Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов 1-го курса
энергетического факультета

Минск
БНТУ
2010

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
З 15

Составители:
Л.Д. Матвеева, Е.С. Матюш, Н.А. Шавель

Рецензенты:
В.В. Карпук, В.В. Павлов

Настоящее издание включает в себя задания по темам «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Каждое задание состоит из 32 контрольных вариантов. По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.

Издание содержит список рекомендуемой литературы.

Задания и методические указания также могут быть полезны преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

ЗАДАНИЯ К ТИПОВЫМ РАСЧЕТАМ

З а д а н и е 1

Решить методом Гаусса систему линейных уравнений.

1.1. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + 9x_2 - 9x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - 8x_2 + 4x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_4 = -2. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+8x_3+x_4=7, \\ x_1-5x_2+x_3-2x_4=-5, \\ 3x_1-x_2+7x_3+3x_4=12. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=-2, \\ x_1+2x_2-5x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=8, \\ 4x_1+6x_2-6x_3+2x_4=6. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 5x_1-x_2+x_3-2x_4=3, \\ 6x_1+x_2-x_4=6. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ x_1-2x_2+x_3-4x_4=-4, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ 4x_1-x_2-5x_4=-2. \end{cases}$

1.31. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3+x_4=7, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=9, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ x_1-5x_2-x_3+4x_4=8. \end{cases}$

1.32. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3-x_4=12, \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=7, \\ x_2-x_3-5x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2-2x_3-6x_4=11. \end{cases}$

З а д а н и е 2

Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_3A_4}$;
2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
3) объем пирамиды;
4) расстояние от вершины A_1 до плоскости, в которой лежит грань $A_2A_3A_4$;
5) расстояние от вершины A_1 до прямой A_2A_3;
6) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_2A_3A_4$;
7) угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$;
8) координаты указанного вектора $\overline{x}$ в заданном базисе, предварительно показав, что данные векторы образуют базис в R^3;
9) уравнение указанной плоскости;
10) уравнения указанной прямой.

2.1. $A_1(1;-1;0)$, $A_2(6;3;1)$, $A_3(-2;4;2)$, $A_4(3;-2;3)$.

8) $\overline{x}=(7;23;4)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_3 параллельно сечению A_1A_2K, где точка K делит ребро A_3A_4 в отношении $2:1$;

10) уравнения высоты треугольника $A_1A_2A_4$, опущенной из вершины A_4 на сторону A_1A_2.

2.2. $A_1(2;0;-1)$, $A_2(4;-1;3)$, $A_3(1;-1;1)$, $A_4(5;4;-2)$.

8) $\overline{x}=(0;11;-14)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_3A_4 перпендикулярно грани $A_1A_2A_3$;

10) уравнения биссектрисы треугольника $A_2A_3A_4$, проведенной из вершины A_4.

2.3. $A_1(-1;2;1)$, $A_2(0;1;-1)$, $A_3(-6;4;-2)$, $A_4(1;-1;-4)$.

8) $\overline{x}=(28;-19;-7)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_2A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 параллельно сечению A_1A_4K, где точка *K* делит ребро A_2A_3 в отношении $1:2$;

10) уравнения прямой A_4M, где *M* – точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

2.4. $A_1(3;-5;1)$, $A_2(-1;5;9)$, $A_3(1;0;1)$, $A_4(2;3;5)$.

8) $\overline{x}=(13;-5;-4)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_4},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_2A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 и высоту пирамиды, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

10) уравнения серединного перпендикуляра, проведенного к стороне A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_4$.

2.5. $A_1(-5;-3;3)$, $A_2(0;0;2)$, $A_3(1;-1;3)$, $A_4(2;-1;2)$.

8) $\overline{x}=(-15;-10;5)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_3},\ \overline{A_2A_1},\ \overline{A_2A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 перпендикулярно грани $A_1A_2A_3$;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей ось OY.

2.6. $A_1(2;1;2)$, $A_2(-5;0;3)$, $A_3(-1;0;0)$, $A_4(-8;-2;-4)$.

8) $\overline{x}=(16;6;15)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_1},\ \overline{A_3A_4},\ \overline{A_3A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, симметричной плоскости $A_1A_2A_3$ относительно вершины A_4;

10) уравнения высоты треугольника $A_2A_3A_4$, опущенной из вершины A_4.

2.7. $A_1(2;0;-1)$, $A_2(-1;0;0)$, $A_3(4;7;-4)$, $A_4(-2;3;4)$.

8) $\overline{x}=(-16;33;13)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через середину ребра A_3A_4 перпендикулярно ребру A_1A_2;

10) уравнения биссектрисы треугольника $A_1A_2A_4$, проведенной из вершины A_1.

2.8. $A_1(5;\ 2;\ 3)$, $A_2(0;1;1)$, $A_3(4;-2;\ 6)$, $A_4(3;\ 3;\ 0)$.

8) $\bar{x}=(-45;15;-66)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_2A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 перпендикулярно грани $A_1A_2A_3$;

10) уравнения прямой A_1M, где M – точка пересечения медиан треугольника $A_2A_3A_4$.

2.9. $A_1(-5;\ 3;\ 2)$, $A_2(4;\ 6;-3)$, $A_3(-1;\ 0;\ 0)$, $A_4(-1;\ 2;-3)$.

8) $\bar{x}=(-19;-5;-4)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_4},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_2A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$;

10) уравнения прямой, проходящей через точку $O(0;0;0)$ параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей прямую A_1A_4.

2.10. $A_1(1;\ 0;\ 2)$, $A_2(3;-2;\ 0)$, $A_3(-2;1;\ 0)$, $A_4(-1;\ 3;\ 3)$.

8) $\bar{x}=(-3;\ 2;-3)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через середину ребра A_1A_2 и высоту пирамиды, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

10) уравнения прямой, проходящей через точку A_1 параллельно прямой
$$\begin{cases}2x+3y+z-1=0,\\ x-2y-z+3=0.\end{cases}$$

2.11. $A_1(2;\ 6;-2)$, $A_2(-2;1;\ 0)$, $A_3(5;\ 2;\ 0)$, $A_4(3;\ 4;1)$.

8) $\bar{x}=(-9;\ 34;-20)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_4},\ \overline{A_4A_1},\ \overline{A_1A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 и прямую
$$\begin{cases}x-y+2z+3=0,\\ x+2y-z-3=0;\end{cases}$$

10) уравнения прямой, симметричной прямой A_1A_2 относительно вершины A_3.

2.12. $A_1(1;\ 4;-1)$, $A_2(3;\ 0;-2)$, $A_3(2;\ 2;\ 4)$, $A_4(0;-1;1)$.

8) $\bar{x}=(1;12;-20)$ в базисе $\left\{\overline{A_4A_2},\ \overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_3A_4 перпендикулярно грани $A_1A_2A_4$;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_4 параллельно прямой
$$\begin{cases}x-2y+z+4=0,\\ 2x+y-2z-7=0.\end{cases}$$

2.13. $A_1(0;\,3;-2)$, $A_2(6;\,4;-5)$, $A_3(-3;\,5;-1)$, $A_4(-1;\,0;\,2)$.

8) $\bar{x}=(15;\,6;-17)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, симметричной плоскости $A_1A_2A_3$ относительно вершины A_4;

10) уравнения высоты треугольника $A_2A_3A_4$, опущенной из вершины A_4 на сторону A_2A_3.

2.14. $A_1(4;\,3;\,2)$, $A_2(0;\,1;-1)$, $A_3(1;\,4;-6)$, $A_4(3;\,0;-1)$.

8) $\bar{x}=(-12;\,14;-31)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_3A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_4 параллельно ребру A_2A_3;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей ось *OX*.

2.15. $A_1(2;\,0;-1)$, $A_2(3;-5;\,4)$, $A_3(0;\,1;\,2)$, $A_4(-2;-8;\,3)$.

8) $\bar{x}=(31;-6;\,22)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_3},\ \overline{A_3A_2},\ \overline{A_2A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 и высоту пирамиды, опущенную из вершины A_1 на грань $A_2A_3A_4$;

10) уравнения серединного перпендикуляра, проведенного к стороне A_1A_4 треугольника $A_1A_2A_4$.

2.16. $A_1(-2;\,0;\,6)$, $A_2(-1;\,0;\,3)$, $A_3(0;\,3;\,9)$, $A_4(-3;\,7;\,4)$.

8) $\bar{x}=(8;\,47;\,65)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4},\ \overline{A_4A_1}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_4 перпендикулярно грани $A_2A_3A_4$;

10) уравнения прямой, симметричной прямой A_2A_3 относительно вершины A_1.

2.17. $A_1(4;\,2;\,1)$, $A_2(6;\,7;\,4)$, $A_3(-3;\,0;\,0)$, $A_4(9;\,3;-1)$.

8) $\bar{x}=(26;\,11;\,1)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_2 параллельно ребру A_3A_4;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_4 и точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

2.18. $A_1(9;\,7;\,1)$, $A_2(3;\,9;\,0)$, $A_3(2;-3;\,1)$, $A_4(5;\,2;\,5)$.

8) $\bar{x}=(6;\,-9;\,22)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_4},\ \overline{A_4A_2},\ \overline{A_2A_1}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно сечению A_1A_2K, где точка K делит ребро A_3A_4 в отношении $1:2$;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей ось OY.

2.19. $A_1(5;-3;3)$, $A_2(-2;-1;0)$, $A_3(-2;1;0)$, $A_4(3;2;2)$.

8) $\bar{x}=(36;1;15)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_4},\ \overline{A_4A_1},\ \overline{A_1A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 и прямую $\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\ x-y+2z+5=0;\end{cases}$

10) уравнения серединного перпендикуляра, проведенного к стороне A_2A_3 треугольника $A_1A_2A_3$.

