

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-1-55-61>

УДК 621.873

Синтез оптимального динамического режима движения стрелы манипулятора, установленного на упругом основании

Докт. техн. наук, проф. В. С. Ловейкин¹⁾, канд. техн. наук, доц. Д. А. Мищук²⁾

¹⁾Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины (Киев, Украина),

²⁾Киевский национальный университет строительства и архитектуры (Киев, Украина)

© Белорусский национальный технический университет, 2019
Belarusian National Technical University, 2019

Реферат. С целью повышения надежности и точности выполнения манипуляторами-роботами либо иной строительной техникой грузоподъемных операций рассчитан оптимальный динамический режим перемещения их стреловой системы. В результате проведенных исследований построена математическая модель движения манипулятора и получены кинематические характеристики оптимального динамического режима. При определении оптимального динамического режима движения в качестве оптимизационного критерия использовано критериальное действие, представляющее собой интеграл по времени с подынтегральной функцией, выражающей динамическую составляющую мощности привода манипулятора. Рассчитаны функции изменения кинематических характеристик стрелы манипулятора при ее движении из одного заданного положения в другое, которые соответствуют оптимальному динамическому режиму движения. Поиск оптимального режима движения выполнен посредством минимизации критерия оптимизации при помощи уравнений Эйлера – Пуассона. При этом использован обобщенный угол поворота, который позволил связать перемещение стрелы и колебания ее опорной части. В качестве связующего компонента также применены дифференциальные уравнения движения системы, где записаны взаимосвязи между углом колебания, жесткостью опоры манипулятора и его массово-геометрическими характеристиками. Результаты работы могут быть полезны для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчета приводных механизмов манипуляторов как на стадиях проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации, а также использоваться при проектировании или усовершенствовании подобных исполнительных механизмов строительной техники и роботов.

Ключевые слова: робот, вариационная задача, режим движения, привод, ускорение, податливость опоры, упругость

Для цитирования: Ловейкин, В. С. Синтез оптимального динамического режима движения стрелы манипулятора, установленного на упругом основании / В. С. Ловейкин, Д. А. Мищук // *Наука и техника*. 2019. Т. 18, № 1. С. 55–61. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-1-55-61>

Synthesis of Optimal Dynamic Mode of Manipulator Boom Movement Mounted on Elastic Base

V. S. Loveikin¹⁾, D. A. Mischuk²⁾

¹⁾National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine (Kyiv, Ukraine),

²⁾Kyiv National University of Construction and Architecture (Kyiv, Ukraine)

Abstract. In order to increase reliability and accuracy of robot manipulators or other construction equipment used for lifting operations an optimum dynamic mode for moving its boom system has been calculated in the paper. Results of the research have made it possible to construct a mathematical model for manipulator movement and obtain kinematic characteristics of the optimum dynamic mode. While determining the optimum dynamic motion mode, a criterion action has been used as an

Адрес для переписки

Мищук Дмитрий Александрович
Киевский национальный университет
строительства и архитектуры
просп. Воздухофлотский, 31,
03680, г. Киев, Украина
Тел.: +380 44 241-55-52
mischuk84@gmail.com

Address for correspondence

Mischuk Dmitry A.
Kyiv National University
of Construction and Architecture
31 Povitroflotsky Ave.,
03680, Kyiv, Ukraine
Tel.: +380 44 241-55-52
mischuk84@gmail.com

optimization criterion which represents a time integral with an integrand function expressing a dynamic component of manipulator drive power. Functions for changing kinematic characteristics of a manipulator boom have been calculated when it moves from one predetermined position to another one and which correspond to optimum dynamic mode of motion. Search for an optimum motion mode has been performed by minimizing the optimization criterion using the Euler–Poisson equations. In this case a generalized angle of rotation has been used which permits to relate movement of the boom and oscillations of its support part. As a linking component differential equations of system motion have been also applied, in which relationships between an oscillation angle, rigidity of a manipulator support, and its mass-geometric characteristics have been recorded. Results of the work can be useful for refinement and improvement of existing engineering methods for calculating the drive mechanisms of manipulators both at design/construction stages and in real operation modes, and the results can also be used while making design or improvement of similar executive mechanisms for construction equipment and robots.

