

Рис. 1. – Накопление повреждений и стадии роста трещин (а, б, в, г, д) на ниспадающем участке диаграммы растяжения σ - ϵ (e).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хмелев А.А., Реут Л.Е. Универсальная оценка качества сталей по диаграммам хрупковязкого состояния // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-тэхн. навук. – № 2, 2011. – с. 57-61.

УДК 631.17

Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

Белорусский национальный технический университет,

Минск, Беларусь.

Морская академия, г.Щетин, Польша

Рассмотрены вопросы изгиба стержней в упругой и пластической стадии нагружения для материалов без упрочнения, а также обладающих способностью к упрочнению. Приведены сравнительные результаты расчета стержня на разных стадиях нагружения, показывающие возможность наиболее полного использования прочностных свойств материала при конструировании различных машин и механизмов.

Большинство пластичных материалов при нагружении за пределом упругости оказывает дальнейшее сопротивление нагрузке. Это связано с тем, что при развитии пластических

деформаций происходит изменение структуры материала, возникают необратимые сдвиги внутри отдельных кристаллов, местные искажения, дефекты кристаллической решетки, называемые дислокациями. При возрастании пластических деформаций происходит продвижение дислокаций, которому препятствуют соседние, более правильно ориентированные кристаллы. Поэтому, чтобы заставить дислокацию двигаться по кристаллу, необходимо создать дополнительное напряжение за счет увеличения внешней нагрузки. Это обстоятельство и объясняет возникновение зоны упрочнения. В настоящее время предложен целый ряд теорий деформационного упрочнения, подробно описанных в литературе [1].

Для оценки прочности конструкции в инженерной практике рассматривают материал как сплошное и однородное тело, не имеющее пустот или разрывов, непрерывности, не вдаваясь, таким образом, в изучение внутренней микроструктуры материала. Многочисленные опыты, проведенные с образцами самых различных металлов, их сплавов и других конструкционных материалов, показали, что применение модели сплошной среды вполне оправданно [2].

Такой, так называемый феноменологический (описательный) метод позволяет обеспечить единый подход к различным по микроструктуре материалам и использовать при расчетах на прочность методы математического анализа, включающего в себя аппарат непрерывных и бесконечно малых функций.

Для применения описательного метода расчета необходимо экспериментальное изучение механических свойств материала. Одним из основных экспериментальных исследований с применением модели сплошной среды является испытание образцов на растяжение с целью изучения свойств материала при различных внешних воздействиях. При проведении таких испытаний выявляются общие свойства конструкционных материалов – упругость и пластичность.

При изучении изгиба стержней точное решение задачи об определении напряжений получить довольно сложно. Поэтому в инженерной практике применяется теория изгиба, основанная на гипотезе плоских сечений. Сущность ее заключается в том, что поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси стержня и после деформации. Эта гипотеза впервые была предложена Я.Бернулли и в основном завершена Л.Эйлером.

Гипотеза плоских сечений является строгой при чистом изгибе (когда в сечении стержня действует лишь изгибающий момент) и приближенной при поперечном изгибе ввиду появления сдвиговых деформаций. Однако исследования показывают, что величина углов сдвига элементов весьма незначительна по сравнению с углами их поворотов. Поэтому гипотеза плоских сечений является достаточно точной и при поперечном изгибе. Многочисленные опыты свидетельствуют, что она также применима и при пластических деформациях [2].

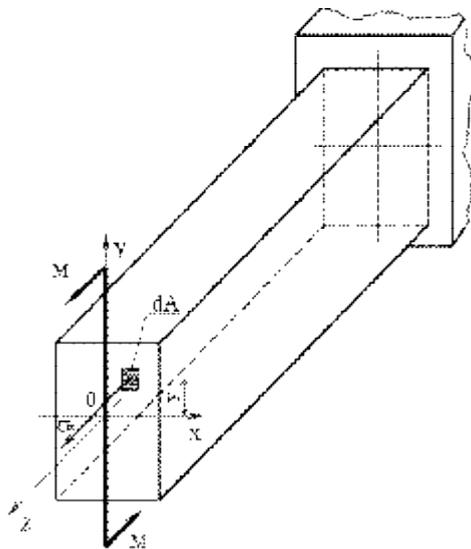


Рис. 1. – Схема нагружения стержня

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения, изготовленный из пластичного материала и подвергающийся чистому изгибу в одной из главных плоскостей. Это наиболее простой случай, который позволяет изучить основные особенности изгиба (рис.1.). Рассмотрим все стадии нагружения стержня. Принятая гипотеза плоских сечений позволяет заключить, что деформации сдвига в плоскости нагружения ZOY отсутствуют. Следовательно, можно записать:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \text{ и } \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1)$$