2.20. $A_1(-5;0;-1)$, $A_2(-1;2;12)$, $A_3(3;4;5)$, $A_4(6;1;1)$.

8) $\bar{x}=(-5;11;-15)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_3},\ \overline{A_3A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 и высоту пирамиды, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

10) уравнения высоты треугольника $A_1A_2A_4$, опущенной из вершины A_4 на сторону A_1A_2.

2.21. $A_1(0;8;-3)$, $A_2(4;1;1)$, $A_3(-8;-2;-1)$, $A_4(-5;-4;-2)$.

8) $\bar{x}=(-10;-13;8)$ в базисе $\left\{\overline{A_4A_2},\ \overline{A_4A_3},\ \overline{A_1A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через середину ребра A_1A_3 перпендикулярно ребру A_2A_4;

10) уравнения биссектрисы треугольника $A_1A_2A_3$, проведенной из вершины A_1.

2.22. $A_1(2;3;0)$, $A_2(1;1;2)$, $A_3(-5;1;-1)$, $A_4(5;-2;6)$.

8) в базисе $\left\{\overline{A_3A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, симметричной плоскости $A_2A_3A_4$ относительно вершины A_1.

10) уравнения прямой A_4M, где M – точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

2.23. $A_1(-3;-1;0)$, $A_2(-7;4;2)$, $A_3(-13;8;7)$, $A_4(-2;1;3)$.

8) $\bar{x}=(-4;11;20)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_2},\ \overline{A_2A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_2 перпендикулярно грани $A_2A_3A_4$;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей ось OZ.

2.24. $A_1(3;3;-6)$, $A_2(2;-4;0)$, $A_3(0;1;1)$, $A_4(7;0;-4)$.

8) $\bar{x} = (-4;\ 22;\ -13)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_1},\ \overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 параллельно сечению A_2A_3K, где точка K делит ребро A_1A_4 в отношении $2:1$;

10) уравнения прямой, симметричной прямой A_1A_2 относительно вершины A_3.

2.25. $A_1(1;\ 0;\ 2)$, $A_2(-1;\ 6;\ 5)$, $A_3(-3;\ 3;\ 1)$, $A_4(-2;\ -1;\ 0)$.

8) $\bar{x} = (14;\ 14;\ 20)$ в базисе $\left\{\overline{A_4A_1},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_3A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_1 и прямую $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x + 3y + z - 3 = 0; \end{cases}$

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_4 и точку пересечения плоскости $A_1A_2A_3$ с осью OY.

2.26. $A_1(-2;\ 2;\ 4)$, $A_2(0;\ -2;\ 3)$, $A_3(-3;\ -1;\ 1)$, $A_4(2;\ -3;\ 3)$.

8) $\bar{x} = (-5;\ 11;\ 1)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_2},\ \overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_2 параллельно оси OX.

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно прямой $\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$

2.27. $A_1(-2;\ -4;\ 0)$, $A_2(-1;\ -5;\ 8)$, $A_3(0;\ -2;\ 9)$, $A_4(2;\ 1;\ 1)$.

8) $\bar{x} = (19;\ 33;\ 0)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_4},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_4A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + 2y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$ параллельно ребру A_1A_2;

10) уравнения прямой, проходящей через точку $O(0;0;0)$, лежащей в плоскости OXY и перпендикулярной прямой A_1A_2.

2.28. $A_1(3;\ -3;\ 2)$, $A_2(2;\ 0;\ 1)$, $A_3(3;\ -5;\ 5)$, $A_4(1;\ -9;\ 8)$.

8) $\bar{x} = (-8;\ -10;\ 13)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\ \overline{A_3A_4},\ \overline{A_1A_3}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_2A_3 параллельно оси OY;

10) уравнения прямой, проходящей через середину ребра A_1A_4 и точку пересечения плоскости $A_2A_3A_4$ с осью OX.

2.29. $A_1(5;\ 5;\ -7)$, $A_2(3;\ 2;\ 2)$, $A_3(0;\ -2;\ -5)$, $A_4(2;\ 6;\ -4)$.

8) $\bar{x} = (14;\ 9;\ -1)$ в базисе $\left\{\overline{A_3A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_2}\right\}$;

9) уравнение плоскости, симметричной плоскости $A_2A_3A_4$ относительно вершины A_1;

10) уравнения прямой, лежащей в плоскости OYZ, проходящей через вершину A_3 и перпендикулярной ребру A_3A_4.

2.30. $A_1(0;-5;-2)$, $A_2(-1;0;1)$, $A_3(2;2;-3)$, $A_4(0;-4;-2)$.

8) $\bar{x}=(6;20;-3)$ в базисе $\left\{\overline{A_4A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x+2y+z=0, \\ 2x+3y-z-2=0 \end{cases}$ параллельно ребру A_2A_3;

10) уравнения прямой, симметричной прямой A_1A_2 относительно вершины A_4.

2.31. $A_1(-2;5;3)$, $A_2(1;4;5)$, $A_3(-1;4;6)$, $A_4(0;3;6)$.

8) $\bar{x}=(-4;2;-8)$ в базисе $\left\{\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_4 перпендикулярно грани $A_2A_3A_4$;

10) уравнения прямой, проходящей через вершину A_1 и точку пересечения плоскости $A_2A_3A_4$ с осью OY.

2.32. $A_1(-1;2;6)$, $A_2(-2;0;5)$, $A_3(-1;0;3)$, $A_4(0;1;7)$.

8) $\bar{x}=(2;0;-13)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1},\overline{A_1A_4}\right\}$;

9) уравнение плоскости, проходящей через ребро A_1A_4 параллельно оси OZ;

10) уравнения прямой, лежащей в плоскости OXZ, проходящей через вершину A_3 и перпендикулярной ребру A_1A_2.

З а д а н и е 3

3.1. В треугольнике *ABC* заданы уравнения сторон AB: $x+3y-24=$ $=0$, $AC: 5x+y+6=0$, а также середина стороны *BC* – точка $M(2;5)$. Найти уравнение стороны *BC*.

3.2. Известны вершины $A(-1;1)$, $B(1;5)$ одного основания равнобедренной трапеции $ABCD$ и вершина $C(5;8)$ другого основания. Найти координаты вершины D и длину высоты трапеции.

3.3. В треугольнике *ABC* дано уравнение стороны $AB: 3x+2y-12=0$ и уравнения высот, опущенных из вершин *A* и *B:* $x+2y=4$ и $4x+y=6$. Найти уравнение высоты, опущенной из вершины *C*.

3.4. Дана вершина ромба $A(2;1)$ и уравнение его диагонали $2x+y-10=0$. Найти уравнения сторон ромба, если длина его стороны равна 5.

3.5. Даны уравнения двух медиан треугольника *ABC:* $x-2y+1=0$, $y-1=0$ и вершина $A(2;\,-7)$. Найти уравнения сторон треугольника.

3.6. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$, $B(-1;\,3)$. Найти координаты двух других его вершин и уравнения диагоналей.

3.7. Треугольник *ABC* задан вершинами $A(-8;\,3)$, $B(2;\,5)$, $C(-7;\,-4)$. На прямой, содержащей высоту треугольника *AH*, найти точку *M* так, чтобы четырехугольник *ABMC* оказался трапецией.

3.8. Даны уравнения двух высот треугольника *ABC:* $2x-3y+1=0$, $x+2y+4=0$ и координаты вершины $B(2;\,3)$. Найти уравнения сторон треугольника.

3.9. Длина стороны ромба с острым углом 60° равна 4. Диагонали ромба пересекаются в точке $N(-1;\,2)$, причем меньшая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба.

3.10. Даны вершины треугольника $A(1;\,1)$, $B(4;\,-3)$, $C(9;\,7)$. Найти координаты точки пересечения биссектрисы внутреннего угла *A* со стороной *BC*.

3.11. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x+y-1=0$, $2x-y+5=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(2;\,1)$. Найти уравнения остальных сторон и площадь параллелограмма.

3.12. Даны уравнения двух боковых сторон равнобедренного треугольника: $7x-y-9=0$, $x+y-7=0$ и точка $N(3;\,-8)$, лежащая на его основании. Найти уравнение основания.

3.13. Точки $M(-2;\,-3)$, $N(3;\,2)$ являются серединами оснований прямоугольной трапеции. Боковая сторона трапеции, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $x-2y+6=0$. Найти уравнения остальных сторон.

3.14. Найти уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если известно уравнение гипотенузы $2x+y-2=0$ и вершина прямого угла $C(5;\,-1)$.

3.15. Точка $N(1;\,-1)$ является центром квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $3x-4y+3=0$. Найти уравнения остальных сторон.

3.16. Даны две вершины $A(1;\,4)$ и $B(2;\,-3)$ треугольника *ABC*, а также точка пересечения его высот $H(5;\,-1)$. Составить уравнения сторон треугольника.

3.17. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+1=0$ относительно точки $M(5;\,1)$. Найти расстояние между этими прямыми.

3.18. Даны координаты вершин треугольника *ABC:* $A(-1;\,3)$, $B(3;\,5)$, $C(5;\,3)$. Найти координаты центра описанной около ΔABC окружности и ее радиус.

3.19. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой его стороной является отрезок прямой $6x+8y-48=0$, концы которого лежат на осях координат.

3.20. Даны две вершины треугольника $A(2;-3)$, $B(5;1)$, уравнения стороны $BC: x+2y-7=0$ и медианы $AM: 5x-y-13=0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, и найти ее длину.

3.21. Даны уравнения двух сторон ромба: $2x-5y-1=0$, $2x-5y-23=0$ и уравнение одной из его диагоналей: $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали.

