Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельным работам по высшей математике
для студентов первого курса инженерных специальностей

Минск 2010

УДК 51 (075.4) (075.8)
ББК 21.1я7
М 54

С о с т а в и т е л ь
А.Н. Рудый

Р е ц е н з е н т ы :
А.В. Чигарев, В.В. Павлов

Настоящие методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей вузов. В них изложены вопросы курса высшей математики в форме самостоятельных работ, а также представлены ответы на задания и методические указания к ним.

ВВЕДЕНИЕ

Курс высшей математики является составной частью подготовки студентов инженерных специальностей вузов. При этом важно научить студентов самостоятельно работать над материалом, пользуясь, если нужно, справочной литературой. В пособии приводятся 3 самостоятельные работы, охватывающие следующие разделы курса высшей математики для студентов 1-го курса:

1) линейная алгебра и аналитическая геометрия;

2) неопределенный интеграл;

3) интегралы и функции нескольких переменных.

Каждая работа состоит из шести вариантов. Пять из них выдаются студентам. Шестой приводится с решением. Автор благодарит О.Г. Алексееву за помощь в оформлении рукописи.

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ x_2+x_4+x_5=2, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+8x_5=6. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе
$u_1(2;2;7)$, $u_2(-4;-2;2)$, $u_3(-3;-1;0)$, $w(-3;1;16)$.

3. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $(-2;2)$, вектор медианы $\overline{CD}$ имеет координаты $(2,5;0)$. Найти углы треугольника.

4. $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=2$; $\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\dfrac{\pi}{3}$. Найти cos угла между векторами $\vec{u}+3\vec{v}$ и $\vec{u}-2\vec{v}$.

5. В треугольнике $ABC: A(1;2;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-3;4;3)$. Написать уравнение высоты треугольника, проходящей через вершину B.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_4+4x_5=7, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=2, \\ x_1+4x_2+4x_4+5x_5=9. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе
$u_1(3;3;4)$, $u_2(-1;-8;-7)$, $u_3(0;1;5)$, $w(1;-12;-5)$.

3. В треугольнике ABC: $A(-6;4;3)$, $\overline{AB}(-3;2;4)$, $\overline{AC}(4;3;-2)$, $AD-$ высота. Найти координаты точки D.

4. Вектор u перпендикулярен векторам $v(3;2;2)$ и $w(18;-22;-5)$ и образует с осью Oy тупой угол, $|u|=14$. Найти координаты u.

5. В треугольнике $ABC: A(2;2;1),\ B(3;1;2),\ C(0;4;3)$. Написать уравнение биссектрисы треугольника проходящей, через вершину A.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+3x_4-2x_5=2, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4+3x_5=4, \\ 5x_1+3x_2+4x_3+6x_4-x_5=8. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе
$u_1(1;2;-1),\ u_2(2;3;2),\ u_3(4;7;1),\ w(2;4;-1)$.

3. В четырёхугольнике $ABCD: \overline{AB}(4;-1;5),\ \overline{BC}(-2;8;1),\ \overline{AD}(-3;4;2)$. Найти угол между диагоналями четырехугольника.

4. $\vec{a}(1;-3;4),\ \vec{b}(3;2;2),\ \vec{c}(-2;1;5)$. Найти $np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

5. В треугольнике $ABC: A(1;3;1),\ B(2;1;3),\ C(-3;5;3)$. Написать уравнение медианы треугольника, проходящей через вершину B. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+x_4+5x_5=8, \\ x_1+2x_2+4x_3+x_4-x_5=2, \\ 3x_1+2x_3+x_4+11x_5=14. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе
$u_1(-1;2;3),\ u_2(1;1;2),\ u_3(1;4;2),\ w(-2;-5;1)$.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD:
$\overline{AB}(-2;2;5),\ \overline{AC}(3;6;-2),\ \overline{AD}(10;8;-14)$. Найти координаты вектора $\overline{MN}$ – средней линии трапеции.

