Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики №2

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
для студентов энергетических специальностей БНТУ
(II семестр)

Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей БНТУ

Электронный учебный материал

М и н с к 2 0 1 3

УДК 517.2(035.5)+517.3(035.5)+517.9(035.5)

Автор: *П.Г. Ласый*

Рецензент:
А.К. Деменчук, ведущий научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент

В пособии изложен теоретический материал по курсу математики, читаемом во втором семестре на энергетическом факультете БНТУ. В нем представлены следующие разделы: „Неопределенный интеграл“, „Определенный интеграл“, „Функции многих переменных“, „Дифференциальные уравнения“. Изложение хорошо проиллюстрировано примерами и графиками, построенными в среде компьютерной алгебры ***Mathematica***. Данное пособие может служить хорошим подспорьем как студентам при их подготовке к практическим занятиям и экзамену, так и преподавателям, читающим курс математики на энергетическом факультете БНТУ.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017)292-82-73
E-mail: kafvm2@bntu.by
http://www.bntu.by/ef-vm2
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-11.2013

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие является второй частью электронного учебника по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ. Изложенный в нем материал полностью соответствует программе курса математики, читаемом во втором семестре на энергетическом факультете.

При написании этого учебника я, не претендуя на безупречность, стремился к полноте и строгости в определениях, формулировках и доказательствах утверждений. Полагаю, что по этой причине учебник не стал перегруженным, так как я старался выбирать короткие и содержательные доказательства, которые позволяют оставаться в пределах объема отведенных на курс учебных часов. Опущенные здесь громоздкие доказательства некоторых утверждений можно найти в учебниках, список которых помещен в конце данного пособия. Имеющиеся в каждом параграфе не всегда тривиальные примеры и достаточное количество графиков дополняют и поясняют изложение.

Текст лекций подготовлен мной с помощью программы набора и верстки сложных текстов ***MiKTEX***. Все имеющиеся в тексте графики являются точными, они построены в среде компьютерной алгебры ***Mathematica***.

В тексте имеются многочисленные ссылки на первую часть электронного учебника автора „Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (I семестр)“, состоящую из пяти глав (I – V).

2013 г. *П. Ласый*

ГЛАВА VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе мы введем определение *обратной* по отношению к дифференцированию *операции интегрирования функции*, изучим основные свойства неопределенного интеграла и научимся его находить для некоторых классов элементарных функций.

§1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Существование неопределенного интеграла. Таблица интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена, а функция $F(x)$ определена и дифференцируема на промежутке[1] D числовой оси.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке D, если во всех точках этого промежутка*

$$F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Множество всех первообразных мы будем называть неопределенным интегралом функции $f(x)$ на данном промежутке и обозначать через

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла мы будем называть *интегрированием функции.* Функция, для которой существует неопределенный интеграл на некотором промежутке, называется *интегрируемой на этом промежутке.*

Таким образом, если *при дифференцировании* по известной функции требуется найти ее производную (т.е. угловой коэффициент касательной к графику функции), то *при интегрировании*, наоборот, по известной производной (т.е. угловому коэффициенту касательной) необходимо восстановить саму функцию.

Покажем, что *для нахождения неопределенного интеграла достаточно найти одну из первообразных функции.*

Теорема 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные функции $f(x)$ на промежутке D, то они отличаются на постоянную, т.е. существует такое число $C \in \mathrm{R}$, что*

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем точку $x_0 \in D$ и пусть $x \in D$ – произвольная точка этого промежутка. Так как функция $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ дифференцируема на промежутке D, то, применив к этой функции на отрезке $[x,\, x_0]$ теорему Лагранжа (глава V, §3), получим:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0),\ c \in (x,\, x_0),$$

откуда, учитывая, что $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$, находим:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) \Longleftrightarrow F_2(x) - F_1(x) = \varphi(x_0).$$

Положив $\varphi(x_0) = C$, мы и получим утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что найти неопределенный интеграл мы можем добавив к одной из ее первообразных $F(x)$ произвольную постоянную C:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Отметим теперь *основные свойства* неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1) *Для интегрируемой на промежутке D функции $f(x)$*

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x),\ x \in D \Longleftrightarrow \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,\ x \in D.$$

[1] Если промежуток содержит какую-то из своих граничных точек, то под производной в ней понимается соответствующая односторонняя производная.

2) *Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке D, то*

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C.$$

3) *Линейность неопределенного интеграла.*
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на промежутке D, то

$$\int \left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\right) \mathrm{d}x = a_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + a_2 \int f_2(x)\mathrm{d}x,\ a_1,\, a_2 \in \mathrm{R}.$$

Докажем еще одно свойство неопределенного интеграла, которое часто используется для его нахождения. Его называют *подведением под знак дифференциала.*

4) *Пусть функция $f(y)$ интегрируема на промежутке D_1 и $F(y)$ – одна из ее первообразных, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема на промежутке D и $\varphi(D) \subseteq D_1$. Тогда функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ интегрируема на промежутке D и*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Действительно, воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций (глава V, §1, свойство 4)), получим:

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

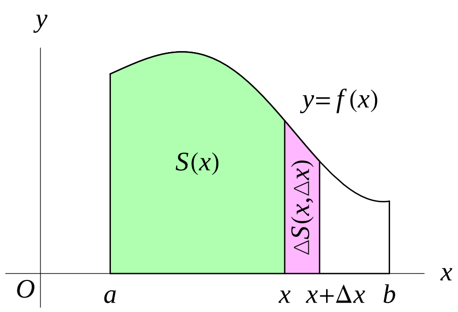
т. е. функция $F(\varphi(x))$ – первообразная функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Сформулируем теперь *условие существования* неопределенного интеграла.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то она и интегрируема на этом отрезке.*

Достаточно сложное доказательство этого утверждения мы приводить не будем, однако дадим все же ему нестрогое обоснование, основанное на интуитивно ясном представлении о том, что фигура, ограниченная графиком непрерывной на отрезке функции и осью Ox, *квадрируема*, т. е. имеет конечную площадь.

Предположим сначала, что функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a,\, b]$.



Обозначим через $S(x)$, $x \in [a,\, b]$ площадь фигуры, ограниченной графиком данной функции на отрезке $[a,\, x]$ и осью Ox. Тогда приращение $\Delta S(x, \Delta x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ функции $S(x)$ в точке x удовлетворяет неравенству

$$m|\Delta x| \le |\Delta S(x, \Delta x)| \le M|\Delta x|,$$

где m и M – соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x,\, x + \Delta x]$ (такие значения по теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) существуют). Следовательно,

$$m \le \frac{\Delta S(x, \Delta x)}{\Delta x} \le M.$$

По теореме Больцано-Коши (глава IV, §5, пункт 3) на отрезке $[x,\, x + \Delta x]$ отыщется точка c, для которой

$$\frac{\Delta S(x, \Delta x)}{\Delta x} = f(c).$$

Отсюда, ввиду непрерывности функции $f(x)$, мы находим:

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

Таким образом, функция $S(x)$ является первообразной для данной функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,\, b]$, то мы можем свести ее к положительной функции $f_1(x) = f(x) - l$, где l – действительное число, ограничивающее снизу функцию $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, т. е. $f(x) > l,\ x \in [a,\, b]$. Тогда, если $S_1(x)$ – первообразная функции $f_1(x)$, то $S_1(x) + lx$ – первообразная функции $f(x)$, так как $(S_1(x) + lx)' = f_1(x) + l = f(x)$.

Из теоремы 2 следует, что *любая элементарная функция интегрируема на любом промежутке, где она определена*, так как она там непрерывна (глава IV, §5, пункт 4).

Завершим этот параграф мы таблицей интегралов некоторых элементарных функций.

Таблица интегралов

1) $\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ -1 \neq \alpha \in \mathrm{R};$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1; \qquad \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C;$

4) $\displaystyle\int \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x + C;$

5) $\displaystyle\int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x + C;$

6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0;$

9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a > 0;$

10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ a > 0;$

11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,\ 0 \neq a \in \mathrm{R};$

12) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C;$

13) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C;$

14) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Первые семь и последние четыре из этих интегралов находятся сразу же из таблицы производных (глава V, §2, пункт 1) при обратном ее чтении. Остальные первообразные мы можем найти, использовав подведение под знак дифференциала (свойство 4) неопределенного интеграла) и соответствующие табличные производные. Действительно,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Аналогично проверяется справедливость формулы 9). Далее, привлекая табличный интеграл 2), найдем:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\cdot\frac{(a-x)+(a+x)}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\int\frac{\mathrm{d}(a+x)}{a+x}-\int\frac{\mathrm{d}(a-x)}{a-x}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|a+x|-\ln|a-x|)+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

Наконец,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+a})}{x+\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Пользуясь приведенной таблицей интегралов и свойствами 2) – 4) мы можем находить неопределенные интегралы и для более сложных функций.

Пример. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Решение.

$$\int\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int(1-\cos2\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \int(1-\cos2\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x} =$$
$$= \int\mathrm{d}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\cos2\sqrt{x}\,\mathrm{d}(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}-\frac{1}{2}\sin2\sqrt{x}+C.$$

§2. Методы интегрирования

Рассмотрим два *преобразования неопределенного интеграла*, которые в ряде случаев позволяют его найти.

1. Подстановка (замена переменной) в неопределенном интеграле

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке D, а функция $x=\varphi(z)$ определена, монотонна и дифференцируема с ненулевой производной на промежутке D_1, причем $\varphi(D_1)=D$. Тогда, если функция $f(\varphi(z))\varphi'(z)$ интегрируема на промежутке D_1, то функция $f(x)$ интегрируема на промежутке D и*

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F_1(\varphi^{-1}(x))+C,$$

где $F_1(z)$ – первообразная функции $f(\varphi(z))\varphi'(z)$.

Для доказательства найдем производную от правой части записанной выше формулы, использовав правила дифференцирования композиции функций и обратной функции (глава V, §1):

$$(F_1(\varphi^{-1}(x)))' = F_1'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = f(x),\ x\in D.$$

Следовательно, подстановкой $x=\varphi(z)$ мы можем свести интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$ к интегралу $\int f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z$. Естественно, замену переменной следует выбирать так, чтобы последний интеграл оказался *проще* исходного, например, был преобразован к табличным. На практике подстановку мы можем оформлять следующим образом:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(z),\\ \mathrm{d}x=\varphi'(z)\mathrm{d}z,\\ z=\varphi^{-1}(x)\end{array}\right| = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z = F_1(z)+C = F_1(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Замечание. Подведение под знак дифференциала является разновидностью подстановки, если ее оформить следующим образом:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = |z=\varphi(x)| = \int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+C = F(\varphi(x))+C.$$

Пример. *Найти интегралы*

$$\text{a)}\ \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}};\quad \text{b)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}.$$

Решение. a) Сведем данный интеграл к табличным с помощью подстановки $\sqrt{1+x\sqrt{x}}=z$.

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x\sqrt{x}}=z,\ x=(z^2-1)^{2/3}, \\ \mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(z^2-1)^{-1/3}2z\mathrm{d}z=\dfrac{4}{3}z(z^2-1)^{-1/3}\mathrm{d}z \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(z^2-1)^{4/3}\,\frac{4}{3}z(z^2-1)^{-1/3}\mathrm{d}z}{z} = \frac{4}{3}\int (z^2-1)\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\left(\frac{z^3}{3}-z\right)+C=$$

$$=\frac{4}{9}z(z^2-3)+C=\frac{4}{9}(x\sqrt{x}-2)\sqrt{1+x\sqrt{x}}+C.$$

b) Здесь мы дважды последовательно используем подведение под знак дифференциала и таблицу:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\left(1+(\sqrt{x})^2\right)\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}{\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}} = 2\ln \mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+C.$$

2. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Теорема. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы на промежутке D. Тогда, если на этом промежутке интегрируема одна из функций $f_1'(x)f_2(x)$ или $f_2'(x)f_1(x)$, то интегрируема и другая и справедлива следующая формула интегрирования по частям*:

$$\int f_1(x)f_2'(x)\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}f_2(x) = f_1(x)f_2(x) - \int f_2(x)\mathrm{d}f_1(x) = f_1(x)f_2(x) - \int f_2(x)f_1'(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Так как $f_1(x)\mathrm{d}f_2(x)=\mathrm{d}(f_1(x)f_2(x))-f_2(x)\mathrm{d}f_1(x)$, то, воспользовавшись свойствами 2) и 3) неопределенного интеграла из предыдущего параграфа, получим:

$$\int f_1(x)\mathrm{d}f_2(x) = \int \mathrm{d}(f_1(x)f_2(x)) - \int f_2(x)\mathrm{d}f_1(x) = f_1(x)f_2(x) - \int f_2(x)\mathrm{d}f_1(x),$$

в чем и требовалось убедиться.

Метод интегрирования по частям позволяет в некоторых случаях *найти* или хотя бы *упростить* данный интеграл. Иногда приходится *комбинировать* подстановку и интегрирование по частям.

Пример 1. *Проинтегрировать функцию* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}\sin^2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Сначала проведем в интеграле подстановку, а затем проинтегрируем по частям:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}\sin^2\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt[3]{x}=z,\ x=z^3, \\ \mathrm{d}x=3z^2\mathrm{d}z \end{array} \right| = 3\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sin^2 z} = -3\int z\,\mathrm{d}\,\mathrm{ctg}\,z = -3\left(z\,\mathrm{ctg}\,z - \int \mathrm{ctg}\,z\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= -3\left(z\,\mathrm{ctg}\,z - \int \frac{\mathrm{d}\sin z}{\sin z}\right) = -3(z\,\mathrm{ctg}\,z - \ln|\sin z|)+C = -3(\sqrt[3]{x}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt[3]{x} - \ln|\sin\sqrt[3]{x}|)+C.$$

Укажем несколько функций, при интегрировании которых *целесообразно* использовать метод интегрирования по частям.

В интегралах

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in\mathrm{R},$$

где $P_n(x)$ – полином степени n, под дифференциал следует подвести функцию при полиноме и применить метод интегрирования по частям. Это позволит получить аналогичный интеграл, в котором степень полинома будет на единицу ниже, чем в исходном. Повторив еще $n-1$ раз процедуру интегрирования по частям, мы придем к табличному интегралу.

В интегралах же

$$\int P_n(x)\ln x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\arccos x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x,$$

наоборот, под знак дифференциала следует подводить именно полином. Интегрирование по частям в этом случае убирает в интеграле множитель при полиноме и приводит его к интегралу от *рациональной* или *иррациональной* функции, методы интегрирования которых будут рассмотрены ниже (§§ 3, 5).

Пример 2. *Найти интегралы*

$$\text{a)}\ \int x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x;\quad \text{b)}\ \int x^3\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x.$$

Решение. a) Преобразуем подынтегральную функцию и затем дважды проинтегрируем по частям:

$$\int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int x^2\mathrm{d}x+\int x^2\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\left(x^2\sin 2x-\int\sin 2x\,\mathrm{d}x^2\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\cos 2x\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x\cos 2x-\int\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{24}(4x^3+6x^2\sin 2x+6x\cos 2x-3\sin 2x)+C.$$

b) Проинтегрируем по частям и преобразуем затем подынтегральную функцию:

$$\int x^3\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(x^4\,\mathrm{arcctg}\,x-\int x^4\mathrm{d}\,\mathrm{arcctg}\,x\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(x^4\,\mathrm{arcctg}\,x+\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)=\frac{1}{4}\left(x^4\,\mathrm{arcctg}\,x+\int\frac{x^2(x^2+1)-(x^2+1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(x^4\,\mathrm{arcctg}\,x+\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4}\left(x^4\,\mathrm{arcctg}\,x+\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x\right)+C.$$

Иногда в результате интегрирования функции по частям мы получим *уравнение относительно исходного интеграла*, из которого он и находится. Например,

$$\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a}-\int x\,\mathrm{d}\sqrt{x^2+a}=x\sqrt{x^2+a}-\int x\cdot\frac{2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2+a}}=$$
$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x+a\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

и, следовательно,

$$\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)+C. \tag{1}$$

Аналогично, двойным интегрированием по частям находятся интегралы

$$\int e^{\mu x}\sin\nu x\,\mathrm{d}x,\ \int e^{\mu x}\cos\nu x\,\mathrm{d}x,\ \mu,\nu\in\mathrm{R}.$$

Замечание. В главе V, §2 мы установили, что производная любой элементарной функции также является элементарной функцией. Что касается интеграла, то здесь все гораздо сложнее уже хотя бы потому, что, в отличие от производной, для него нет правил интегрирования произведения, частного и композиции функций. Поэтому естественно ожидать, что *существуют элементарные функции, интегралы от которых уже не являются таковыми.* К числу таких интегралов, которые называются *специальными функциями*, относятся, например, *интеграл вероятностей* (*функция ошибок, функция Лапласа*)

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

интегральные синус и косинус

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

интегральный логарифм

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},$$

интегралы Френеля

$$\int \sin x^2\mathrm{d}x,\ \int \cos x^2\mathrm{d}x.$$

Специальные функции находят применение как в самой математике, так и в различных ее приложениях. В современных программах компьютерной математики (*Mathematica, Maple, Mathcad*) эти функции являются *встроенными.* С некоторыми из специальных функций мы еще встретимся в четвертом семестре в курсе *теории вероятностей и математической статистики.*

Рассмотрим теперь *некоторые классы элементарных функций*, для которых интегралы находятся также в элементарных функциях.

§3. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией называется дробь, составленная из полиномов, т. е. функция вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \tag{1}$$

где $Q_m(x)$, $P_n(x)$ – полиномы степеней m и n, соответственно, с действительными коэффициентами, причем для удобства всюду в дальнейшем будем считать, что коэффициент при старшей степени знаменателя равен 1. Если $m < n$, то рациональная функция называется *правильной*, иначе – *неправильной.*

Из алгебры известно, что если рациональная функция является *неправильной*, то, разделив числитель на знаменатель, мы можем представить ее как *сумму некоторого полинома и правильной рациональной функции.* Поскольку полином без труда интегрируется по таблице, то, тем самым, *интеграл от неправильной рациональной функции сводится к интегралу от правильной рациональной функции.*

Научимся сначала интегрировать *простейшие* правильные рациональные функции, т. е. функции вида

$$\frac{a}{(x-x_0)^s},\ a, x_0 \in \mathrm{R}, s \in \mathrm{N} \tag{2}$$

и

$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^r},\ b, c, p, q \in \mathrm{R}, r \in \mathrm{N},\ \text{причем}\, p^2 < 4q. \tag{3}$$

Для первой из этих функций при $s = 1$ получим

$$\int \frac{a}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = a\int \frac{\mathrm{d}(x-x_0)}{x-x_0} = a\ln|x-x_0| + C.$$

Если же $s > 1$, то

$$\int \frac{a}{(x-x_0)^s}\,\mathrm{d}x = a\int (x-x_0)^{-s}\mathrm{d}(x-x_0) = a\frac{(x-x_0)^{-s+1}}{-s+1} + C = -\frac{a}{(s-1)(x-x_0)^{s-1}} + C.$$

Вторую из простейших рациональных функций мы также проинтегрируем сначала при $r = 1$. Выделим в числителе этой дроби производную знаменателя и воспользуемся затем свойством 4) неопределенного интеграла (§1) и таблицей:

$$\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{b_1(2x+p)+c_1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = b_1\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + c_1\int \frac{\mathrm{d}(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q_1} =$$
$$= b_1\ln(x^2+px+q) + \frac{c_1}{\sqrt{q_1}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q_1}} + C,$$

где $b_1 = b/2$, $c_1 = c - b_1p$, $q_1 = q - p^2/4 > 0$. Покажем, что в случае $r > 1$ интеграл

$$I_r = \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^r}\,\mathrm{d}x$$

сводится к интегралу I_{r-1} с другими, вообще говоря, коэффициентами b, c. Убедимся сначала, что это справедливо для интеграла

$$\hat{I}_r = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^r}.$$

Действительно, преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись методом интегрирования по частям, получим:

$$\hat{I}_r = \frac{1}{q_1}\int \frac{(x^2+px+q)-(x+p/2)^2}{(x^2+px+q)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{q_1}\left(\hat{I}_{r-1} - \int \frac{(x+p/2)^2}{(x^2+px+q)^r}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{q_1}\left(\hat{I}_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\int (x+p/2)\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+px+q)^{r-1}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{q_1}\left(\hat{I}_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\left(\frac{x+p/2}{(x^2+px+q)^{r-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{r-1}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{q_1}\left(\left(1 - \frac{1}{2(r-1)}\right)\hat{I}_{r-1} + \frac{x+p/2}{2(r-1)(x^2+px+q)^{r-1}}\right).$$

Возвращаясь теперь к интегралу I_r, получим:

$$I_r = \int \frac{b_1(2x+p)+c_1}{(x^2+px+q)^r}\,\mathrm{d}x = b_1\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^r} + c_1\hat{I}_r =$$
$$= -\frac{b_1}{(r-1)(x^2+px+q)^{r-1}} + \frac{c_1}{q_1}\left(\left(1 - \frac{1}{2(r-1)}\right)\hat{I}_{r-1} + \frac{x+p/2}{2(r-1)(x^2+px+q)^{r-1}}\right).$$

Таким образом, мы можем найти интеграл I_r, последовательно понижая степень квадратичного выражения в знаменателе, пока не придем к табличному интегралу $\hat{I}_1$.

Интегрирование *произвольной правильной рациональной функции* основано на известном из алгебры утверждении о разложении этой функции на простейшие рациональные функции. Как известно (глава V, §8, формула (12)), для знаменателя $P_n(x)$ рациональной функции (1) существует разложение по степеням действительных линейных и квадратичных множителей

$$\begin{gathered} P_n(x) = (x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{s_k}\times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{r_l}, \end{gathered} \tag{4}$$

где множители $(x-x_i)^{s_i}$, $i = \overline{1,k}$ соответствуют действительным корням x_i кратности s_i полинома $P_n(x)$, а множители $(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}$, $j = \overline{1,l}$ – комплексно сопряженным корням z_j, $\bar{z}_j$ кратности r_j этого полинома.