Keywords: robot, variation problem, motion mode, drive, acceleration, support compliance, elasticit

For citation: Loveikin V. S., Mischuk D. A. (2019) Synthesis of Optimal Dynamic Mode of Manipulator Boom Movement Mounted on Elastic Base. *Science and Technique*. 18 (1), 55–61. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-1-55-61> (in Russian)

Введение

Системы манипуляторов являются основными механизмами подъемно-транспортных средств, которые используются в строительном производстве и не только. В процессе изменения вылета стрелы манипулятора с грузом изменяются величины ее энергетических характеристик, причем их максимальные значения в несколько раз превышают средние. Постоянные пуско-тормозные режимы движения манипулятора приводят к возникновению в его приводе и шарнирно-сочлененных элементах значительных динамических нагрузок, которые побуждают колебания металлоконструкции и перемещаемого груза. Упругость элементов опорной части усугубляет такую ситуацию и впоследствии может привести к преждевременному выходу машины из рабочего состояния из-за усталостного разрушения некоторых ее элементов.

Существует ряд теоретических и экспериментальных исследований, посвященных минимизации колебаний в стреловых системах манипуляторов методом создания оптимизированных режимов их движения [1–7]. Вместе с тем совершенно не уделено внимание исследованию влияния податливости опорного механизма манипулятора на динамику его работы. Существует ряд работ [8, 9], где исследуется кручение стреловой системы манипулятора вследствие колебаний, однако вопросы поиска методов устранения подобных явлений не рассмотрены.

Цель исследований – поиск оптимальных режимов движения стреловой системы манипулятора с учетом податливости его опорного механизма для повышения точности выполнения операций и надежности.

Основная часть

Задачи оптимизации режимов движения механизмов машин состоят из определения критерия оптимизации и поиска экстремумов такого критерия [2]. Наиболее общий критерий, достаточно хорошо отображающий динамическое совершенство машин и механизмов, – критериальное действие [10, 11], представленное в виде интеграла по времени с подынтегральной функцией, которая выражает меру движения системы.

Для определения оптимального динамического режима движения манипулятора авторы статьи предлагают решить вариационную задачу для функционала

$$I_V = \int_{t_0}^{t_1} V(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) dt, \quad (1)$$

где $V(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k)$ – энергия ускорений оптимизируемого механизма; t_0, t_1 – граница промежутка времени, на котором будет выполнена оптимизация.

Данный критерий оптимизации выбран из соображений получения на своих границах участков разгона и торможения [10]. Подынтегральную функцию критерия (1) будем представлять в виде половины произведения обобщенного момента инерции механической системы на квадрат углового ускорения, что отвечает критериальному действию по Аппелю. Такой критерий характеризует динамическую составляющую мощности привода при перемещении из состояния спокойствия в заданное положение с полной остановкой.

Рассмотрим динамическую систему стрелового манипулятора (рис. 1) с гидроприводом, у которого массу m стрелы и груза сосредоточим на конце жесткой стрелы длиной l_1 . В ниж-

ней части стрела закреплена на одном неподвижном шарнире и через опорное звено длиной l_2 – на пружинном основании. На модели упругое основание изображено в виде пружины жесткостью c . Массой звена l_2 и демпфирующими элементами пренебрегаем.

