

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СВЕТА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНОЙ

А. Н. Фурс¹, Н. С. Петров²

УДК 535.012;535.1

¹ Белорусский государственный университет,
220030, Минск, просп. Независимости, 4; e-mail: FursAN@bsu.by

² Институт повышения квалификации и переподготовки кадров по новым направлениям
развития техники, технологии и экономики БНТУ, Минск, Беларусь

(Поступила 18 мая 2015)

Рассмотрено нормальное падение света на анизотропную плоскопараллельную пластину из двуосного кристалла и решена соответствующая граничная задача для уравнений Максвелла в случае, когда две главные кристаллографические оси кристалла параллельны плоскости пластины, в которой лежат оптические оси (бинормали) кристалла. В явном виде получены выражения для усредненных коэффициентов отражения и пропускания такой пластины, которые можно использовать в расчетах при экспериментальных исследованиях оптических характеристик двуосных кристаллов.

Ключевые слова: анизотропная пластина, коэффициенты отражения (пропускания), тензор пучка, операторные ковариантные методы, тензор диэлектрической проницаемости, оптические оси, характеристическая матрица, матрица системы волновых уравнений.

Normal incidence of light to an anisotropic plane-parallel plate made of a biaxial crystal is considered. The appropriate boundary problem for the Maxwell equations is solved for the case when two principal crystallographic axes of the crystal are parallel to the plate plane that contains also the optical axes (binormals) of the crystal. The expressions for the averaged reflection and transmission coefficients of such the plate are derived in explicit form. They can be used in calculations at experimental study of optical characteristics of biaxial crystals.

Keywords: anisotropic plate, reflection (transmission) coefficients, beam tensor, operator covariant methods, dielectric permittivity tensor, optical axes, characteristic matrix, matrix of system of wave equations.

При исследовании кристаллов в ряде практически важных случаев особый интерес представляют их оптические свойства, такие как поглощение в определенной области длин волн, отражение и пропускание. Расчет этих характеристик при использовании традиционных координатных методов в случае анизотропных сред является сложной и трудоемкой задачей, требующей довольно громоздких вычислительных процедур (см., например, [1]). В настоящей работе при решении поставленной задачи используются так называемые операторные бескоординатные методы (см. [2, 3] и цитируемую там литературу), значительно упрощающие вычислительные операции.

Рассмотрим нормальное падение световой волны на плоскопараллельный анизотропный слой (пластину) толщиной l . Согласно [2], энергетические коэффициенты отражения R и пропускания D в этом случае находятся по формулам:

$$R = (r\Phi r^+), D = (d\Phi d^+), \quad (1)$$

LIGHT REFLECTION AND TRANSMISSION BY THE PLANE-PARALLEL ANISOTROPIC PLATE

A. N. Furs¹ and N. S. Petrov² (¹ Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Prosp., Minsk, 220030, Belarus; e-mail: FursAN@bsu.by; ² Branch of the Belarusian National Technical University "Institute of Improvement of Professional Skills and Staff Retraining on new Directions of Engineering, Technology and Economy", Minsk, Belarus)

где Φ — тензор пучка; r и d — тензоры отражения и пропускания; индексы t и $+$ обозначают след тензора и эрмитово сопряжение. Тензоры r и d определяются как

$$r = (I \ \gamma^-) P \begin{pmatrix} I \\ -\gamma \end{pmatrix} \left[(I \ -\gamma^-) P \begin{pmatrix} I \\ -\gamma \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad d = 2 \left[(I \ -\gamma^-) P \begin{pmatrix} I \\ -\gamma \end{pmatrix} \right]^{-1}. \quad (2)$$

Здесь $I = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}^* \mathbf{n}^*$ — проективный тензор на плоскость, параллельную пластине (\mathbf{n} — единичный вектор нормали к пластине, \mathbf{n}^* — тензор, дуальный вектору \mathbf{n}); P — характеристическая матрица пластины; γ — тензор поверхностных импедансов отраженной волны; знак “ $-$ ” обозначает псевдообращение планальных тензоров, точка — тензорное произведение векторов.