Теорема. *Правильная рациональная функция* (1), *для знаменателя которой известно его разложение* (4) *по степеням действительных линейных и квадратичных множителей, единственным образом представляется в виде суммы простейших рациональных функций* (2) *и* (3), *причем каждой степени* $(x-x_i)^{s_i}$, $i = \overline{1,k}$ *в знаменателе соответствует сумма* s_i *простейших рациональных функций*

$$\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{a_{is_i}}{(x-x_i)^{s_i}},$$

а каждой степени $(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}$, $j=\overline{1,\,l}$ *соответствует сумма* r_j *простейших рациональных функций*

$$\frac{b_{j1}+c_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{b_{j2}+c_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{b_{jr_j}+c_{jr_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}.$$

Для *нахождения коэффициентов* указанного в теореме разложения следует записать его в общем виде с неопределенными коэффициентами $a_{i\alpha}$, $i=\overline{1,\,k}$, $\alpha=\overline{1,\,s_i}$; $b_{j\beta},c_{j\beta}$, $j=\overline{1,\,l}$, $\beta=\overline{1,\,r_j}$ и привести сумму всех простейших рациональных функций к общему знаменателю, который совпадает с знаменателем исходной рациональной функции. Тогда и числитель $Q_m(x)$ рациональной функции будет совпадать при всех действительных x с числителем $\widetilde{Q}_m(x)$ суммы простейших рациональных функций. Поскольку два полинома тождественны тогда и только тогда, когда совпадают их коэффициенты при одинаковых степенях[1], то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов $Q_m(x)$ и $\widetilde{Q}_m(x)$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов, из которой они однозначно и определяются (ввиду единственности разложения правильной рациональной функции на простейшие).

Замечание 1. Линейную систему для определения неизвестных коэффициентов мы можем получить и иначе, подставляя в равенство $Q_m(x)=\widetilde{Q}_m(x)$ вместо аргумента x конкретные значения в количестве, равном числу коэффициентов. Если знаменатель $P_n(x)$ имеет действительные корни, то в первую очередь следует подставлять именно их, так как это позволит сразу же найти коэффициенты a_{is_i}, $i=\overline{1,\,k}$. В частном случае, когда знаменатель имеет только простые действительные корни, мы таким образом можем быстро найти все n коэффициентов разложения.

Пример 1. *Проинтегрировать функцию*

$$f(x)=\frac{3x^6-2x^5-3x^4+5x^3-2x^2-2x+2}{(x^2-1)(x^3+1)}.$$

Решение. Рациональная функция $f(x)$ является неправильной. Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l}
-\,3x^6-2x^5-3x^4+5x^3-2x^2-2x+2 & x^5-x^3+x^2-1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{3x^6-3x^4+3x^3-3x} & 3x-2 \\
-\,{-2x^5}+2x^3-2x^2+x+2 & \\
\quad \underline{-2x^5+2x^3-2x^2+2} & \\
\qquad x &
\end{array}$$

Таким образом,

$$f(x)=3x-2+\frac{x}{(x^2-1)(x^3+1)}$$

и, следовательно,

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x-2+\frac{x}{(x^2-1)(x^3+1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-2x+\int\frac{x}{(x^2-1)(x^3+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Разложим теперь правильную рациональную функцию

$$f_1(x)=\frac{x}{(x^2-1)(x^3+1)}=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)}$$

на сумму простейших рациональных функций. Воспользовавшись приведенной выше теоремой, мы можем записать:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x+1}+\frac{a_3}{(x+1)^2}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

Приводя дроби в правой части последнего равенства к общему знаменателю и приравнивая числитель исходной дроби числителю суммы простейших рациональных функций, получим:

$$x=a_1(x+1)^2(x^2-x+1)+a_2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)+a_3(x-1)(x^2-x+1)+(bx+c)(x-1)(x+1)^2.$$

[1] Это следует, например, из того очевидного факта, что в этом случае, как сами полиномы, так и их производные любого порядка совпадают в нуле.

Подставим сначала в полученное равенство корни знаменателя:

$$x = 1:\ 1 = 4a_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{1}{4};\ x = -1:\ -1 = -6a_3 \Longrightarrow a_3 = \frac{1}{6}.$$

Для нахождения остальных коэффициентов при значениях аргумента $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ получим:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{12} - a_2 - c, \\ -2 = -\dfrac{7}{4} + 21a_2 + 6b - 3c, \\ 2 = \dfrac{29}{4} + 9a_2 + 18b + 9c. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 12a_2 \qquad\quad + 12c = 1, \\ 84a_2 + 24b - 12c = -1, \\ 12a_2 + 24b + 12c = -7. \end{cases}$$

Найдем решение последней системы методом исключения неизвестных (глава I, §5, пункт 3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 12 & 1 \\ 84 & 24 & -12 & -1 \\ 12 & 24 & 12 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 12 & 1 \\ 72 & 0 & -24 & 6 \\ 12 & 24 & 12 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & -96 & 0 \\ 12 & 24 & 12 & -7 \end{array}\right).$$

В этой цепочке вторая из матриц получена из первой вычитанием из второй строки третьей, аналогично, вторая матрица преобразована в третью вычитанием из второй строки первой, умноженной на 6. Тогда из системы

$$\begin{cases} 12a_2 \qquad\quad + 12c = 1, \\ \qquad\qquad\quad -96c = 0, \\ 12a_2 + 24b + 12c = -7. \end{cases}$$

последовательно находим: $c = 0$, $a_2 = \dfrac{1}{12}$, $b = -\dfrac{1}{3}$. Таким образом, разложение правильной рациональной функции $f_1(x)$ на простейшие имеет вид:

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2 - x + 1}.$$

Проинтегрируем каждую из простейших рациональных функций:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \int (x+1)^{-2}\mathrm{d}(x+1) = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+1} + C;$$

$$\int \frac{x}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/2(2x-1) + 1/2}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} + \int \frac{\mathrm{d}(x - 1/2)}{(x - 1/2)^2 + 3/4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}/2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Следовательно,

$$\int f_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{12}\ln|x+1| - \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{2} - 2x + \int f_1(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{12}\ln|x+1| - \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Замечание 2. Если *все корни знаменателя правильной рациональной функции простые*, то ее разложение на простейшие мы можем найти и без неопределенных коэффициентов. Действительно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – простые корни знаменателя $P_n(x)$ правильной рациональной функции (1). Тогда

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-x_n}.$$

Для нахождения каждого из коэффициентов a_k, $k = \overline{1,n}$ умножим обе части предыдущего равенства на $x - x_k$ и перейдем к пределу при $x \to x_k$, учитывая, что $P_n(x_k) = 0$, $P_n'(x_k) \neq 0$:

$$(x-x_k)\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = a_1\frac{x-x_k}{x-x_1} + a_2\frac{x-x_k}{x-x_2} + \ldots + a_k + \ldots + a_n\frac{x-x_k}{x-x_n};$$

$$\lim_{x\to x_k}(x-x_k)\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \lim_{x\to x_k}\frac{Q_m(x)}{\frac{P_n(x)-P_n(x_k)}{x-x_k}} = \frac{Q_m(x_k)}{P_n'(x_k)};$$

$$\lim_{x\to x_k}\left(a_1\frac{x-x_k}{x-x_1} + a_2\frac{x-x_k}{x-x_2} + \ldots + a_k + \ldots + a_n\frac{x-x_k}{x-x_n}\right) = a_k.$$

Значит,

$$a_k = \frac{Q_m(x_k)}{P_n'(x_k)},\ k = \overline{1,n};$$

и, следовательно, разложение рациональной функции на простейшие в этом случае имеет вид

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{\frac{Q_m(x_1)}{P_n'(x_1)}}{x-x_1} + \frac{\frac{Q_m(x_2)}{P_n'(x_2)}}{x-x_2} + \ldots + \frac{\frac{Q_m(x_n)}{P_n'(x_n)}}{x-x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{Q_m(x_k)}{P_n'(x_k)}}{x-x_k}. \tag{5}$$

Пример 2. *Найти интеграл*

$$I = \int \frac{x^4+x^2+1}{(x^3-x)(x^2-5x+6)}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Здесь числитель $Q_4(x) = x^4 + x^2 + 1$ и знаменатель $P_5(x) = (x^3 - x)(x^2 - 5x + 6)$ имеет простые корни $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$. Вычислим значения числителя и производной знаменателя

$$P_5'(x) = (3x^2-1)(x^2-5x+6) + (x^3-x)(2x-5)$$

для каждого из найденных корней:

$$\begin{aligned} &Q_4(-1) = 3, && P_5'(-1) = 24;\\ &Q_4(0) = 1, && P_5'(0) = -6;\\ &Q_4(1) = 3, && P_5'(1) = 4;\\ &Q_4(2) = 21, && P_5'(2) = -6;\\ &Q_4(3) = 91, && P_5'(3) = 24. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (5)

$$\frac{x^4+x^2+1}{(x^3-x)(x^2-5x+6)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{91}{24}\cdot\frac{1}{x-3}$$

и, стало быть,

$$I = \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{91}{24}\ln|x-3| + C.$$

Замечание 3. В некоторых случаях рациональную функцию удается привести к виду, удобному для интегрирования с помощью тождественных преобразований данной дроби, выделяя в ее числителе множители знаменателя.

Пример 3. *Найти интеграл*

$$\int\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)^2\mathrm{d}x.$$

Решение. Так как
$$\frac{x^4+1}{x^2+1} = \frac{(x^4-1)+2}{x^2+1} = x^2-1+\frac{2}{x^2+1},$$
то
$$\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)^2 = x^4-2x^2+1+4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}\right) =$$
$$= x^4-2x^2+1+4\left(\frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}+\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}\right) = x^4-2x^2+5-4\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right).$$
Воспользовавшись таблицей и методом интегрирования по частям, получим:
$$\int\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int(x^4-2x^2+5)\mathrm{d}x - 4\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+5x-4\left(\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) =$$
$$= \frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+5x-4\left(\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right)\right) =$$
$$= \frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+5x-2\left(3\operatorname{arctg}x-\frac{x}{x^2+1}\right)+C.$$

Замечание 3. Из сформулированной выше теоремы следует, что, по крайней мере *теоретически*, любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. На практике же мы можем встретиться с *трудностью принципиального характера*, связанную с тем, что мы не всегда можем найти разложение знаменателя дроби на множители, так как из алгебры известно, что *корни полинома степени выше четвертой в общем случае уже нельзя выразить через радикалы.*

§4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1. *Интегралы вида* $\int \sin^\alpha x\cos^\beta x\,\mathrm{d}x$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$.

Здесь мы выделим три случая, когда этот интеграл сводится к степенным интегралам.

a) *Среди чисел* α, β *имеется натуральное нечетное.*

В общем случае здесь следует подвести один множитель нечетной степени под дифференциал и выразить затем оставшуюся уже четную степень через функцию под дифференциалом с помощью тригонометрического тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. В результате мы придем к степенным интегралам, которые находятся по таблице.

Пример 1. *Найти интеграл*
$$\int\frac{\sin^5 x}{\sqrt[5]{\cos x}}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Здесь $\alpha=5$, $\beta=-\dfrac{1}{5}$. Тогда
$$\int\frac{\sin^5 x}{\sqrt[5]{\cos x}}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{\sin^4 x}{\sqrt[5]{\cos x}}\,\mathrm{d}\cos x = -\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\sqrt[5]{\cos x}}\,\mathrm{d}\cos x =$$
$$= -\int\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{\sqrt[5]{\cos x}}\,\mathrm{d}\cos x = -\int\left(\cos^{-\frac{1}{5}}x-2\cos^{\frac{9}{5}}x+\cos^{\frac{19}{5}}x\right)\mathrm{d}\cos x =$$
$$= -\left(\frac{\cos^{\frac{4}{5}}x}{4/5}-2\cdot\frac{\cos^{\frac{14}{5}}x}{14/5}+\frac{\cos^{\frac{24}{5}}x}{24/5}\right)+C = -\frac{5}{168}\sqrt[5]{\cos^4 x}\left(42-24\cos^2 x+7\cos^4 x\right)+C.$$

b) *Оба числа* α, β *неотрицательные четные.*

Воспользовавшись тригонометрическими формулами

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

мы можем, в два раза понизив степени в выражении для подынтегральной функции, свести данный интеграл к сумме аналогичных или интегралов, рассмотренных в предыдущем случае.

Пример 2. *Проинтегрировать функцию* $f(x) = \sin^4 x \cos^6 x$.

Решение. Так как

$$f(x) = \frac{1}{32}\sin^4 2x(1 + \cos 2x) = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}(1 - \cos 4x)^2 + \sin^4 2x \cos 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{128}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) + 4\sin^4 2x \cos 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{256}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x + 8\sin^4 2x \cos 2x),$$

то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{256}\left(3\int \mathrm{d}x - \int \cos 4x\, \mathrm{d}(4x) + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, \mathrm{d}(8x) + 4\int \sin^4 2x\, \mathrm{d}\sin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{256}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x + 4 \cdot \frac{\sin^5 2x}{5}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{10240}(120x - 40\sin 4x + 5\sin 8x + 32\sin^5 2x) + C.$$

c) *Числа* α, β *– целые, а их сумма – четное отрицательное число.*

В этом случае упрощает интеграл подстановка $z = \operatorname{tg} x$ или $z = \operatorname{ctg} x$. Действительно, пусть $\alpha + \beta = -2n$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда, воспользовавшись формулой $1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, получим:

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^\alpha \cos^{\alpha+\beta+2} x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^\alpha x(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{n-1}\mathrm{d}\operatorname{tg} x.$$

Таким образом, данный интеграл сводится к степенным относительно $\operatorname{tg} x$ интегралам.

Пример 3. *Найти интеграл*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x \cos^3 x}.$$

Решение. Здесь $\alpha = -5$, $\beta = -3$, $\alpha + \beta = -8$. Воспользовавшись формулой $\sin x \cos x = \operatorname{ctg} x/(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ и таблицей интегралов, найдем:

$$I = \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^3} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \left(\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg} x}\right)^3 \mathrm{d}\operatorname{ctg} x =$$

$$= -\int (\operatorname{ctg}^{-3} x + 3\operatorname{ctg}^{-1} x + 3\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x)\mathrm{d}\operatorname{ctg} x =$$

$$= -\left(\frac{\operatorname{ctg}^{-2} x}{-2} + 3\ln|\operatorname{ctg} x| + 3 \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\operatorname{tg}^2 x - 12\ln|\operatorname{ctg} x| - 6\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg}^4 x\right) + C.$$

В общем случае интеграл $\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\, \mathrm{d}x$ при целых α и β *приводится к интегралу от рациональной функции* с помощью подстановки, рассмотренной в следующем пункте.

Введем теперь необходимое для дальнейшего изложения понятие *рациональной функции двух переменных.*

Полиномом степени n *от двух переменных* x, y называется числовая функция вида

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l=0}^{n} a_{kl} x^k y^l$$

с действительными коэффициентами a_{kl}, $k+l=\overline{0,\, n}$, причем по крайней мере один из коэффициентов при старших степенях, т. е. a_{kl}, $k+l=n$, отличен от нуля.

Рациональной функцией двух переменных x, y называется дробь, числитель и знаменатель которой представляют собой полиномы от этих переменных.

Рациональной функцией относительно функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ называется композиция функций $f(\varphi(x),\psi(x))$, где $f(u,v)$ – рациональная функция аргументов u и v.

Совершенно аналогично мы можем ввести определение *рациональной функции трех и большего числа переменных.*

2. *Интеграл от рациональной относительно* $\sin x$, $\cos x$ *функции.*

Рассмотрим интеграл

$$\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x,$$

где $f(u,v)$ – рациональная функция своих аргументов. Проведем в этом интеграле подстановку

$$z=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x\in(-\pi,\pi).$$

Тогда, учитывая что

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ x=2\operatorname{arctg}z\Longrightarrow \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

получим:

$$\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int f_1(z)\mathrm{d}z.$$

Таким образом, эта подстановка свела данный интеграл к интегралу от рациональной функции $f_1(z)$.

Пример 4. *Найти интеграл*

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+2\cos x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Выполнив в этом интеграле указанную выше замену переменной, получим:

$$I=\int\frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+2\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}+2}\cdot\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}=2\int\frac{z}{(z+2)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие рациональные функции:

$$\frac{z}{(z+2)(z^2+1)}=\frac{a}{z+2}+\frac{bz+c}{z^2+1}.$$

Отсюда, после приведения простейших дробей к общему знаменателю, мы придем к равенству

$$z=a(z^2+1)+(bz+c)(z+2).$$

Полагая в нем последовательно $z=-2$, $z=0$, $z=-1$, мы найдем неизвестные коэффициенты разложения:

$$z=-2:\ -2=5a\Longrightarrow a=-\frac{2}{5};\ z=0:\ 0=a+2c\Longrightarrow c=\frac{1}{5};\ z=-1:\ -1=2a-b+c\Longrightarrow b=\frac{2}{5}.$$

Таким образом,

$$\frac{z}{(z+2)(z^2+1)}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2z+1}{z^2+1}.$$

Следовательно,

$$I=2\int\left(-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2z+1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z=\frac{2}{5}\left(-2\int\frac{\mathrm{d}(z+2)}{z+2}+\int\frac{\mathrm{d}(z^2+1)}{z^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}(-2\ln|z+2|+\ln(z^2+1)+\operatorname{arctg}z)+C=\frac{2}{5}\left(-2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|+\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x-4\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|-4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{5}\left(x-4\ln\left|\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right|\right)+C.$$

Замечание. Если функция $f(u,v)$ обладает определенной *симметрией*, то более предпочтительными по сравнению с приведенной выше могут оказаться другие подстановки. А именно, если $f(-u,v) = -f(u,v)$ или $f(u,-v) = -f(u,v)$, то полезными могут быть подстановки $z = \cos x$ или $z = \sin x$, соответственно. Если же $f(-u,-v) = f(u,v)$, то бывает целесообразно использовать замену переменной $z = \operatorname{tg} x$ или $z = \operatorname{ctg} x$.

Пример 5. *Найти интеграл*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x)\cos^2 x}.$$

Решение. Здесь

$$f(u,v) = \frac{1}{(u^2 - 2uv + 3v^2)v^2}$$

и, следовательно, $f(-u,-v) = f(u,v)$. Преобразуем подынтегральную функцию и проведем в интеграле подстановку $z = \operatorname{tg} x$:

$$I = \int \frac{1/\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\mathrm{d}\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3} = \int \frac{(1+z^2)\mathrm{d}z}{z^2 - 2z + 3}.$$

Выделив знаменатель в числителе последнего интеграла, получим:

$$I = \int \frac{(z^2 - 2z + 3) + 2z - 2}{z^2 - 2z + 3}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}z + \int \frac{2z-2}{z^2-2z+3}\,\mathrm{d}z = z + \int \frac{\mathrm{d}(z^2-2z+3)}{z^2-2z+3} =$$
$$= z + \ln(z^2 - 2z + 3) + C = \operatorname{tg} x + \ln(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3) + C.$$

3. *Интегралы*

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x\,\mathrm{d}x,\ \int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x,\ \int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x,\ \alpha,\beta \in \mathrm{R}.$$

приводятся к табличным с помощью тригонометрических формул

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x),$$
$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x),$$
$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x),$$

соответственно.

Пример 6. *Найти интеграл*

$$I = \int \sin 3x\cos^3 5x\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Так как при любом действительном x

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x),$$

то

$$\sin 3x\cos^3 5x = \frac{1}{4}(3\sin 3x\cos 5x + \sin 3x\cos 15x) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}(\sin(-2x) + \sin 8x) + \frac{1}{2}(\sin(-12x) + \sin 18x)\right) =$$
$$= \frac{1}{8}(-3\sin 2x + 3\sin 8x - \sin 12x + \sin 18x).$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{8}\left(-\frac{3}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}(2x) + \frac{3}{8}\int \sin 8x\,\mathrm{d}(8x) - \frac{1}{12}\int \sin 12x\,\mathrm{d}(12x) + \frac{1}{18}\int \sin 18x\,\mathrm{d}(18x)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}\cos 2x - \frac{3}{8}\cos 8x + \frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{18}\cos 18x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{576}(108\cos 2x - 27\cos 8x + 6\cos 12x - 4\cos 18x) + C.$$

§5. Интегрирование некоторых иррациональностей

1. *Интеграл от рациональной относительно x и радикала $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ функции.*

Здесь речь идет об интеграле[1]

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,\ a,b,c,d \in \mathrm{R}, ad-bc \neq 0, 2 \le n \in \mathrm{N},$$

где $f(u,v)$ – рациональная функция своих аргументов. В этом случае подынтегральная функция *рационализируется* подстановкой

$$z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Действительно, из этой подстановки мы находим

$$x = \frac{dz^n - b}{a - cz^n},\ \mathrm{d}x = \frac{(ad-bc)nz^{n-1}}{(a-cz^n)^2}\,\mathrm{d}z$$

и, следовательно, придем к интегралу

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x = \int f\left(\frac{dz^n-b}{a-cz^n},\ z\right)\frac{(ad-bc)nz^{n-1}}{(a-cz^n)^2}\,\mathrm{d}z = \int f_1(z)\mathrm{d}z$$

от рациональной функции $f_1(z)$.

Замечание. Если подынтегральная функция содержит *корни различных степеней* выражения $\frac{ax+b}{cx+d}$, то в качестве новой переменной следует взять *корень общей кратной степени* этого выражения.

