vec{i}-z'_y\vec{j}+\vec{k}$ – вектор нормали к поверхности S.

П р и м е р ы

1. Вычислить дивергенцию поля $\vec{F}=(2xy+zx)\vec{i}+(xyz+y)\vec{j}+$ $+(x+y+2z)\vec{k}$ в точке $M(1;\ 1;\ 2)$.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (3.3) имеем

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2y + z\Big|_M = 2 \cdot 1 + 2 = 4$;

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = xz + 1\Big|_M = 1 \cdot 2 + 1 = 3;$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 2.$$

Отсюда $\operatorname{div}\vec{F}(M) = 4 + 3 + 2 = 9 > 0$. Следовательно, в точке M находится источник, мощность которого равна 9.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j} - 5z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, накрывающей параболоид (рис. 3.1).

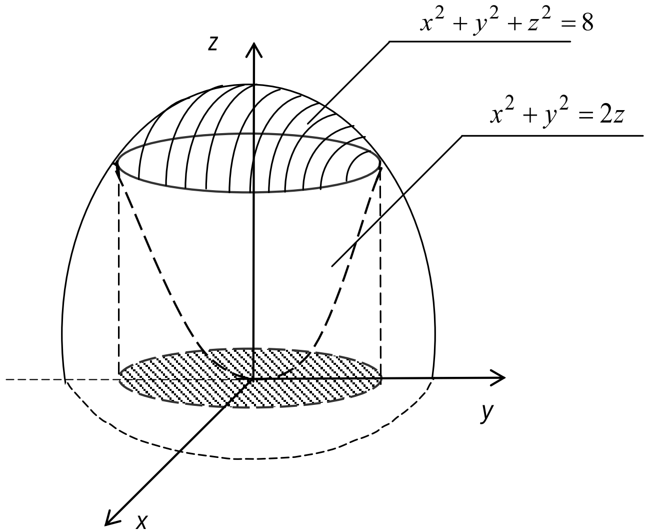

Рис. 3.1

Р е ш е н и е. Вычислим поток по формуле Остроградского. Дивергенция заданного поля

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-10z\ ,$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial x}=3,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=-3,\quad \dfrac{\partial R}{\partial z}=-10z.$

Поток $\Pi_s(\vec{F})=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint\limits_V(-10z)\,dxdydz.$

Вычисление тройного интеграла по области V будем осуществлять в цилиндрических координатах: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=z$:

$$\Pi_s(\vec{F})=-10\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}}zdz=-10\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}}\right)=$$

$$=-10\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\left(\frac{8-\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{8}\right)=$$

$$=-10\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\int_0^{\sqrt{2}}4\rho d\rho-\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{2}d\rho-\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\rho^5}{8}d\rho\right)=$$

$$=-10\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\left.\frac{4\rho^5}{5}\right|_0^{\sqrt{2}}-\left.\frac{\rho^4}{8}\right|_0^{\sqrt{2}}-\left.\frac{\rho^6}{48}\right|_0^{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=-10\left(\frac{16\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi=\left(-32\sqrt{2}+\frac{20}{3}\right)2\pi.$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности, ограниченной поверхностями: $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. (рис. 3.2).

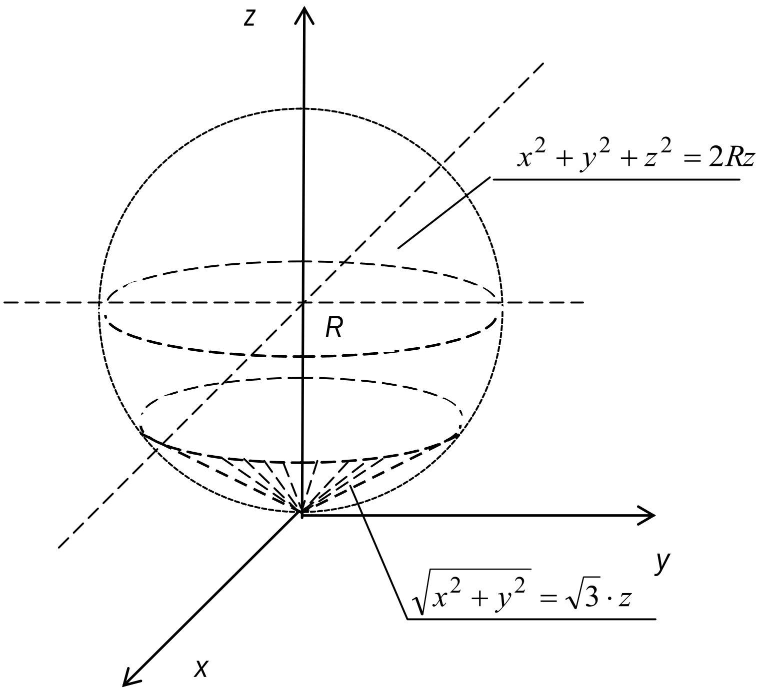

Рис. 3.2

Р е ш е н и е. Исходное поле $\vec{F}$ определено и дифференцируемо во всем пространстве и