3.22. Найти уравнение гипотенузы прямоугольного треугольника, проходящей через точку $M(4;-3)$, если катеты треугольника расположены на осях координат, а его площадь равна 3.

3.23. Точки $M(-2;3)$, $N(4;-3)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции. Точки $P(0;-4)$, $Q(1;3)$ лежат на ее боковых сторонах. Найти уравнения всех сторон трапеции.

3.24. В треугольнике ABC известна вершина $A(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины. Найти уравнения сторон.

3.25. Точка $A(-4;4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $9x-5y+3=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали квадрата.

3.26. Даны уравнения оснований равнобедренной трапеции: $2x+y-10=0$, $2x+y+5=0$, уравнение ее диагонали: $3x-y-5=0$, а также точка пересечения диагоналей $N(2;1)$. Найти уравнения боковых сторон и второй диагонали.

3.27. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $3x-4y+6=0$, $4x+3y+8=0$ и вершина $A(8;-5)$. Найти уравнения двух других сторон и его площадь.

3.28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $N(2;3)$ и образующей с положительными полуосями координат треугольник, площадь которого равна 12.

3.29. Известно уравнение одной из сторон квадрата $x-3y+6=0$ и точка пересечения диагоналей $N(1;-1)$. Найти уравнения остальных сторон.

3.30. Заданы уравнения двух сторон прямоугольника: $2x-y+3=0$, $2x-y-7=0$ и уравнение его диагонали $4x-7y+1=0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали.

3.31. Написать уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$ под углом 45° к прямой $2x+3y-7=0$.

3.32. Даны уравнения двух высот треугольника ABC: $x+y-1=0$, $2x-3y+5=0$ и координаты вершины $C(3;3)$. Найти уравнения сторон треугольника.

З а д а н и е 4

Варианты 1–10.

1) назвать и построить кривую, определяемую заданным уравнением;

2) найти координаты ее фокусов;

3) составить уравнение эллипса с указанным эксцентриситетом ε, фокусы которого совпадают с фокусами данной кривой.

4.1. $5x^2 - 4y^2 + 10x + 16y - 31 = 0$, $\varepsilon = 3/5$;

4.2. $y^2 - 3x^2 + 8y + 6x + 1 = 0$, $\varepsilon = 4/5$;

4.3. $16y^2 - 9x^2 + 36x + 96y - 36 = 0$, $\varepsilon = 5/6$;

4.4. $7x^2 - 9y^2 + 28x + 18y - 44 = 0$, $\varepsilon = 4/5$;

4.5. $4y^2 - 21x^2 - 42x - 24y - 69 = 0$, $\varepsilon = 5/6$;

4.6. $25x^2 - 11y^2 - 150x - 22y - 61 = 0$, $\varepsilon = 3/5$;

4.7. $3y^2 - x^2 + 2x + 18y - 1 = 0$, $\varepsilon = 3/5$;

4.8. $4x^2 - 21y^2 + 32x - 20 = 0$, $\varepsilon = 5/6$;

4.9. $45x^2 - 4y^2 + 180x + 8y - 4 = 0$, $\varepsilon = 7/8$;

4.10. $4y^2 - 5x^2 + 24y - 44 = 0$, $\varepsilon = 3/5$.

Варианты 11–20.

1) назвать и построить кривую, определяемую заданным уравнением;

2) составить уравнение окружности, касающейся директрисы данной кривой, если центр окружности совпадает с фокусом этой кривой.

4.11. $y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$;

4.12. $x^2 + 4y + 10x + 17 = 0$;

4.13. $y^2 + 12x - 10y + 49 = 0$;

4.14. $x^2 + 8x + 16y + 32 = 0$;

4.15. $y^2 - 12x - 4y - 44 = 0$;

4.16. $y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$;

4.17. $x^2 + 6x + 12y + 21 = 0$;

4.18. $y^2 + 16x - 4y + 20 = 0$;

4.19. $x^2 + 8y + 2x + 9 = 0$;

4.20. $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$.

Варианты 21–32.

1) назвать и построить кривую, определяемую заданным уравнением;

2) найти координаты ее фокусов;

3) составить уравнение гиперболы с указанным эксцентриситетом ε, фокусы которой совпадают с фокусами данной кривой.

4.21 $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$, $\varepsilon = 2$;

4.22. $2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0,\ \varepsilon = 2$;

4.23. $25x^2 + 16y^2 - 200x + 64y + 64 = 0,\ \varepsilon = 3$;

4.24. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 9 = 0,\ \varepsilon = 3/2$;

4.25. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0,\ \varepsilon = 2$;

4.26. $4x^2 + 29y^2 - 16x - 116y + 16 = 0,\ \varepsilon = 5/3$;

4.27. $x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 1 = 0,\ \varepsilon = 4/3$;

4.28. $5x^2 + y^2 - 20x - 6y + 9 = 0,\ \varepsilon = 4/3$;

4.29. $x^2 + 10y^2 + 20y - 30 = 0,\ \varepsilon = 3/2$;

4.30. $5x^2 + y^2 - 40x + 2y + 36 = 0,\ \varepsilon = 3/2$;

4.31. $4x^2 + 13y^2 - 8x - 48 = 0,\ \varepsilon = 3$;

4.32. $13x^2 + 4y^2 + 26x - 16y - 23 = 0,\ \varepsilon = 3/2$.

Задание 5

Определить вид поверхности и построить ее в каждом из следующих случаев:

5.1. а) $x^2 + y^2 - 2x + 2 - z = 0$; б) $y^2 - 6y + z = 0$.

5.2. а) $x^2 + 2x + 2y^2 + 4z^2 = 0$; б) $x^2 + 4x + y - 4 = 0$.

5.3. а) $x^2 + y^2 - 4y + 4z^2 = 0$; б) $x^2 + z^2 = 2z$.

5.4. а) $2y^2 + z^2 + 2z - 1 - x = 0$; б) $x^2 - y^2 + 2y - 4 = 0$.

5.5. а) $9x^2 + 4y^2 - 8y - z^2 = 32$; б) $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

5.6. а) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2z = 0$; б) $z^2 + 4z - 6y - 20 = 0$.

5.7. а) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 0$; б) $y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$.

5.8. а) $x^2 + 2y^2 - 4z + 8 = 0$; б) $x^2 - 2x + z - 4 = 0$.

5.9. а) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 0$; б) $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$.

5.10. а) $x^2 - y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$; б) $y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.

5.11. а) $x^2 + 2y^2 + 6y - 2z = 0$; б) $y^2 + 2y - x = 0$.

5.12. а) $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 2$; б) $z^2 + 6z - x - 1 = 0$.

5.13. а) $2x^2 - 4y^2 + z^2 - 2z = 0$; б) $x^2 + 5y - 2x = 0$.

5.14. а) $x^2 - y^2 + 5z - 4 = 0$; б) $x^2 + z^2 - 2z = 0$.

5.15. а) $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$; б) $z^2 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

5.16. а) $y^2 - 2y - z^2 - x^2 = 0$; б) $x - y^2 - 4y = 0$.

5.17. а) $x^2+2y^2-4y-2z=0$; б) $z^2+y^2-2z=0$.

5.18. а) $2x^2-y^2-4y-z=0$; б) $x^2-z^2+6z=0$.

5.19. а) $9x^2+4y^2+8y-36z^2=32$; б) $2x^2+5y-4x=10$.

5.20. а) $x^2-y^2+8z^2+4x=0$; б) $z^2-7x+2z=0$.

5.21. а) $5x^2+15y^2-4z^2+8z-24=0$; б) $4x^2-y^2-2y=8$.

5.22. а) $4x^2-2y^2-8x-4z^2=0$; б) $z^2+5y-4z=0$.

5.23. а) $x^2-4y^2+z^2-8y=4$; б) $x^2+4x-z=0$.

5.24. а) $x^2+y^2+4x+2z=0$; б) $y^2-2y+z^2=2$.

5.25. а) $x^2-2x+y^2-z^2=0$; б) $x^2-y^2+2y=0$.

5.26. а) $x^2-4x+2z^2+y-4=0$; б) $x^2-z^2+2z-2=0$.

5.27. а) $x^2+2y^2-z^2+2z+1=0$; б) $x^2+4x+y=0$.

5.28. а) $x^2+2x+y^2+z^2+2z=0$; б) $y^2-z^2+6z=0$.

5.29. а) $x^2-y^2+z^2+4z=0$; б) $4y^2-z^2=8$.

5.30. а) $x^2+y^2-z^2+2z=0$; б) $4y-x^2-8x=1$.

5.31. а) $x^2-2x+2y^2+z-5=0$; б) $y^2+6y+z=0$.

5.32. а) $x^2-4y^2+8y+z^2=0$; б) $x^2-2y^2+2x=0$.

Задание 6

Вычислить пределы функций (в пунктах а), б), в), г)) не пользуясь правилом Лопиталя):

6.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{3x^2}{15x+1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

6.2. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x\cdot\operatorname{tg}3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3-x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{3x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

6.3. а) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2\cdot\sin^2 x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{9x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)(\ln(x+3)-\ln(x-3))$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

6.4. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$; **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

6.5. а) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{\sin 2x-\sin x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)(\ln(2x-1)-\ln(2x+3))$; **д)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+3}-32}{4^x-16}$.

6.6. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{2}{9-x^2}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{x}{1-x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

6.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\sin 3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+3}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}$.

6.8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; **б)** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{tg}3x}$.

6.9. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x+5}\right)^{2x-5}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$.

6.10. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x^2-x}{x-3}-\dfrac{5x^2-4}{x-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{3x}$.

6.11. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2^x-1}$.

6.12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{2x-6}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin 4x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$.