4. Объем тетраэдра $v=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти площадь грани ABC и координаты 4-ой вершины тетраэдра, если известно, что она лежит на оси Oy.

5. В треугольнике $ABC: A(2;2;1)$, $B(1;3;2)$, $C(4;0;3)$. Написать уравнение высоты треугольника, проходящей через вершину B.

Вариант 5

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 7, \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе
$u_1(1;2;-3)$, $u_2(3;1;1)$, $u_3(1;-3;2)$, $w(0;5;-5)$.

3. В треугольнике ABC: M - середина AB, N – середина BC, $\overline{AB}(6;-1;4)$, $\overline{MN}(-4;3;5)$. Найти вектор $\overline{BC}$, найти площадь треугольника.

4. Определить, при каком x точки $A(2;x;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости и найти площадь треугольника BCD.

5. В треугольнике $ABC: A(1;3;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-3;7;3)$. Написать уравнение биссектрисы треугольника, проходящей через вершину A.

Вариант 6

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_4 - 5x_5 = 9, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = -16. \end{cases}$

2. Показать, что векторы u_1, u_2, u_3 образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора w в этом базисе

$u_1(0;5;9)$, $u_2(2;5;4)$, $u_3(-2;1;5)$, $w(-4;1;10)$.

3. В параллелограмме $ABCD$: $A(-5;2;8)$, $\overline{AB}(-3;4;1)$, $\overline{BD}(-2;4;1)$. Найти координаты вершин B, C, D, площадь параллелограмма.

4. В треугольнике $ABC: A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(8;-3;-1)$. Найти внешний угол при вершине C.

5. В треугольнике $ABC: A(2;2;1)$, $B(1;3;2)$, $C(4;0;3)$. Написать уравнение высоты треугольника, проходящей через вершину B.

Ответы к варианту 1.

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4c_2 \\ 2-c_1-c_2 \\ 3-c_1-11c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; $c_1, c_2 \in R$.

2. $\vec{w}(2;1;1)$.

3. $\cos\angle A = \dfrac{9}{\sqrt{106}}$; $\cos\angle B = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$; $\cos\angle C = \dfrac{17}{\sqrt{13\cdot 53}}$; $\overrightarrow{CB}\left(\dfrac{3}{2};1\right)$; $\overrightarrow{CA}\left(\dfrac{7}{2};-1\right)$.

4. $\cos\left(\vec{u}+3\vec{v}\,\hat{}\,\vec{u}-2\vec{v}\right) = -\dfrac{4}{\sqrt{91}}$; $\left|\vec{u}+3\vec{v}\right| = 3\sqrt{7}$; $\left|\vec{u}-2\vec{v}\right| = \sqrt{13}$.

5. $\overrightarrow{AC}(-4;2;2)$; $\vec{n}_{\square ABC} = (6;6;6)$; $l_{выс.} = (0;-1;1)$; $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

Ответы к варианту 2.

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c_2 \\ 2-c_1-c_2 \\ 3-c_1-c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; $c_1, c_2 \in R$.

2. $\vec{w}(1;2;1)$.

3. $\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};1\right)$; $D\left(-\frac{11}{2};\frac{13}{2};4\right)$.

4. $\vec{u}(-4;-6;12)$

5. $\overrightarrow{AB}(1;-1;1)$; $\overrightarrow{AC}(-2;2;2)$; $\vec{l}_{бис.}=\left(0;0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{(z-1)\sqrt{3}}{2}$.

Ответы к варианту 3.

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{5}{4}c_1-c_2 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{4}c_1+2c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$; $c_1,\ c_2\in R$

2. $\vec{w}(0;-1;1)$.

3. $\overrightarrow{AC}(2;7;6)$; $\overrightarrow{DB}(7;-5;3)$; $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{89\cdot 83}}$.

4. $\vec{a}+\vec{b}(4;-1;6)$; $пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{21}{\sqrt{30}}$.

5. $\overrightarrow{BA}(-1;2;-2)$; $\overrightarrow{BC}(-5;4;0)$; $l_{мед.}=(-6;6;-2)$; $\frac{x-2}{-6}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{-2}$; $M\left(0;3;\frac{7}{3}\right)$.