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3z^2, \text{ где } \frac{\partial P}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$$

Следовательно,

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iiint\limits_V 3z^2\,dxdydz.$$

Вычислим этот интеграл в сферических координатах:

$$F_S(\vec{F}) = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho =$$

$$= 6\pi\cdot\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{192\pi R^5}{5}\int_0^{\pi/3}\cos^7\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \frac{153\pi R^5}{32}.$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i}\, +$ $+\,(3x + 2y^2 - 10)\,\vec{j}$ по линии L, состоящей из отрезка прямой AB и параболы $x = 3 - y^2$ (рис. 3.3).

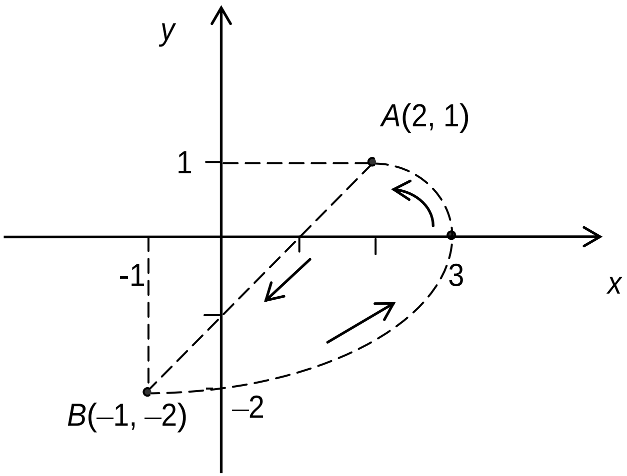

Рис. 3.3

Р е ш е н и е. Исходная линия L состоит из двух участков: прямой *AB* и параболы. Следовательно, циркуляция заданного поля $\vec{F}$ будет равна сумме двух линейных интегралов:

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BCA}.$$

Уравнение прямой *AB* записывается в виде $\dfrac{y-1}{-2-1} = \dfrac{x-2}{-1-2}$ или $\dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{x-2}{-3} \Rightarrow y = x-1$. Тогда

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{2}^{-1}\Bigl(2x-(x-1)^2+1) + (3x+2(x-1)^2-10)\Bigr)dx =$$

$$= \int\limits_{2}^{-1}\Bigl(5x+(x-1)^2-9\Bigr)dx = \frac{5x^2}{2}\Bigg|_2^{-1} + \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_2^{-1} - 9x\Big|_2^{-1} =$$

$$= \frac{5}{2} - 10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 9 + 18 = 16{,}5.$$

$$\int\limits_{BCA} = \int\limits_{-1}^{2}\Bigl((2x-(3-x)+1) + (3x+2(3-x)-10\Bigr)dx = \int\limits_{-1}^{2}(4x-6)\,dx =$$

$$= \frac{4x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} - 6x\Big|_{-1}^{2} = 8-2-12-6 = -12.$$

Циркуляция по заданному контуру L

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = 16{,}5 - 12 = 4{,}5 > 0.$$

5. Найти ротор для векторного поля $\vec{F} = (2xy-z)\vec{i} + (yx+2)\vec{j} + (x^2-3xz)\vec{k}$.

Р е ш е н и е.

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (2xy-z) & (yx+2) & (x^2-3xz)\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial(x^2-3xz)}{\partial y}-\frac{\partial(yx+2)}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial(x^2-3xz)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy-z)}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial(yx+2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy-z)}{\partial y}\right)=\vec{i}\,(0-0)-\vec{j}\,(2x-3z+1)+\vec{k}\,(y-2x)=$$

$$=(-2x+3z-1)\,\vec{j}+(y-2x)\vec{k}.$$

6. Вычислить циркуляцию поля $\vec{F}=\left(y^3-8yz-z\right)\vec{i}+\left(yz-x^3+2x\right)\vec{j}+\left(yx^3-2z^3\right)\vec{k}$ вдоль контура L, полученного пересечением параболоида $z=x^2+y^2$ плоскостью $z=1$ и ориентированного положительно по отношению к оси OZ (рис. 3.4).