Известно, что стержни составляют группу элементов конструкций, у которых длина значительно превышает их поперечные размеры. В связи с этим можно предположить, что напряжения, равные нулю на боковых ненагруженных гранях стержня, будут также равны нулю в любой точке стержня. Такое предположение называют гипотезой о ненадавливании продольных волокон друг на друга. Поэтому можно записать:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2)$$

Таким образом, из шести напряжений, определяющих напряженное состояние в точке, отличным от нуля является лишь нормальное напряжение σ_z . Следовательно, продольные волокна стержня испытывают простое растяжение или сжатие. Поэтому в упругой стадии нагружения напряжение σ_z может быть определено, используя закон Гука при растяжении:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (3)$$

При этом, согласно гипотезе плоских сечений, σ_z распределяется по высоте сечения по линейному закону. На рис. 2. изображены предельные эпюры распределения нормальных напряжений в сечении стержня на различных стадиях нагружения.

В упругой стадии за опасное напряжение принимается предел текучести материала σ_m (рис. 2. б) Такое допущение является не совсем точным, т.к. для пластичных материалов предел пропорциональности $\sigma_{mц}$, до которого соблюдается закон Гука, несколько меньше предела текучести. Однако это отличие несущественно. Кроме того, на этой стадии нагружения расчеты на прочность проводятся по допускаемым напряжениям, которые меньше предела текучести в n раз, где n -коэффициент запаса по текучести. Например, для стали Ст.3 его принимают равным 1,5.

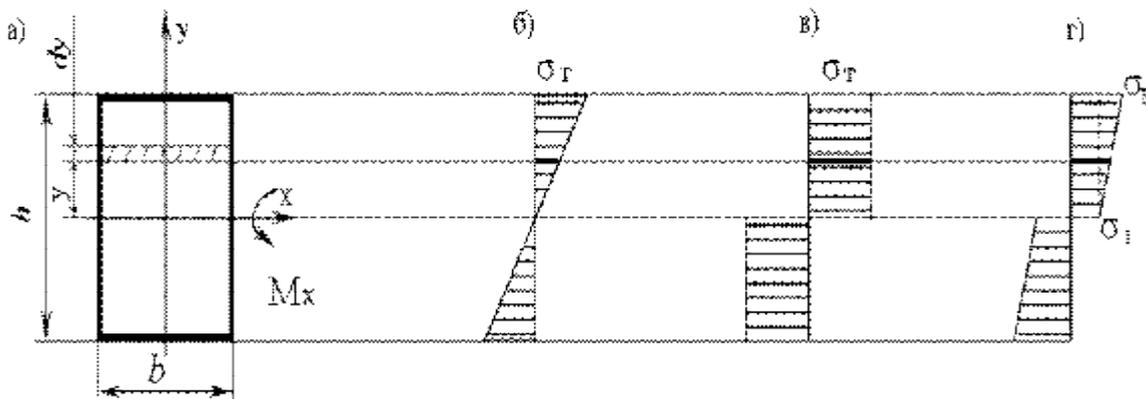


Рис. 1. – Предельные эпюры распределения нормальных напряжений в сечении стержня

В пластической стадии для материала стержня без упрочнения за опасное напряжение также принимается предел текучести. Однако предельное пластическое состояние наступает тогда, когда напряжения во всех волокнах достигают предела текучести σ_m (рис.2. в).

Если материал стержня обладает способностью к упрочнению, то в предельном состоянии напряжения в крайних волокнах равны пределу прочности σ_6 (рис.2. г).

Предельный изгибающий момент в поперечном сечении стержня для каждой стадии нагружения равен моменту внутренних сил, вычисленному для соответствующего состояния. При этом момент внутренних сил равен (см. рис. 1.):

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \quad (4)$$

Рассмотрим все стадии нагружения стержня.

1. Упругая стадия.

Для произвольного волокна с ординатой y по рис. 2.б находим:

$$\sigma_z = \frac{2\sigma_m}{h} y \quad (5)$$

Тогда:

$$M_{np} = \int_A \sigma_z y dA = 2b \int_0^{h/2} \frac{2\sigma_T}{h} y^2 dy = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = 0,167\sigma_T \quad (6)$$

Здесь $\frac{bh^2}{6} = W_x$ – момент сопротивления изгибу прямоугольного сечения.

2. Пластическая стадия.