Ответы к варианту 4.

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{14}{3}-\frac{2}{3}c_1-\frac{1}{3}c_2-\frac{11}{3}c_3 \\ -\frac{4}{3}-\frac{5}{3}c_1-\frac{1}{3}c_2+\frac{7}{3}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$; $c_1,\ c_2, c_3\in R$.

2. $\vec{w}(1;1;-2)$.

3. $\overrightarrow{BC}(5;4;-7);\overrightarrow{AD}(10;8;-14);\ \overrightarrow{MN}\left(\frac{15}{2};6;-\frac{21}{2}\right)$.

4. $D(0;y;0);|4y-2|=30;\ y_1=-7;y_2=8;\ S_{\triangle ABC}=\sqrt{5}$.

5. $\overrightarrow{AC}(2;-2;2);\overrightarrow{AB}(-1;1;1);\ \vec{n}_{\triangle ABC}=(-4;-4;0);\ l_{выс.}=(1;-1;-2);\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{-2}$.

Ответы к варианту 5.

1. $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}(22-7c_1-9c_2)\\ \frac{1}{5}(-13+3c_1+c_2)\\ -1\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix};\ c_1,\,c_2\in R$.

2. $\vec{w}(1;0;-1)$.

3. $\overrightarrow{BC}(-14;7;6);\ \vec{n}_{\triangle ABC}(34;92;-28);\ S_{\triangle ABC}=51$.

4. $x=-1;\ S_{\triangle}=\frac{1}{2}\sqrt{126}$.

5. $\overrightarrow{AB}(1;-2;2);\overrightarrow{AC}(-4;4;2);\ l_{бис.}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\left(-\frac{1}{3};0;1\right);\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{3}$.

Решение варианта 6.

1. Выпишем расширенную матрицу системы A:

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 3 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 0 & -4 & -5 & 9\\ -3 & -5 & 1 & 6 & 9 & -16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & \boxed{7} & 1 & -6 & -6 & 11\\ 0 & -14 & -2 & 12 & 12 & -22 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 7 & 1 & -6 & -6 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\ r_A=2=r_A\Rightarrow \text{система совместна.}$$

Решаем систему $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-2x_4-x_5=2 \\ 7x_2+x_3-6x_4-6x_5=11 \end{cases}$ по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}c_1+\frac{4}{7}c_2+\frac{11}{7}c_3+\frac{19}{7} \\ -\frac{1}{7}c_1+\frac{6}{7}c_2+\frac{6}{7}c_3+\frac{11}{7} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}; \; c_1,\, c_2, c_3 \in R \,.$$

2. Составим матрицу из координат векторов $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\det A \neq 0 \Rightarrow rangA=3$, следовательно, векторы линейно-независимы. Три линейно-независимых вектора 3-ех мерного пространства образуют базис.

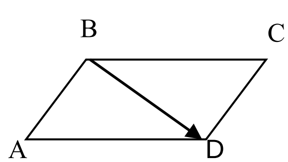
$\vec{w}=x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}+x_3\overrightarrow{u_3}$. Или в координатах: $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Поэтому получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ 5x_1+5x_2+x_3=1 \\ 9x_1+4x_2+5x_3=10 \end{cases}.$$

Решаем систему по правилу Крамера: $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=1$.

Ответ: $\vec{w}(1;-1;1)$.

3.

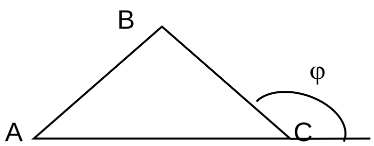


$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (-5;8;2) \qquad D = A + \overrightarrow{AD} \Rightarrow D(-10;10;10)$

$B = A + \overrightarrow{AB} \Rightarrow B(-8;6;9) \qquad C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD} = (-13;14;11)$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (0;1;-1); \quad S_{пар.} = \sqrt{17}$

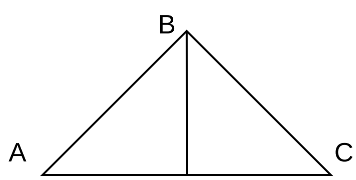
4.