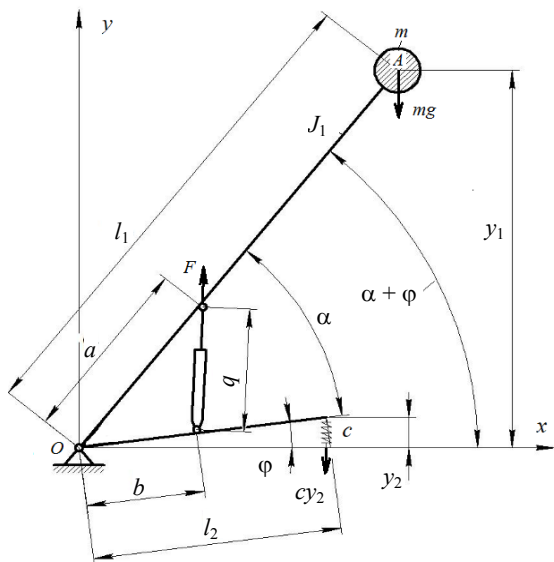


Рис. 1. Упрощенная динамическая модель манипулятора

Fig. 1. Simplified dynamic model of manipulator

Изменение вылета стрелы манипулятора осуществляется путем ее поворота вокруг неподвижного шарнира за счет выдвигания штока приводного гидроцилиндра, который одним концом присоединен к подъемной стреле, а другим установлен на опорное звено.

За обобщенные координаты движения приняты угол α поворота стрелы и угол φ поворота опорного звена l_2 , который происходит вследствие деформаций упругой опоры.

В пределах голономных связей по методу уравнения Лагранжа 2-го рода [12, 13] выполнено дифференцирование кинетической и потенциальной энергий рассмотренной механической системы и составлена система уравнений движения:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \ddot{\varphi} = \frac{M_1(\alpha, t)}{J_1} - \frac{mgl_1}{J_1} \cos(\alpha + \varphi); \\ \ddot{\alpha} + \ddot{\varphi} = -\frac{mgl_1}{J_1} \cos(\alpha + \varphi) - \frac{cl_2^2}{2J_1} \sin 2\varphi, \end{cases} \quad (2)$$

где $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение соответственно стрелы от выдвигания гидроцилиндра и от деформации опоры; J_1 – приведенный момент

инерции массы стрелы и груза; $m = \frac{m_c}{2} + m_b$ –

приведенная масса системы; $M_1(\alpha, t)$ – движущий момент, который создает приводной механизм манипулятора для поворота стрелы.

В упрощенном виде момент инерции J_1 [3]

$$J_1 = \left(\frac{m_c}{3} + m_b \right) l_1^2, \quad (3)$$

где m_c , m_b – масса стрелы и груза.

Уравнения движения (2) показывают влияние обеих обобщенных координат на динамику манипулятора. Таким образом, критерий оптимизации запишем в следующем виде:

$$I_V = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} J_1 (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi})^2 dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

В связи с тем, что критерий (4) характеризует динамическую составляющую мощности, произведен поиск его минимума на участке от 0 до t_1 .

Условием минимума функционала (4) отвечает уравнение Эйлера–Пуассона

$$\frac{\partial I_V}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I_V}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial I_V}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad (5)$$

где $q = \alpha + \varphi$; $\dot{q} = \dot{\alpha} + \dot{\varphi}$; $\ddot{q} = \ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}$.

В результате указанных замен получим дифференциальное уравнение

$$J_1^{IV} q = 0, \quad (6)$$

решая которое [14], получаем:

$$\begin{aligned} & \text{III} \\ & q = C_1; \\ & \text{II} \\ & q = C_1 t + C_2; \\ & \text{I} \\ & q = C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3; \\ & q = C_1 \frac{t^3}{6} + C_2 \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий; t – время.

Зададимся граничными условиями движения:

при $t = 0$ (пуск):

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha_0; \quad \varphi(0) = \varphi_0; \quad q(0) = \alpha_0 + \varphi_0; \\ \dot{\alpha}(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 0; \quad \dot{q}(0) = \dot{\alpha}(0) + \dot{\varphi}(0) = 0; \end{aligned}$$

при $t = t_1$ (остановка):