Считаем, что пластина граничит с окружающей ее прозрачной средой с показателем преломления $n = 1$ (воздух). Тогда для рассматриваемого случая нормального падения света $\gamma = I$ и выражения (2) принимают вид:

$$r = (I \ I) P \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} \left[(I \ -I) P \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad d = 2 \left[(I \ -I) P \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} \right]^{-1}. \quad (3)$$

Здесь P — характеристическая матрица:

$$P = \exp(ik_0 l N), \quad (4)$$

где $k_0 = \omega/c$, N — матрица системы уравнений, описывающей изменение поля внутри пластины в зависимости от координаты z (расстояния от нижней границы пластины) и имеющей вид

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\tau \\ [\mathbf{nE}] \end{pmatrix} = ik_0 N \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\tau \\ [\mathbf{nE}] \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}$ — тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля. Матрица N выражается через тензор диэлектрической проницаемости пластины ϵ :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\mathbf{n}^* \epsilon \mathbf{n}^*. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$P = \begin{pmatrix} \cos(k_0 l \sqrt{\alpha}) & i \sin(k_0 l \sqrt{\alpha}) \sqrt{\alpha} \\ i \sin(k_0 l \sqrt{\alpha}) (\sqrt{\alpha})^{-1} & \cos(k_0 l \sqrt{\alpha}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда пластина — двуосный кристалл. Тогда тензор диэлектрической проницаемости ϵ можно представить в диадной форме (тензор-диада):

$$\epsilon = \epsilon_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \epsilon_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \epsilon_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (8)$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — тройка взаимно перпендикулярных ортов вдоль соответствующих кристаллографических осей. Пусть две главные кристаллографические оси \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_3 параллельны плоскости пластины, а третья $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$ — перпендикулярна ей (рис. 1). В этом случае

$$\alpha = \epsilon_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \epsilon_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \alpha^{1/2} = n_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + n_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (9)$$

где $n_1 = \epsilon_1^{1/2}$, $n_3 = \epsilon_3^{1/2}$ — показатели преломления волн в пластине, распространяющихся вдоль направления \mathbf{e}_2 . При этом характеристическая матрица (7) принимает вид

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 & i n_3 \sin \varphi_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + i n_1 \sin \varphi_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\ (i/n_3) \sin \varphi_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (i/n_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 & \cos \varphi_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1 = (\omega/c)n_1$, $\varphi_3 = (\omega/c)n_3$ — фазовые набегии волн вдоль нормали к пластине. Подставляя выражение для матрицы в соотношения (3), находим тензоры отражения и пропускания:

$$r = -\frac{i(n_3 - 1/n_3) \sin \varphi_3}{2 \cos \varphi_3 - i(n_3 + 1/n_3) \sin \varphi_3} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{i(n_1 - 1/n_1) \sin \varphi_1}{2 \cos \varphi_1 - i(n_1 + 1/n_1) \sin \varphi_1} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \\ d = \frac{2}{2 \cos \varphi_3 - i(n_3 + 1/n_3) \sin \varphi_3} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{2}{2 \cos \varphi_1 - i(n_1 + 1/n_1) \sin \varphi_1} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (10)$$

Естественно, что вид выражений (1) для коэффициентов отражения и пропускания R и D зависит от типа поляризации падающего света, т. е. от вида входящего в формулы (1) тензора пучка $\Phi = \sum_s \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_s^*$ (индекс s нумерует некогерентные составляющие поля падающей волны). Рассмотрим частные случаи поляризации.



Рис. 1. Отражение и пропускание света плоскопараллельной анизотропной пластиной

Линейная поляризация. Тензор пучка $\Phi = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$, где \mathbf{h} — единичный действительный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ напряженности магнитного поля падающей волны и составляющий угол θ с вектором \mathbf{e}_1 ($\mathbf{h}^2 = 1$, $\mathbf{h}\mathbf{e}_1 = \cos\theta$). В этом случае коэффициент пропускания

$$D = \frac{4}{4 + (n_1 - 1/n_1)^2 \sin^2 \varphi_1} \sin^2 \theta + \frac{4}{4 + (n_3 - 1/n_3)^2 \sin^2 \varphi_3} \cos^2 \theta. \quad (11)$$

Так как анизотропная пластина предполагается непоглощающей, то коэффициент отражения $R = 1 - D$.

Круговая поляризация. Тензор пучка $\Phi = \mathbf{e}^{(+)} \cdot \mathbf{e}^{(+)} = (1/2)(I \pm i\mathbf{n}^x)$, где $\mathbf{e}^{(\pm)} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_3)$ — круговые векторы. Тогда

$$D = \frac{2}{4 + (n_1 - 1/n_1)^2 \sin^2 \varphi_1} + \frac{2}{4 + (n_3 - 1/n_3)^2 \sin^2 \varphi_3}. \quad (12)$$

Неполяризованный свет. В этом случае тензор пучка $\Phi = I/2$, а выражение для коэффициента пропускания D совпадает с (12). При этом по-прежнему $R = 1 - D$. Предположим, что оптические оси (бинормали) кристалла \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 ($\mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_2^2 = 1$) лежат в плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$, т. е. также параллельны плоскости пластины. Тогда их можно выразить через векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_3 . Пусть

$$\mathbf{c}_1 = k_1 \mathbf{e}_1 + k_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c}_2 = k_1' \mathbf{e}_1 + k_3' \mathbf{e}_3. \quad (13)$$