Пример 1. *Найти интеграл*

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{x+1}+1}\,\mathrm{d}x.$$

---

[1]Условие $ad-bc \neq 0$ необходимо для того, чтобы дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ не вырождалась в константу.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной относительно переменной x и корней $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt[3]{x+1}$. Общей кратной здесь является степень $\sqrt[6]{x+1}$, поэтому

$$I = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt[6]{x+1}, \\ x = z^6 - 1, \\ \mathrm{d}x = 6z^5\mathrm{d}z \end{array} \right| = \int \frac{z^3-2}{z^2+1} 6z^5\mathrm{d}z = 6\left(\int \frac{z^8}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - 2\int \frac{z^5}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= 6\left(\int \frac{(z^8-1)+1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - 2\int \frac{z((z^4-1)+1)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= 6\left(\int \left((z^2-1)(z^4+1) + \frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z - 2\int z\left(z^2-1+\frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z\right) =$$

$$= 6\left(\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z - 2\int \left(z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z\right) =$$

$$= 6\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z - \frac{z^4}{2} + z^2 - \int \frac{\mathrm{d}(z^2+1)}{z^2+1}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z - \frac{z^4}{2} + z^2 - \ln(z^2+1)\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt{x+1} + 6\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} +$$

$$+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} - 6\ln(\sqrt[3]{x+1}+1) + C.$$

2. ***Интеграл от рациональной относительно*** x ***и корня*** $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ***функции.*** В этом пункте мы научимся интегрировать функции вида[1]

$$f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right),\ a, b, c \in \mathrm{R},$$

где $f(u,v)$ – рациональная функция переменных u, v.

Рассмотрим сначала этот интеграл в одном простом частном случае:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,\ A, B \in \mathrm{R}.$$

Он находится по аналогии с интегрированием простейшей рациональной функции (3), §3 в случае $r = 1$. Выделяя в числителе подынтегральной функции производную квадратичного выражения под корнем, мы придем к двум интегралам, один из которых является табличным, а второй сводится к таблице выделением в квадратичном выражении полного квадрата.

Пример 2. *Проинтегрировать функцию*

$$f(x) = \frac{4\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x + \ln x - 2}}.$$

Решение. Подстановкой $z = \ln x$ мы сведем данный интеграл к интегралу, указанному в предыдущем абзаце и затем проинтегрируем, как указано выше.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{4\ln x - 1}{\sqrt{\ln^2 x + \ln x - 2}}\,\mathrm{d}\ln x = \int \frac{4z-1}{\sqrt{z^2+z-2}}\,\mathrm{d}z = \int \frac{2(2z+1)-3}{\sqrt{z^2+z-2}}\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(z^2+z-2)}{\sqrt{z^2+z-2}} - 3\int \frac{\mathrm{d}(z+1/2)}{\sqrt{(z+1/2)^2 - 9/4}} =$$

$$= 4\sqrt{z^2+z-2} - 3\ln\left|z + 1/2 + \sqrt{(z+1/2)^2 - 9/4}\right| + C =$$

$$= 4\sqrt{\ln^2 x + \ln x - 2} - 3\ln\left|\ln x + 1/2 + \sqrt{\ln^2 x + \ln x - 2}\right| + C.$$

[1] Здесь мы будем, естественно, считать, что $a \neq 0, D = b^2 - 4ac \neq 0$ и $D > 0$, если $a < 0$.

В общем случае *рационализация* подынтегральной функции в интеграле
$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$$
достигается с помощью одной из *подстановок Эйлера*:
$$1)\ \sqrt{ax^2+bx+c} = z \pm \sqrt{a}x, \text{ если } a > 0;$$
$$2)\ \sqrt{ax^2+bx+c} = zx \pm \sqrt{c}, \text{ если } c > 0.$$
Если $D = b^2 - 4ac > 0$ и x_0 – один из корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то
$$3)\ \sqrt{ax^2+bx+c} = z(x-x_0).$$
Рассмотрим, например, первую из них.
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = z+\sqrt{a}x \Longrightarrow ax^2+bx+c = \left(z+\sqrt{a}x\right)^2 \Longrightarrow bx+c = 2\sqrt{a}xz+z^2.$$
Отсюда, мы находим
$$x = \frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z},\ \mathrm{d}x = \frac{2\left(-\sqrt{a}c+bz-\sqrt{a}z^2\right)}{\left(b-2\sqrt{a}z\right)^2}\,\mathrm{d}z.$$
Следовательно,
$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int f\left(\frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z}, z+\sqrt{a}\cdot\frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z}\right) \frac{2\left(-\sqrt{a}c+bz-\sqrt{a}z^2\right)}{\left(b-2\sqrt{a}z\right)^2}\,\mathrm{d}z = \int f_1(z)\mathrm{d}z,$$
где $f_1(z)$ – рациональная функция аргумента z.

Пример 3. *Найти интеграл*
$$I = \int \frac{x-\sqrt{x^2+2}}{1+x+\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x.$$
Решение. Проведем в интеграле первую из подстановок Эйлера. Так как
$$\sqrt{x^2+2} = z-x \Longrightarrow x = \frac{z^2-2}{2z} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{z^2+2}{2z^2}\,\mathrm{d}z,$$
то
$$I = \int \frac{2\cdot\frac{z^2-2}{2z}-z}{1+z}\cdot\frac{z^2+2}{2z^2}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{z^2+2}{z^3(z+1)}\,\mathrm{d}z.$$
Разложим подынтегральную рациональную функцию на простейшие:
$$\frac{z^2+2}{z^3(z+1)} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{2}{z^3(z+1)} = \frac{(z+1)-z}{z(z+1)} + 2\cdot\frac{(z+1)-z}{z^3(z+1)} =$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + 2\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2(z+1)}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + 2\left(\frac{1}{z^3} - \frac{(z+1)-z}{z^2(z+1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + 2\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z(z+1)}\right) = 3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) + 2\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right).$$
Следовательно,
$$I = -3\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z - 2\int\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z = 3(\ln(z+1) - \ln z) + 2\left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z}\right) + C =$$
$$= 3\left(\ln\left(1+x+\sqrt{x^2+2}\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right) + \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+2})^2} - \frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Использование подстановок Эйлера может привести к весьма *громоздким* выкладкам. В некоторых случаях быстрее к цели ведут *тригонометрические подстановки*, о которых мы сейчас и поговорим. Выделив в квадратичном выражении под корнем полный квадрат, мы приведем его к виду

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm \alpha^2,$$

где $0<\alpha$ – некоторое действительное число. Следовательно, выполнив в данном интеграле линейную подстановку

$$z=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

мы сведем его к одному из трех интегралов

$$\int f_1\left(z, \sqrt{z^2+\alpha^2}\right) \mathrm{d}z, \int f_1\left(z, \sqrt{z^2-\alpha^2}\right) \mathrm{d}z, \int f_1\left(z, \sqrt{\alpha^2-z^2}\right) \mathrm{d}z,$$

в каждом из которых подынтегральная функция является рациональной относительно своих аргументов. Убрать корни в этих интегралах и привести их к интегралам от рациональной функции относительно синуса и косинуса новой переменной мы можем с помощью подстановок

$$z=\alpha \operatorname{tg} t \text{ или } z=\alpha \operatorname{ctg} t,\ z=\frac{\alpha}{\sin t} \text{ или } z=\frac{\alpha}{\cos t},\ z=\alpha \sin t \text{ или } z=\alpha \cos t,$$

соответственно. Например, если в третьем из этих интегралов провести замену переменной

$$z=\alpha \sin t \Longrightarrow \sqrt{\alpha^2-z^2}=\alpha \cos t,\ \mathrm{d}z=\alpha \cos t \,\mathrm{d}t,$$

то

$$\int f_1\left(z, \sqrt{\alpha^2-z^2}\right) \mathrm{d}z=\int f_1(\alpha \sin t, \alpha \cos t)\, \alpha \cos t \,\mathrm{d}t=\int f_2(\sin t, \cos t) \,\mathrm{d}t,$$

где $f_2(u, v)$ – рациональная функция аргументов u, v.

Пример 4. *Выполнить интегрирование*

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Решение. Заметив, что

$$1-2x-x^2=2-(x+1)^2,$$

проведем в интеграле тригонометрическую подстановку

$$x+1=\sqrt{2}\cos z \Longrightarrow \mathrm{d}x=-\sqrt{2}\sin z \,\mathrm{d}z,\ 1-2x-x^2=2\sin^2 z.$$

В результате получим:

$$I=-\int \frac{\sqrt{2}\sin z \,\mathrm{d}z}{1+\sqrt{2}\sin z}=\int \frac{1-(1+\sqrt{2}\sin z)}{1+\sqrt{2}\sin z} \mathrm{d}z=\int\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin z}-1\right) \mathrm{d}z=\int \frac{\mathrm{d}z}{1+\sqrt{2}\sin z}-z.$$

В последнем интеграле используем подстановку из §4, пункт 2:

$$t=\operatorname{tg}\frac{z}{2},\ \sin z=\frac{2t}{1+t^2},\ \mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Тогда,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1+\sqrt{2}\sin z}=\int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\sqrt{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2\sqrt{2}t+1}=2\int \frac{\mathrm{d}(t+\sqrt{2})}{(t+\sqrt{2})^2-1}=$$

$$=\ln\frac{t+\sqrt{2}-1}{t+\sqrt{2}+1}+C=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\sqrt{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\sqrt{2}+1}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{3+x+\sqrt{1-2x-x^2}}+C.$$

Таким образом, окончательно

$$I=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{3+x+\sqrt{1-2x-x^2}}-\arccos\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

ГЛАВА VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе мы займемся изучением исключительно важного как в самой математики, так и в ее приложениях понятия *определенного интеграла*. Мы увидим, например, что там, где речь идет о геометрических свойствах фигур, связанных с их *мерой* (длиной, площадью, объемом) определенный интеграл возникает вполне естественно, как *предел интегральных сумм*.

§1. Определенный интеграл, его существование и основные свойства

Пусть функция $f(x)$ определена и *интегрируема* на отрезке $[a,\, b]$, $a < b$ числовой оси.

Определение 1. *Определенным интегралом функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,\, b]$ *называется действительное число*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F(x)$ *– первообразная функции* $f(x)$ *на данном отрезке.*

Соотношение (1) называется *формулой Ньютона-Лейбница.* Из нее, в частности, следует, что, поскольку любые две первообразные связаны постоянной (глава VI, §1, теорема 1), то *значение определенного интеграла не зависит от выбора первообразной.*

Для *полноты* приведенного выше определения будем считать также, что

$$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Эти соотношения полностью согласуются с формулой Ньютона-Лейбница.

Если *функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\, b]$, то, как следует из теоремы 2 (глава VI, §1), *определенный интеграл для нее на этом отрезке существует.* В частности, *любая элементарная функция интегрируема на любом отрезке из своей области определения.*

Сформулируем теперь *основные свойства определенного интеграла.*

1) *Линейность определенного интеграла.*

Если функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,\, b]$, *то для любых* $c_1, c_2 \in \mathrm{R}$

$$\int\limits_a^b \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) \mathrm{d}x = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

2) *Аддитивность определенного интеграла.*

Если функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,\, c]$, *то для любой точки* $b \in [a,\, c]$

$$\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Эти два свойства являются прямыми следствиями формулы Ньютона-Лейбница. Например, для аддитивности,

$$\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^c = F(x)\Big|_a^b + F(x)\Big|_b^c = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

3) *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,\, b]$ *и для всех точек* $x \in [a,\, b]$ *справедливо неравенство* $f_1(x) \le f_2(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Действительно, если $F_1(x)$, $F_2(x)$ – первообразные функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ соответственно, то для производной функции $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$ имеет место неравенство

$$F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f_2(x) - f_1(x) \geq 0,\ x \in [a,\, b].$$

Следовательно, функция $F(x)$ является неубывающей на отрезке $[a,\, b]$ (глава V, §6, пункт 1, теорема 1). Поэтому

$$F(b) - F(a) \geq 0,$$

откуда

$$\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Из свойства 3) сразу же вытекают следующие два свойства.

4) *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,\, b]$ *вместе со своей абсолютной величиной, то*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

5) *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,\, b]$ *и ограничена на нем, т. е. существуют числа* m *и* M *такие, что*

$$m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a,\, b],$$

то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Для непрерывных функций справедливо свойство

6) *Теорема о среднем для определенного интеграла.*

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\, b]$, *то существует точка* $c \in [a,\, b]$, *для которой*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

В самом деле, по теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\, b]$ и, следовательно, по предыдущему свойству

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M,$$

где $m = \inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$. Тогда по теореме Больцано-Коши (глава IV, §5, пункт 3) найдется точка $c \in [a,\, b]$, для которой

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a),$$

в чем и требовалось убедиться.

7) *Производная интеграла с переменным верхним пределом.*

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(z)\mathrm{d}z$ является первообразной для данной функции на отрезке $[a,\, b]$, т. е.

$$\left(\int\limits_a^x f(z)\mathrm{d}z\right)' = f(x),\; x \in [a,\, b].$$

Доказательство очевидным образом следует из формулы Ньютона-Лейбница.

Распространим теперь понятие определенного интеграла на случай *кусочно-непрерывной* на отрезке функции.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,\, b]$, если этот отрезок мы можем разбить на конечное число частичных промежутков, внутри каждого из которых функция непрерывна, а в каждой из граничных точек промежутков функция имеет устранимый разрыв или разрыв первого рода.*

Обозначим через $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ – точки, которыми отрезок $[a,\, b]$ делится на промежутки. Доопределив в каждой из этих точек кусочно-непрерывную функцию $f(x)$ соответствующими односторонними предельными значениями, мы получим тем самым функцию, которая будет непрерывной, а, значит, и интегрируемой на каждом из $n+1$ частичных отрезков

$$[a,\, a_1],\; [a_1,\, a_2],\; \ldots,\; [a_n,\, b].$$

С учетом этого введем следующее

Определение 3. *Определенным интегралом кусочно-непрерывной на отрезке $[a,\, b]$ функции $f(x)$ называется сумма определенных интегралов этой функции по всем частичным отрезкам, т. е.*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{a_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что все перечисленные выше *свойства определенного интеграла*, кроме двух последних, *справедливы* и для определенного интеграла кусочно-непрерывной на отрезке функции. Приведем простой пример кусочно-непрерывной функции, для которой свойства 6) и 7) нарушаются. Рассмотрим функцию знака[1]

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0); \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Эта функция имеет разрыв первого рода в нуле, так как $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$. Для нее

$$\int\limits_{-1}^{5} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{5} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} (-1)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{5} 1\mathrm{d}x = -x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{0}^{5} = 0 - 1 + 5 - 0 = 4,$$

однако на отрезке $[-1,\, 5]$ нельзя указать точку c, для которой

$$\int\limits_{-1}^{5} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} c \cdot (5 - (-1)) \Longleftrightarrow 2 = 3 \operatorname{sgn} c.$$

Таким образом, теорема о среднем (свойство 6)) для этого интеграла не выполняется. Что касается интеграла с переменным верхним пределом (свойство 7)), то здесь при $x \in [-1, 0]$

$$\int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sgn} z\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{x} (-1)\mathrm{d}z = -z\Big|_{-1}^{x} = -x - 1,$$

[1] Читается *сигнум x*.

аналогично, если $x \in (0,5]$, то

$$\int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sgn} z \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{0} (-1)\mathrm{d}z + \int\limits_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}z = -z\Big|_{-1}^{0} + z\Big|_{0}^{x} = 0 - 1 + x - 0 = x - 1.$$

Таким образом, функция

$$F(x) = \int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sgn} z\,\mathrm{d}z = |x| - 1$$

является первообразной функции $\operatorname{sgn} x$ на промежутках $[-1,0)$ и $(0,5]$, а вот в нуле функция $F(x)$ непрерывна, так как $F(-0) = F(+0) = F(0) = -1$, но не является дифференцируемой, ввиду того, что $F'_{-}(0) = -1$, $F'_{+}(0) = 1$. Следовательно, и свойство 7) для данной функции на отрезке $[-1,5]$ также не имеет места.

Переформулируем свойства 6) и 7) таким образом, чтобы они имели место и для кусочно-непрерывных функций.

$6'$) *Теорема о среднем для определенного интеграла кусочно-непрерывной функции.*

Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a,\,b]$ и $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n$ – точки, в которых функция имеет устранимый разрыв или разрыв первого рода, то существуют точки

$$c_1 \in [a,\,a_1],\; c_2 \in [a_1,\,a_2],\;\ldots,\; c_{n+1} \in [a_n,\,b],$$

для которых

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = f(c_1)(a_1 - a) + f(c_2)(a_2 - a_1) + \ldots + f(c_{n+1})(b - a_n).$$

Например, для функции $\operatorname{sgn} x$, $x \in [-1,\,5]$, рассмотренной в предыдущем примере, $a_1 = 0$ и

$$\int\limits_{-1}^{5} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = 4 = -1\cdot 1 + 1\cdot 5 = \operatorname{sgn} c_1 \cdot (0 - (-1)) + \operatorname{sgn} c_2 \cdot (5 - 0),$$

где $c_1 \in [-1,0)$, $c_2 \in (0,5]$.

$7'$) *Интеграл с переменным верхним пределом для кусочно-непрерывной функции.*

Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_{a}^{x} f(z)\mathrm{d}z$ является непрерывной функцией аргумента x во всех точках отрезка $[a,\,b]$ и служит первообразной для данной функции на отрезке $[a,\,b]$ за исключением точек разрыва первого рода этой функции.

§2. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Простейшие приложения определенного интеграла в физике

Рассмотрим теперь другое, *исключительно важное в приложениях*, определение интеграла, основанное на *методе интегральных сумм.*

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\,b]$, $a < b$. Разобьем этот отрезок произвольным образом на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

На каждом из частичных отрезков $[x_{k-1},\,x_k]$, $k = \overline{1,n}$, длину которого мы обозначим через Δx_k, выберем произвольно по точке c_k. Составим для данного разбиения *интегральную сумму*

$$I_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Определение. *Если существует конечный предел интегральных сумм I_n при условии, что длины всех частичных отрезков стремятся к нулю, не зависящий от способа разбиения* *отрезка на части и выбора точек внутри частичных отрезков, то он называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$.*

Покажем теперь, что *для непрерывной на отрезке функции определенный интеграл как предел интегральных сумм равен определенному интегралу, вычисленному по формуле Ньютона-Лейбница.*

Действительно, пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,\, b]$. В предыдущем параграфе мы отметили, что определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

существует. Оценим по абсолютной величине разность между интегральной суммой I_n, соответствующей разбиению (1) отрезка на части, и интегралом (2). Воспользовавшись линейностью и аддитивностью определенного интеграла (§1, свойства 1) и 2)), получим:

$$I_n - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(c_k)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(c_k) - f(x))\mathrm{d}x.$$

По теореме Кантора (глава IV, §5, пункт 5) функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на отрезке $[a,\, b]$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, как только $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$. Тогда для $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a)$ мы можем выбрать разбиение (1) столь мелким, чтобы на каждом из отрезков этого разбиения выполнялось неравенство

$$|f(c_k) - f(x)| < \varepsilon_1,\; x \in [x_{k-1},\, x_k],\; k = \overline{1,n}.$$

Отсюда, благодаря свойствам 3) и 4) определенного интеграла (§1),

$$\left| I_n - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(c_k) - f(x))\mathrm{d}x \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(c_k) - f(x))\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(c_k) - f(x)|\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon_1 \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_1 \Delta x_k = \varepsilon_1(b-a) = \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} I_n = \lim_{\Delta\mu\to 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

где $\Delta\mu = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k$.

Аналогично мы можем убедиться в том, что и для *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a,\, b]$ функции $f(x)$ конечный предел интегральных сумм существует и равен определенному интегралу

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

этой функции (§1, определение 3).

Именно как предел интегральных сумм и возникает интеграл в приложениях. Пусть, например, под действием непрерывной *переменной силы* $F(x)$, действующей вдоль числовой оси Ox, материальная точка переместилась из положения a в положение b. Требуется найти величину совершенной при этом *работы*. Для этого разобьем отрезок $[a,\, b]$ на малые части $[x_{k-1},\, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ и возьмем внутри каждой из них произвольную точку c_k. Ввиду малости отрезков разбиения мы можем считать, что сила постоянна на каждом из них и равна значению силы в выбранной на этом отрезке точке. Тогда искомая работа приближенно равна интегральной сумме

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k,$$

а ее точное значение равно пределу этих интегральных сумм при условии бесконечно малого дробления отрезка $[a,\, b]$ на части, т. е. определенному интегралу силы $F(x)$ на этом отрезке:

$$A = \int\limits_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

Аналогично мы можем показать, что, если известна *скорость* $v(t)$ перемещения материальной точки по прямой на временном промежутке $[t_1,\, t_2]$, то *путь*, пройденный точкой за это время выражается интегралом

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

Пример. *Какую работу необходимо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой равен R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?*

Решение. Воспользуемся тем, что на тело массы m, находящееся на высоте x со стороны Земли действует сила тяготения

$$F = \frac{mgR^2}{(R+x)^2},$$

где g – ускорение свободного падения. Тогда искомая работа равна

$$A_h = \int\limits_0^h \frac{mgR^2}{(R+x)^2}\,\mathrm{d}x = mgR^2 \int\limits_0^h (R+x)^{-2}\mathrm{d}(R+x) = mgR^2\, \frac{(R+x)^{-1}}{-1}\bigg|_0^h =$$

$$= -mgR^2\, \frac{1}{R+x}\bigg|_0^h = -mgR^2\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Если тело удаляется в бесконечность, то

$$A_\infty = \lim_{h\to\infty} A_h = \lim_{h\to\infty} mgR\frac{h}{R+h} = mgR \lim_{h\to\infty} \frac{1}{R/h+1} = mgR.$$

§3. Методы вычисления определенного интеграла

Обратившись к формуле Ньютона-Лейбница, мы видим, что вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной, т. е. неопределенного интеграла. Следовательно, все методы нахождения неопределенного интеграла с соответствующими изменениями будут служить также методами вычисления определенного интеграла.