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) &= \alpha_1; \quad \varphi(t_1) = \varphi_1; \quad q(t_1) = \alpha_1 + \varphi_1; \\ \dot{\alpha}(t_1) &= 0; \quad \dot{\varphi}(t_1) = 0; \quad \dot{q}(t_1) = \dot{\alpha}(t_1) + \dot{\varphi}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Подставив вышеуказанные граничные условия в (7), получим:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad C_4 &= \alpha_0 + \varphi_0; \quad C_3 = 0; & (8) \\ t = t_1; \quad C_2 &= 6 \cdot \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2}; \\ C_1 &= 12 \cdot \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3}. & (9) \end{aligned}$$

Проанализировав полученные результаты, отметим, что координаты начального и конечного положений стрелы можно задавать, так как ее угловая координата является управляющей. Начальное и конечное положения угла поворота опорной стойки найдем из системы уравнений движения (2). Приравнявая первое и второе уравнения системы (2) и упрощая полученный результат, имеем

$$\varphi = -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2M_1(\alpha, t)}{cl_2^2} \right). \quad (10)$$

Знак « \rightarrow » в (10) показывает, что угол φ на рис. 1 для принятого направления сил откладывается в противоположном к указанному в схеме направлении.

Учитывая, что в начальный момент времени система еще не движется, а по окончании движения она уже не должна двигаться, движущий момент должен уравновешиваться только силами веса. Таким образом, преобразуем (10) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2mgl_1 \cos(\alpha_0)}{cl_2^2} \right); \\ \varphi_k &= -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2mgl_1 \cos(\alpha_k)}{cl_2^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные уравнения полностью определяют постоянные интегрирования выражений (7).

Для расчета параметров управляющего угла α положения стрелы рассмотрим второе уравнение системы (2). В силу малости угла поворота φ опорного звена принимаем, что $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$. Тогда получим

$$\varphi = - \left(\frac{J_1}{cl_2^2} \ddot{q} + \frac{mgl_1}{cl_2^2} \cos(q) \right). \quad (12)$$

Из (9) следует, что величина угла поворота φ точно определяется величиной координаты q и ее ускорением, которые, по сути, были найдены при помощи оптимизационной задачи. Таким образом, можем записать функцию управляющего угла поворота стрелы

$$\alpha = q - \varphi, \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} t^3 + \\ &+ 3 \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2} t^2 + \\ &+ \frac{J_1}{cl_2^2} \left(6 \cdot \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2} + \right. \\ &+ 12 \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} t \left. \right) + \\ &+ \frac{mgl_1}{cl_2^2} \cos(q) + \alpha_0 + \varphi_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} q &= 2 \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} t^3 + \\ &+ 3 \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2} t^2 + \alpha_0 + \varphi_0. \end{aligned}$$

Найдем производные от обобщенных координат по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 6 \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} t^2 + \\ &+ 6 \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2} t + \\ &+ \frac{12J_1}{cl_2^2} \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} + \frac{mgl_1}{cl_2^2} \sin(q) \cdot \dot{q}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= 12 \frac{(\alpha_0 + \varphi_0) - (\alpha_1 + \varphi_1)}{t_1^3} t + \\ &+ 6 \frac{(\alpha_1 + \varphi_1) - (\alpha_0 + \varphi_0)}{t_1^2} + \\ &+ \frac{mgl_1}{cl_2^2} (\sin(q) \cdot \ddot{q} + \cos(q) \cdot \dot{q}^2); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{J_1}{cl_2^2}\ddot{q} + \frac{mgl_1}{cl_2^2}\sin(q) \cdot \dot{q}; \quad (17)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{mgl_1}{cl_2^2}(\sin(q) \cdot \ddot{q} + \cos(q) \cdot \dot{q}^2). \quad (18)$$

Для заданных параметров стреловой системы манипулятора ($l_1 = 3$ м; $l_2 = 1$ м; $m_c = 250$ кг; $m_b = 500$ кг; $c = 100000$ Н/м) определены постоянные интегрирования и для участка времени 6 с построены графики изменений угла поворота стрелы и опорной платформы, угловой скорости и углового ускорения стрелы (рис. 2).