Как отмечалось выше, достижение нормальным напряжением предела текучести еще не означает полного исчерпания несущей способности стержня, так как в работу включаются менее нагруженные частицы материала, что приводит к увеличению несущей способности стержня. Однако при пластическом нагружении расчеты усложняются в связи с нелинейной зависимостью между напряжением σ и деформацией ϵ .

Одним из методов, применяемых для упрощения расчетов в пластической области, является метод схематизации кривых деформирования, который может быть реализован различными способами в зависимости от вида реальной диаграммы растяжения и метода решения конкретной задачи.

Диаграмма, представленная на рис. 3.а и называемая идеальной диаграммой Прандтля, применяется при расчете деталей из весьма пластичных материалов, условно называемых идеально-пластичными. Наклонный участок диаграммы характеризует упругую стадию нагружения, а горизонтальный – пластическую стадию. Такая диаграмма предполагает, что предел пропорциональности материала совпадает с пределом текучести, а деформации после достижения предельной величины ϵ_m неограниченно растут без увеличения напряжений. Такая диаграмма не учитывает упрочнение материала за пределом текучести.

Для материалов средней пластичности, а также для цветных металлов и их сплавов в качестве расчетной принимают схематизированную диаграмму с линейным упрочнением (рис.3. б).

2.1. Расчет стержня в пластической стадии нагружения без учета упрочнения.

Согласно рис. 2.в можно записать: $\sigma = \sigma_m = \text{const}$. Тогда предельное значение изгибающего момента в прямоугольном сечении будет равно:

$$M_{np} = \int_A \sigma y dA = 2b \int_0^{h/2} \sigma_m y dy = 2b \sigma_m \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \sigma_m \frac{bh^2}{4} = 0,25 \sigma_m h^2 \quad (7)$$

Здесь $\frac{bh^2}{4} = W_m$ - пластический момент сопротивления прямоугольного сечения.

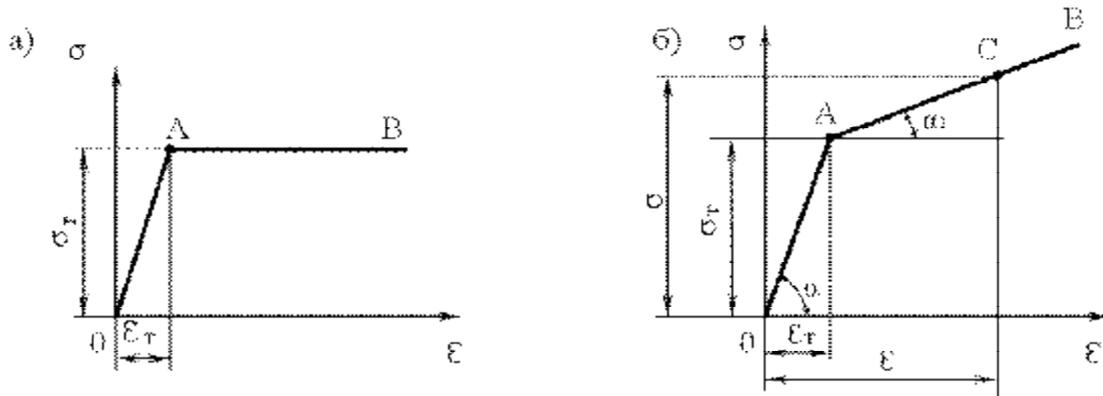


Рис. 3. – Идеальная диаграмма Прандтля

2.2. Расчет в пластической стадии с учетом упрочнения.

На диаграмме с линейным упрочнением (рис. 3.б) возьмем произвольную точку C в пластической зоне нагружения и установим связь между напряжением и деформацией. Напряжение в точке C равно:

$$\sigma = \sigma_m + (\varepsilon - \varepsilon_m) tg \alpha_1 = \sigma_m + (\varepsilon - \varepsilon_m) E_1 \quad (8)$$

где $E_1 = tg \alpha_1$ – модуль упрочнения (или касательный модуль).

При этом $\sigma_m = E \varepsilon_m$, где $E tg \alpha$ – модуль продольной упругости.

Тогда формула (8) принимает вид:

$$\sigma = E \varepsilon_m + \varepsilon E_1 - \varepsilon_m E_1 = E \varepsilon \left[\frac{s_m}{s} (1 - \xi) + \xi \right] \quad (9)$$

где $\xi = \frac{s_1}{s}$.

Для количественной оценки и сравнения результатов расчета стержня на разных стадиях нагружения рассмотрим диаграмму растяжения образца из малоуглеродистой стали Ст.3, широко применяемой в строительстве (рис.4). Штриховыми линиями показана схематизированная диаграмма с линейным упрочнением.