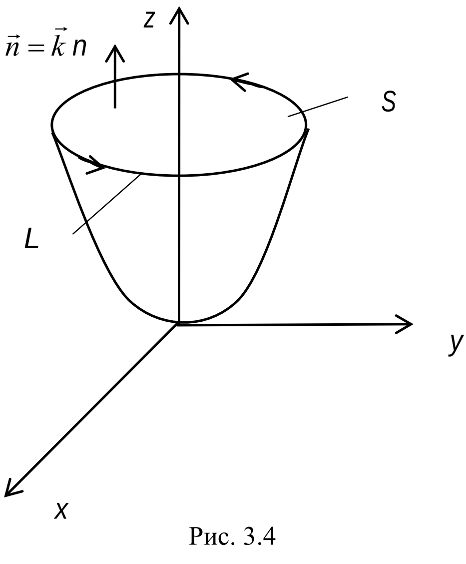

Рис. 3.4

Р е ш е н и е. Контур L – окружность радиусом, равным 1, с центром в точке (0, 0, 1). Ротор данного поля

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(x^3-y\right)\vec{i}-\left(3yx^2+8y+1\right)\vec{j}+\left(2-3x^2-3y^2+8z\right)\vec{k},$$
$$\left(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n}\right)=2-3x^2-3y^2+8z.$$

Тогда циркуляция вычисляется по формуле Стокса:

$$Ц_L\left(\vec{F}\right)=+\iint\limits_{D_{xy}}\left(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n}\right)\Big|_{z=1}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left(10-3x^2-3y^2\right)dxdy=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(10-3\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{17\pi}{2}.$$

Аудиторные задания

1. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$

1.1. $\vec{F}=(y+x+z)\vec{i}+\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{j}+\left(y^3+x^3+z^3\right)\vec{k}$.

(Отв.: $1+2y+3z^2$).

1.2. $\vec{F}=\left(x^2yz-5y^2z+6xz^2\right)\vec{i}+\left(2y^2xz-4yz^2+3xz\right)\vec{j}+$ $+\left(z^2xy-7zy^3+z^3\right)\vec{k}$.

(Отв.: $8xyz+5z^2-7y^3$).

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S.

2.1. $\vec{F}=z^2\vec{i}+(xy-1)\vec{j}-(z-y)\vec{k}$,

где $S:\begin{cases}3x+2y+z=6\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.\end{cases}$

(Отв.: -3).

2.2. $\vec{F} = xy^2\vec{i} + y(z-x)\vec{j} + \left(x^2 - zy^2\right)\vec{k}$,

где $S: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

(Отв.: -64π).

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутой линии L.

3.1. $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$,

L – контур треугольника *ABC*, где $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

(Отв.: 2).

3.2. $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$, где L – линия, состоящая из части винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \dfrac{2t}{\pi}$ от точки $B(2;0;4)$ и прямолинейного отрезка *BA*.

(Отв.: $8 + 4\pi$).

4. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$.

4.1. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

(Отв.: 0).

4.2. $\vec{F} = xyz\,\vec{i} + (2x + 3y - z)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$.

(Отв.: $\vec{i} + (xy + 2x)\vec{j} + (2 - xz)\vec{k}$).

5. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

5.1. $\vec{F} = \left(z^3 + 2y^3 + 3y\right)\vec{i} + \left(y^3 - 2x^3 - xz^2\right)\vec{j} + \left(z^2 - 5xy^2\right)\vec{k}$,

$L: \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

(Отв.: $-2{,}5\pi$).

5.2. $\vec{F} = \left(3z^2 - y^3\right)\vec{i} + \left(x^3 - 2y^2z^2\right)\vec{j} + \left(2xyz - x^2y^2\right)\vec{k}$,

$L: \left\{x^2 + y^2 = 4, \quad 2x + z = 4\right\}$.

(Отв.: 120π).

Домашнее задание

1. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$.

1.1. $\vec{F} = \left(2x^2y - 3xz^3 + 5x^3yz\right)\vec{i} + \left(4y^3x + xyz + 8z^2\right)\vec{j} + \left(6z^3xy^2 - 7z^2x + 9zy\right)\vec{k}$.

(Отв.: $4xy - 3z^3 + 15x^2yz + 12xy^2 - 13xz + 18xy^2z^2 + 9y$).

1.2. $\vec{F} = \left(3y^2 - 2xy + x^2\right)\vec{i} + \left(xy - 5y^2\right)\vec{j}$.