Анализ графиков на рис. 2 показывает, что при реализации оптимального динамического режима движения стрелы манипулятора появляется возможность контролировать угол поворота опорной платформы, который возникает вследствие проседания упругой опоры под действием сил тяжести и внешнего возмущения. Также отметим, что при реализации данного режима

колебания опорной платформы в процессе перемещения отсутствуют, а начальное и конечное значения угла соответствуют его значениям в заданных положениях стрелы в момент ее покоя.

Графики процесса моделирования оптимального динамического режима движения стрелы для аналогичных массово-геометрических параметров, но при меньшей жесткости опоры ($c = 50000$ Н/м), представлены на рис. 3. Из полученных зависимостей видно, что при малых жесткостях опорной части оптимальный динамический режим движения будет сложно реализовать, так как в начальных периодах движения должна присутствовать начальная скорость стрелы.

Недостатком полученного режима движения также является то, что в начале пуска и в конце торможения присутствует величина углового ускорения стрелы, что будет вызывать дополнительные динамические нагрузки на привод в данные моменты времени.

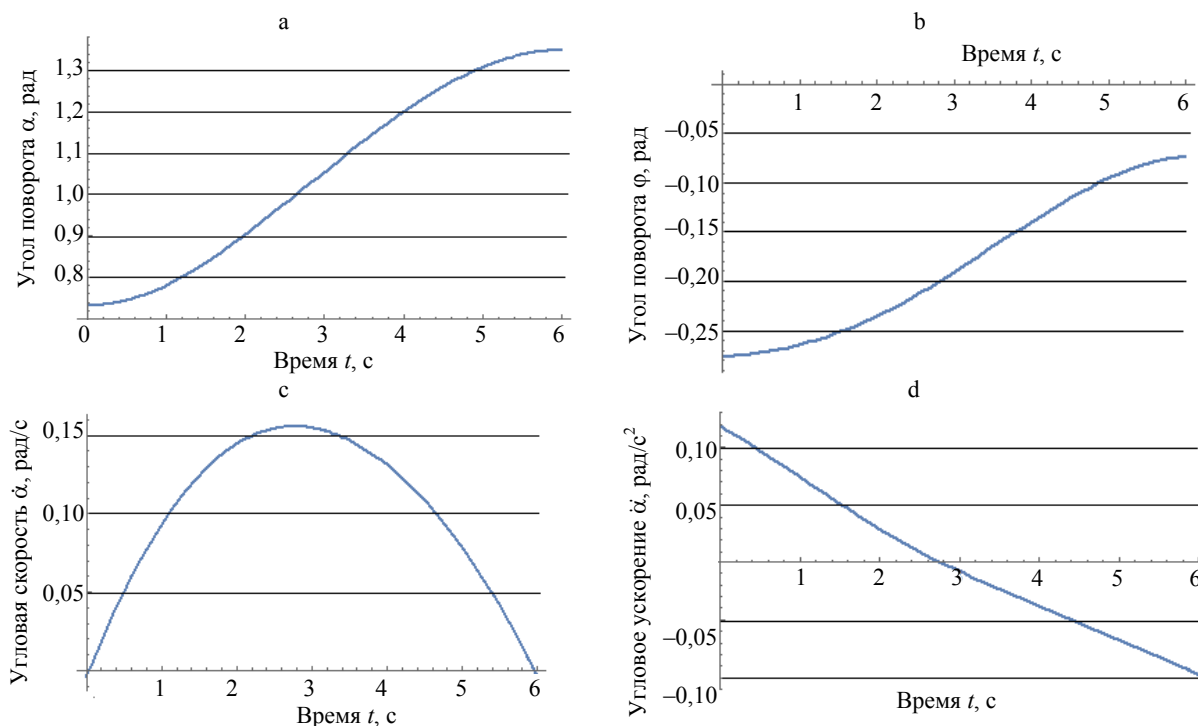


Рис. 2. Моделирование оптимального динамического режима движения стрелы при жесткости опоры $c = 100000$ Н/м для изменения угла поворота стрелы (а), опорной платформы (б), угловой скорости (с) и углового ускорения (д) стрелы при заданных параметрах механической системы:
 $l_1 = 3$ м; $l_2 = 1$ м; $m_c = 250$ кг; $m_b = 500$ кг