Поскольку $\mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_2^2 = 1$, то $k_3 = (1 - k_1^2)^{1/2}$, $k_3' = (1 - k_1'^2)^{1/2}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов k_1 и k_1' воспользуемся представлением обратного тензора ε^{-1} [2]:

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1^{-1} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2^{-1} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3^{-1} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

Этот же тензор ε^{-1} можно представить в так называемом аксиальном виде (см. также [2]):

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon_2^{-1} + \frac{\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_3^{-1}}{2} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1). \quad (15)$$

Если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ (или $\varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$), то из сопоставления выражений (14) и (15) с учетом соотношения $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ [2] получаем

$$\mathbf{c}_1 = k_1 \mathbf{e}_1 + k_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c}_2 = k_1 \mathbf{e}_1 - k_3 \mathbf{e}_3, \quad (16)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1}}{\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_3^{-1}}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^{-1} - \varepsilon_3^{-1}}{\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_3^{-1}}}. \quad (17)$$

Как следует из (16), угол между оптической осью \mathbf{c}_1 и вектором \mathbf{e}_1 $\beta = \arccos k_1 = \arccos[(\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1})/(\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_3^{-1})]^{1/2}$. В результате выражение (11) для коэффициента пропускания D можно записать по-другому, введя угол $\vartheta = \theta - \beta$ между $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ и оптической осью \mathbf{c}_1 :

$$D = \frac{4}{4 + (n_1 - 1/n_1)^2 \sin^2 \varphi_1} \sin^2(\vartheta + \beta) + \frac{4}{4 + (n_3 - 1/n_3)^2 \sin^2 \varphi_3} \cos^2(\vartheta + \beta). \quad (18)$$

Характерный вид зависимости коэффициента пропускания D от толщины пластины L , выраженный в единицах длины волны в вакууме ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega$), в случае линейно поляризованного света при $\vartheta = 0$ ($\theta = \beta = 54^\circ 38'$) представлен на рис. 2 ($n_1 = 1.745$, $n_2 = 1.748$, $n_3 = 1.754$ — кристалл хризоберилла). Видно, что D является быстро осциллирующей функцией толщины пластины l . Это обусловлено интерференцией волн при многократных отражениях от поверхностей пластины. Экспериментально же регистрируются усредненные по быстрым осцилляциям значения коэффициентов. В результате усреднения из выражений (11), (12) получаем для случая линейно поляризованного света:

$$\bar{D} = \frac{2}{n_1 + 1/n_1} \sin^2 \theta + \frac{2}{n_3 + 1/n_3} \cos^2 \theta,$$

и для круговой поляризации и неполяризованного света:

$$\bar{D} = \frac{1}{n_1 + 1/n_1} + \frac{1}{n_3 + 1/n_3}.$$

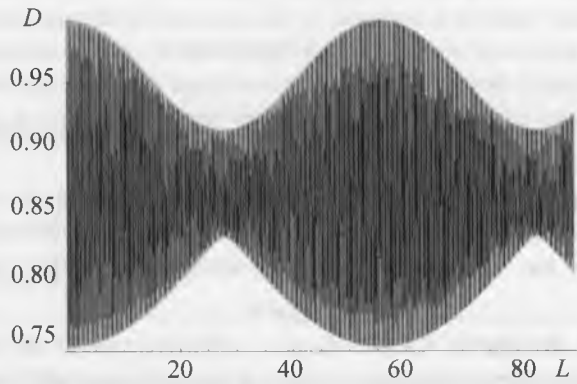


Рис. 2. Зависимость коэффициента пропускания от толщины пластины при нормальном падении линейно поляризованного света ($\mathbf{H}_{\text{пад}} \parallel \mathbf{c}_1$)

Таким образом, получены выражения для амплитудных и энергетических коэффициентов отражения и пропускания прозрачной плоскопараллельной пластины из двусосного кристалла в случае нормального падения света, когда его оптические оси (бинормали) лежат в плоскости пластины. Эти выражения позволяют рассчитать оптические характеристики (пропускание и отражение) исследуемого кристалла при выбранной ориентации его главных кристаллографических осей относительно бинормалей и направления вектора поляризации падающего излучения.

Авторы выражают искреннюю благодарность заведующему НИЛ “Лазерные кристаллы” В. Н. Матросову за полезную информацию о кристалле хризоберилла.

[1] А. П. Хапалюк. Кристаллография, 7, № 4 (1962) 581—588

[2] Ф. И. Федоров. Теория гиротропии, Минск, Наука и техника (1976)

[3] Л. М. Барковский, А. Н. Фурс. Операторные методы описания оптических полей в сложных средах, Минск, Беларуская навука (2003)