6.13. а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{2x^2}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

6.14. **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{6}{9-x^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{3}{x^2}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x}$.

6.15. а) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-16}\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$.

6.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 6x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{2}{4-x}-\frac{6}{16-x^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{5x^2}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{2x^2}-\cos 3x}{5x}$.

6.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{5}{x^2-9}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$.

6.18. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+2}{x-\sqrt[3]{x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg} 3x$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+4x}{3+4x}\right)^{2x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-e^{4x}}{x}$.

6.19. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{\sin\frac{\pi x}{4}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$.

6.20. **а)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{3x^2}{15x+1}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{\sec x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

6.21. **а)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\operatorname{ctg}^2 5x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

6.22. **а)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-12}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 8x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

6.23. **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-1}{x\cdot\sin 5x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

6.24. **а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-20}{1-\cos(x-2)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5^{8x}-1}$.

6.25. **а)** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{x^2-\dfrac{\pi^2}{9}}{1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

6.26. **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+3x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{5x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)^{\frac{5}{2x-8}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

6.27. **а)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{x^2-2x-15}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-7)(\ln(3x+4)-\ln 3x)$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\operatorname{tg}x}$.

6.28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x\cdot\sin 3x}{1-\cos 4x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+10x)^{\frac{5}{x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

6.29. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{5x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\cdot\operatorname{tg}x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}3x-\sin^3 x}$.

6.30. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-9x+18}{3x^2-17x-6}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{\sin 6x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}3x(\ln(x+2)-\ln x)$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x^2}-\cos 7x}{5x^2}$.

6.31. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-3x^2+7x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)}{x^2-4}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{ctg}x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{7x}}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^{x-4}-\cos(x-4)}{x^2-16}$.

6.32. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}4x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{4x}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln x}{x^2+5}$.

З а д а н и е 7

Исследовать функцию на непрерывность и схематически построить график.

7.1. $y=\dfrac{10x}{x^3-3}$. 7.2. $y=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1-x, & 0<x\le 2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$ 7.3. $y=\dfrac{1}{1-e^{2-x}}$.

7.4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$. 7.5. $y=\dfrac{1}{x^2+6x+9}$. 7.6. $y=2^{\frac{1}{10-x}}$.

7.7. $y=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 7.8. $y=9^{\frac{1}{2-x}}$. 7.9. $y=4^{\frac{1}{3-x}}$.

7.10. $y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ 7.11. $y=\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{3-x}}}$. 7.12. $y=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

7.13. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$ 7.14. $y=\begin{cases} 3x-1, & x\le 2, \\ 2x+1, & x>2. \end{cases}$ 7.15. $y=-\dfrac{1}{\log_4 x}$.

7.16. $y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$ 7.17. $y=2^{\frac{1}{x^2-5}}$. 7.18. $y=(1+x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$.

7.19. $y=5^{\frac{1}{1-x^2}}$. 7.20. $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$. 7.21. $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

7.22. $y=2^{\frac{1}{x-5}}$. 7.23. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$. 7.24. $y=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

7.25. $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$. 7.26. $y=\begin{cases} x, & x\le -1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1<x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ x, & x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$ 7.27. $y=\begin{cases} x^2-4, & x<-2, \\ 3x+2, & -2\le x\le 2, \\ 12-x^2, & x>2. \end{cases}$

7.28. $y=\begin{cases} x^2, & x\le 3, \\ 2x+1, & x>3. \end{cases}$ 7.29. $y=\dfrac{1}{\log_2(x+4)}$. 7.30. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3-x}$.

7.31. $y=\dfrac{10x}{x^3-3}$. 7.32. $y=\begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{3x}, & x\ne 0, \\ 2, & x=0. \end{cases}$

Задание 8

Найти первые производные от функций:

8.1. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\dfrac{1-x}{1+x}}+\ln^2\cos\sqrt{\dfrac{2}{x}}$; б) $y=(\sin x)^{\frac{2}{\ln^2 x}}$.

8.2. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$; б) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\cos\frac{2}{x}}$.

8.3. а) $y=\ln\left(\cos^2\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2-x}\right)$; б) $y=(x+e^{\sqrt{x}})^{\sin\frac{1}{x}}$.

8.4. а) $y=\sqrt{x}\arccos\sqrt{x}+\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $y=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)^{\sqrt{\sin x}}$.

8.5. а) $y=\ln\dfrac{\cos^2 ax}{\sin^2 ax}$; б) $y=(\operatorname{tg}\ln x)^{\arcsin\sqrt{x}}$.

8.6. а) $s=\arcsin\sqrt{t^2-1}+\dfrac{\ln t}{\sqrt{t^2-1}}$; б) $y=\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\ln\sin x}$.

8.7. а) $y=(\sin x)^{\ln x}$; б) $y=e^{2x}\cdot\sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$.

8.8. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=(1+x)^{\cos^3(3x^2)}$.

8.9. а) $y=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; б) $y=\left(2\cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

8.10. а) $y=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\ln\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\left(\dfrac{\ln x}{e^x}\right)^{\sin x}$.

8.11. а) $y=\ln\operatorname{tg}\sqrt{x^3-5}$; б) $y=(1-x^2)^{\cos\operatorname{arctg}x}$.

8.12. а) $y=5^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=(1+\sec^2 x)^{\sqrt{x+\operatorname{arctg}x^3}}$.

8.13. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\dfrac{a}{a+x}+\arccos\sqrt{x}$; б) $y=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{3x-1}\right)^{\sin^2 e^x}$.

8.14. а) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+\ln\sqrt[4]{\dfrac{a+x}{a-x}}$; б) $y=\left(\dfrac{\ln 3x}{1-x^2}\right)^{\sin^2 e^x}$.

8.15. а) $y=\ln(e^x\sin x+e^{-x}\cos x)$; б) $y=\left(\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})\right)^{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

8.16. а) $y=\arccos(\sin^2 x-\cos^2 x)$; б) $y=\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.17. а) $y=\ln^2 \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\cos^2\sqrt{x}}$.

8.18. а) $y=\operatorname{arctg}^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln^2 x}$.

8.19. а) $y=\ln\ln(e^x\cos x-e^{-x}\sin x)$; б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\ln(1-e^{x^2})}$.

8.20. а) $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2\sqrt{e^{2x}}\right)$; б) $y=\left(\frac{\mathrm{l}}{x-1}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

8.21. а) $r=\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$.

8.22. а) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}x$; б) $y=(\operatorname{tg}2x)^x$.

8.23. а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x)=\left(\arcsin^2 3x\right)^{x^2}$.

8.24. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$; б) $y=(\cos 2x)^{\ln x}$.

8.25. а) $y=\ln\cos^3\sqrt{\operatorname{arctg}e^{2x}}$; б) $y=\left(1-x^2\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

8.26. а) $y=\ln^3\operatorname{tg}\sqrt{1-\sqrt{x}}$; б) $y=(1+\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{arctg}2x}$.

8.27. а) $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; б) $y=\arcsin^2(\operatorname{tg}2x)$.

8.28. а) $y=(\sin x)^{x+x^2}$; б) $y=\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}x+\sec x)-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x$.

8.29. а) $y=\left(\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})\right)^{\sqrt{x}}$; б) $y=\ln(e^x\sin x+e^{-x}\cos x)$.

8.30. а) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x^3}}$; б) $y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

8.31. а) $y=e^{2x}\sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3x))$; б) $y=\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)^{\cos x}$.

8.32. а) $y=\ln\left(\cos^2\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2-x}\right)$; б) $y=(x+e^{\sqrt{x}})^{\sin\frac{1}{x}}$.

З а д а н и е 9

Найти y'_x, y''_{xx}:

9.1. а) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=5$; б) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right). \end{cases}$

9.2. а) $e^{x+y}=xy$;

б) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$

9.3. а) $y=x+\operatorname{arctg} y$;

б) $\begin{cases} x=5^{1-2t}, \\ y=25^{4-3t}. \end{cases}$

9.4. а) $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1}{t}, \\ y=t-\dfrac{1}{t}; \end{cases}$

б) $y=\dfrac{e^y}{x^2-9}$.

9.5. а) $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$;

б) $\begin{cases} x=\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t, \\ y=\sin t+\cos t. \end{cases}$

9.6. а) $x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}=0$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}. \end{cases}$

9.7. а) $\begin{cases} x=\sqrt[4]{1-\sqrt{t}}, \\ y=\sqrt{1-\sqrt{t}}; \end{cases}$

б) $2x+\cos y=3y$.

9.8. а) $\begin{cases} x=e^{-t}\cos^2 t, \\ y=e^{-t}\sin^2 t; \end{cases}$

б) $x^4+y^4-2xy=0$.

9.9. а) $x+\dfrac{\sqrt{x}}{y}+2xy+a^2=0$;

б) $\begin{cases} x=-t+\dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

9.10. а) $x^2+y^2=\cos y$;

б) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$

9.11. а) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}^2 2\sqrt{t}, \\ y=\sin^2\sqrt{t}; \end{cases}$

б) $2y=9-xy^3$.

9.12. а) $\begin{cases} x=a\sin^2 2\varphi, \\ y=b\cos^2 2\varphi; \end{cases}$

б) $2xy=e^{x+y}$.

9.13. а) $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=t+\ln t; \end{cases}$

б) $x^2y=(2-y)^2+xy$.

9.14. а) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}^2\, t, \\ y = 3\,\mathrm{ctg}\, t; \end{cases}$ б) $(x+y)^2 + (x-3y)^3 = 0$.

9.15. а) $x^y = y^{-x}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{\cos 2t}, \\ y = \dfrac{\sin t}{\cos 2t}. \end{cases}$

9.16. а) $\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t, \\ y = e^{2t}\sin^2 t; \end{cases}$ б) $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$.