1. Подстановка (замена переменной) в определенном интеграле

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\, b]$, а функция $x = \varphi(z)$ определена, монотонна и дифференцируема с ненулевой производной на отрезке $[c,\, d]$, причем $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Тогда, если функция $f(\varphi(z))\varphi'(z)$ интегрируема на отрезке $[c,\, d]$, то функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_c^d f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Действительно, при доказательстве теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле (глава VI, §2, пункт 1) мы убедились в том, что функция $F_1(\varphi^{-1}(x))$, где $F_1(z)$ – первообразная функции $f(\varphi(z))\varphi'(z)$, является первообразной функции $f(x)$. Поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F_1(\varphi^{-1}(x))\Big|_a^b = F_1(\varphi^{-1}(b)) - F_1(\varphi^{-1}(a)) = F_1(d) - F_1(c) = F_1(z)\Big|_c^d = \int\limits_c^d f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z.$$

Замечание. При использовании подстановки в определенном интеграле нет никакой необходимости в возврате от новой к старой переменной. Следует просто вычислить интеграл в правой части равенства (1) по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример. *Вычислить интеграл*

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}.$$

Решение. Проведем в этом интеграле подстановку

$$x = \operatorname{tg} z,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z}.$$

Очевидно, отрезок $[0,\,1]$ в результате этой замены переменной преобразуется в отрезок $[0,\,\frac{\pi}{4}]$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 z)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 z\,\mathrm{d}z.$$

Последний интеграл мы найдем, последовательно понижая степени подынтегральной функции (глава VI, §4, пункт 1, b)).

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2z)^2\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos 2z+\cos^2 2z)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2z+\frac{1}{2}(1+\cos 4z)\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(3+4\cos 2z+\cos 4z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 3\,\mathrm{d}z + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2z\,\mathrm{d}(2z) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 4z\,\mathrm{d}(4z)\right) = \frac{1}{8}\left(3z\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\sin 2z\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4z\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)+\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{4}+2\right) = \frac{3\pi+8}{32}.$$

2. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,\,b]$. Тогда, если на этом отрезке интегрируема одна из функций $f_1'(x)f_2(x)$ или $f_2'(x)f_1(x)$, то интегрируема и другая и справедлива следующая формула интегрирования по частям*:

$$\int\limits_a^b f_1(x)f_2'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}f_2(x) = f_1(x)f_2(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}f_1(x) = f_1(x)f_2(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f_2(x)f_1'(x)\mathrm{d}x.$$

В самом деле, из равенства

$$f_1(x)f_2'(x) = (f_1(x)f_2(x))' - f_2(x)f_1'(x)$$

следует, что первообразной функции $f_1(x)f_2'(x)$ является функция $f_1(x)f_2(x) - F(x)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f_2(x)f_1'(x)$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f_1(x)f_2'(x)\mathrm{d}x = \left(f_1(x)f_2(x) - F(x)\right)\Big|_a^b = f_1(x)f_2(x)\Big|_a^b - F(x)\Big|_a^b = f_1(x)f_2(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f_2(x)f_1'(x)\mathrm{d}x,$$

в чем и требовалось убедиться.

Пример. *Вычислить интеграл* $\int\limits_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

Решение. Проинтегрируем здесь дважды по частям:

$$I = \int\limits_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi} x\mathrm{d}\sin(\ln x) = e^\pi \sin\pi - \sin 0 - \int\limits_1^{e^\pi} x\cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= -\int\limits_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\mathrm{d}x = -\,x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \int\limits_1^{e^\pi} x\mathrm{d}\cos(\ln x) =$$

$$= -e^\pi\cos\pi + \cos 0 + \int\limits_1^{e^\pi} -x\sin(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = e^\pi + 1 - I.$$

Следовательно, $I = \dfrac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)$.

§4. Несобственные интегралы

В §1 настоящей главы мы рассмотрели определенный интеграл на *конечном* отрезке. Там же мы констатировали тот факт, что определенный интеграл для *непрерывной* или *кусочно-непрерывной* функции существует. Займемся теперь обобщением понятия определенного интеграла на случай *бесконечного промежутка* или *неограниченной на конечном промежутке* функции. Такие интегралы называются *несобственными.*

1. Несобственный интеграл на бесконечном промежутке

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на бесконечном промежутке* $[a,\,+\infty)$. Тогда, как мы установили в §1, при любом $b \in [a,\,+\infty)$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

то он называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на бесконечном промежутке[1] $[a,\,+\infty)$ *и обозначается через*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

В случае существования конечного предела (1) *несобственный интеграл* (2) *называется сходящимся, иначе, т. е. если предел* (1) *не существует или бесконечен, – расходящимся.*

Воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, мы можем записать предел (1) в виде

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

[1] Альтернативное название – *несобственный интеграл первого рода.*

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Следовательно, и для несобственного интеграла (2) также справедлива *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a). \tag{3}$$

Если в формуле (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не существует или $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \infty$, то интеграл (2) расходится, если же $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ существует и конечен, то несобственный интеграл сходится.

Пример 1. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha},\ 0 < a \in \mathrm{R},\ \alpha \in \mathrm{R}$$

или установить его расходимость.

Решение. Если $\alpha < 1$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\ x^{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится. В случае $\alpha = 1$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln a = +\infty$$

и, таким образом, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ также расходится. Наконец, при $\alpha > 1$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Пример 2. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$\int\limits_{\pi^3}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Здесь

$$\int\limits_{\pi^3}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_{\pi^3}^{+\infty} \cos\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}\sqrt[3]{x} = 3\,\sin\sqrt[3]{x}\,\Big|_{\pi^3}^{+\infty} = 3\lim_{x\to+\infty}\sin\sqrt[3]{x}.$$

Покажем, что предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt[3]{x}$ не существует. Действительно, возьмем две бесконечно большие последовательности

$$x_n^{(1)} = (\pi n)^3,\ n \in \mathrm{N} \text{ и } x_n^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^3,\ n \in \mathrm{N}.$$

Для первой из них $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt[3]{x_n^{(1)}} = 0$, для второй – $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt[3]{x_n^{(2)}} = 1$. Отсюда, ввиду единственности предела функции (глава IV, §4, пункт 2, свойство 3)), и следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt[3]{x}$ не существует. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Отметим два простейших *свойства* сходящихся несобственных интегралов, которые немедленно следуют из формулы (3).

1) *Если функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$, то несобственные интегралы*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ b \geq a$$

сходятся или расходятся одновременно, причем в случае их сходимости

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

2) *Если несобственные интегралы*

$$\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$$

для непрерывных на промежутке $[a, +\infty)$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сходятся, то сходится также и несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\mathrm{d}x,\ c_1,\ c_2 \in \mathrm{R}$$

и

$$\int\limits_a^{+\infty} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\mathrm{d}x = c_1 \int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Для вычисления сходящихся несобственных интегралов мы также, как и для определенных, можем использовать *методы замены переменной и интегрирования по частям* (§3) при условии, что все возникающие при этом пределы существуют и конечны, а несобственные интегралы сходятся. Заметим, что иногда при использовании подстановки несобственный интеграл может быть преобразован в определенный интеграл по конечному отрезку.

Пример 3. *Вычислить несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\operatorname{arctg} x} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Решение. Проведем в интеграле подстановку

$$z = \operatorname{arctg} x,\ x = \operatorname{tg} z,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z}.$$

Здесь бесконечный промежуток $[0, +\infty)$ отображается в промежуток $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \frac{\operatorname{tg} z \cos^4 z\,\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \sin 2z\,\mathrm{d}z.$$

Интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \sin 2z\,\mathrm{d}z$$

мы вычислим двойным интегрированием по частям.

$$I_1 = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2z\, \mathrm{d}e^{-z} = -\left. e^{-z}\sin 2z\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z}\mathrm{d}\sin 2z = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z}\cos 2z\,\mathrm{d}z = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2z\,\mathrm{d}e^{-z} =$$

$$= -2\left(\left. e^{-z}\cos 2z\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z}\mathrm{d}\cos 2z\right) = 2\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z}\sin 2z\,\mathrm{d}z\right) = 2\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right) - 4I_1.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)$$

и, следовательно,

$$I = \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right).$$

Часто вычислить несобственный интеграл или установить факт его расходимости по формуле (3) даже для элементарной функции *не представляется возможным*, так как первообразная $F(x)$ может оказаться очень громоздкой или быть специальной функцией. В этом случае можно попытаться исследовать этот несобственный интеграл на сходимость без его вычисления, использовав подходящий *признак сходимости*. Рассмотрим один из таких признаков для *неотрицательных* функций.

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и неотрицательны на промежутке $[a, +\infty)$ и, кроме того, при всех $x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство*

$$f_1(x) \le f_2(x).$$

Тогда, если несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

сходится, то сходится также и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Наоборот, если несобственный интеграл (5) *расходится, то расходящимся является и несобственный интеграл* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что несобственный интеграл (4) сходится. Обозначим через $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Они являются неубывающими функциями, так как $F_1'(x) = f_1(x) \ge 0$, $F_2'(x) = f_2(x) \ge 0$ при $x \in [a, +\infty)$. Для любого $b \ge a$ по свойству 3) определенного интеграла (§1) справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \iff F_1(b) - F_1(a) \le F_2(b) - F_2(a) \tag{6}$$

и, таким образом, интегралы $\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$ являются неотрицательными, неубывающими функциями аргумента $b \ge a$. Отсюда, ввиду сходимости интеграла (4), следует, что

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$$

и, значит, интеграл $\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ является неубывающей, ограниченной сверху функцией переменной $b \in [a, +\infty)$. Тогда по свойству 6) предела функции (глава IV, §4, пункт 2) существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x,$$

т. е. несобственный интеграл (5) сходится.

Предположим теперь, что несобственный интеграл (5) расходится. Это означает, благодаря тому, что интеграл $\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ является неубывающей функцией аргумента $b \in [a, +\infty)$, что

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (6), следует, что

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x = +\infty$$

и, таким образом, несобственный интеграл (4) также расходится. Т е о р е м а д о к а з а н а.

Замечание 1. На практике при использовании доказанного признака рекомендуется сравнивать данную функцию с более простой, для которой несобственный интеграл несложно исследовать на сходимость. Если функция имеет *степенной рост на бесконечности*, то ее следует сравнивать с функцией $\frac{1}{x^\alpha}$ (пример 1).

Пример 4. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$$

Решение. Покажем, что $x > \ln x$ при $x \geq 2$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x - \ln x$. Для нее $\varphi'(x) = 1 - 1/x > 0$, $x \geq 2$ и $\varphi(2) = 2 - \ln 2 > 0$. Следовательно, $\varphi(x) > 0$, $x \geq 2$, что равносильно доказываемому неравенству. Тогда при всех $x \in [2, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}.$$

В примере 1 мы убедились в том, что несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

расходится, а потому по признаку сравнения расходится и данный интеграл.

Пример 5. *Доказать, что несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2+\sin 3x}{(1+x^2)(5+\cos 7x)}\,\mathrm{d}x.$$

сходится.

Решение. Очевидно, подынтегральная функция положительна и, так как при всех $x \in \mathrm{R}$

$$1 \leq 2+\sin 3x \leq 3,\ 5+\cos 7x \geq 4,$$

то

$$\frac{2+\sin 3x}{(1+x^2)(5+\cos 2x)} \leq \frac{3}{4(1+x^2)},\ x \in \mathrm{R}.$$

Коль скоро несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

сходится, то по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

Признак сравнения часто бывает удобно использовать в следующей *предельной* форме.

Следствие (предельный признак сравнения). *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и неотрицательны на промежутке $[a, +\infty)$ и существует конечный, не равный нулю предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Тогда несобственные интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = l$, $0 < l \in \mathrm{R}$. Выберем малое число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $l - \varepsilon > 0$. По определению предела функции на бесконечности (глава IV, §4, пункт 2) существует число $M_\varepsilon > a$ такое, что

$$l - \varepsilon < \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < l + \varepsilon,\ x > M_\varepsilon \iff (l-\varepsilon)f_2(x) < f_1(x) < (l+\varepsilon)f_2(x),\ x > M_\varepsilon.$$

Из этого неравенства и признака сравнения и следует данное утверждение. Действительно, если, например, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ сходится, то по свойству 1) сходится интеграл $\int\limits_{M_\varepsilon}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$, а тогда из неравенства $(l-\varepsilon)f_2(x) < f_1(x)$, $x > M_\varepsilon$ по признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_{M_\varepsilon}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$, а, значит, по свойству 1) сходящимся является также интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$. Аналогично проверяются все остальные случаи.

Пример 6. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} \left(\ln\left(1+x^2\right) - 2\ln x\right) \mathrm{d}x.$$

Решение. Так как при $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$, $x \to \infty$ (глава IV, §4, пункт 4, формула 5)), то

$$\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} \left(\ln\left(1+x^2\right) - 2\ln x\right) = \sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \sqrt{x}\cdot 1 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится (пример 1, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), то по предельному признаку сравнения сходится также интеграл I.

Введем теперь определение *абсолютной сходимости* несобственного интеграла и установим *зависимость* между сходимостью и абсолютной сходимостью.

Несобственный интеграл (2) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Теорема 2. *Из абсолютной сходимости несобственного интеграла (2) следует его сходимость.*

Действительно, поскольку
$$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|,\ x \in [a,\ +\infty),$$
то по признаку сравнения сходится интеграл
$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\mathrm{d}x,$$
а тогда по свойству 2) несобственного интеграла сходится также интеграл (2).

Пример 7. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$
где $\varphi(x)$ *– непрерывная, ограниченная на полуоси* $[1,\ +\infty)$ *функция.*

Решение. Исследуем этот интеграл на абсолютную сходимость. Так как
$$|\varphi(x)| \le M,\ x \in [1,\ +\infty),\ 0 < M \in \mathrm{R},$$
то
$$\left|\frac{\varphi(x)}{x^2}\right| \le \frac{M}{x^2},\ x \in [1,\ +\infty).$$
Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ является сходящимся (пример 1, $\alpha = 2$), то по признаку сравнения сходится интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\varphi(x)}{x^2}\right|\mathrm{d}x,$$
т. е. данный несобственный интеграл является абсолютно сходящимся.

В обратную сторону утверждение теоремы 2, вообще говоря, не имеет места. Может так случиться, что интеграл (2) *сходится, но неабсолютно*. Приведем пример такого интеграла.

Пример 8. *Доказать, что сходимость несобственного интеграла*
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$
не является абсолютной.

Решение. Воспользовавшись методом интегрирования по частям, получим:
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\cos x = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Отсюда и следует, что данный интеграл является сходящимся, так как ввиду ограниченности функции $\cos x$ предел
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0,$$
а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ является абсолютно сходящимся (пример 7, $\varphi(x) = \cos x$).

Осталось проверить, что исходный интеграл не обладает абсолютной сходимостью. Действительно, так как
$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ x \in \mathrm{R},$$
то
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right),\ x \in [1,\ +\infty).$$

Предположим теперь, что интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right) \mathrm{d}x,$$

прибавив к которому также сходящийся интеграл[1]

$$\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, \mathrm{d}x,$$

мы по свойству 2) получим сходящийся интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию, так как последний интеграл заведомо расходится (пример 1, $\alpha = 1$). Следовательно, наше предположение неверно и, стало быть, данный интеграл *не является абсолютно сходящимся.*

Замечание 2. Вся изложенная выше теория справедлива, очевидно, и для несобственного интеграла *непрерывной на бесконечном промежутке* $(-\infty, b]$, $b \in \mathrm{R}$ функции $f(x)$, т. е. интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Пример 9. *Вычислить несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x\ln(-x)}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Решение. Интегрируя по частям, получим:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} \ln(-x)\frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} \ln(-x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(-x)}{1+x^2}\bigg|_{-\infty}^{-1} - \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\ln(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{1+x^2} + \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)}\right).$$

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{1+x^2}$ возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которую мы раскроем по правилу Лопиталя (глава V, §4).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\ln(-x))'}{(1+x^2)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2} = 0.$$

---

[1] Сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ проверяется точно так же, как и сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$ мы найдем, преобразовав подынтегральную функцию:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)} = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} \left(\frac{2\,\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-1} \left(\mathrm{d}\ln x^2 - \mathrm{d}\ln\left(1+x^2\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Bigg|_{-\infty}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \lim_{x\to-\infty}\ln\frac{1}{1+1/x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\ln 2}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Если функция *непрерывна на всей числовой оси* R, то, по определению, несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

мы будем считать *сходящимся*, если сходятся оба интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ a \in \mathrm{R}. \tag{8}$$

В этом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

и мы можем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Наоборот, если *хотя бы один* из несобственных интегралов (8) является *расходящимся*, то *расходится* также и несобственный интеграл (7).

Пример 10. *Вычислить несобственный интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x.$$

Решение. Покажем, что интегралы

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x \text{ и } I_2 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x$$

сходятся и равны по величине. Действительно,

$$I_1 = -\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} (2x+1)2^{-2(x^2+x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 2^{-2(x^2+x)}\mathrm{d}\big(-2\left(x^2+x\right)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-2(x^2+x)}}{\ln 2}\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\ln 2}\left(\sqrt{2} - \lim_{x\to-\infty} 2^{-2(x^2+x)}\right) = \frac{1}{2\ln 2}\left(\sqrt{2}-0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\ln 2}.$$

Аналогично мы можем убедиться в том, что $I_2 = I_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} |2x+1|2^{-2x^2-2x}\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\ln 2} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 2}.$$

Замечание 3. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку мы можем обобщить также на случай *кусочно-непрерывной* на этом промежутке функции. Функция называется *кусочно-непрерывной на бесконечном промежутке*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке (§1), содержащемся в данном бесконечном промежутке. Все приведенные выше свойства и признаки сходимости несобственных интегралов автоматически переносятся также и на кусочно-непрерывные функции.

2. Несобственный интеграл неограниченной на конечном промежутке функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном промежутке $(a,\, b]$, $a < b$ и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty.$$

Ввиду непрерывности функции, для любого положительного числа ε, такого, что $a+\varepsilon \le b$ существует определенный интеграл

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

и мы можем дать следующее

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

то он называется несобственным интегралом функции $f(x)$ *на промежутке*[1] $(a,\, b]$ *и обозначается через*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Несобственный интеграл (2) *в этом случае называется сходящимся, иначе, т. е., если предел* (1) *не существует или равен бесконечности, – расходящимся.*

Как и несобственный интеграл по бесконечному промежутку, несобственный интеграл (2) мы можем вычислять по формуле Ньютона-Лейбница, если известна первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ на промежутке $(a,\, b]$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

[1]Иное название – *несобственный интеграл второго рода.*

Пример 1. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$$

в зависимости от параметра $\alpha \in \mathrm{R}$.

Решение. Подынтегральная функция при всех $\alpha \in \mathrm{R}$ непрерывна на промежутке $(a,\, b]$. Как и в примере 1 предыдущего пункта, прямым интегрированием мы можем убедиться в том, что при $\alpha < 1$ данный интеграл *сходится* и равен $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, а при всех остальных значениях α интеграл *расходится.*

Пример 2. *Доказать, что несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x$$

расходится.

Решение. В данном случае

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{-\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{2+\cos\frac{1}{x}} = \int\limits_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{\mathrm{d}\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)}{2+\cos\frac{1}{x}} = \ln\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\pi}} = -\lim_{x\to+0}\ln\left(2+\cos\frac{1}{x}\right).$$

Убедимся в том, что $\lim\limits_{x\to+0}\ln\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)$ не существует. Для этого рассмотрим две последовательности

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{(2n+1)\pi},\; x_n^{(2)} = \frac{1}{2n\pi}.$$

На этих последовательностях

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\cos\frac{1}{x_n^{(1)}}\right) = 0,\; \lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\cos\frac{1}{x_n^{(2)}}\right) = \ln 3,$$

что и означает, что данный предел не существует (глава IV, §4, пункт 2, свойство 3)). Таким образом, несобственный интеграл I расходится.

Для несобственного интеграла (2) справедливы с соответствующими изменениями, касающимися области определения подынтегральной функции, все *свойства и признаки сходимости*, сформулированные в предыдущем пункте для несобственного интеграла по бесконечному промежутку. Переформулируем, например, для несобственного интеграла (2)

Предельный признак сравнения. *Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *непрерывны и неотрицательны на промежутке* $(a,\, b]$ *и существует конечный, отличный от нуля предел*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Тогда несобственные интегралы

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. *Сходится или расходится несобственный интеграл*

$$\int\limits_1^2 \sqrt{x^3-1}\,\mathrm{ctg}^2\,\frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x\,?$$

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. Для этого сравним подынтегральную функцию с функцией вида $\frac{1}{(x-1)^\alpha}$. Действительно, при $x \to 1+0$

$$\sqrt{x^3-1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2+x+1} \sim \sqrt{3} \cdot \sqrt{x-1},$$
$$\operatorname{tg} \frac{x^2-1}{x} \sim \frac{x^2-1}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot (x-1) \sim 2(x-1).$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^3-1}\operatorname{ctg}^2 \frac{x^2-1}{x} \sim \sqrt{3} \cdot \sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{(2(x-1))^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

расходится (пример 1), а потому расходится и данный интеграл.

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

и в случае, когда функция $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a,\, b)$ *и неограничена в точке* b.