$\overrightarrow{CB}(-7;-2;8) \quad \overrightarrow{AC}(11;-8;-7)$

$\cos\varphi = \dfrac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \ \varphi = 135^\circ$

5.



$\overrightarrow{AC}(2;-2;2) \ \overrightarrow{AB}(-1;1;1)$

Найдем вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости $\triangle ABC$

$\vec{n}_{\triangle ABC} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (4;4;0); \ \vec{n}_1 = (1;1;0)$

Найдем направляющий вектор высоты:

$l = \left[\vec{n}_1, \overrightarrow{AC}\right] = (2;-2;-4)$

$l_1 = (1;-1;-2) \Rightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{-2}$ – каноническое уравнение высоты из вершины B.

Самостоятельная работа № 2

Неопределенный интеграл

Вариант 1

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{tg(3x)+1}}{\cos^2 3x}dx$
2. $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$
3. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$
4. $\int x^2 \ln x \cdot dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx$
6. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$
7. $\int x\sqrt{1+x}dx$
8. $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$

9*. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}}$

Вариант 2

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{1}{x(x^2-3x+2)}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}$
3. $\int \frac{x^2dx}{3+x^6}$
4. $\int \frac{x}{2x^2+3x+1}dx$
5. $\int \ln(2x+1)dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$
7. $\int e^{x^6}x^5dx$
8. $\int \sin^3 3x dx$

9*. $\int \frac{x arctg x dx}{(1+x^2)^2}$

Вариант 3

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x-3}{x^2+5x+4}dx$
2. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}dx}{x}$
3. $\int \frac{x^4dx}{3+x^5}$
4. $\int \frac{x+2}{x(x-3)(x+4)}dx$
5. $\int x\sin 5x dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2}$
7. $\int \frac{1}{5+2\cos x}dx$
8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

9*. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Вариант 4

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx$ 2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x+x^2+4}}$

4. $\int xe^{3x}dx$ 5. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+4}dx$ 6. $\int tg^3 xdx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}dx$ 8. $\int \sqrt[3]{\cos x}\sin xdx$ 9*. $\int \frac{x\ln xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

Вариант 5

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+2}dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{x}$ 3. $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{3x^3+2}dx$

4. $\int \cos^3 2xdx$ 5. $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3} ctg \frac{x}{3}}dx$ 6. $\int \arcsin 2xdx$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^8}}dx$ 8. $\int \frac{x}{(x-1)(x^2-2x+3)}dx$ 9*. $\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$

Вариант 6

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{4-2x}{x^2-3x-4}dx$ 2. $\int x\ln(x-1)dx$ 3. $\int 2^{x^3}x^2dx$

4. $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$ 5. $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^4}}dx$ 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$

7. $\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx$ 8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2}}dx$ 9*. $\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$

Ответы к варианту 1.

1. $\frac{2}{9}(tg3x+1)^{\frac{3}{2}}+c$.

2. $-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}}{tg\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}}\right|+c$.

3. Указание. $\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$. Ответ: $-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x+1|+c$

4. $\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$.

5. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+c$.

6. $\sqrt{x^2-4x+2}+\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2-2}\right|+c$.

7. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$.

8. $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+c$.

9. Указание. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9x+13\right)^3}}=\int\frac{d(x+2)}{\left((x+2)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^3\left(1+\frac{9}{(x+2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Ответ: $\frac{1}{9}\left(1+9(x+2)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}+c$.

Ответы к варианту 2.

1. Указание. $\frac{1}{x}=t$. Ответ: $-\frac{1}{2}\ln\left|2\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\frac{1}{x}+1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}\right|+c$

2. $\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}+arctg\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+c$.

3. $\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x^3}{\sqrt{3}}+c$.

4. $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x+1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}\right|+c$.