9.17. а) $\begin{cases} x = e^{t^2}, \\ y = \sin e^{t^2}; \end{cases}$ б) $e^y = 2x - 5y$.

9.18. а) $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$ б) $y\ln x - x\ln y = 1$.

9.19. а) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$; б) $\begin{cases} x = 2\ln \mathrm{ctg}\, t + 1, \\ y = \mathrm{tg}\, t + \mathrm{ctg}\, t. \end{cases}$

9.20. а) $xy - \ln y = 1$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \mathrm{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

9.21. а) $\mathrm{tg}\, y = 2x - y$; б) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

9.22. а) $xy = \mathrm{tg}\, y$; б) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^3 + 1. \end{cases}$

9.23. а) $x^3 + y^3 - 3xy = 1$; б) $\begin{cases} x = a + b\sin^2 t, \\ y = a + b\cos^3 t. \end{cases}$

9.24. а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; б) $\begin{cases} x = t - \dfrac{1}{t}, \\ y = 5t + \sqrt{t}. \end{cases}$

9.25. а) $\begin{cases} x = \ln(2t+1), \\ y = \dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$ б) $y + \sqrt{\dfrac{y}{x}} + 2xy = 0$.

9.26. а) $\begin{cases} x = \ln(2t+1), \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ б) $e^{xy} - \cos(x+y) = y$.

9.27. а) $xy - e^x + e^y = 0$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}\ , \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

9.28. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

9.29. а) $x^y - 5 = \sin y$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

9.30. а) $\ln(x-y) + \ln\dfrac{x}{y} = \ln(xy)$; б) $\begin{cases} x = 5^{2t} - 1, \\ y = 5^t - 2t. \end{cases}$

9.31. а) $y^2 - x = \sin y$; б) $\begin{cases} x = \sin e^{2t}, \\ y = e^{2t+1}. \end{cases}$

9.32. а) $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$; б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 t, \\ y = 3\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Задание 10

Исследовать функцию и построить ее график.

10.1. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$. 10.2. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$. 10.3. $y = \ln(2x^2 + 3)$.

10.4. $y = \dfrac{2}{1-x^2}$. 10.5. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$. 10.6. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

10.7. $y = 2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 1$. 10.8. $y = (1-x^2)^3$. 10.9. $y = \lg\left|1 - x^2\right|$.

10.10. $y=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$. 10.11. $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$. 10.12. $y=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$.

10.13. $y=\lg\left(x^2-3x+2\right)$. 10.14. $y=x^6-3x^4+3x^2-5$. 10.15. $y=e^{-x}\cdot x^2$.

10.16. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. 10.17. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. 10.18. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}+1$.

10.19. $y^3=6x^2-x^3$. 10.20. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+1}}$. 10.21. $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

10.22. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$. 10.23. $y=\dfrac{x^4}{1+x^3}$. 10.24. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

10.25. $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x^2)}$. 10.26. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. 10.27. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.

10.28. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 10.29. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. 10.30. $x^4y^2=(x^2-1)^3$.

10.31. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. 10.32. $y=x-\ln(x+1)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

З а д а н и е 1. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

П р и м е р 1. 1. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2+x_3=5. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку матрицы A поочередно на $-2,-1$ и прибавляя соответственно ко второй и третьей, получаем матрицу

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Поменяем в матрице A_1 местами вторую и третью строки. Затем умножим полученную вторую строку на 3 и прибавим к последней строке. Получим матрицу

$$A_2=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Матрице A_2 соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ \qquad x_2=3, \\ \qquad -x_3=8. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x_3=-8,\ x_2=3,\ x_1=4$. Ответ: $X=(4 \quad 3 \quad -8)^T$.

П р и м е р 1. 2. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=1, \\ 3x_1+x_2+2x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-4x_2-3x_3+6x_4=7, \\ 7x_1+5x_2+6x_3-6x_4=6. \end{cases}$$

Решение. Составив матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, умножая первую строку матрицы A поочередно на $-3,-2,-7$ и прибавляя соответственно ко второй, третьей и четвертой строке, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{cc} & \\ (-3) & (-1) \\ + & \\ & + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \end{array}\right).$$

Полученная матрица равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ \quad -2x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

Система имеет три уравнения и четыре неизвестных. Выбирая, например, x_4 в качестве свободной неизвестной и полагая $x_4 = C$, находим $x_3 = \dfrac{5}{2}C - 4, \quad x_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4}C, \quad x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4}C$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{4}C & \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4}C & \dfrac{5}{2}C - 4 & C \end{pmatrix}^T$, где $C \in R$.

З а д а н и е 2. Векторы. Прямая и плоскость в пространстве

П р и м е р. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;\ 0;\ 1)$, $A_2(0;\ 1;\ -2)$, $A_3(2;\ 3;\ 8)$, $A_4(1;\ 0;\ 3)$. Найти:

1) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_3A_4}$.

Находим векторы $\overline{A_1A_2} = (-2;\ 1;\ -3)$, $\overline{A_3A_4} = (-1;\ -3;\ -5)$.

Скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} = (-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) = 2 - 3 + 15 = 14.$$

Длина вектора $\overline{A_3A_4}$:

$$\left|\overline{A_3A_4}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}.$$

Проекцию $\overline{A_1A_2}$ на $\overline{A_3A_4}$ находим по формуле

$$\text{Пр}_{\overline{A_3A_4}}\, \overline{A_1A_2} = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_3A_4}\right|} = \frac{14}{\sqrt{35}}.$$

2) площадь грани $A_1A_2A_3$. Так как $\overline{A_1A_2}=(-2\,;1;\,-3)$, $\overline{A_1A_3}=(0;\;3;\;7)$, то

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 7\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}\bar i-\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 7\end{vmatrix}\bar j+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\bar k\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|16\bar i+14\bar j-6\bar k\right|=\left|8\bar i+7\bar j-3\bar k\right|=\sqrt{64+49+9}=\sqrt{122}\,.$$

3) объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\;\overline{A_1A_3}\;\overline{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 7\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{14}{3}\,.$$

4) расстояние от вершины A_1 до плоскости, в которой лежит грань $A_2A_3A_4$. Уравнение плоскости $A_2A_3A_4$

$$\begin{vmatrix}x & y-1 & z+2\\ 2 & 2 & 10\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 10\\ -1 & 5\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}2 & 10\\ 1 & 5\end{vmatrix}\cdot(y-1)+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot(z+2)=$$

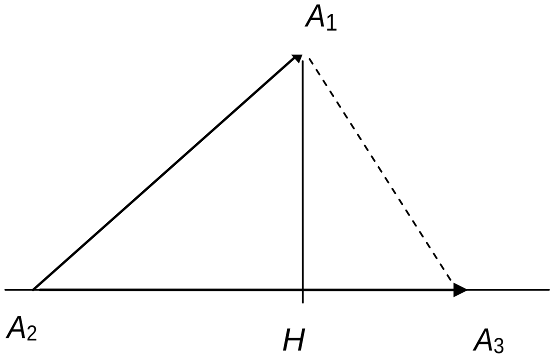
$=20x-0\cdot(y-1)-4(z+2)=20x-4z-8=0$ или $A_2A_3A_4:\;5x-z-2=0$.

Расстояние от точки A_1 до плоскости $A_2A_3A_4$

$$d(A_1;A_2A_3A_4)=\frac{\left|5\cdot 2-1-2\right|}{\sqrt{5^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}}\,.$$

5) расстояние от вершины A_1 до прямой A_2A_3 есть высота A_1H треугольника $A_1A_2A_3$, т. е.

$$d(A_1;A_2A_3)=A_1H=\frac{2S_{A_1A_2A_3}}{\left|\overline{A_2A_3}\right|}=\frac{2\sqrt{122}}{\sqrt{2^2+2^2+10^2}}=\frac{2\sqrt{122}}{\sqrt{108}}=\frac{2\sqrt{61}}{\sqrt{54}}\,.$$



6) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_2A_3A_4$. Канонические уравнения прямой A_1A_4:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{2},$$

где $\bar{s}=\overline{A_1A_4}=(-1;\,0;\,2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

Уравнение плоскости $A_2A_3A_4$ (см. п. 4)

$5x-z-2=0$, где $\bar{n}=(5;\ 0;\ -1)$ – нормальный вектор плоскости $A_2A_3A_4$.

Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\angle(A_1A_4;A_2A_3A_4)=\frac{|\bar{s}\cdot\bar{n}|}{|\bar{s}|\cdot|\bar{n}|}=\frac{|(-1)\cdot5+0+2\cdot(-1)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{26}}=\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{26}}.$$

7) угол между гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$.

Уравнение грани $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-2 & y & z-1\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}\cdot(x-2)-\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 7\end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\cdot(z-1)=$$

$$=16(x-2)+14y-6(z-1)=16x+14y-6z-26=0$$

или $A_1A_2A_3$: $8x+7y-3z-13=0$,

где $\overline{n_1}=(8;\ 7;\ -3)$ – нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$.

Уравнение $A_2A_3A_4$ найдено в п. 4:

$A_2A_3A_4$: $5x-z-2=0$, где $\overline{n_2}=(5;\ 0;\ -1)$ – нормальный вектор плоскости $A_2A_3A_4$. Угол между плоскостями находим как угол между их нормальными векторами:

$$\cos\angle(A_1A_2A_3;A_2A_3A_4)=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{8\cdot5+7\cdot0+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{122}\cdot\sqrt{26}}=\frac{43}{\sqrt{122}\cdot\sqrt{26}}.$$

8) координаты вектора $\bar{x}=(7;-6;0)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\overline{A_1A_4},\overline{A_4A_3}\right\}$.