Пример 4. *Вычислить несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $(2,\, 4)$ и неограничена на концах этого интервала. Здесь

$$I = \int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3)\Big|_2^4 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\, b]$ *за исключением точки* $c \in (a,\, b)$, *в которой функция неограничена*, то, по определению несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

мы будем считать *сходящимся*, если *сходятся оба интеграла*

$$\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

причем в этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Наоборот, если хотя бы один из интегралов (3) *расходится*, то и данный несобственный интеграл следует считать *расходящимся.*

Пример 5. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$\int\limits_{-1}^5 \frac{e^{(x-4)^{-1}}}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Подынтегральная функция неограничена в точке $x = 4$. Рассмотрим два несобственных интеграла

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{4} \frac{e^{(x-4)^{-1}}}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x \text{ и } I_2 = \int\limits_{4}^{5} \frac{e^{(x-4)^{-1}}}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Для первого из них

$$I_1 = -\int\limits_{-1}^{4} e^{(x-4)^{-1}}\mathrm{d}(x-4)^{-1} = -\left.e^{(x-4)^{-1}}\right|_{-1}^{4} = -\lim_{x\to 4-0} e^{(x-4)^{-1}} + e^{-1/5} = 0 + e^{-1/5} = e^{-1/5},$$

т. е. интеграл I_1 сходится и равен $e^{-1/5}$. Аналогично,

$$I_2 = -\left.e^{(x-4)^{-1}}\right|_{4}^{5} = -e + \lim_{x\to 4+0} e^{(x-4)^{-1}} = +\infty$$

и, таким образом, интеграл I_2 расходится. Следовательно, и данный несобственный интеграл *расходится*.

Замечание. Несобственный интеграл неограниченной на конечном промежутке функции обобщается также и на случай *кусочно-непрерывной* функции. Функция называется *кусочно-непрерывной на промежутке, содержащем точку c, где данная функция неограничена*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке (§1), содержащемся в данном промежутке и не содержащем точку c.

В заключение этого параграфа рассмотрим несобственный интеграл, в котором *сочетаются две особенности*, изученные в пунктах 1 и 2. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $(a, +\infty)$ *и неограничена в точке* a. В этом случае, если *сходятся* оба интеграла

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ b > a, \tag{4}$$

то *сходится* также несобственный интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

и

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Если хотя бы один из интегралов (4) *расходится*, то *расходящимся* следует считать и несобственный интеграл (5).

В качестве примера такого интеграла рассмотрим очень важную в приложениях *гамма-функцию*, с которой мы еще встретимся в курсе *математической статистики*:

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Покажем, что гамма-функция определена при всех $x > 0$. Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \text{ и } I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Для первого из них

$$t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} \text{ при } t \to +0.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ сходится при всех $x > 0$ (пример 1 настоящего пункта), то по признаку сравнения интеграл I_1 также сходится при тех же значениях x. Для второго интеграла покажем, что при всех достаточно больших $t > 1$ выполняется неравенство

$$t^{x-1}e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим предел

$$L = \lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}.$$

Очевидно, что $L = 0$ при $x \leq 1$. При $x > 1$ перепишем данный предел в виде

$$L = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}}$$

и применив к нему достаточное число раз правило Лопиталя (глава V, §4), придем к пределу вида

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^a}{e^{t/2}},\ a \leq 0,$$

который, очевидно, равен нулю. Таким образом, $L = 0$ при всех действительных x. По определению предела (глава IV, §4, пункт 2) существует число $t_1 > 1$ такое, что при всех $t > t_1$ имеет место неравенство

$$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} < 1,$$

из которого после умножения обеих его частей на положительную функцию $e^{-\frac{t}{2}}$ мы и получим неравенство (6). Так как интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = -2\,e^{-\frac{t}{2}}\Big|_{t_1}^{+\infty} = -2\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t_1}{2}}\right) = -2\left(0 - e^{-\frac{t_1}{2}}\right) = 2e^{-\frac{t_1}{2}}$$

сходится, то ввиду неравенства (6) по признаку сравнения сходится также и интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

а тогда, по свойству 1) несобственных интегралов (пункт 1), сходящимся является несобственный интеграл I_2. Таким образом, при $x > 0$ сходятся оба интеграла I_1, I_2 и, значит, сходится интеграл $\Gamma(x)$.

Гамма-функция подробно *протабулирована*, она является *встроенной функцией* для всех программ *компьютерной математики.*

§5. Геометрические приложения определенного интеграла

Используем определение интеграла с помощью интегральных сумм для вычисления *длины кривой* на плоскости и в пространстве, *площади фигуры* на плоскости и *объема тела* в пространстве.

1. Вычисление длины линии на плоскости и в пространстве

Найдем различные формулы для вычисления длины кривой в зависимости от способа ее задания.

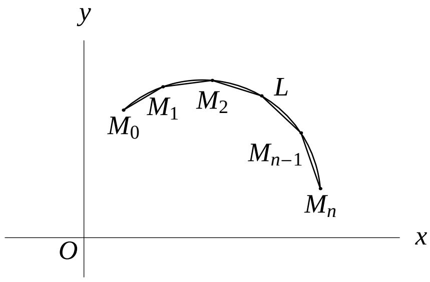
Предположим сначала, что линия L на плоскости задана *явным уравнением*

$$y = y(x),\ x \in [a,\, b],$$

причем функция $y = y(x)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,\, b]$, т. е. на этом отрезке функция непрерывна вместе со своей производной. Такая кривая называется *гладкой.* Разбиению

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

отрезка $[a,\, b]$ на малые части соответствуют точки $M_k(x_k,\, y_k)$, $y_k = y(x_k)$, $k = \overline{0,\, n}$ на кривой.



Тогда сумма

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k|$$

равна *длине ломаной*, вписанной в линию L, а ее предел при условии, что длины всех звеньев ломаной стремятся к нулю, естественно считать *длиной линии* L, т. е.

$$l = \lim_{\Delta\nu \to 0} L_n,$$

где $\Delta\nu = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |M_{k-1}M_k|$. Так как для всех $k = \overline{1,n}$

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2},$$

то, записав приращение Δy_k функции $y(x)$ на отрезке $[x_{k-1},\, x_k]$ с помощью теоремы Лагранжа (глава V, §3) в виде $\Delta y_k = y'(c_k)\Delta x_k$, $c_k \in (x_{k-1},\, x_k)$, получим:

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + (y'(c_k))^2 \Delta x_k^2} = \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\, \Delta x_k.$$

Следовательно, выражение

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\, \Delta x_k$$

представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ на отрезке $[a,\, b]$ и, стало быть, ввиду непрерывности этой функции существует предел

$$\lim_{\Delta\mu \to 0} L_n = \lim_{\Delta\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\, \Delta x_k = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x,\ \Delta\mu = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k$$

(формула (3), §2). Таким образом, *длина* данной гладкой линии вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Замечание 1. Если гладкая кривая задана зависимостью

$$x = x(y),\ y \in [c,\, d],$$

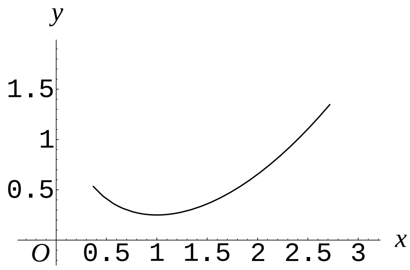
то ее длина может быть найдена по формуле

$$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2}\, \mathrm{d}y.$$

Пример 1. *Вычислить длину линии*

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ \frac{1}{e} \le x \le e.$$

Решение.



Воспользуемся формулой (1). Так как

$$y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x},$$

то

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

и, следовательно,

$$l = \int\limits_{1/e}^{e} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_{1/e}^{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{e^{-2}}{2} + 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2.$$

Если *гладкая линия на плоскости* задана *параметрическими уравнениями*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1,\, t_2],$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[t_1,\, t_2]$, то после рассуждений, подобных приведенным выше, мы придем к следующей формуле для вычисления длины этой кривой:

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Аналогично, для *гладкой кривой в пространстве* с параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_1,\, t_2],$$

справедлива формула

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Последнюю формулу мы можем записать и в более *компактной форме*, если рассматривать данную кривую как траекторию векторной функции

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k},\ t \in [t_1,\, t_2]$$

(глава V, §7). Так как

$$\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{\imath} + y'(t)\bar{\jmath} + z'(t)\bar{k},$$

то

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

и, следовательно,

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\bar{r}'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Пример 2. *Найти длину линии*

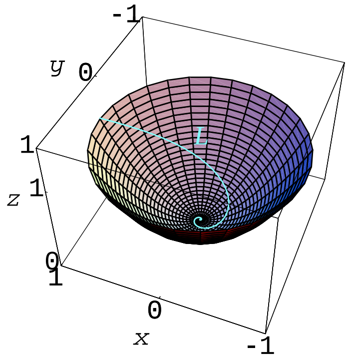
$$L:\ x = e^{t/2}\cos t,\ y = e^{t/2}\sin t,\ z = e^t$$

между точками $O(0,0,0)$ *и* $A(1,0,1)$.

Решение. Так как координаты точек этой линии удовлетворяют уравнению параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ (глава III, §5, пункт 3), а на плоскости Oxy линия

$$x = e^{t/2}\cos t,\ y = e^{t/2}\sin t$$

представляет собой спираль вокруг начала координат, то данная линия L представляет собой спираль на параболоиде.



Используем формулу (3). Поскольку

$$x' = \frac{1}{2}e^{t/2}\cos t - e^{t/2}\sin t,\ y' = \frac{1}{2}e^{t/2}\sin t + e^{t/2}\cos t,\ z' = e^t,$$

то

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = e^t\left(\frac{1}{4}\cos^2 t - \sin t\cos t + \sin^2 t\right) +$$
$$+e^t\left(\frac{1}{4}\sin^2 t + \sin t\cos t + \cos^2 t\right) + e^{2t} = \frac{5}{4}e^t + e^{2t}.$$

В начало координат O кривая L входит при $t \to -\infty$, так как

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = 0,$$

а точке A соответствует значение $t = 0$. Следовательно,

$$l = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{\frac{5}{4}e^t + e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t/2}\sqrt{\frac{5}{4} + e^t}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{\frac{5}{4} + e^t}\,\mathrm{d}e^{t/2}.$$

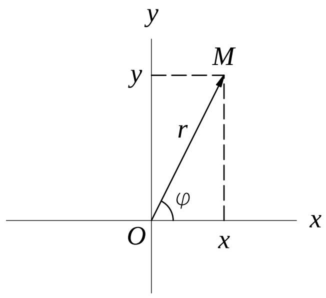
Выполнив в этом несобственном интеграле подстановку $s = e^{t/2}$, придем к интегралу

$$l = 2\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{5}{4} + s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Неопределенный интеграл такого вида найден интегрированием по частям в главе VI, §2, пункт 2. Воспользовавшись приведенной там формулой (1) при $a = 5/4$, получим:

$$l = \left(s\sqrt{\frac{5}{4} + s^2} + \frac{5}{4}\ln\left(s + \sqrt{\frac{5}{4} + s^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{8}\ln 5.$$

Найдем еще одну формулу для вычисления длины кривой, которая задана *в полярной системе координат.* Свяжем с декартовой системой координат Oxy полярную систему координат $Or\varphi$, взяв в качестве *полюса* начало координат O, а в качестве *полярной оси* – положительную полуось Ox.



Тогда *полярные координаты* точки $M(x, y)$ на плоскости представляют собой пару чисел (r, φ), где r – расстояние от полюса до точки M, а φ – угол, который образует радиус-вектор $\overline{OM}$ с полярной осью. Отождествляя точку $M(x, y)$ с комплексным числом $z = x + yi$, мы можем сказать, сославшись на §8 главы V, что *полярные координаты* r, φ точки M представляют собой *модуль и аргумент*, соответственно, комплексного числа z. Очевидно, значение угла φ определяется с точностью до кратного 2π. Для определенности мы будем отсчитывать его в пределах *полного угла*, например, от 0 до 2π.

Предположим теперь, что гладкая линия L на плоскости задана в полярной системе координат зависимостью расстояния r от угла φ, т. е. уравнением

$$r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha,\ \beta],$$

где $r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ функция. Поскольку, как следует из приведенного выше чертежа, декартовы координаты связаны с полярными формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

то уравнения

$$x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in [\alpha,\ \beta]$$

мы можем рассматривать как параметрические (относительно параметра φ) уравнения кривой L. Так как

$$x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,\ y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi;\ (x')^2 + (y')^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2,$$

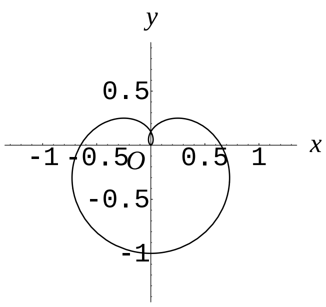
то, воспользовавшись формулой (2), получим:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi. \tag{4}$$

Пример 3. *Вычислить длину кривой, заданной уравнением*

$$r = \sin^3\frac{\varphi}{3}.$$

Решение. При изменении угла φ в пределах от 0 до 3π мы получим следующую замкнутую кривую:



Здесь

$$r' = \left(\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)' = 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$$

и

$$(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 = \sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3} = \sin^4\frac{\varphi}{3}.$$

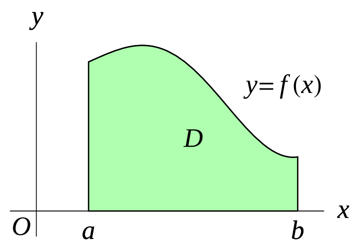
Тогда по формуле (4)

$$l = \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} \left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

Замечание 2. Формулы (1) – (4) справедливы и для *кусочно-гладких линий*, т. е. линий, для которых, функции, входящие в их определение непрерывны, а их производные кусочно-непрерывны (§1).

2. Вычисление площади фигуры на плоскости

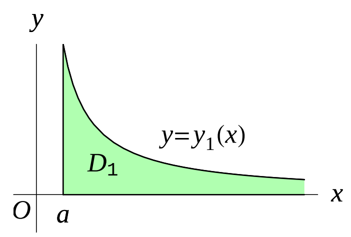
Предположим сначала, что фигура D на плоскости ограничена графиком *непрерывной и положительной* на отрезке $[a,\, b]$ функции $y(x)$ и осью Ox.

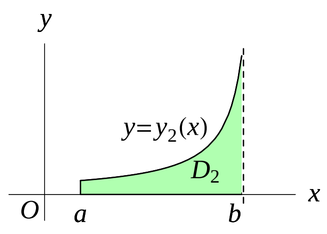


В §1 главы VI мы показали, что в этом случае площадь $S(x)$, $x \in [a,\, b]$ фигуры, ограниченной графиком данной функции на отрезке $[a,\, x]$ и осью Ox является первообразной функции $y(x)$ на отрезке $[a,\, b]$. Следовательно, площадь S фигуры D равна $S = S(b) - S(a)$ и, таким образом, по определению интеграла

$$S = \int_a^b y(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Замечание 1. Формула (1) позволяет также дать *геометрическую иллюстрацию* и несобственным интегралам. Если функция неотрицательна, то *сходящийся несобственный интеграл* этой функции *равен площади неограниченной фигуры на плоскости*, заключенной между графиком функции на промежутке определения и осью Ox.





Здесь фигура D_1 ограничена графиком функции $y_1(x)$ на полуоси $[a, +\infty)$ и, следовательно, ее площадь равна

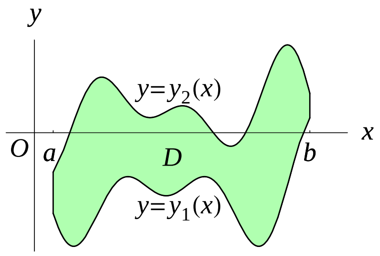
$$S_1 = \int_a^{+\infty} y_1(x)\mathrm{d}x.$$

Аналогично, фигура D_2 находится под графиком функции $y_2(x)$ на конечном промежутке $[a, b)$, причем в точке b эта функция неограничена. Площадь фигуры D_2 выражается несобственным интегралом

$$S_2 = \int_a^b y_2(x)\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим теперь случай, когда фигура D ограничена на отрезке $[a,\, b]$ графиками *двух непрерывных* функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, т. е.

$$D:\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ x \in [a,\, b].$$



Если $y_1(x) \geq 0$, $x \in [a,\, b]$, то площадь фигуры D мы можем вычислить как разность площадей фигур, ограниченных графиками данных функций и осью Ox. Следовательно, воспользовавшись формулой (1), получим:

$$S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\mathrm{d}x. \tag{2}$$

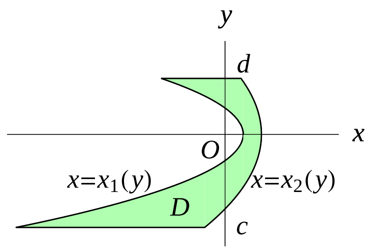
Если же функция $y_1(x)$ меняет знак на отрезке $[a,\, b]$, то, осуществив параллельный перенос фигуры D вдоль оси Oy на величину m, равную минимуму функции $y_1(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ (этот минимум по теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) существует), мы получим фигуру D_1, ограниченную графиками функций $y_1(x)-m$ и $y_2(x)-m$ на отрезке $[a,\, b]$, площадь которой равна площади фигуры D. Поскольку $y_1(x) - m \geq 0$ на отрезке $[a,\, b]$, то по формуле (2)

$$S = \int\limits_a^b ((y_2(x) - m) - (y_1(x) - m))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\mathrm{d}x$$

и, таким образом, формула (2) имеет место и в этом случае.

Замечание 2. Аналогично, если фигура ограничена графиками двух непрерывных функций $x_1(y)$ и $x_2(y)$, $y \in [c,\, d]$, то ее площадь вычисляется по формуле

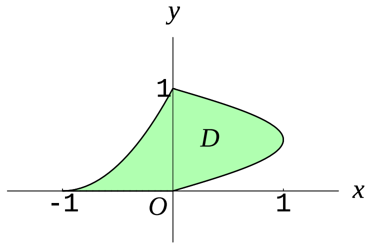
$$S = \int\limits_c^d (x_2(y) - x_1(y))\mathrm{d}y. \tag{3}$$



Пример 1. *Найти площадь фигуры D на плоскости, которая ограничена линиями*

$$y = (x+1)^2,\ x = \sin \pi y,\ y = 0.$$

Решение.



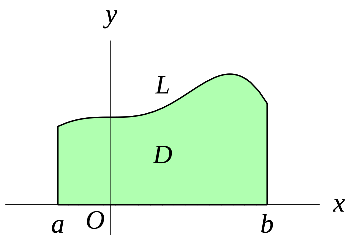
Фигура D заключена между графиками функций

$$x = \sqrt{y} - 1,\ x = \sin \pi y$$

на отрезке [0, 1] числовой оси Oy. Следовательно, по формуле (3)

$$S = \int_0^1 (\sin \pi y - \sqrt{y} + 1)\mathrm{d}y = -\frac{1}{\pi}\cos \pi y\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\, y\sqrt{y}\Big|_0^1 + y\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi}(-1-1) - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

Предположим теперь, что фигура D на плоскости Oxy ограничена кривой L, располагающейся выше оси Ox и отрезком $[a,\, b]$ этой оси.



Пусть кривая L задана *параметрическими* уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1,\, t_2],$$

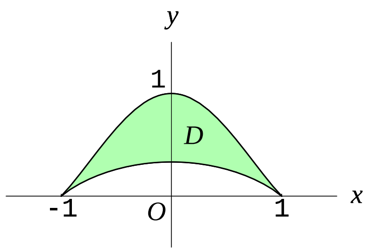
причем функцию $x(t)$ мы будем считать непрерывно дифференцируемой с положительной производной, а функцию $y(t)$ – непрерывной и положительной на всем отрезке $[t_1,\, t_2]$. В этом случае кривую L мы можем рассматривать как график непрерывной параметрически заданной функции $y = y(x)$, $x \in [a,\, b]$ (глава V, §2, пункт 2) и, следовательно, площадь фигуры D мы можем вычислить по формуле (1). При сделанных относительно функций $x(t)$, $y(t)$ предположениях, в интеграле (1) допустима замена переменной $x = x(t)$, выполнив которую, мы, очевидно, получим следующую формулу для вычисления площади фигуры D :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\mathrm{d}x(t) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Пример 2. *Найти площадь фигуры на плоскости, ограниченной замкнутой линией, имеющей параметрические уравнения*

$$x = \cos t,\ y = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t}.$$

Решение.



При изменении параметра t в пределах от 0 до π точка перемещается по нижней дуге кривой в направлении от точки $(1, 0)$ до точки $(-1, 0)$, если же параметр изменяется в пределах от π до 2π, то точка идет в обратном направлении по верхней дуге. Искомую площадь S мы найдем, воспользовавшись формулой (4), как разность площадей S_1 и S_2 двух фигур, ограниченных верхней и нижней дугами данной кривой, соответственно, и отрезком $[-1,1]$ оси Ox.

$$S_1=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}\cos t=-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}t=-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{(8+\sin^3 t)-8}{2+\sin t}\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(4-2\sin t+\sin^2 t-\frac{8}{2+\sin t}\right)\mathrm{d}t=-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{9}{2}-2\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{8}{2+\sin t}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{9}{2}t\Big|_{\pi}^{2\pi}-2\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\pi}^{2\pi}+8\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}=-\frac{9}{2}\pi-4+8\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся подстановкой $z=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ (глава VI, §4, пункт 2). При этой замене переменной промежуток $(\pi,\,2\pi]$ отображается в бесконечный промежуток $(-\infty,\,0]$. Следовательно,

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2}}{2+\frac{2z}{1+z^2}}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}(z+1/2)}{(z+1/2)^2+\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{0}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\lim_{z\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$S_1=-\frac{9}{2}\pi-4+\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Аналогично мы вычислим и площадь[1] S_2 :

$$S_2=\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\sin^2 t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}\cos t=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}t=\frac{9}{2}t\Big|_{0}^{\pi}+2\cos t\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{0}^{\pi}-8\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}=$$

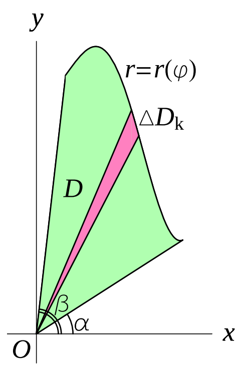
$$=\frac{9}{2}\pi-4-\frac{16}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{9}{2}\pi-4-\frac{16}{\sqrt{3}}\left(\lim_{z\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{9}{2}\pi-4-\frac{16}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9}{2}\pi-4-\frac{16\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Окончательно,

$$S=S_1-S_2=\left(\frac{16\pi}{\sqrt{3}}-9\right)\pi.$$

В заключение этого пункта вычислим *площадь сектора* D, ограниченного в полярной системе координат лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\alpha<\beta$ и линией с уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\,\beta]$, где $r(\varphi)$ – непрерывная на отрезке $[\alpha,\,\beta]$ функция.