(Отв.: $3x - 12y$).

1.3. $\vec{F} = x^2\,\vec{i} - yx\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$.

(Отв.: $x + xy$).

1.4. $\vec{F} = \left(x^2y + y^2x - xy\right)\vec{i} + \left(y^3 - 4xy + 3y^2\right)\vec{j}$.

(Отв.: $4y^2 - 4x + 5y + 2xy$).

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S.

2.1. $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$,

где $S: \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0 \\ y = 1, \quad y \ge 0. \end{cases}$ (Отв.: $\dfrac{\pi}{2}$).

2.2. $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$,

где $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$ (Отв.: $\dfrac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$).

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\,\vec{j} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{k}$ вдоль линии L: $\left\{z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2x\right\}$.

(Отв.: $-\dfrac{6\pi + 16}{3}$).

4. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$.

4.1. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

(Отв.: 0).

4.2. $\vec{F} = y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

(Отв.: $\left(x^2 - 2xz\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2xy\right)\vec{j} + \left(z^2 - 2yz\right)\vec{k}$).

5. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \left(y^3 - yx^2\right)\vec{i} + \left(y^2 - x^2 + x\right)\vec{j}$ по контуру $L: (x-1)^2 + 4y^2 = 4$.

(Отв.: $\frac{\pi}{2}$).

Занятие 4

Потенциальное векторное поле. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле. Операторы Гамильтона, Лапласа

Векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, заданное в области V, называется *потенциальным*, если в области V существует такая скалярная функция u, градиент которой совпадает с $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u. \tag{4.1}$$

Функция u в таком случае называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* векторного поля.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{F}$ в заданной области V было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0. \tag{4.2}$$

В потенциальном векторном поле $\vec{F}$:

1) $u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)\Big|_{\substack{y=y_0\\ z=z_0}} dx+\int\limits_{x_0}^{x} Q(x,y,z)\Big|_{z=z_0} dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz+C$;(4.3)

2) $Ц_L\left(\vec{F}\right)=\oint\limits_L\left(\vec{F},dn\right)=0$; (4.4)

3) для любых двух точек A и B в области V значение криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}\left(\vec{F},dn\right)$ не зависит от вида контура интегрирования AB, соединяющего точки A и B и расположенного в области V, а зависит только от расположения этих точек в области;

4) если $u(x,y,z)$ – потенциал векторного поля $\vec{F}$, то для любого контура $A\subset V$

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F},dn\right)=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\,. \qquad (4.5)$$

Основные характеристики векторного анализа (градиент, дивергенция и ротор) и операции над ними удобно представлять с помощью оператора Гамильтона

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (4.6)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\nabla u=\operatorname{grad}u\,; \qquad (4.7)$$

$$(\nabla,\vec{F})=\operatorname{div}\vec{F}\,; \qquad (4.8)$$

$$[\nabla,\vec{F}]=\operatorname{rot}\vec{F}\,. \qquad (4.9)$$

С помощью оператора ∇ можно показать, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}u=0.$$

Введем *оператор Лапласа*

$$\Delta=(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (4.10)$$

Нетрудно убедиться, что $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\Delta u$.

Уравнение $\Delta u = 0$ называется *уравнением Лапласа*, а функции, удовлетворяющие этому уравнению – гармоническими функциями.

Операции $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}$ связаны между собой соотношением

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}, \qquad (4.11)$$

где $\Delta\vec{F}=\Delta P\vec{i}+\Delta Q\vec{j}+\Delta R\vec{k}$.

П р и м е р ы

1. Проверить, является ли поле $\vec{F}=\left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\vec{i}+$ $+\left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\vec{j}+\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)\vec{k}$ потенциальным, найти его потенциал и вычислить криволинейный интеграл вдоль контура *AB*, где $A(1;2;2)$, $B(1;3;1)$.

Р е ш е н и е. Для данного поля ротор

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(\dfrac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right) & \left(\dfrac{2x^3y}{z}+3y^3\right) & \left(z^3-\dfrac{x^3y^2}{z^2}\right) \end{vmatrix}=0 .$$

Следовательно, поле является потенциальным при $z\neq 0$.

Найдем потенциал заданного поля $\vec{F}$ по формуле (4.4):

$$u(x,y,z)=\int_0^x\left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\z=1}}dx+\int_0^y\left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\Bigg|_{z=1}dy+$$

$$+\int_1^z\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)dz+C=-2\int_0^x x^3dx+\int_0^y(2x^3y+3y^3)dy+$$

$$+\int_1^z\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)dz+C=-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{4}z^4+\frac{x^3y^2}{z}+C_1,$$

где $C_1=C-\dfrac{1}{4}$. В качестве начальной выбрана точка (0, 0, 1).