Покажем, что данные векторы образуют базис:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2-9-5-12\neq0\Rightarrow\overline{A_2A_1}\,\overline{A_1A_4}\,\overline{A_4A_3}\neq0\Rightarrow\overline{A_2A_1},\overline{A_1A_4},\overline{A_4A_3}-$$

некомпланарны и, значит, образуют базис в R^3.

Разложим вектор $\overline{x}$ по базисным векторам:

$$\overline{x} = x_1\overline{A_2A_1} + x_2\overline{A_1A_4} + x_3\overline{A_4A_3}.$$

Приравнивая соответствующие координаты левого и правого векторов, получаем для определения координат вектора $\overline{x}$ невырожденную систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 3x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим ее по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -9 - 2 - 5 - 12 = -28,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12 - 30 - 42 = -84,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -60 + 63 + 18 + 35 = 56,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 14 + 24 = 28.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

$\overline{x} = (3;\ -2;\ -1)$ в базисе $\left\{\overline{A_2A_1},\ \overline{A_1A_4},\ \overline{A_4A_3}\right\}$.

9) уравнение плоскости P, проходящей через вершину A_1 и прямую

$$l: \begin{cases} x+y+z+2=0 & (P_1) \\ x+2y-z+1=0 & (P_2). \end{cases}$$

Прямая l задана общими уравнениями (как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2 с нормальными векторами $\overline{n_1}=(1;\ 1;\ 1)$, $\overline{n_2}=(1;\ 2;\ -1)$). Направляющий вектор прямой l

$$\overline{s_l}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}=(-3;\ 2;\ 1).$$

Найдем точку пересечения прямой l с плоскостью OXY $(z=0)$:

$$M_0: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow M_0(-3;1;0).$$

Уравнение плоскости P находим как уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(2;\ 0;\ 1)$ параллельно векторам $\overline{s_l}=(-3;\ 2;\ 1)$, $\overline{A_1M_0}=(-5;\ 1;\ -1)$:

$$P: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3(x-2)-8y+7(z-1)=-3x-8y+7z-1=0.$$

10) уравнения прямой $\bar{l}$, проходящей через вершину A_1 параллельно грани $A_2A_3A_4$ и пересекающей ось OZ. Найдем уравнение плоскости $\overline{P}$, проходящей через точку A_1 параллельно плоскости $A_2A_3A_4$ (искомая прямая $\bar{l}$ лежит в этой плоскости). Так как нормальный вектор плоскости $A_2A_3A_4$ $\bar{n}=(5;\ 0;\ -1)$ является нормальным вектором плоскости $\overline{P}$, то $\overline{P}:\ 5(x-2)-1(z-1)=5x-z-9=0$.

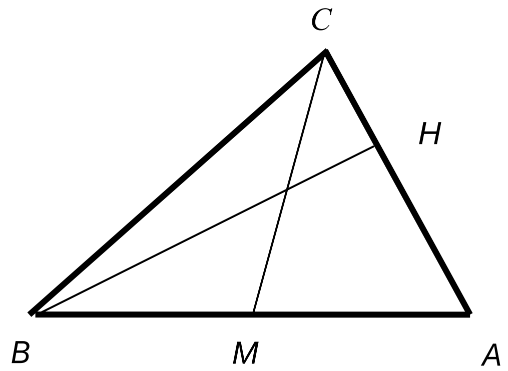
Точку пересечения плоскости $\overline{P}$ с осью OZ $(x=0, y=0)$ находим из условия $-z-9=0$, т. е. это точка $M_0(0;0;-9)$. Искомая прямая $\bar{l}$ проходит через точки A_1, M_0. Канонические уравнения $\bar{l}$ можно получить в виде

$$\bar{l}: \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+9}{5}.$$

З а д а н и е 3. Прямая на плоскости

П р и м е р 3. 1. В треугольнике *ABC* известна вершина $A(5;\,-1)$, а также уравнения высоты $x-2y+3=0$ и медианы $7x+y-14=0$, проведенных из различных вершин. Найти уравнения сторон треугольника.

Решение. Так как вершина *A* не удовлетворяет уравнениям высоты и медианы, то для определенности можно считать, что высота $BH: x-2y+3=0$, медиана $CM: 7x+y-14=0$.



Нормальный вектор высоты $\bar{n}_{BH}=(1;\,-2)$ является направляющим вектором стороны *AC*, и, значит, каноническое уравнение стороны *AC* имеет вид

$$AC:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{-2},$$

откуда $AC:\ 2x+y-9=0$ – общее уравнение прямой *AC*.

Вершину *C* находим как точку пересечения стороны *AC* и медианы *CM*, т. е. из системы

$$C:\begin{cases}2x+y-9=0\\7x+y-14=0\end{cases},$$

откуда $C(1;\ 7)$.

Найдем координаты вершины $B(x_B;\, y_B)$. Так как точка *M* делит пополам отрезок *AB*, то $M\left(\dfrac{x_B+5}{2};\dfrac{y_B-1}{2}\right)$. Далее используем условия

$$M\in CM \Rightarrow 7\left(\frac{x_B+5}{2}\right)+\frac{y_B-1}{2}-14=0,$$

$$B\in BH \Rightarrow x_B-2y_B+3=0.$$

Для определения x_B, y_B получили систему

$$\begin{cases} 7x_B + y_B + 6 = 0, \\ x_B - 2y_B + 3 = 0, \end{cases}$$

откуда $B(-1;\ 1)$.

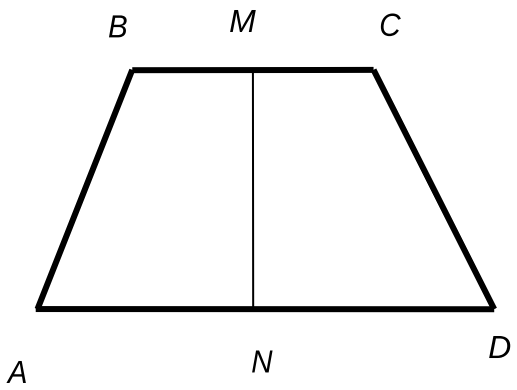
Теперь известны все вершины и остается записать уравнения сторон:

$AB:\ \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-1}$ или $AB:\ x+3y-2=0$;

$BC:\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{3}$ или $BC:\ 3x-y+4=0$.

П р и м е р 3. 2. Даны середины оснований равнобедренной трапеции $M(0;3)$, $N(2;\ -1)$ и уравнение боковой стороны $3x-y+8=0$. Найти уравнения остальных сторон трапеции.

Решение. Для определенности будем считать, что задано уравнение боковой стороны *AB*.



Вектор $\overline{MN} = (2;\ -4)$ является нормальным вектором оснований BC, AD, откуда:

$BC:\ 2x-4(y-3)=0$ или $BC:\ x-2y+6=0$ – уравнение основания BC;

$AD:\ 2(x-2)-4(y+1)=0$ или $AD:\ x-2y-4=0$ – уравнение основания AD.

Находим координаты вершин *A, B*:

$$A:\ \begin{cases} x-2y-4=0\ (AD) \\ 3x-y+8=0\ (AB) \end{cases} \Rightarrow A(-4;\ -4);$$

$$B:\ \begin{cases} x-2y+6=0\ (BC) \\ 3x-y+8=0\ (AB) \end{cases} \Rightarrow B(-2;\ 2).$$

Координаты вершин $C(x_C,\, y_C), D(x_D,\, y_D)$ находим исходя из того, что точки M, N делят пополам отрезки BC, AD:

$$C:\begin{cases} 0=\dfrac{-2+x_C}{2} \\ 3=\dfrac{2+y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow C(2;\,4). \qquad D:\begin{cases} 2=\dfrac{-4+x_D}{2} \\ -1=\dfrac{-4+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow D(8;\;2).$$

Уравнение боковой стороны CD имеет вид

$$CD:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-1} \text{ или } CD:\ x+3y-14=0.$$

З а д а н и е 4. Кривые второго порядка на плоскости

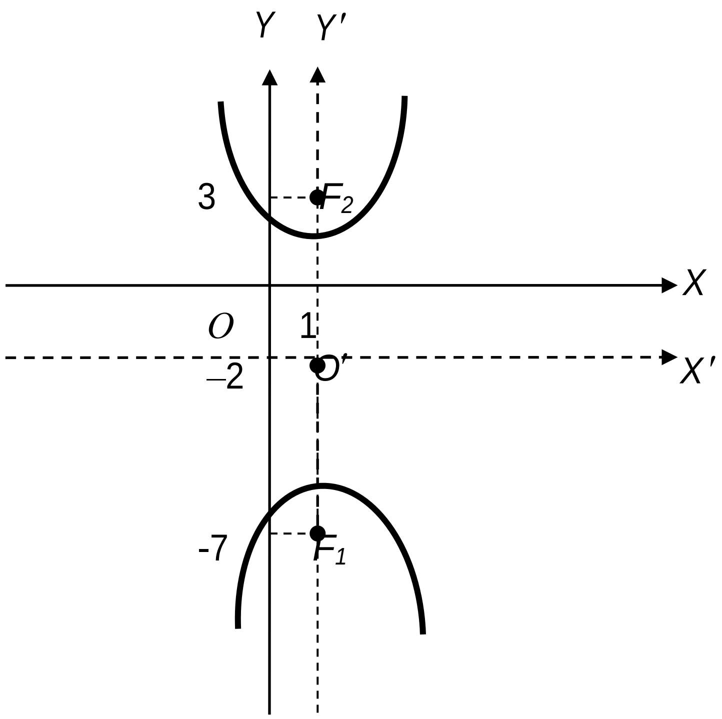
Пример. Назвать и построить кривую, определяемую уравнением $4y^2-21x^2+42x+16y-89=0$. Найти координаты ее фокусов. Составить уравнение эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{5}{6}$, фокусы которого совпадают с фокусами данной кривой.