Fig. 2. Simulation of the optimal dynamic mode of the boom movement with support stiffness $c = 100000$ N/m change in the angle of rotation of the boom (a), the rotation of the pillar platform (b), the angular velocity of the boom (c), and the angular acceleration boom (d) for the given parameters:
 $l_1 = 3$ м; $l_2 = 1$ м; $m_c = 250$ кг; $m_b = 500$ кг

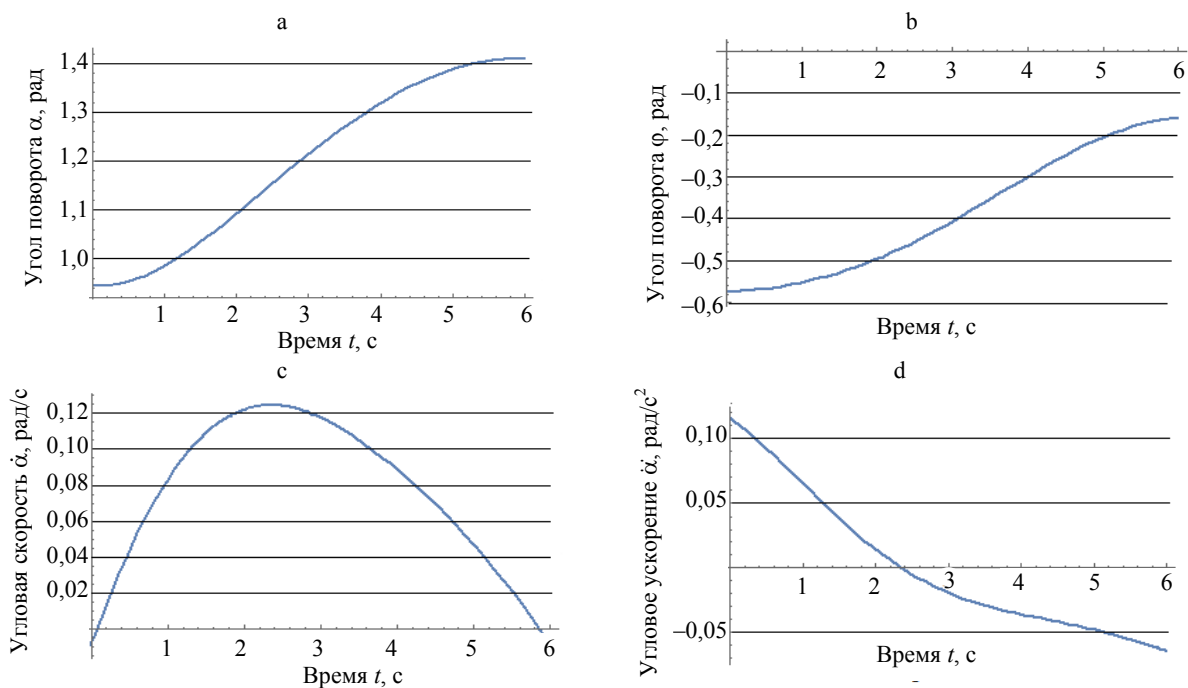


Рис. 3. Моделирование оптимального динамического режима движения стрелы при жесткости опоры $c = 50000$ Н/м для изменения угла поворота стрелы (а), опорной платформы (б), угловой скорости (с) и углового ускорения (д) стрелы при заданных параметрах механической системы, как на рис. 2

Fig. 3. Simulation of the optimal dynamic mode of the boom movement with support stiffness $c = 50000$ N/m change in the angle of rotation of the boom (a), the rotation of the pillar velocity (c) and the angular acceleration boom (d) for the given parameters same as on fig. 2

ВЫВОДЫ

1. В результате проведенного исследования с целью повышения надежности и точности выполнения перемещения груза манипулятором рассчитан оптимальный динамический режим его движения с учетом влияния податливости опорной части.