[1] Здесь мы пределы интегрирования берем в обратном порядке, так как функция $x=\cos t$ убывает на отрезке $[0,\,\pi]$.

Воспользуемся *методом интегральных сумм.* Для этого разобьем сектор D на n малых секторов ΔD_k, $k = \overline{1,\, n}$ лучами $\varphi = \varphi_k$, $k = \overline{1,\, n-1}$, где

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Обозначим через $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = \overline{1,\, n}$ – центральные углы этих секторов. Внутри каждого сектора ΔD_k, $k = \overline{1,\, n}$ выберем произвольный луч $\varphi = \psi_k$. Площади секторов ΔD_k, $k = \overline{1,\, n}$ ввиду их малости мало отличаются от площадей соответствующих круговых секторов с центральными углами $\Delta\varphi_k$ и радиусами $r(\psi_k)$, т. е. величин

$$\frac{1}{2}(r(\psi_k))^2\Delta\varphi_k.$$

Тогда сумма

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(r(\psi_k))^2\Delta\varphi_k$$

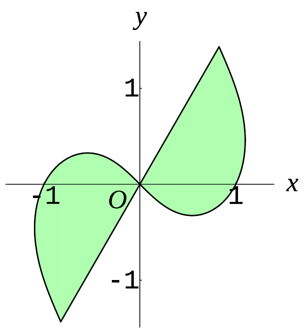
мало отличается от площади данного сектора D. Сумма S_n является *интегральной* для функции $\frac{1}{2}(r(\varphi))^2$ на отрезке $[\alpha,\, \beta]$. Предел интегральных сумм S_n при условии, что величины всех центральных углов секторов ΔD_k, $k = \overline{1,\, n}$ стремятся к нулю, мы и будем считать *площадью сектора* D. Этот предел, благодаря непрерывности функции $r(\varphi)$, существует и равен

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(r(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

Пример 3. *Вычислить площадь фигуры, которая ограничена линиями*

$$y = \sqrt{3}x \text{ и } x(x^2 + y^2) = x + y.$$

Решение. Первая из этих линий – прямая, проходящая через начало координат под углом $\frac{\pi}{3}$ к оси Ox. Вторая линия симметрична относительно начала координат и в полярной системе координат имеет уравнение $r^2 = 1 + \operatorname{tg}\varphi$. При изменении угла φ в пределах от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$ расстояние r, монотонно возрастая, изменяется в пределах от 0 до $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

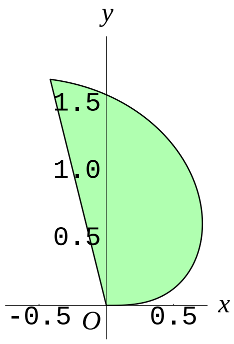


По формуле (5)

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\operatorname{tg}\varphi)\mathrm{d}\varphi = \varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \ln\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7\pi}{12} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 4. *Найти площадь сектора, ограниченного линией с уравнением* $\varphi = r\operatorname{arctg} r$ *и лучами* $\varphi = 0$ *и* $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Решение. Зависимость угла φ от расстояния r является непрерывно дифференцируемой, возрастающей функцией, причем при $\varphi = 0$ также и $r = 0$, а значению угла $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ соответствует расстояние $r = \sqrt{3}$.



Используем здесь также формулу (5), выполнив в интеграле подстановку $\varphi = r \operatorname{arctg} r$ и дважды применив метод интегрирования по частям:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \mathrm{d}(r \operatorname{arctg} r) = \frac{1}{2}\left(r^3 \operatorname{arctg} r \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} r \operatorname{arctg} r \, \mathrm{d}r^2 \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \operatorname{arctg} r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} r \, \mathrm{d}r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{1}{3}\left(r^3 \operatorname{arctg} r \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \mathrm{d} \operatorname{arctg} r \right) =$$

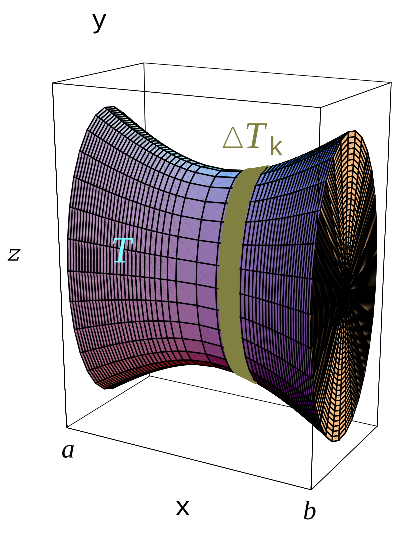
$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}\, \mathrm{d}r \right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(r^3+r)-r}{1+r^2}\, \mathrm{d}r \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(r - \frac{r}{1+r^2} \right) \mathrm{d}r \right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + r^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}\left(1+r^2\right)}{1+r^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + 3 - \ln\left(1+r^2\right) \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}\pi + 3 - 2\ln 2 \right).$$

3. Вычисление объема тела в пространстве

Предположим, что нам известна непрерывно изменяющаяся площадь сечения ограниченного тела T в пространстве плоскостями, перпендикулярными некоторой фиксированной прямой. Выбрав для определенности эту прямую в качестве координатной оси Ox, обозначим через $S(x)$ площадь сечения тела T плоскостью, проходящей через точку $x \in [a, b]$ оси Ox, перпендикулярно этой оси.



Возьмем произвольное мелкое разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

отрезка $[a,\, b]$ на частичные отрезки. Плоскости $x = x_k$, $k = \overline{1,\, n-1}$ разбивают тело T на тонкие слои ΔT_k, $k = \overline{1,\, n}$. Объем каждого слоя ΔT_k, $k = \overline{1,\, n}$ приближенно равен объему $S(c_k)\Delta x_k$ прямого цилиндра с площадью основания $S(c_k)$, где c_k – некоторая точка частичного отрезка $[x_{k-1},\, x_k]$, и высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, равной толщине слоя ΔT_k. Тогда сумма

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k$$

служит приближенным выражением для объема V тела T. Полагая по определению, что

$$V = \lim_{\Delta\mu\to 0} V_n = \lim_{\Delta\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k,\ \ \Delta\mu = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k$$

и замечая, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k$ является интегральной для функции $S(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, мы, сославшись на формулу (3) из §2, получим:

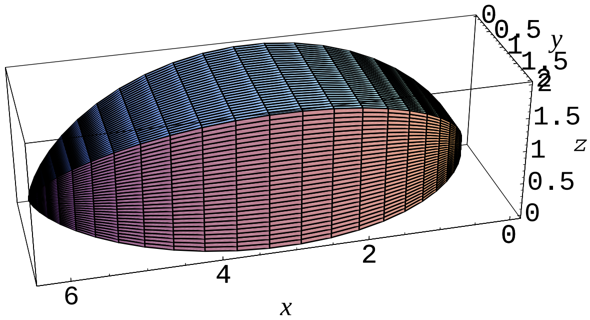
$$V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Пример 1. *Найти объем тела в пространстве, основанием которого является фигура на плоскости Oxy, ограниченная аркой циклоиды*

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0,\, 2\pi]$$

и осью Ox, а сечением этого тела в любой его точке плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является квадрат.

Решение. Циклоида представляет собой арочную линию на плоскости, которая является траекторией точки касания окружности единичного радиуса, совпадающей с началом координат, при качении без скольжения этой окружности вдоль оси Ox.



Для первой арки циклоиды ее уравнения определяют параметрически заданную функцию $y = y(x)$, $x \in [0,\, 2\pi]$. Площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, равна

$$S(x) = (y(x))^2,\ x \in [0,\, 2\pi].$$

Тогда по формуле (1)

$$V = \int\limits_0^{2\pi} (y(x))^2 \mathrm{d}x,$$

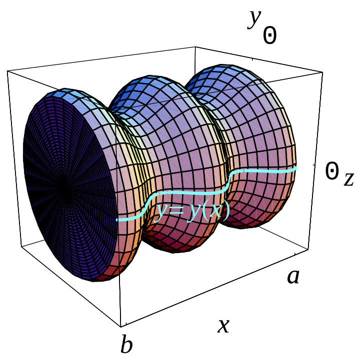
или после замены переменной $x = t - \sin t$, $\mathrm{d}x = (1 - \cos t)\mathrm{d}t$,

$$V = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\mathrm{d}t =$$

$$= t\Big|_0^{2\pi} - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}(1 - \sin^2 t)\mathrm{d}\sin t =$$

$$= 2\pi + \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 3\pi = 5\pi.$$

Найдем теперь объем тела, полученного *вращением фигуры на плоскости* Oxy, ограниченной графиком непрерывной на отрезке $[a,\, b]$ функции $y(x)$ и осью Ox, вокруг этой оси.

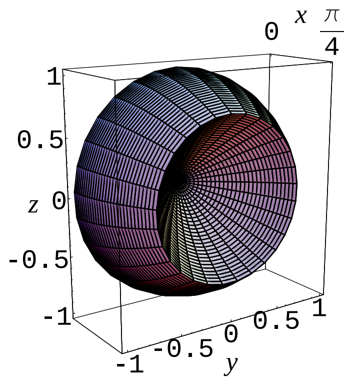


Здесь, очевидно, сечениями данного тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox, являются круги и, следовательно, площади этих сечений равны $S(x) = \pi(y(x))^2$, $x \in [a,\, b]$. Осталось воспользоваться формулой (1):

$$V_x = \pi \int_a^b (y(x))^2 \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Пример 2. *Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ *вокруг оси* Ox.

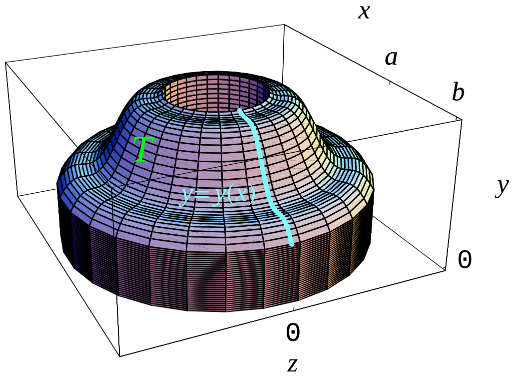
Решение.



Искомый объем мы вычислим как разность объемов двух тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных графиками функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, соответственно, на отрезке $\left[0,\, \frac{\pi}{4}\right]$. Воспользовавшись формулой (2), получим:

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, \mathrm{d}x - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть теперь фигура D на плоскости Oxy, ограниченная графиком непрерывной на отрезке $[a,\, b]$, $0 \le a < b$ функции $y(x)$ и осью Ox, вращается вокруг оси Oy. Вычислим объем полученного *тела вращения* T.



Разобьем отрезок $[a,\, b]$ на мелкие части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Прямые $x = x_k$, $k = \overline{1,\, n-1}$ разбивают фигуру D на узкие полосы, которые при вращении фигуры вокруг оси Oy образуют цилиндрические слои ΔT_k, $k = \overline{1,\, n}$. Объем слоя ΔT_k, $k = \overline{1,\, n}$ приближенно равен $2\pi c_k |y(c_k)| \Delta x_k$, где $c_k \in [x_{k-1},\, x_k]$, Δx_k – толщина слоя ΔT_k. Тогда

$$V_y \approx V_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} c_k |y(c_k)| \Delta x_k$$

и по определению

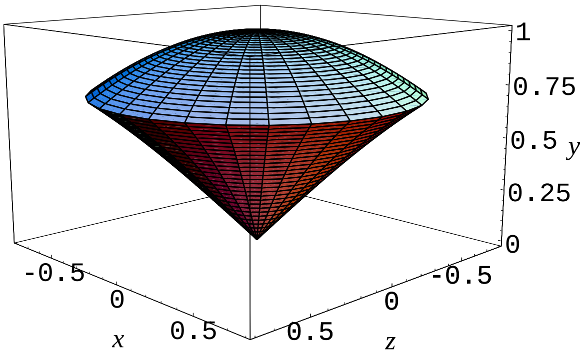
$$V_y = \lim_{\Delta\mu \to 0} V_n = 2\pi \lim_{\Delta\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k |y(c_k)| \Delta x_k, \;\; \Delta\mu = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k.$$

Поскольку сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k |y(c_k)| \Delta x_k$ является интегральной для функции $x|y(x)|$ на отрезке $[a,\, b]$, то

$$V_y = 2\pi \int\limits_a^b x|y(x)| \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Пример 3. *Предположим, что фигура из примера 2 вращается вокруг оси Oy. Вычислить объем тела вращения.*

Решение.



Этот объем мы также найдем как разность объемов двух тел вращения. По формуле (3)

$$V_y = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \, \mathrm{d}x - 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, \mathrm{d}x = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \sin x) \mathrm{d}x.$$

Применив метод интегрирования по частям, получим:

$$V_y = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}(\sin x + \cos x) = 2\pi \left(x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - (\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}\pi - 4\right).$$

§6. Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a,\,b]$. Точное значение определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

дает нам формула Ньютона-Лейбница (§1, формула (1)). Однако воспользоваться этой формулой не всегда представляется возможным, поскольку известно, что даже для сравнительно простой элементарной функции ее первообразная может быть чрезвычайно громоздкой или вообще оказаться специальной функцией. В этом случае мы можем попытаться найти *приближенное значение* этого интеграла. Рассмотрим три простейших метода приближенного вычисления определенного интеграла (1).

1) ***Метод прямоугольников.***

Воспользуемся определением интеграла с помощью интегральных сумм (§2). Разобьем отрезок $[a,\,b]$ на n частичных отрезков равной длины $h = \frac{b-a}{n}$ (шаг разбиения) и обозначим через

$$c_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h,\ k = \overline{1,\,n}$$

середины частичных отрезков. Тогда интегральная сумма

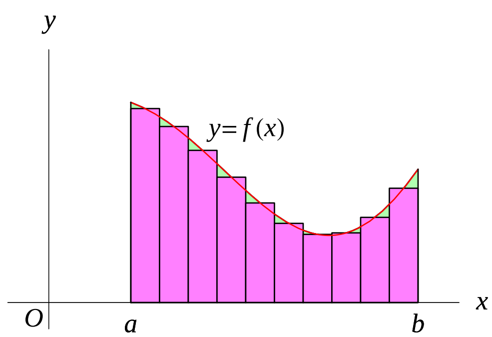
$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h = h\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

служит приближенным значением определенного интеграла (1), т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_n = h\sum_{k=1}^{n} f(c_k). \tag{2}$$

Приближенное равенство (2) представляет собой *формулу прямоугольников* для вычисления определенного интеграла.

Геометрически формула (2) выражает тот факт, что *площадь фигуры* на плоскости, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ и осью Ox мы можем приближенно заменить *площадью ступенчатой фигуры*, составленной из прямоугольников, в основаниях которых расположены частичные отрезки $[x_{k-1},\,x_k]$, $k = \overline{1,\,n}$, где $x_k = a + kh$, $k = \overline{0,\,n}$, а высотами являются значения функции в точках c_k, $k = \overline{1,\,n}$.



Остановимся коротко на величине *погрешности*, которую мы допускаем, пользуясь формулой прямоугольников. Предположим, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\, b]$. Тогда погрешность

$$R_n = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_n$$

формулы (2) равна

$$R_n = \frac{b-a}{24} f''(c)h^2,\ c \in [a,\, b].$$

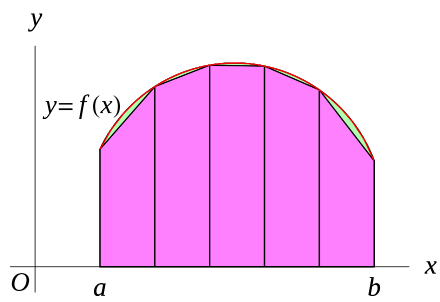
Несложное, однако достаточно длинное доказательство этого факта мы приводить не будем. Таким образом, по абсолютной величине погрешность R_n удовлетворяет неравенству

$$|R_n| \le \frac{M(b-a)}{24}\, h^2,$$

где $M = \sup\limits_{[a,\, b]} f''(x)$ (такое число по теореме Вейерштрасса (глава IV, §5, пункт 3) существует). Следовательно, максимальная погрешность формулы прямоугольников имеет *второй порядок малости* относительно шага h. В этом случае будем говорить, что данный метод имеет *второй порядок точности*.

2) *Метод трапеций.*

Предположим сначала, что функция $f(x)$ *непрерывна и неотрицательна* на отрезке $[a,\, b]$. Как и в методе прямоугольников, разобьем отрезок интегрирования $[a,\, b]$ на n равных частей точками $x_k = a + kh$, $k = \overline{0,\, n}$, где $h = \frac{b-a}{n}$ – шаг разбиения. Соединив последовательно точки $(x_k,\, f(x_k))$, $k = \overline{0,\, n}$ отрезками прямых, мы получим ломаную, вписанную в график данной функции.



Тогда площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ и осью Ox, приближенно равна площади I_n фигуры, ограниченной указанной выше ломаной и осью Ox (эта фигура состоит из трапеций, боковыми сторонами которых являются отрезки разбиения и звенья ломаной). Поскольку площадь каждой такой трапеции, соответствующей отрезку разбиения $[x_{k-1},\, x_k]$, $k = \overline{1,\, n}$ равна $\frac{1}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))h$, то

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) h = h\left(\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right).$$

Таким образом, мы получили следующую *формулу трапеций* для приближенного вычисления определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_n = h\left(\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right). \qquad (3)$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,\, b]$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = f(x) - m \ge 0,\ x \in [a,\, b],$$

где $m = \inf\limits_{[a,\, b]} f(x)$. Для неотрицательной функции $f_1(x)$ справедлива формула (3):

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{1}{2}(f_1(a)+f_1(b))+\sum_{k=1}^{n-1} f_1(x_k)\right),$$

из которой, учитывая, что

$$\int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - m(b-a),$$

$$h\left(\frac{1}{2}(f_1(a)+f_1(b))+\sum_{k=1}^{n-1} f_1(x_k)\right) = h\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) - mn\right) =$$
$$= h\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) - m(b-a),$$

следует формула (3) для данной функции $f(x)$. Стало быть, формула трапеций (3) имеет место для любой непрерывной функции.

Погрешность

$$R_n = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_n$$

этой формулы в предположении, что данная функция дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\, b]$, равна

$$R_n = -\frac{b-a}{12} f''(c)h^2,\ c \in [a,\, b],$$

откуда

$$|R_n| \leq \frac{M(b-a)}{12}\, h^2,\ M = \sup_{[a,\, b]} f''(x)$$

и, следовательно, метод трапеций, как и метод прямоугольников, имеет *второй порядок точности*.

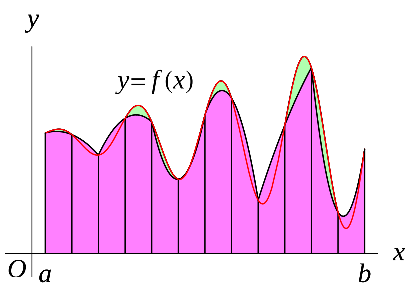
3) *Метод парабол (Симпсона)*.

Как и в методе трапеций предположим сначала, что функция $f(x)$ *непрерывна и неотрицательна* на отрезке $[a,\, b]$. Разобьем отрезок $[a,\, b]$ на четное $2n$ число равных частей. Пусть $x_k = a + kh$, $k = \overline{0,\, 2n}$, $h = \frac{b-a}{2n}$ – шаг разбиения. На каждой паре

$$[x_{2k-2},\, x_{2k-1}] \cup [x_{2k-1},\, x_{2k}],\ k = \overline{1,\, n}$$

смежных отрезков разбиения заменим график функции параболой, проходящей через точки

$$(x_{2k-2},\, f(x_{2k-2}))\,,\ (x_{2k-1},\, f(x_{2k-1})),\ (x_{2k},\, f(x_{2k})).$$



Уравнение каждой такой параболы нам удобно записать в виде:

$$y = \frac{(x - x_{2k-1})(x - x_{2k})}{(x_{2k-2} - x_{2k-1})(x_{2k-2} - x_{2k})} f(x_{2k-2}) +$$
$$+ \frac{(x - x_{2k-2})(x - x_{2k})}{(x_{2k-1} - x_{2k-2})(x_{2k-1} - x_{2k})} f(x_{2k-1}) + \frac{(x - x_{2k-2})(x - x_{2k-1})}{(x_{2k} - x_{2k-2})(x_{2k} - x_{2k-1})} f(x_{2k}).$$

Несложным интегрированием этой функции мы можем убедиться в том, что площадь, ограниченная данной параболой на отрезке $[x_{2k-2},\, x_{2k}]$ и осью Ox равна

$$\frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right).$$

Воспользовавшись последней формулой, сложим площади под всеми n параболами на соответствующих отрезках. В результате получим приближенное значение I_{2n} для площади S под графиком данной функции на отрезке $[a,\, b]$, т. е. приближенное значение определенного интеграла (1):

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) =$$
$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right).$$

Таким образом мы получили *формулу парабол* (*Симпсона*) для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{2n} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right). \tag{4}$$

Как и для формулы трапеций мы можем убедиться в том, что формула парабол (4) имеет место для любой *непрерывной* на отрезке $[a,\, b]$ функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\, b]$, то для погрешности формулы парабол (4) справедливо представление

$$R_{2n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{2n} = -\frac{b-a}{180} f^{\mathrm{IV}}(c)h^4,\ c \in [a,\, b].$$

Следовательно,

$$|R_{2n}| \le \frac{M(b-a)}{180}\, h^4,\ M = \sup_{[a,\, b]} f^{\mathrm{IV}}(x)$$

и, таким образом, метод парабол имеет *четвертый порядок точности.*

Замечание. Если требуется вычислить определенный интеграл (1) с *заданной точностью* $\varepsilon > 0$, то при использовании приведенных выше методов шаг разбиения h или, что равносильно, число n отрезков разбиения мы можем найти из условия

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Единственная сложность, которая может здесь возникнуть, связана с оценкой абсолютной величины производной, которая входит в выражение для погрешности R_n. Эта производная может иметь довольно громоздкий вид, что делает оценку точности метода весьма затруднительной. На практике для оценки точности вычисления определенного интеграла часто используется *правило Рунге*, которое не требует прямой оценки погрешности. Это правило заключается в следующем: требуемая точность ε считается достигнутой, если для разбиения отрезка интегрирования на n и $2n$ частей выполняется неравенство

$$\frac{|I_n - I_{2n}|}{2^s - 1} < \varepsilon, \tag{5}$$

где s – порядок точности метода. В этом случае за приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью ε следует взять величину I_{2n}, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{2n}.$$

Пример. *Вычислить с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$ *определенный интеграл*

$$I = \int\limits_1^5 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Проведем вычисление интеграла каждым из рассмотренных методов[1], использовав для оценки погрешности правило Рунге (5).