5. $x\ln|2x+1|-x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$.

6. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+c$.

7. $\frac{1}{6}e^{x^6}+c$.

8. $-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\cos^3 3x+c$.

9. Указания. $arctgx=t$. Ответ: $-\frac{1}{4}\left(t\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$.

Ответы к варианту 3.

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5x+4\right|-\frac{11}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+c$. 2. $\frac{4}{5}(\ln x)^{\frac{5}{4}}+c$ 3. $\frac{1}{5}\ln\left|x^5+3\right|+c$.

4. Указание. $\frac{x+2}{x(x-3)(x+4)}=\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{5}{21}}{x-3}-\frac{\frac{1}{14}}{x+4}$.

Ответ: $-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{5}{21}\ln|x-3|-\frac{1}{14}\ln|x+4|+c$.

5. $-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+c$.

6. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+12\ln\left|x^{\frac{1}{3}}+2\right|+c$.

7. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}tg\frac{7}{3}}{\sqrt{7}}\right)+c$.

8. $2e^{\sqrt{x}}+c$.

9. Указания. $\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: $-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$.

Ответы к варианту 4.

1. $-\sqrt{2-x^2}+c$.

2. Указание. $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+4)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{x+1}-\dfrac{1}{5}\dfrac{x-1}{x^2+4}$.

Ответ: $\frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln(x^2+4)+\frac{1}{10}arctg\frac{x}{2}+c$.

3. $\sqrt{x^2+5x+4}-\frac{5}{2}\ln\left|\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\right|+c$.

4. $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c$.

5. $x-2x^{\frac{2}{3}}+16x^{\frac{1}{3}}-64\ln\left|\sqrt[3]{x+4}\right|+c$.

6. $\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln(1+tg^2x)+c$.

7. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{4+x^6}\right|+c$.

8. $-\frac{3}{4}(\cos x)^{\frac{4}{3}}+c$.

9. Указание. $\displaystyle\int\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\ln x\,d\left((x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right)=-\ln x\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+\int(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x}$.

Ответ: $-\ln x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+c$.

Ответы к варианту 5.

1. $\ln(x^2+x+2)+2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{7}}+c$

2. $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c$

3. $\frac{5}{54}(3x^3+2)^{\frac{6}{5}}+c$

4. $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+c$

5. $-3\ln\left|ctg\frac{x}{3}\right|+c$

6. $x\arcsin 2x+\frac{1}{2}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}+c$

7. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+\sqrt{1+x^8}\right)+c$

8. Указание. $\dfrac{x}{(x-1)\left(x^2-2x+3\right)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x-3)}{x^2-2x+3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{4}\ln\left(x^2-2x+3\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{(x-1)}{\sqrt{2}}+c$.

9.Указание. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}-\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^{-4}+3x^{-2}+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^{-2}\right)}{\sqrt{x^{-4}+3x^{-2}+1}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\left|\left(x^2+\dfrac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x^2+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\left(x^{-2}+\dfrac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x^{-2}+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}\right|+c$.

Решение варианта 6.

1. $\displaystyle\int\frac{4-2x}{x^2-3x-4}dx=\left|4-2x=-(2x-3)+1\right|=\int\frac{1-(2x-3)}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{dx}{x^2-3x-4}-$

$$-\int\frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}-\int\frac{d\left(x^2-3x-4\right)}{x^2-3x-4}==\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}}\right|-\ln\left|x^2-3x-4\right|+c.$$

2. $\displaystyle\int x\ln(x-1)\,dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln(x-1)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x-1}dx\\ dv=xdx\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}x^2\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=$

$$=\left|\frac{1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x-1)-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+c.$$

3. $\displaystyle\int 2^{x^3}x^2dx=\frac{1}{3}\int 2^{x^3}d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{x^3}}{\ln 2}+c$.

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\int\frac{d(ctgx)}{\sin^2 x}=-\int\left(1+ctg^2x\right)d(ctgx)=-ctgx-\frac{1}{3}ctg^3x+c$.