2. Оптимальный динамический режим движения стрелы манипулятора на упругом основании можно реализовать при жесткостях опорной части более 100000 Н/м. При меньших жесткостях необходимо использовать оптимальные режимы движения, которые определены для ускорений высших порядков.

3. Результаты работы могут быть использованы для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчета стреловых систем манипуляторов [15] как на стадиях проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ловейкін, В. С. Експериментальне дослідження динаміки руху штока гідроциліндра підйому шарнірно-зчленованої стрілової системи крана-манипулятора з

гідроприводом / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2011. № 78. С. 28–34.
 2. Міщук, Д. О. Дослідження динамічної моделі гідравлічного циліндра об'ємного гідроприводу / Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2016. № 87. С. 74–81.
 3. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Лань, 2002, 737 с.
 4. Міщук, Д. О. Підвищення ефективності маніпулятора за рахунок оптимального керування / Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2015. № 85. С. 43–50.
 5. Міщук, Д. О. Визначення оптимальних режимів руху маніпулятора за процес пуску (гальмування) під час роботи за однією з узагальнених координат / Д. О. Міщук, В. С. Ловейкін // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2009. № 73. С. 35–42.
 6. Ловейкін, В. С. Обґрунтування параметрів та розробка системи керування маніпулятора для вантажних робіт / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук // The Development of the Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors (DIRPSEMMS 2014). Dnipropetrovsk, 2014. P. 81–91.
 7. Міщук, Д. О. Кінематичний аналіз маніпуляційної системи будівельного робота / Д. О. Міщук // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. 2014. Вып. 65–66. С. 90–96.