Решение. Приводим уравнение кривой к каноническому виду:

$$4(y^2+4y+4)-16-21(x^2-2x+1)+22-89=0$$

$$4(y+2)^2-21(x-1)^2=84;$$

$$\frac{(y+2)^2}{21}-\frac{(x-1)^2}{4}=1.$$



Осуществляя параллельный перенос системы координат по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2, \end{cases}$$

получаем каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{21} = -1$ с центром в точке $O'(1;-2)$ и вершинами на оси $O'Y'$, где расстояние между фокусами $2c = 2\sqrt{4+21} = 10$.

Координаты фокусов $F_1(0;\,-5)$, $F_2(0;\,5)$ в системе координат $OX'Y'$ или $F_1(1;\,-7)$, $F_2(1;\,3)$ – в исходной системе координат OXY.

Составим требуемое уравнение эллипса. Так как его фокусы совпадают с F_1, F_2, то и центр эллипса совпадает с центром гиперболы $O'(1;\,2)$. Следовательно, уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1, \text{ где } c = \sqrt{b^2 - a^2} = 5.$$

Поскольку фокусы эллипса располагаются по оси OY', то

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{b} = \frac{5}{6} \Rightarrow b = 6,\ a^2 = b^2 - c^2 = 36 - 25 = 11.$$

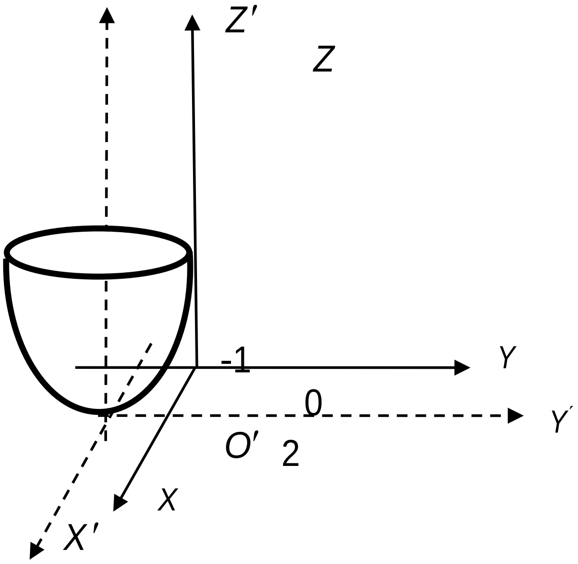
Итак, уравнение эллипса $\frac{(x-1)^2}{11} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1.$

З а д а н и е 5. Поверхности второго порядка

П р и м е р 5.1. Определить вид поверхности $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 36z + 25 = 0$ и построить ее.

Решение. Вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат и выделяя полные квадраты, получаем

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) - 36z - 16 - 9 + 25 = 0 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36z.$$



Перейдем к новым координатам по формулам

$$x' = x - 2,\ \ y' = y + 1,\ \ z' = z.$$

В новой системе координат $O'X'Y'Z'$ уравнение принимает вид

$$4(x')^2 + 9(y')^2 = 36z' \text{ или } \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = z'.$$

Уравнение определяет эллиптический параболоид.

П р и м е р 5.2. Определить вид поверхности $x^2 + 4x + 6y + 22 = 0$ и построить ее.

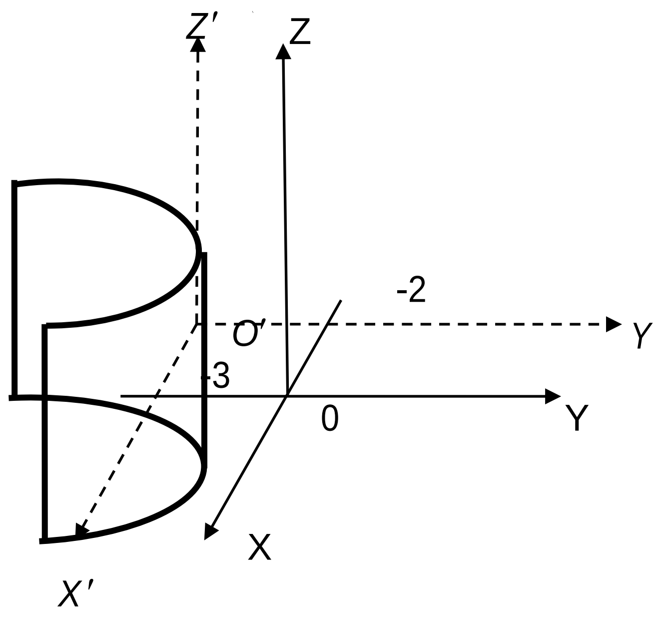
Решение. Группируем члены, содержащие x, и выделяем полный квадрат

$$(x^2 + 2x + 4) + 6y - 4 + 22 = 0 \text{ или } (x + 2)^2 = -6(y + 3).$$

Обозначим $x' = x + 2$, $y' = y + 3$, $z' = z$.

В новой системе координат $O'X'Y'Z'$ уравнение принимает вид $(x')^2 = -6y'$.

Уравнение определяет параболический цилиндр.



З а д а н и е 6. **Вычисление пределов функций**

*А. **Раскрытие неопределенности*** $\frac{0}{0}$

П р и м е р 6.1. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 + 14x + 15}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$ дает множитель $x + 3$. Разложим числитель и знаменатель на множители и затем произведем сокращение дроби на $x + 3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{3x^2+14x+15}=\left|\begin{array}{c} x^2+2x-3=0\Rightarrow x_1=-3;\ x_2=1; \\ 3x^2+14x+15=0,\ D=16\Rightarrow \\ x_{1,2}=\dfrac{-14\pm 4}{6}=\left[\begin{array}{l}-3\\ -\dfrac{5}{3}\end{array}\right. \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(3x+5)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-1}{3x+5}=\frac{-4}{-4}=1.$$

П р и м е р 6.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-2\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+7}-2x}$.

Решение. Домножим и разделим числитель на сопряженное ему выражение:

$$4-2\sqrt{x+3}=\frac{(4-2\sqrt{x+3})(4+2\sqrt{x+3})}{4+2\sqrt{x+3}}=\frac{16-4x-12}{4+2\sqrt{x+3}}=\frac{4-4x}{4+2\sqrt{x+3}}.$$

Домножим и разделим знаменатель на неполный квадрат суммы:

$$\sqrt[3]{x+7}-2x=\frac{(\sqrt[3]{x+7}-2x)((\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2)}{(\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2}=$$

$$=\frac{x+7-8x^3}{(\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{4-2\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+7}-2x}=\lim_{x\to 1}\frac{(4-4x)((\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2)}{(x+7-8x^3)(4+2\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4(x-1)((\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2)}{-(x-1)(8x^2+8x+7)(4+2\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4((\sqrt[3]{x+7})^2+2x\cdot\sqrt[3]{x+7}+4x^2)}{(8x^2+8x+7)(4+2\sqrt{x+3})}=\frac{4\cdot 12}{23\cdot 8}=\frac{6}{23}.$$

П р и м е р 6.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой $1-\cos 4x = 2\sin^2 2x$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 4\right)=$$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=8.$$

Б. Раскрытие неопределенностей $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty\cdot 0)$

П р и м е р 6.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+9x}-x)$.

Решение. Умножение и деление на сопряженное данному двучлену выражение сводит неопределенность $\infty-\infty$ к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+9x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+9x}-x)(\sqrt{x^2+9x}+x)}{\sqrt{x^2+9x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+9x-x^2}{\sqrt{x^2+9x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{\sqrt{x^2+9x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{x}}+1}=\frac{9}{2}.$$

П р и м е р 6.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{2x-5}-\frac{17}{6x^2-13x-5}\right)$.

Решение. Приведение дробей к общему знаменателю сменяет неопределенность $\infty-\infty$ на неопределенность $\frac{0}{0}$, которая раскрывается сокращением дроби на множитель $2x-5$. Учитывая, что $6x^2-13x-5=(2x-5)(3x+1)$, получаем:

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{2x-5}-\frac{17}{(2x-5)(3x+1)}\right)=\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{6x+2-17}{(2x-5)(3x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{3(2x-5)}{(2x-5)(3x+1)}=3\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{1}{3x+1}=\frac{6}{17}.$$

П р и м е р 6.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}x$.

Решение. Преобразуем исходное выражение, сведя тем самым неопределенность $0\cdot\infty$ к неопределенности $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\pi}\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to\pi}2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=2\lim_{x\to\pi}\cos^2 x=2\cdot 1=2.$$

В. Раскрытие неопределенности 1^∞

Неопределенность 1^∞ раскрывается с помощью «подгонки» ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$, например, по следующей схеме:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\left[f(x)-1\right]\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot\varphi(x)}.$$

П р и м е р 6.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{4}{x-3}}$.

Решение. Поскольку $2x-5\to 1$ при $x\to 3$, то имеем неопределенность 1^∞. Согласно описанной схеме получаем

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{4}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left[\left(1+(2x-6)\right)^{\frac{1}{2x-6}}\right]^{(2x-6)\cdot\frac{4}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{8(x-3)}{x-3}}=e^8.$$

П р и м е р 6.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+3}\right)^{6x}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-7}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{7}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$, то имеем неопределенность 1^∞. Выделим, согласно схеме, второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+3}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-10}{2x+3}\right)^{6x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-10}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-10}}\right]^{\frac{-10}{2x+3}\cdot 6x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-60x}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-60}{2+\frac{3}{x}}}=e^{-30}.$$

П р и м е р 6.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)(\ln x-\ln(x+3))$.