По формуле прямоугольников (2)

$$I_{40} = 1,53128;\ I_{80} = 1,53143;\ \frac{|I_{40} - I_{80}|}{3} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$I \approx 1,53143.$$

Аналогично, по формуле трапеций (3)

$$I_{80} = 1,53159;\ I_{160} = 1,53151;\ \frac{|I_{80} - I_{160}|}{3} < \varepsilon,$$

поэтому

$$I \approx 1,53151.$$

Применив, наконец, формулу парабол (4), получим:

$$I_{10} = 1,53139;\ I_{20} = 1,53147;\ \frac{|I_{10} - I_{20}|}{15} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$I \approx 1,53147.$$

Как и следовало ожидать, формула парабол оказалась наиболее эффективной при вычислении этого интеграла.

[1]Все вычисления проведены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

ГЛАВА VIII. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В математике и ее приложениях наряду с функциями одной переменной часто встречаются также зависимости от двух и большего числа переменных. В этой главе мы по аналогии с функцией одной переменной введем понятие *функции многих действительных переменных* и рассмотрим основы *теории предела и дифференцирования* такого рода функций. Во избежание громоздкости изложения мы, в основном, будем вести рассуждения для функции двух переменных. Все приведенные ниже определения и утверждения с очевидными изменениями имеют место также и для функций большего числа переменных.

§1. Функция двух переменных, ее предел и непрерывность

Выберем на плоскости декартову систему координат Oxy. Пусть D – некоторое множество точек данной плоскости.

Определение 1. *Алгоритм, по которому каждой точке $M(x, y)$ множества D ставится в соответствие определенное действительное число, называется функцией двух переменных с областью определения D.*

Обозначения для функции двух переменных: $f(M)$ или $f(x, y)$ или $z = f(x, y)$.

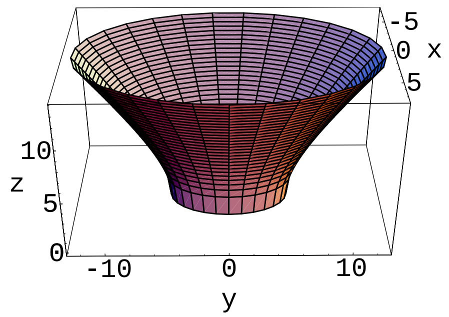
Функция двух переменных допускает *геометрическую иллюстрацию*, поскольку ее графиком является поверхность в пространстве с уравнением $z = f(x, y)$. Например, графиком функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

является половина однополостного гиперболоида вращения

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

расположенная выше плоскости Oxy.



Введем определения некоторых множеств на плоскости, которые нам понадобятся в дальнейшем.

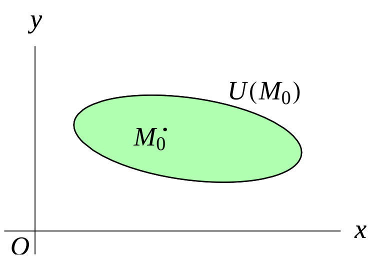
Назовем *ε-окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$ множество $U(\varepsilon, M_0)$ внутренних точек круга радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0, т. е.

$$U(\varepsilon, M_0) = \left\{(x, y) \,|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\right\}.$$

Выбросив из ε-окрестности $U(\varepsilon, M_0)$ точку M_0, получим *проколотую ε-окрестность* точки $M_0(x_0, y_0)$, которую мы обозначим через $\dot{U}(\varepsilon, M_0)$.

Множество на плоскости называется *открытым*, если каждая его точка является *внутренней*, т. е. она обладает некоторой ε-окрестностью, принадлежащей этому множеству.

Окрестностью $U(M_0)$ точки M_0 называется открытое множество, содержащее точку M_0.



Окрестность $U(M_0)$ без точки M_0 мы будем называть *проколотой окрестностью* точки M_0 и обозначать через $\dot{U}(M_0)$.

Пусть функция двух переменных $f(M)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(M_0)$ точки M_0, т. е. в самой точке M_0 функция может быть и неопределена.

Определение 2. *Пределом функции $f(M)$ в точке M_0 называется действительное число L, обладающее тем свойством, что для любого положительного числа ε существует проколотая δ_ε-окрестность $\dot{U}(\delta_\varepsilon, M_0) \subset \dot{U}(M_0)$ точки M_0, для всех точек которой*

$$|f(M) - L| < \varepsilon,\ M \in \dot{U}(\delta_\varepsilon, M_0).$$

Обозначается этот предел через

$$\lim_{M\to M_0} f(M) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Таким образом, *число L является пределом функции $f(M)$ в точке M_0, если значения этой функции отличаются от числа L сколь угодно мало по абсолютной величине для всех точек, достаточно близких к точке M_0.*

Аналогично мы можем ввести определение *бесконечного предела* функции двух переменных и предела функции *на бесконечности*, т. е. при условии, что по крайней мере одна из координат переменной точки $M(x,\ y)$ стремится к бесконечности.

Пример 1. *Убедиться в том, что*

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Решение. Оценим по абсолютной величине разность между значениями функции вблизи точки $M_0(1,\ -1)$ и числом $-\frac{1}{2}$, использовав очевидное неравенство $2ab \le a^2+b^2$, справедливое для любых действительных a и b.

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\right| = \frac{(x+y)^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{(x-1)^2+(y+1)^2+2(x-1)(y+1)}{2(x^2+y^2)} \le \frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{x^2+y^2}.$$

Выберем окрестность $U(M_0)$ точки M_0, для всех точек $M(x,\ y)$ которой $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, $x^2+y^2 \ge 1$. Тогда

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\right| \le (x-1)^2+(y+1)^2,\ M \in U(M_0).$$

Из этого неравенства следует, что, если мы по малому заданному $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, то для всех точек δ_ε-окрестности $U(\delta_\varepsilon, M_0) \subset U(M_0)$ точки M_0 будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает (1).

Основные *свойства* пределов функций двух переменных аналогичны (вместе с доказательствами) соответствующим свойствам пределов функций одной переменой (глава IV, §4, пункт 2). Отметим некоторые из них.

1) *Функция двух переменных не может иметь более одного предела в данной точке.*

2) *Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ имеют конечные пределы в точке M_0, то существуют также пределы функций $c_1f_1(M)+c_2f_2(M)$, c_1, $c_2 \in \mathrm{R}$ и $f_1(M)f_2(M)$, причем*

a) $\lim\limits_{M\to M_0}(c_1f_1(M)+c_2f_2(M)) = c_1\lim\limits_{M\to M_0} f_1(M) + c_2\lim\limits_{M\to M_0} f_2(M)$;

b) $\lim\limits_{M\to M_0} f_1(M)f_2(M) = \lim\limits_{M\to M_0} f_1(M)\lim\limits_{M\to M_0} f_2(M)$.

Если, помимо того, $f_2(M) \neq 0$, $M \in \dot{U}(M_0)$ *и* $\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M) \neq 0$, *то существует также предел дроби* $f_1(M)/f_2(M)$ *и*

$$\text{c)} \lim_{M \to M_0} \frac{f_1(M)}{f_2(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)}.$$

Из определения предела функции двух переменных в точке M_0 следует, что в случае его существования предельные значения функции вдоль любой линии, ведущей в точку M_0 совпадают и равны пределу функции. В частности, это верно для любого луча, ведущего в точку M_0. Отсюда мы заключаем, что, если предельные значения функции на каких-нибудь двух линиях различны, то предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ не существует.

Пример 2. *Доказать, что предел в начале координат функции из предыдущего примера не существует.*

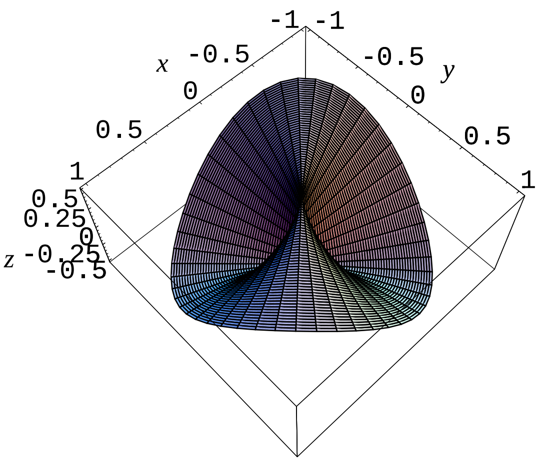
Решение. Функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ постоянна вдоль лучей $y = kx$, $k \in \mathrm{R}$, входящих в начало координат, так как при $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Таким образом, с изменением углового коэффициента k этих лучей изменяются также и предельные значения функции вдоль них. Стало быть, данный предел не существует. Поверхность $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ вблизи начала координат имеет вид:



Остановимся теперь коротко на понятии *повторного предела* функции двух переменных, который представляет собой *последовательный предельный переход* по каждой из переменных.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) \,|\, x \in (a, b),\ y \in (c, d)\},$$

содержащем точку $M_0(x_0, y_0)$, кроме, возможно, точки M_0. Если при каждом фиксированном $x \in (a, b)$ существует конечный предел

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y) \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x),$$

то он называется *повторным пределом* функции $f(x,y)$ в точке M_0 и обозначается через

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{3}$$

Аналогично определяется повторный предел

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Докажем одно утверждение о связи между пределом функции в точке и повторным пределом в этой же точке.

Теорема 1. *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

и для любого фиксированного $x\in(a,b)$ *существует конечный предел* (2), *то существует повторный предел* (3) *и*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим для определенности, что функция имеет конечный предел в точке M_0, который мы обозначим через L. Оценим по абсолютной величине разность между функцией $\varphi(x)$ и числом L. Прежде всего заметим, что для всех точек $M(x,y)\in\Pi$

$$|\varphi(x)-L|\le|f(x,y)-L|+|f(x,y)-\varphi(x)|. \tag{5}$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Ввиду существования предела функции в точке M_0 найдется проколотая δ_ε-окрестность $\dot U(\delta_\varepsilon,M_0)$ этой точки, для которой

$$|f(x,y)-L|<\frac{\varepsilon}{2},\ M(x,y)\in\dot U(\delta_\varepsilon,M_0). \tag{6}$$

С другой стороны, поскольку предел (2) существует для любого $x\in(a,b)$, то при каждом фиксированном $x\in(x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$, $x\ne x_0$ для всех значениях y достаточно близких к y_0 и таких, что $M(x,y)\in\dot U(\delta_\varepsilon,M_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Из неравенства (5), учитывая (6) и (7), получим

$$|\varphi(x)-L|<\varepsilon,$$

если $x\in(x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$, $x\ne x_0$, что и доказывает (4).

Перейдем теперь к *непрерывности* функции. Предположим, что функция двух переменных $f(M)$ определена в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$. Как и для функции одной переменной введем следующее

Определение 3. *Функция* $f(M)$ *называется непрерывной в точке* M_0, *если существует конечный предел* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ *и*

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0).$$

Переформулируем по аналогии с функцией одной переменной определение непрерывности функции двух переменных в точке с помощью *приращения функции* в этой точке, которое представляет собой разность

$$\Delta f(M_0,\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

где Δx, Δy – приращения переменных x и y, соответственно, в точке M_0. Очевидно, данная *функция непрерывна в точке* M_0 *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(M_0,\Delta x,\Delta y)=0.$$

Если данная функция неопределена в точке M_0 или предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ не существует или равен бесконечности, то мы будем считать функцию *разрывной* в точке M_0.

Основные *свойства непрерывных функций двух переменных* повторяют соответствующие свойства непрерывных функций одной переменной. В частности, *алгебраические операции над непрерывными функциями приводят опять же к непрерывным функциям.*

Элементарной функцией двух переменных называется функция, образованная с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций основных элементарных функций одной переменной (глава IV, §4, пункт 1) над переменными этой функции.

Любая *элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения*, так как все указанные в ее определении операции не выводят ее из класса непрерывных функций.

Пример 3. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2-1)}{|x^2+y^2-1|}.$$

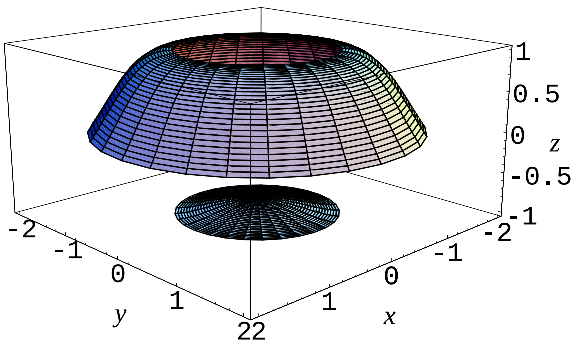
Решение. Эта функция является элементарной, поэтому она непрерывна везде, кроме точек окружности $x^2+y^2=1$. В любой точке $M_0(x_0,y_0)$ этой окружности данная функция испытывает разрыв, так как

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x^2+y^2>1}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x^2+y^2>1}} \frac{\sin(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2-1} = 1, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x^2+y^2<1}} \frac{\sin(x^2+y^2-1)}{1-x^2-y^2} = -1$$

и, таким образом, предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

не существует. Изобразим фрагмент поверхности с уравнением $z = \dfrac{\sin(x^2+y^2-1)}{|x^2+y^2-1|}$:



Чтобы сформулировать для функции двух переменных аналоги теорем Вейерштрасса и Больцано-Коши (глава IV, §5, пункт 3), введем сначала определения *замкнутого множества* и *области* на плоскости.

Точка M_0 называется *граничной точкой* множества D на плоскости, если в любой ее ε-окрестности найдутся точки, как принадлежащие множеству D, так и не принадлежащие ему. Заметим, что и сама точка M_0 может как быть точкой множества D, так и не содержаться в нем.

Множество D мы будем называть *замкнутым*, если оно представляет собой объединение некоторого открытого множества с множеством его граничных точек. Иначе говоря, *замкнутое множество представляет собой совокупность внутренних и граничных точек этого множества.*

Множество на плоскости называется *линейно связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей этому множеству.

Открытое (замкнутое) линейно связное множество на плоскости условимся называть *областью* (*замкнутой областью*).

Множество на плоскости называется *ограниченным*, если оно размещается внутри некоторого круга.

Мы определили понятия предела и непрерывности функции двух переменных в точке *открытого* множества. Если множество *замкнуто*, то следует еще условиться, что мы будем понимать под пределом и непрерывностью в граничной точке этого множества.

Итак, пусть функция $f(M)$ определена в замкнутом множестве D и пусть M_0 – граничная точка этого множества (в которой, возможно, функция и неопределена). Число L называется *пределом функции $f(M)$ в граничной точке* M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|f(M) - L| < \varepsilon$$

выполняется для всех точек M множества D из некоторой проколотой δ_ε-окрестности точки M_0. Если функция определена и в граничной точке M_0, то она считается в этой точке *непрерывной*, если упомянутый выше предел существует и равен $f(M_0)$. Очевидно, *предел и непрерывность функции двух переменных в граничной точке аналогичны односторонним пределу и непрерывности функции одной переменной.*

Сформулируем теперь две теоремы о свойствах функции двух переменных, *непрерывных на замкнутом, ограниченном множестве*, т. е. непрерывных в каждой точке этого множества.

Теорема 2 (аналог теоремы Вейерштрасса). *Если функция двух переменных $f(M)$ определена и непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве D, то она ограничена и достигает на этом множестве своих нижней и верхней граней, т. е. существуют точки M_1, $M_2 \in D$ такие, что*

$$f(M_1) = \inf_D f(M),\ f(M_2) = \sup_D f(M).$$

Теорема 3 (аналог теоремы Больцано-Коши). *Пусть функция двух переменных $f(M)$ определена и непрерывна в замкнутой, ограниченной области D. Тогда для любого числа c, заключенного между нижней и верхней гранями этой функции, найдется точка C множества D, для которой $f(C) = c$.*

Замечание 1. Все приведенные выше определения, свойства и теоремы мы практически без изменений можем переформулировать для функций трех и большего числа переменных. Под ε-окрестностью точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ в евклидовом пространстве R^n следует, естественно, понимать множество внутренних точек n-мерного шара радиуса ε с центром в точке M_0, т. е. множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что

$$|M_0M| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon.$$

Замечание 2. По аналогии с векторной функцией действительного аргумента (глава V, §7) мы можем определить *векторную функцию двух или трех переменных* и ввести для нее определения предела и непрерывности.

При изучении *криволинейных и поверхностных интегралов* (III семестр) нам придется рассматривать функции двух или трех переменных, непрерывные на некоторых линиях (поверхностях). Определения предела и непрерывности функции двух или трех переменных в точке непрерывной линии на плоскости (в пространстве) или непрерывной поверхности мы можем дать точно также, как и приведенные выше определения этих понятий для функции двух переменных в граничной точке множества на плоскости, если заменить это множество данной линией или поверхностью. Для функций, непрерывных на ограниченных и связных линиях или поверхностях, содержащих свои граничные точки, справедливы также приведенные выше *аналоги теорем Вейерштрасса и Больцано-Коши.*

§2. Частные производные функции двух переменных, ее дифференцируемость и дифференциал. Частные производные композиции функций многих переменных и неявно заданной функции. О дифференцировании функции двух переменных под знаком интеграла

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Если существует производная функции $f(x, y_0)$ в точке x_0 (соответственно, функции $f(x_0, y)$ в точке y_0), то она называется *частной производной функции* $f(x, y)$ *по переменной* x *в точке* M_0 (соответственно, *частной производной функции* $f(x, y)$ *по переменной* y *в точке* M_0). Обозначения для частных производных: $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ или $\partial_x f(M_0)$, $\partial_y f(M_0)$.

Переформулируем определение частных производных с помощью частных приращений функции в данной точке. *Частным приращением* данной функции по переменной x или переменной y называется разность

$$\Delta_x f(M_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

или, соответственно, разность

$$\Delta_y f(M_0, \Delta y) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Тогда по определению производной (глава V, §1)

$$f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0, \Delta x)}{\Delta x},\ f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0, \Delta y)}{\Delta y}.$$

Из определения частной производной следует, что она представляет собой скорость изменения функции вдоль соответствующей координатной оси и для ее нахождения необходимо дифференцировать функцию многих переменных по соответствующей переменной, считая остальные переменные фиксированными. Естественно, правила дифференцирования, связанные с алгебраическими операциями над функциями и перечисленные в главе V, §1, справедливы также и для частных производных.