Основные механические характеристики стали Ст.3 имеют следующие значения [3]: $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $\sigma_E = 420 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\varepsilon_E = 0,16$.

Вычисляем величины, входящие в выражение (9):

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{240}{2 \cdot 10^5} = 0,0012; E_1 = tg \alpha_1 = \frac{\sigma_E - \sigma_T}{\varepsilon_E - \varepsilon_T} = \frac{420 - 240}{0,16 - 0,0012} = 1134 \text{ МПа}; \xi = \frac{E_1}{E} = \frac{1134}{2 \cdot 10^5} = 0,0057$$

Выразим предельные деформацию ε_σ и напряжение σ_σ через соответствующие величины в момент текучести. Имеем: $\varepsilon_\sigma=0,16$; $\varepsilon_m=0,0012$

$$\text{Тогда: } \varepsilon_E = \frac{0,16}{0,0012} \varepsilon_T = 133,3\varepsilon_T$$

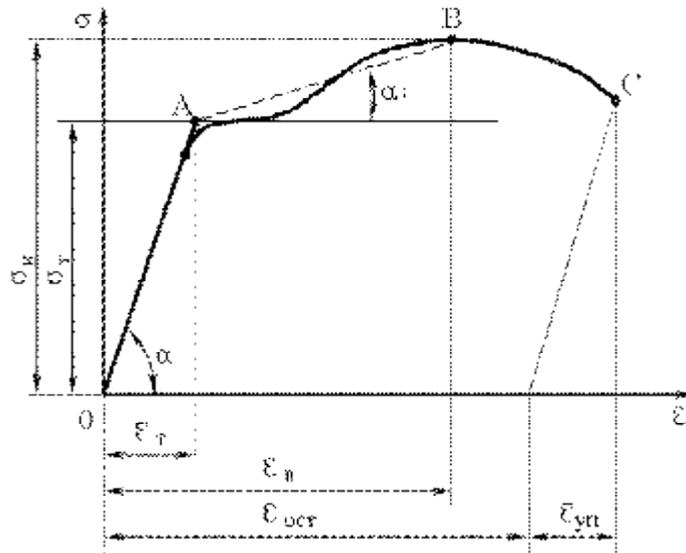


Рис. 3. – Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

По формуле (9) находим:

$$\sigma_E = E\varepsilon_E \left[\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_E} (1 - \xi) + \xi \right] = 133,3\sigma_T \left[\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_E} (1 - \xi) + \xi \right] = 133,3\sigma_T \left[\frac{0,0012}{0,16} (1 - 0,0057) + 0,0057 \right] = 1,754\sigma_T \quad (10)$$

Определяем теперь предельный момент в сечении стержня (рис. в пластической стадии нагружения с учетом упрочнения).

$$\text{Из рис. 2.г находим: } \sigma_z = \sigma_m + \frac{2(\sigma_\sigma - \sigma_m)}{h} y$$

Тогда:

$$\begin{aligned} M_{np} &= \int_A \sigma_z y dA = 2b \int_0^{h/2} \left(\sigma_m + \frac{2(\sigma_\sigma - \sigma_m)}{h} y \right) y dy = \\ &= 2b \left[\sigma_T \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{2\sigma_E}{h} \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \frac{2\sigma_T}{h} \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{bh^2}{12} (\sigma_T + 2\sigma_E) \end{aligned}$$

С учетом зависимости (10) получим:

$$M_{np} = \frac{bh^2}{12} (\sigma_m + 2 \cdot 1,754\sigma_m) = 0,376\sigma_m bh^2$$

Выполненные расчеты показывают, что учет пластических свойств материала с использованием идеальной диаграммы Прандтля позволяет увеличить несущую способность стержня прямоугольного сечения при изгибе на

$$\frac{0,25 - 0,167}{0,167} 100\% = 50\% (\text{в } 1,5 \text{ раза})$$

по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям в упругой стадии нагружения.

С учетом упрочнения материала в пластической стадии несущая способность стержня увеличивается на:

$$\frac{0,376 - 0,167}{0,167} 100\% = 125\% (\text{в } 2,25 \text{ раза})$$

Таким образом, изучение свойств материала и распределения напряжений и деформаций в упруго - пластической стадии нагружения необходимо при конструировании различных машин и сооружений с целью наиболее полного использования прочностных возможностей материала. Такой подход позволяет создавать изделия с минимальным весом и габаритами, обеспечивая при этом прочность и надежность изделия.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. – М.: Металлургия, 1982.–584с.
- 2.Биргер И.А.,Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. –560с.
3. ГОСТ 380-2005. Стали углеродистые обыкновенного качества.