Решение. Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Преобразуем исходное выражение:

$$(2x-4)(\ln x-\ln(x+3))=\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)^{2x-4}.$$

Под знаком логарифма получили неопределенность 1^{∞}. Используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-4)(\ln x-\ln(x+3))=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{2x-4}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3-3}{x+3}\right)^{2x-4}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-3}}\right]^{\frac{-3}{x+3}\cdot(2x+4)}=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-12}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6-\dfrac{12}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=-6.$$

Г. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ **и** $\frac{\infty}{\infty}$

П р и м е р 6.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

П р и м е р 6.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^x-\sqrt{1+3x}}{4^{x-1}-1}$.

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to1}\frac{2^x-\sqrt{1+3x}}{4^{x-1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(2^x-\sqrt{1+3x})'}{(4^{x-1}-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{2^x\cdot\ln2-\dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{4^{x-1}\cdot\ln4}=$$

$$=\frac{2\cdot\ln2-\dfrac{3}{4}}{\ln4}=\frac{8\ln2-3}{4\ln4}.$$

З а д а н и е 7. Исследование функции на непрерывность

П р и м е р. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \text{ если } x\le 0, \\ (x-1)^2, \text{ если } 0<x\le 2, \\ 4-x, \text{ если } x>2. \end{cases}$$

Схематически построить график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Так как эта функция задана тремя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x, то она может иметь разрывы в точках $x=0$ и $x=2$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x=0$:

$$f(0)=(1-x^2)\Big|_{x=0}=1,$$

т. е. функция определена при $x=0$.

Найдем односторонние пределы функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(1-x^2)=1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)^2=1.$$

Так как односторонние пределы при $x\to 0$ равны значению функции в точке $x=0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x=2$:

$$f(2)=(x-1)^2\Big|_{x=2}=1;$$

функция определена при $x=2$.

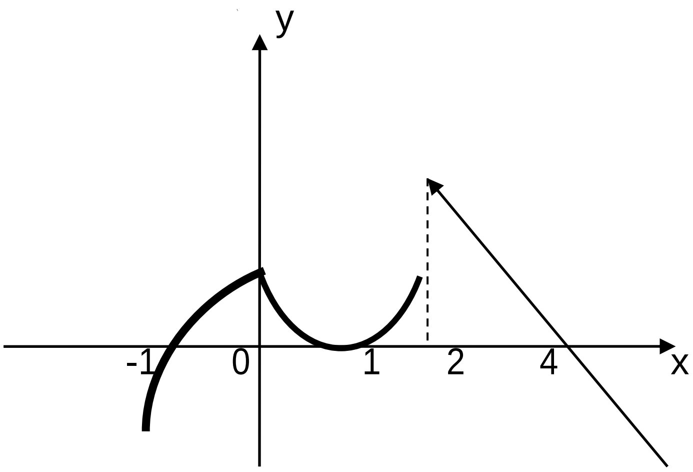
Найдем односторонние пределы функции при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(4-x)=2.$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то функция терпит разрыв первого рода.

Строим схематический график данной функции.



З а д а н и е 8. Вычисление производных

П р и м е р. Вычислить производную функции

$$y = (\ln x)^{\sin x}.$$

Решение. Для нахождения производной показательно-степенной функции используем логарифмическое дифференцирование. Логарифмируя обе части, получаем

$$\ln y = \ln(\ln x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln(\ln x).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, имеем

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(\ln x) + \sin x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x};$$

$$y' = y\left(\cos x \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x \ln x}\right);$$

$$y' = (\ln x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x \cdot \ln x}\right).$$

З а д а н и е 9. Вычисление производных функций, заданных неявно и параметрически

П р и м е р 9.1. Вычислить производную функции

$$y^3 = x^2 + \ln\frac{y}{x}.$$

Так как зависимость между переменными x и y задана в неявном виде, то для нахождения производной достаточно продифференцировать обе части уравнения, считая y функцией от x, и из полученного уравнения найти y'.

$$3y^2y' = 2x + \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2}; \quad 3y^2y' = 2x + \frac{x}{y} \cdot \frac{y'x - y}{x^2}; \quad 3y^2y' = 2x + \frac{y'x - y}{xy};$$

$$3y^2y' = 2x + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}; \quad 3y^2y' - \frac{y'}{y} = 2x - \frac{1}{x}; \quad y'\left(3y^2 - \frac{1}{y}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x};$$

$$y'\left(\frac{3y^2 - 1}{y}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x}; \quad y' = \frac{y(2x^2 - 1)}{(3y^3 - 1)x}.$$

П р и м е р 9.2. Найти y'_x, y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 - 1, \end{cases}$ $t \in (0; +\infty)$.

Решение. Производная функции, заданной параметрически, находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

В нашем случае $x'_t = \dfrac{1}{t}$, $y'_t = 3t^2$, а $y'_x = \dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$.

Запишем первую производную как функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} y'_x = 3t^3, \\ x = \ln t, \end{cases} \quad t \in (0; +\infty).$$

Тогда $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3$.

Следовательно, вторая производная имеет вид $\begin{cases} y''_{xx} = 9t^3, \\ x = \ln t, \end{cases}$ $t \in (0, +\infty)$.

З а д а н и е 10. Построение графика функции

Исследование функции и построение ее графика можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность (нечетность) и периодичность. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти точки разрыва функции и асимптоты кривой.
4. Определить интервалы монотонности и локальные экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Построить график функции.

П р и м е р. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1. Находим область определения $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Поскольку $f(-x)\neq -f(x)$, $f(x+T)\neq f(x)$, то функция не является четной, нечетной и периодической.

Находим точки пересечения с осями координат:

а) так как $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}\neq 0$, то график функции не пересекает ось OX;

б) при $x=0$ график функции пересекает ось OY в точке $y=-1$.

3. Функция не определена в точке $x=1$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$, то $x=1$ – точка разрыва второго рода. Так как $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота. Далее находим

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Следовательно, прямая $y=x+1$ есть наклонная асимптота.

4. Вычислим $y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

Первая производная не существует в точке $x=1$, которая не принадлежит области определения $D(y)$ и, следовательно не является критической точкой.

При $y'=0$ получаем $x^2-2x-1=0$ или $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$. Точки x_1 и x_2 являются критическими (стационарными) точками.

Определим интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0$ $\forall x\in D(y)$:

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}>0 \text{ при } x\in\left(-\infty;\ 1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};\ +\infty\right);$$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}<0 \text{ при } x\in\left(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right).$$

Следовательно, функция возрастает при $x\in\left(-\infty;\ 1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};\ +\infty\right)$ и убывает при $x\in\left(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right)$.

В точке $x=1-\sqrt{2}$ функция имеет максимум:

$$y_{\max}=y\left(1-\sqrt{2}\right)= =-2\sqrt{2}+2\approx-0{,}83.$$

В точке $x=1+\sqrt{2}$ функция имеет минимум:

$$y_{\min}=y\left(1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+2\approx 4{,}83.$$

5. Находим

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

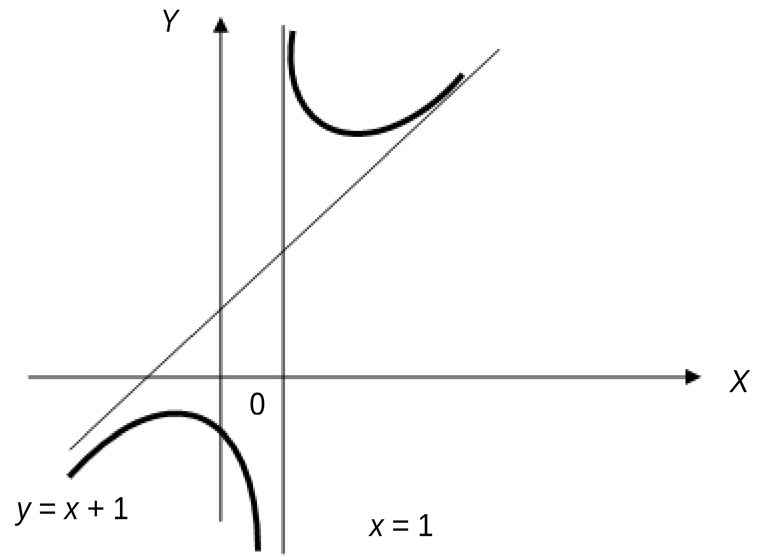
$$=\frac{(x-1)(2x^2-4x+2-2x^2+4x+2)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0$, $\forall x\in D(y)$. Имеем $y''>0$ при $x\in(1;+\infty)$, $y''<0$ при $x\in(-\infty;1)$. Следовательно, кривая выпукла на $(-\infty;1)$ и вогнута на $(1;+\infty)$. Так как $x=1$ не принадлежит области определения функции и $y''\neq 0$, $\forall x\in D(y)$, то точек перегиба нет.

Результаты исследования функции $y=f(x)$ заносим в таблицу.

x	$(-\infty;\ 1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};\ 1)$	1	$(1;\ 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2};\ +\infty)$
y'	+	0	–	Не сущ.	–	0	+
y''	–	—	–	Не сущ.	+	+	+
y	□ $\cap$	– 0,83 max	□ $\cap$	Не сущ.	□ $\cup$	4,83 min	□ $\cup$

6. Исходя из результатов таблицы, строим график данной функции.



ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

2. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

4. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

6. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / под ред. Е.И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов 1-го курса
энергетического факультета

Составители:
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
МАТЮШ Евгений Самуилович
ШАВЕЛЬ Наталья Александровна

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка С.В. Бондаренко

Подписано в печать 27.05.2010.
Формат $60\times84^{1}/_{8}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 2,27. Тираж 300. Заказ 783.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65, 220013, Минск.