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{2+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{2+x^4}\right)+c$.

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x+2}=t \\ x=t^2-2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{\left(t^2-2\right)2tdt}{t} = 2\int\left(t^2-2\right)dt = \frac{2}{3}t^3-4t+c =$

$= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - 4(x+2)^{\frac{1}{2}} + c$.

7. $\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx = = \left|\begin{matrix} \frac{x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x}{x^2(x-1)+(x-1)} = \frac{x^2}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+ \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1} \end{matrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+$

$+\frac{1}{2}arctgx+c.$

8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2}}dx = \frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4-2\right)}{\sqrt{x^4-2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2}+c$.

9. $\int \frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^x}dx = \int e^{-x}\cdot\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)dx = \int e^{-x}\left(x+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)dx =$

$= -\int xd\left(e^{-x}\right) - \int\ln\left(1+e^{-x}\right)d\left(e^{-x}+1\right) = -\left(xe^{-x}-\int e^{-x}dx\right) - \int\ln\left(1+e^{-x}\right)d\left(1+e^{-x}\right) =$

$= -xe^{-x}-e^{-x}-\int\ln tdt = \left|\begin{matrix} t=1+e^{-x} \\ u=\ln t \Rightarrow du=\frac{dt}{t} \\ dv=dt \Rightarrow v=t \end{matrix}\right| = -xe^{-x}-e^{-x}-t\cdot\ln t+\int dt =$

$= -xe^{-x}-e^{-x}-\left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right)+\left(1+e^{-x}\right)+c$.

Самостоятельная работа №3

Интегралы и функции нескольких переменных

Вариант 1

1. Вычислить интеграл: $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

2. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Oy фигуры $y=e^{-x}$; $x=0$; $y=0$; $0\le x\le+\infty$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Найти дифференциал: $z=(1+xy)^y$.

5. Исследовать на условный экстремум: $z=5-3x-4y$ при условии $x^2+y^2=25$.

Вариант 2

1. Вычислить интеграл: $\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx$.

2. Найти длину дуги кривой $y=e^x$; $0\le x\le\ln 2$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^1\ln xdx$.

4. Найти дифференциал: $z=\ln(\arcsin(x+y^3))$.

5. Исследовать на экстремум: $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$

Вариант 3

1. Вычислить интеграл: $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярных координатах уравнением $r=3+2\cos\varphi$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)(1-x)}$.

4. Найти дифференциал: $z = x^2 + e^{y^2}$.

5. Исследовать на условный экстремум: $z = x^2 - y^2$ при условии $2x - y - 3 = 0$.

Вариант 4

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$y = |\lg x|$; $y = 0$; $x = 0{,}1$; $x = 10$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

4. Найти дифференциал: $z = 2^{-\frac{y}{x}}$.

5. Исследовать на экстремум: $z = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$.

Вариант 5

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_{0.25}^{0.75} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

2. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры

$y = e^{-x}$; $x = 0$; $y = 0$; $0 \le x \le +\infty$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

4. Найти дифференциал: $z = (xy + \frac{x}{y})^3$.

5. Исследовать на условный экстремум: $z = 1 - 4x - 8y$ при условии $x^2 - 8y^2 = 8$.

Вариант 6

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=2$, $x=0$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^0 xe^{x^2}dx$.

4. Найти дифференциал: $z=arctg\dfrac{y}{1+x^2}$.

5. Исследовать на экстремум: $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$.

Ответы к варианту 1.

1. π; 2. 2π; 3. π;

4. $dz=y^2(1+xy)^{y-1}dx+(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right)dy$;

5. $(3,4)$ – усл. лок. $\min$; $z_{\min}=-20$; $(-3,-4)$ – усл. лок. $\max$; $z_{\max}=30$.

Ответы к варианту 2.

1. $2-\ln 2$; 2. $\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right)-\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right)$; 3. -1;

4. $dz=\dfrac{1}{\arcsin\left(x+y^3\right)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x+y^3\right)^2}}\left(dx+3y^2dy\right)$;

5. Точек локального экстремума нет.