Криволинейный интеграл по формуле (4.6)

$$\int_{AB}\left(\vec{F},dn\right)=\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{4}z^4+\frac{x^3y^2}{z}+C_1\right)\Bigg|_{\substack{A(1,3,1)\\B(1,2,2)}}=52 .$$

2. С помощью оператора Гамильтона ∇ доказать, что $\operatorname{div}[\vec{F},\vec{в}]=(\vec{в},\operatorname{rot}\vec{F})-(\vec{F},\operatorname{rot}\vec{в})$.

Р е ш е н и е. Имеем,

$$\operatorname{div}\left[\vec{F}, \vec{в}\right] = \left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right) = \left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right) + \left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right).$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляют собой смешанное произведение трех векторов: ∇, $\vec{F}$ и $\vec{в}$.

Воспользовавшись свойством смешанного произведения векторов, получим:

$$\left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right) = -\left(\nabla, \left[\vec{в}, \vec{F}\right]\right) = \left(\vec{в}, \left[\nabla, \vec{F}\right]\right) = \left(в, \operatorname{rot}\vec{F}\right);$$

с другой стороны

$$\left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right) = -\left(\vec{F}, \left[\nabla, \vec{в}\right]\right) = -\left(\vec{F}, \operatorname{rot}\vec{в}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{div}\left[\vec{F}, \vec{в}\right] = \left(\vec{в}, \operatorname{rot}\vec{F}\right) - \left(\vec{F}, \operatorname{rot}\vec{в}\right).$$

Аудиторные задания

1. Для заданного векторного поля $\vec{F}$

а) проверить потенциальность поля;

б) найти потенциал поля;

в) вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}, dn\right)$.

1.1. $\vec{F} = \left(x^2 - 2yz\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2xz\right)\vec{j} + \left(z^2 - 2xy\right)\vec{k}$, $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 2;\ -2)$.

(Отв.: а) поле потенциальное;

б) $\dfrac{\left(x^3 + y^3 + z^3\right)}{3} - 2xyz + c$;

в) $-\dfrac{22}{3}$).

1.2. $\vec{F}=2x\left(y^2-2x^2\right)\vec{i}+2y\left(x^2-2y^2\right)\vec{j}$, $A(-1;1)$, $B(2;3)$.

(Отв.: а) поле потенциальное;

б) $x^2y^2-x^4-y^4+c$;

в) -60.)

2. Вычислить $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}$ в точке $M(2;\ 1;\ -2)$, если $\vec{F}=\left(x^2yz^2+2y\right)\vec{i}+\left(xy^2z^2-2x^2\right)\vec{j}+\left(3xyz^2-2x^2\right)\vec{k}$.

(Отв.: $4\vec{i}+8\vec{j}-20\vec{k}$).

Домашнее задание

1. Для заданного векторного поля $\vec{F}$:

а) проверить потенциальность поля;

б) найти потенциал поля;

в) вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\left(\vec{F},\,dn\right)$.

$$\vec{F}=\left(2xz+\frac{1}{y}\right)\vec{i}-\left(\frac{x+z}{y^2}\right)\vec{j}+\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\vec{k},\quad A(-1;\ 3;\ -2),\quad B(1;2;\ 3).$$

(Отв.: а) поле потенциальное;

б) $x^2z+\dfrac{(x+z)}{y}+c$;

в) 8.)

2. Вычислить ∇u в точке M, если

2.1. $u=3x^2z^2-\left(x+y-2z^2\right)^2+2z^2$, $M(2;\ 1;\ -1)$.

(Отв.: 6).

2.2. $u=\sin^2(2x-3y+z)-2x^2+y^2+z^2$, $M(-1;-1;-1)$.

(Отв.: 28).

Список литературы

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 575 с.

2. Гусак, А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: в 2 ч. / А.А. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – Ч. 2. – 229 с.

3. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Е.И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2. – 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЛЕБЕДЕВА Галина Ивановна
КАТКОВСКАЯ Ирина Николаевна
ВОРОНОВИЧ Галина Константиновна
САГАРДА Елена Васильевна

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методическое пособие
по математике

Редактор И.Ю. Никитенко
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 18.12.2009.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,67. Уч.-изд. л. 2,09. Тираж 300. Заказ 438.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.