8. Shi, Z. X. Dynamic Modelling of a Rigid-Flexible Manipulator for Constrained Motion Task Control / Z. X. Shi, Eric Fung H. K., Y. C. Li // *Applied Mathematical Modelling*. 1999. Vol. 23, No 7. P. 509–525.
9. Kalyoncu, M. Mathematical Modelling and Dynamic Response of a Multi-Straight-Line Path Tracing Flexible Robot Manipulator with Rotating-Prismatic Joint / M. Kalyoncu // *Applied Mathematical Modelling*. 2008. Vol. 32, Iss. 6. P. 1087–1098.
10. Ловейкін, В. С. Оптимізація режиму зміни вильоту маніпулятора з гідроприводом / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук. Київ: ЦП «КОМПРИНТ». 2013. 206 с.
11. Ловейкін, В. С. Математична модель динаміки зміни вильоту маніпулятора з жорсткими ланками / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук // *Техніка будівництва*. 2006. № 19. С. 26–29.
12. Wang, J. Kinematic Analysis and Singularity Representation of Spatial Five-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms / J. Wang, C. M. Gosselin // *J. Robotic Syst.* 1997. Vol. 14, No 12. P. 851–869.
13. Pengcheng, Liu, Modelling and Dynamic Analysis of Underactuated Capsule Systems with Friction-Induced Hysteresis / Liu Pengcheng, Yu Hongnian, Cang Shuang // *Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016. IEEE/RSJ International Conference. P. 549–554.
14. Овчинников, П. П. Вища математика: у 2 ч. / П. П. Овчинников. 2-ге вид. Київ: Техніка, 2000. Ч. 2. 792 с.
15. Миронов, Д. Н. Создание робота-сапера повышенной живучести и проходимости для обнаружения и обезвреживания взрывоопасных предметов / Д. Н. Миронов, Д. А. Евдокимов // *Наука и техника*. 2012. № 2. С. 7–10.
- (Braking) Process while Working in one of the Generalized Coordinates. *Girnich, Budivel'ni, Dorozhni ta Meliorativni Mashini = Mining, Construction, Road and Melioration Machines*, (73), 35–42 (in Ukrainian).
6. Loveikin V. S., Mischuk D. O. (2014) Justification of Parameters and Development of Control System for Manipulator of Cargo Operations. *The Development of the Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors (DIRPSEMETS 2014)*. Dnipropetrovsk, 81–91 (in Ukrainian).
7. Mischuk D. O. (2014) Kinematical Analysis of Manipulation System for Construction Work. *Vestnik Har'kovskogo Nacional'nogo Avtomobil'no-Dorozhnoho Universieta = Bulletin of Kharkiv National Automobile and Highway University*, (65–66), 90–96 (in Ukrainian).
8. Shi Z. X., Fung Eric H. K., Li Y. C. (1999) Dynamic Modelling of a Rigid-Flexible Manipulator for Constrained Motion Task Control. *Applied Mathematical Modelling*, 23 (7), 509–525. [https://doi.org/10.1016/s0307-904x\(98\)10096-3](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(98)10096-3).
9. Kalyoncu M. (2008) Mathematical Modelling and Dynamic Response of a Multi-Straight-Line Path Tracing Flexible Robot Manipulator with Rotating-Prismatic Joint. *Applied Mathematical Modelling*, 32 (6), 1087–1098. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.02.032>.
10. Loveikin V. S., Mischuk D. O. (2013) *Optimization of Mode for Changing Departure of Manipulator with Hydraulic Drive*. Kyiv, Printing Centre “KOMPRINT”. 206 (in Ukrainian).
11. Loveikin V. S., Mischuk D. O. (2006) *Mathematical Model for Dynamics of Change in Departure of Manipulator with Rigid Links*. *Tehnika Budivnictva = Construction Technique*, (19), 26–29 (in Ukrainian).
12. Wang J., Gosselin C. M. (1997) Kinematic Analysis and Singularity Representation of Spatial Five-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms. *Journal of Robotic Systems*, 14 (12), 851–869. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-4563\(199712\)14:12<851::aid-rob3>3.0.co;2-t](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-4563(199712)14:12<851::aid-rob3>3.0.co;2-t).
13. Pengcheng Liu, Hongnian Yu, Shuang Cang (2016) Modelling and Dynamic Analysis of Underactuated Capsule Systems with Friction-Induced Hysteresis. *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 549–554. <https://doi.org/10.1109/iros.2016.7759107>.
14. Ovchinnikov P. P. (2000) *Higher Mathematics. Part 2*. Kyiv, Tehnika Publ. 792 (in Ukrainian).
15. Mironov D. N., Evdokimov D. A. (2012) Development of Mine-Clearing Robot with Enhanced Serviceability and Manoeuvrability for Detection and Explosive Ordnance Disposal. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, (2), 7–10 (in Russian).

Received: 02.10.2017

Accepted: 21.12.2017

Published online: 30.01.2019

Поступила 02.10.2017
 Подписана в печать 21.12.2017
 Опубликовано онлайн 30.01.2019

REFERENCES

1. Loveikin V. S., Mischuk D. O. (2011) Experimental Study of Dynamics in Hydraulic Cylinder Rod Movement for Lifting Hinge-Articulated Boom System of Crane-Manipulator with Hydraulic Drive. *Girnich, Budivel'ni, Dorozhni ta Meliorativni Mashini = Mining, Construction, Road and Melioration Machines*, (78), 28–34 (in Ukrainian).
2. Mischuk D. O. (2016) Investigation of Dynamic Model for Hydraulic Cylinder of Volumetric Hydraulic Drive. *Girnich, Budivel'ni, Dorozhni ta Meliorativni Mashini = Mining, Construction, Road and Melioration Machines*, (87), 74–81 (in Ukrainian).
3. Butenin N. V., Lunts Ya. L., Merkin D. R. (2002) *Course of Theoretical Mechanics*. Saint-Petersburg, Lan' Publ. 737 (in Russian).
4. Mischuk D. O. (2015) Increase of Manipulator Efficiency Through Optimal Control. *Girnich, Budivel'ni, Dorozhni ta Meliorativni Mashini = Mining, Construction, Road and Melioration Machines*, (85), 43–50 (in Ukrainian).
5. Mischuk D. O., Loveikin V. S. (2009) Determination of Optimal Manipulator Movement Modes for Starting