Ответы к варианту 3.

1. $2-\dfrac{\pi}{2}$; 2. 11π; 3. Расходится; 4. $dz=2xdx+2ye^{y^2}dy$;

5. $(2;1)$ – условный локальный max.

Ответы к варианту 4.

1. $12-6arctg2+\dfrac{3\pi}{2}$; 2. $9{,}9-\dfrac{8{,}1}{\ln 10}$; 3. 0; 4. $dz=2^{-\frac{y}{x}}\cdot\ln 2\left(\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy\right)$;

5. $(1;2)-$ локальный min; $(-1;-2)-$ локальный max .

Ответы к варианту 5.

1. $\dfrac{\pi^2}{12}$; 2. $\dfrac{\pi}{2}$; 3. $\dfrac{\pi}{2}$; 4. $dz=3\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^2\left(\left(y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)dy\right)$;

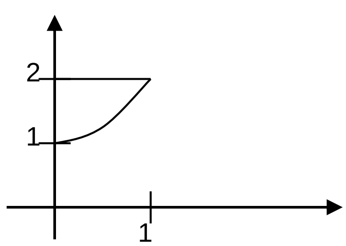
5. $(-4;1)-$ усл. лок. min; $z_{\min}=9$; $(4;-1)-$ усл. лок. max; $z_{\max}=-7$.

Решение варианта 6.

1. $$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx=\frac{1}{8}\int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}\,d\left(x^8\right)=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+3x^8}=u\\ x^8=\dfrac{1}{3}\left(u^2-1\right)\\ d\left(x^8\right)=\dfrac{2}{3}udu\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{8}\int_1^2\frac{1}{3}\left(u^2-1\right)u\cdot\frac{2}{3}udu=\frac{1}{36}\int_1^2\left(u^4-u^2\right)du=\frac{1}{36}\cdot\frac{58}{15}.$$

2.



$$S=\int_0^1\left(2-2^x\right)dx=\left(2x-\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1=2-\frac{1}{\ln 2}.$$

3. $$\int_{-\infty}^0 xe^{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}e^{x^2}\Bigg|_a^0=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{a^2}=-\infty-\textit{интеграл расходится}.$$

4. $$dz=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)^2}\left(-\frac{y}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot 2xdx+\frac{1}{1+x^2}dy\right).$$

5. $\begin{cases} z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ z'_y = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \ \textit{или} \ x = -1 \Rightarrow x = 0; \quad x = -\dfrac{5}{3}; \quad y = \pm 2 \end{cases}$.

$A = z''_{xx} = 12x + 10;\ B = z''_{xy} = 2y;\ C = z''_{yy} = 2x + 2$.

$AC - B^2 = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 24x^2 + 44x + 20 - 4y^2$.

1) $AC - B^2\Big|_{(0;0)} = 20 > 0,\ A(0;0) = 10 > 0 \Rightarrow (0;0) -$ локальный $\min$.

2) $AC - B^2\Big|_{\left(-\frac{5}{3};0\right)} > 0,\ A\left(-\dfrac{5}{3};0\right) = -10 < 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{5}{3};0\right) -$ локальный $\max$.

3) $AC - B^2\Big|_{(-1;2)} = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке $(-1;2)$ нет экстремума.

4) $AC - B^2\Big|_{(-1;-2)} = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке $(-1;-2)$ нет экстремума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука,1981. – Т.1-2.

2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука,1990.

3. Сборник задач по математическому анализу / Л.Д. Кудрявцев [и др.]. – Спб.,1994.

4. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1-2.

5. Сухая, Т.А. Сборник задач по высшей математике/Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. –Минск: Вышэйшая школа,1993. – Ч. 1-2.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельным работам по высшей математике
для студентов первого курса инженерных специальностей

Составитель
РУДЫЙ Александр Никодимович

Подписано в печать 04.03.2010.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,57. Уч.-изд. л. 1,23. Тираж 100. Заказ 67.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.