Пример 1. *Найти частные производные функций*:

$$\text{a) } z = x \sin \frac{y}{x^2};\ \text{b) } u = x^{y^z}.$$

Решение.

$$\text{a) } z'_x = \left(x \sin \frac{y}{x^2}\right)'_x = (x)'_x \sin \frac{y}{x^2} + x \left(\sin \frac{y}{x^2}\right)'_x = \sin \frac{y}{x^2} + x \cos \frac{y}{x^2} \left(\frac{y}{x^2}\right)'_x =$$
$$= \sin \frac{y}{x^2} + x \cos \frac{y}{x^2} \cdot y(-2)x^{-3} = \sin \frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x^2};$$
$$z'_y = \left(x \sin \frac{y}{x^2}\right)'_y = x \cos \frac{y}{x^2} \left(\frac{y}{x^2}\right)'_y = x \cos \frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x^2}.$$
$$\text{b) } u'_x = \left(x^{y^z}\right)'_x = y^z x^{y^z - 1};\ u'_y = \left(x^{y^z}\right)'_y = x^{y^z} \ln x \cdot (y^z)'_y = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1} = x^{y^z} y^{z-1} z \ln x;$$
$$u'_z = \left(x^{y^z}\right)'_z = x^{y^z} \ln x \cdot (y^z)'_z = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$$

Введем теперь понятие *дифференцируемости* функции двух переменных и связанное с ней понятие *дифференциала.*

Функция $f(x, y)$ *называется дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *если в окрестности этой точки ее полное приращение*

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = A_x \Delta x + A_y \Delta y + \mathrm{o}(\Delta r), \tag{1}$$

где A_x, A_y *– определенные действительные числа,* $\mathrm{o}(\Delta r)$ *– бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, *т. е.*

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\mathrm{o}(\Delta r)}{\Delta r} = 0.$$

Если функция определена и дифференцируема в каждой точке открытого множества D, *то она называется дифференцируемой на этом множестве.*

При $\Delta x = 0$ или $\Delta y = 0$ из равенства (1) мы получаем выражения для частных приращений:

$$\Delta_x f(M_0, \Delta x) = A_x \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$$

или

$$\Delta_y f(M_0, \Delta y) = A_y \Delta y + \mathrm{o}(\Delta y).$$

Разделив обе части каждого из этих равенств на соответствующее приращение аргумента и устремив его к нулю, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f(M_0, \Delta x)}{\Delta x} = A_x + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x} \iff f'_x(M_0) = A_x;$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y f(M_0, \Delta y)}{\Delta y} = A_y + \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\mathrm{o}(\Delta y)}{\Delta y} \iff f'_y(M_0) = A_y.$$

Таким образом, для дифференцируемой в точке M_0 функции $f(x,\, y)$ существуют обе ее частные производные в этой точке и

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \mathrm{o}(\Delta r). \tag{2}$$

Обозначив бесконечно малую при $\Delta r \to 0$ функцию $\frac{\mathrm{o}(\Delta r)}{\Delta r}$ через $\varphi(\Delta x,\, \Delta y)$, мы можем переписать последнее равенство в виде

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y)\Delta r. \tag{3}$$

Из равенства (2) следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = 0$$

и, таким образом, *дифференцируемая в точке M_0 функция $f(x, y)$ является непрерывной в этой точке.*

Замечание 1. Если *для функции одного аргумента дифференцируемость равносильна существованию производной* (глава V, §1), то для *функции большего числа переменных это, вообще говоря, уже не имеет места.* Контрпримером здесь может служить функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } xy \neq 0; \\ 1, \text{ если } xy = 0. \end{cases}$$

Поскольку эта функция равна 1 на координатных осях, то в начале координат обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ существуют и равны нулю, однако функция $f(x, y)$ дифференцируемой в точке $O(0, 0)$ не является, поскольку, очевидно, она не является в этой точке даже непрерывной.

Укажем условия, при которых функция будет дифференцируемой в данной точке.

Теорема 1. *Если частные производные функции $f(x, y)$ существуют в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и эти частные производные как функции двух переменных x, y непрерывны в точке M_0, то данная функция дифференцируема в точке M_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переписав приращение функции в точке M_0 в виде

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0))$$

и применив к каждой из скобок теорему Лагранжа (глава V, §3) на отрезках $[x_0, x_0 + \Delta x]$ и $[y_0, y_0 + \Delta y]$, соответственно, получим:

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \Delta y_1)\Delta y,$$

где $\Delta x_1 \in (0, \Delta x)$, $\Delta y_1 \in (0, \Delta y)$. Тогда

$$R(\Delta x, \Delta y) = \Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) - f'_x(M_0)\Delta x - f'_y(M_0)\Delta y =$$
$$= (f'_x(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0))\Delta x + (f'_y(x_0, y_0 + \Delta y_1) - f'_y(x_0, y_0))\Delta y.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Учитывая непрерывность частных производных в точке M_0, для положительного числа $\varepsilon_1 = \varepsilon/\sqrt{2}$ найдется число $\delta_{\varepsilon_1} > 0$ такое, что неравенства

$$|f'_x(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)| < \varepsilon_1, \ |f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)| < \varepsilon_1 \tag{4}$$

выполняются как только $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta_{\varepsilon_1}$. Оценим по абсолютной величине разность $R(\Delta x, \Delta y)$, принимая во внимание неравенства (4)[1]:

$$|R(\Delta x, \Delta y)| \le |f'_x(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)||\Delta x| + |f'_y(x_0, y_0 + \Delta y_1) - f'_y(x_0, y_0)||\Delta y| \le$$
$$\le \varepsilon_1(|\Delta x| + |\Delta y|) \le \varepsilon_1\sqrt{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \varepsilon \Delta r,$$

если $\Delta r < \delta_{\varepsilon_1}$. Таким образом,

$$\left|\frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\Delta r}\right| \le \varepsilon,\ 0 < \Delta r < \delta_{\varepsilon_1},$$

т. е.

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\Delta r} = 0,$$

что, по определению, и означает дифференцируемость функции $f(x, y)$ в точке M_0.
Т е о р е м а д о к а з а н а.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то линейная часть ее приращения в этой точке называется *дифференциалом* данной функции в точке M_0. Обозначается дифференциал через $\mathrm{d}f(M_0)$. Из формулы (2) следует, что

$$\mathrm{d}f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \tag{5}$$

и вблизи точки M_0, т. е. при малых Δx, Δy, *приращение функции приближенно равно ее дифференциалу*:

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) \approx \mathrm{d}f(M_0) \Longleftrightarrow f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(M_0).$$

Таким образом, *в приближенных вычислениях значений функции абсолютная погрешность приближенно равна абсолютной величине дифференциала.*

Пример 2. *Стороны треугольника $a = 200$м ± 2м, $b = 300$м ± 5м, а угол между ними $C = 60^\circ \pm 1^\circ$. Оценить приближенно величины абсолютной и относительной погрешностей вычисления третьей стороны треугольника c.*

Решение. По теореме косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C},$$

т. е. сторона c является функцией трех переменных a, b, C. Поскольку

$$a = a_0 + \Delta a,\ b = b_0 + \Delta b,\ C = C_0 + \Delta C,$$

где $a_0 = 200$м, $b_0 = 300$м, $C_0 = 60^\circ$, $|\Delta a| = 2$м, $|\Delta b| = 5$м, $|\Delta C| = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$, то абсолютная погрешность ε вычисления стороны c приближенно равна

$$\varepsilon = |\Delta c(M_0,\ \Delta a,\ \Delta b,\ \Delta C)| \approx |\mathrm{d}c(M_0)|,\ M_0(a_0, b_0, C_0).$$

Найдем частные производные функции c в точке M_0.

$$c'_a = \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}\right)'_a = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos C\right)'_a =$$
$$= \frac{1}{2c}\cdot(2a - 2b\cos C) = \frac{a - b\cos C}{c},\ c'_a(M_0) = \frac{a_0 - b_0\cos C_0}{c(M_0)} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Аналогично,

$$c'_b = \frac{b - a\cos C}{c},\ c'_b(M_0) = \frac{2}{\sqrt{7}};\ c'_C = \frac{ab\sin C}{c},\ c'_C(M_0) = \frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Тогда дифференциал функции c в точке M_0 равен

$$\mathrm{d}c(M_0) = c'_a(M_0)\Delta a + c'_b(M_0)\Delta b + c'_C(M_0)\Delta C = \frac{\Delta a + 4\Delta b + 600\sqrt{3}\Delta C}{2\sqrt{7}}.$$

[1]Здесь мы используем очевидные неравенства $|a + b| \le |a| + |b| \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, справедливые для любых действительных чисел a и b.

Отсюда следует, что

$$|\mathrm{d}c(M_0)| = \left|\frac{\Delta a + 4\Delta b + 600\sqrt{3}\Delta C}{2\sqrt{7}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}}(|\Delta a| + 4|\Delta b| + 600\sqrt{3}|\Delta C|) = \frac{33 + 5\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \approx 7,6$$

и поэтому $\varepsilon \leq 7,6$м. Так как относительная погрешность δ связана с абсолютной ε равенством

$$\delta = \frac{\varepsilon}{c(M_0)} \cdot 100\%,$$

то

$$\delta \leq \frac{7,6}{100\sqrt{7}} \cdot 100\% \approx 2,9\%.$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в каждой точке некоторого открытого множества D, то, использовав обозначения $\Delta x = \mathrm{d}x$, $\Delta y = \mathrm{d}y$, мы можем записать дифференциал (5) в произвольной точке множества D в следующей симметричной форме:

$$\mathrm{d}z = z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y. \tag{6}$$

Поскольку *дифференциал функции многих переменных линейно выражается через частные производные, то при выполнении алгебраических операций над функциями на него автоматически переносятся соответствующие свойства производной или дифференциала функции одной переменной.*

Пример 3. *Найти дифференциал функции*

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Решение. Так как

$$z'_x = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$z'_y = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = x\left(-\left(x^2+y^2\right)^{-2}\right)2y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

то

$$\mathrm{d}z = z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y = \frac{(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Найдем формулы для нахождения частных производных *композиции функций нескольких переменных.* Пусть функция двух переменных

$$z = z(x, y)$$

дифференцируема в точке $M(x, y)$, а функции

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

дифференцируемы в точке t. Тогда *производная композиции функций*

$$z(x(t), y(t))$$

по аргументу t существует и может быть вычислена по формуле

$$(z(x(t), y(t)))' = z'_x(M)x'(t) + z'_y(M)y'(t)$$

или в более симметричной форме

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t. \tag{7}$$

Для доказательства запишем приращение функции $z(t) = z(x(t), y(t))$ в точке t, воспользовавшись формулой (3):

$$\begin{gathered}\Delta z(t, \Delta t) = z(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - z(x(t), y(t)) = \\ = z'_x(M)\Delta x(t, \Delta t) + z'_y(M)\Delta y(t, \Delta t) + \varphi(\Delta x(t, \Delta t), \Delta y(t, \Delta t))\Delta r(t, \Delta t),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\Delta x(t, \Delta t)$, $\Delta y(t, \Delta t)$ – приращения функций $x(t)$, $y(t)$, соответственно, в точке t, функция $\varphi(\Delta x, \Delta y)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$,

$$\Delta r(t, \Delta t) = \sqrt{(\Delta x(t, \Delta t))^2 + (\Delta y(t, \Delta t))^2}.$$

Разделив обе части равенства (8) на Δt и устремив это приращение к нулю, получим, учитывая дифференцируемость, а, значит, и непрерывность функций $x(t)$ и $y(t)$[1]:

$$(z(x(t),y(t)))' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t,\Delta t)}{\Delta t} = z'_x(M)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t,\Delta t)}{\Delta t} + z'_y(M)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t,\Delta t)}{\Delta t} +$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\varphi(\Delta x(t,\Delta t),\Delta y(t,\Delta t))\frac{\Delta r(t,\Delta t)}{\Delta t} = z'_x(M)x'(t) + z'_y(M)y'(t) +$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\varphi(\Delta x(t,\Delta t),\Delta y(t,\Delta t))\operatorname{sgn}\Delta t\sqrt{\left(\frac{\Delta x(t,\Delta t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t,\Delta t)}{\Delta t}\right)^2} =$$
$$= z'_x(M)x'(t) + z'_y(M)y'(t) + 0\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = z'_x(M)x'(t) + z'_y(M)y'(t).$$

Аналогично мы можем проверить, что, если переменные x, y дифференцируемой функции

$$z = z(x,y)$$

являются, в свою очередь, дифференцируемыми функциями

$$x = x(x_1,y_1),\ y = y(x_1,y_1)$$

переменных x_1, y_1, то частные производные композиции функций

$$z(x(x_1,y_1),\ y(x_1,y_1))$$

по переменным x_1, y_1 находятся аналогично (7) по формулам

$$z'_{x_1} = z'_x x'_{x_1} + z'_y y'_{x_1},\ z'_{y_1} = z'_x x'_{y_1} + z'_y y'_{y_1}. \tag{9}$$

Замечание 2. Формулы (9) естественным образом распространяются и на случай функций большего числа переменных.

Пример 4. *Найти частные производные функции*

$$z = \left(x+y^2\right)^{e^{x^3y}}.$$

Решение. Перепишем данную функцию в виде $z=\varphi^\psi$, где $\varphi = x+y^2$, $\psi = e^{x^3y}$ и воспользуемся формулами (9). Так как

$$z'_\varphi = \psi\varphi^{\psi-1},\ z'_\psi = \varphi^\psi\ln\varphi;\ \varphi'_x = 1,\ \varphi'_y = 2y;\ \psi'_x = 3x^2y\psi,\ \psi'_y = x^3\psi,$$

то

$$z'_x = z'_\varphi\varphi'_x + z'_\psi\psi'_x = \psi\varphi^{\psi-1}\cdot 1 + \varphi^\psi\ln\varphi\cdot 3x^2y\psi = \varphi^{\psi-1}\psi(1+3x^2y\varphi\ln\varphi),$$
$$z'_y = z'_\varphi\varphi'_y + z'_\psi\psi'_y = \psi\varphi^{\psi-1}\cdot 2y + \varphi^\psi\ln\varphi\cdot x^3\psi = \varphi^{\psi-1}\psi(2y+x^3\varphi\ln\varphi).$$

Используем правило дифференцирования композиции функций многих переменных для нахождения частных производных *неявных функций.*

Пусть уравнение

$$F(x,y) = 0,$$

где $F(x,y)$ – дифференцируемая в некотором открытом множестве на плоскости функция, определяет неявную[2], дифференцируемую в некотором интервале (a,b) функцию $y(x)$, причем $F'_y(x,y(x)) \neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Найдем производную неявной функции, продифференцировав по аргументу x обе части тождества $F(x,y(x)) = 0$, $x\in(a,b)$. Воспользовавшись формулой (7), получим:

$$(F(x,y(x)))'_x = F'_x(x,y(x)) + F'_y(x,y(x))y'(x) = 0.$$

Отсюда

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))},\ x\in(a,b)$$

[1]Функция знака $\operatorname{sgn} x$ определена в главе VII, §1.

[2]Вопросы *существования неявных функций* обсуждаются, например, во втором томе имеющегося в списке литературы двухтомника Л.Д. Кудрявцева.

или, короче,

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{10}$$

Аналогично, если уравнение

$$F(x,y,z) = 0$$

с дифференцируемой в некоторой области пространства функцией $F(x,y,z)$ определяет неявную, дифференцируемую в некоторой области на плоскости функцию двух переменных $z = z(x,y)$, то, подобно (10), частные производные этой функции находятся по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{11}$$

Пример 5. *Найти частные производные неявно заданных функций*:

$$\text{a) } y = 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ \text{b) } z = \sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Решение. a) Перепишем данное уравнение в виде $F(x,y) = 0$, где $F(x,y) = 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y$. Поскольку

$$F'_x(x,y) = 2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x\right) =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) = 2\left(\frac{y}{2x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y(y^2-x^2)}{x(x^2+y^2)},$$

$$F'_y(x,y) = 2x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y - 1 = \frac{2x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} - 1 = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

то по формуле (10)

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\left.\frac{y(y^2-x^2)}{x(x^2+y^2)}\right/\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{y}{x}.$$

b) В этом случае уравнение

$$F(x,y,z) = -\sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}} - z = 0$$

определяет функцию двух переменных $z = z(x,y)$. Воспользуемся формулами (11). Здесь

$$F'_x(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot 2x\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}\cdot\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{x^2-y^2}\left(1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\right)z\left(-\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{xz}{x^2-y^2} - \frac{xz}{x^2-y^2}\left(1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\right) = -\frac{xz^3}{(x^2-y^2)^2},$$

$$F'_y(x,y,z) = \frac{yz^3}{(x^2-y^2)^2},$$

$$F'_z(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}\cdot\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_z - 1 =$$

$$= \sqrt{x^2-y^2}\left(1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1 = \frac{z^2}{x^2-y^2}.$$

Следовательно,

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{xz^3}{(x^2-y^2)^2}\bigg/\frac{z^2}{x^2-y^2} = \frac{xz}{x^2-y^2},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{yz^3}{(x^2-y^2)^2}\bigg/\frac{z^2}{x^2-y^2} = \frac{yz}{y^2-x^2}.$$

Время от времени нам придется сталкиваться с необходимостью дифференцировать по одной из переменных определенный интеграл функции двух переменных по другой переменной. Сформулируем утверждение, которое при определенных условиях на функцию обеспечивает такую возможность.

Теорема 2. *Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y)\,|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и кривая с уравнением $x = \varphi(y)$, где функция $\varphi(y)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, содержится в прямоугольнике. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int\limits_a^{\varphi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

как функция переменной y, дифференцируем по этой переменной и

$$I'(y) = \int\limits_a^{\varphi(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x + f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Доказательство этого утверждения можно найти во втором томе трехтомника *Фихтенгольца Г.М.*, имеющегося в списке литературы.

Приведем два простых *следствия* данной теоремы.

1) *Если $\varphi(y) \equiv y$, то*

$$\left(\int\limits_a^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)'_y = \int\limits_a^{y} f'_y(x,y)\mathrm{d}x + f(y,y).$$

2) *В случае $\varphi(y) \equiv b$*

$$\left(\int\limits_a^{b} f(x,y)\mathrm{d}x\right)'_y = \int\limits_a^{b} f'_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

§3. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных. Формула Тейлора

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M(x,y)$. Тогда, если в точке M существуют частные производные функций $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, то они называются *частными производными второго порядка функции* $f(x,y)$ в данной точке. Для частных производных второго порядка мы будем использовать обозначения

$$f''_{xx}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x,\ f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y,\ f''_{yx}(x,y) = (f'_y(x,y))'_x,\ f''_{yy}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

или

$$\partial_{xx} f(x,y),\ \partial_{xy} f(x,y),\ \partial_{yx} f(x,y),\ \partial_{yy} f(x,y).$$

Аналогично вводится определение частных производных третьего, четвертого, ..., n-го порядков.

Если при нахождении частной производной порядка выше первого дифференцирование выполняется не только по одной переменной, то такая частная производная называется *смешанной.*

Пример 1. *Найти частные производные второго порядка функции*

$$z = \ln(x^m + y^n),\ m,\ n \in \mathrm{N}.$$

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$z'_x = (\ln(x^m + y^n))'_x = \frac{1}{x^m + y^n}(x^m + y^n)'_x = \frac{mx^{m-1}}{x^m + y^n},$$
$$z'_y = (\ln(x^m + y^n))'_y = \frac{1}{x^m + y^n}(x^m + y^n)'_y = \frac{ny^{n-1}}{x^m + y^n}.$$

Тогда

$$z''_{xx} = \left(\frac{mx^{m-1}}{x^m + y^n}\right)'_x = m \cdot \frac{(m-1)x^{m-2}(x^m + y^n) - x^{m-1}mx^{m-1}}{(x^m + y^n)^2} = \frac{mx^{m-2}((m-1)y^n - x^m)}{(x^m + y^n)^2},$$
$$z''_{xy} = \left(\frac{mx^{m-1}}{x^m + y^n}\right)'_y = mx^{m-1}\left(-(x^m + y^n)^{-2}\right)ny^{n-1} = -\frac{mnx^{m-1}y^{n-1}}{(x^m + y^n)^2},$$
$$z''_{yx} = \left(\frac{ny^{n-1}}{x^m + y^n}\right)'_x = ny^{n-1}\left(-(x^m + y^n)^{-2}\right)mx^{m-1} = -\frac{mnx^{m-1}y^{n-1}}{(x^m + y^n)^2},$$
$$z''_{yy} = \left(\frac{ny^{n-1}}{x^m + y^n}\right)'_y = \frac{ny^{n-2}((n-1)x^m - y^n)}{(x^m + y^n)^2}.$$

На этом примере мы видим, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. И это не случайно. Оказывается, что при не очень обременительных условиях на функцию *значения смешанных частных производных не зависят от порядка, в котором выполняется дифференцирование.*

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные*

$$f'_x(x, y),\ f'_y(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y)$$

определены в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и частные производные второго порядка $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ непрерывны в точке M, то значения этих смешанных частных производных равны в точке M, т. е.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Технически достаточно громоздкое доказательство этой теоремы мы здесь не приводим.

Замечание. Утверждение приведенной выше теоремы с очевидными изменениями справедливо и для смешанных частных производных любого порядка. Например,

$$\partial_{x^m y^n} f(x, y) = \partial_{y^n x^m} f(x, y).$$

Естественно, эта теорема имеет место также и для функций большего числа переменных.

Перейдем теперь к дифференциалам высших порядков. Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ *дважды непрерывно дифференцируема* в точке $M(x, y)$, т. е. в некоторой окрестности этой точки функция определена вместе со всеми своими частными производными первого и второго порядков и все они непрерывны в точке M. *Вторым дифференциалом* (*дифференциалом второго порядка*) *функции $f(x, y)$ в точке M* считается, по определению, дифференциал от первого дифференциала. Найдем выражение для второго дифференциала, воспользовавшись формулой (6) предыдущего параграфа, линейностью дифференциала и учитывая, что по теореме из §2 частные производные z'_x и z'_y дифференцируемы в точке M, а дифференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ независимых переменных не зависят от точки M :

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y) = \mathrm{d}z'_x\, \mathrm{d}x + \mathrm{d}z'_y\, \mathrm{d}y =$$
$$= (z''_{xx}\mathrm{d}x + z''_{xy}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + (z''_{yx}\mathrm{d}x + z''_{yy}\mathrm{d}y)\mathrm{d}y = z''_{xx}\mathrm{d}x^2 + (z''_{xy} + z''_{yx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}\mathrm{d}y^2.$$

Так как по сформулированной выше теореме $z''_{xy} = z''_{yx}$, то, окончательно,

$$\mathrm{d}^2 z = z''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}\mathrm{d}y^2. \tag{1}$$

Аналогично находятся и частные производные более высоких порядков. Например, при условии непрерывности в точке M функции и всех ее частных производных до третьего порядка включительно, *дифференциал третьего порядка* может быть найден по формуле

$$\mathrm{d}^3 z = z'''_{x^3}\mathrm{d}x^3 + 3z'''_{x^2y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3z'''_{xy^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + z'''_{y^3}\mathrm{d}y^3. \qquad (2)$$

Перепишем формулы (1) и (2) в более компактной форме:

$$\mathrm{d}^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 z,\ \mathrm{d}^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^3 z,$$

где формальное возведение в степень символов $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$ означает выполнение соответствующих операций частного дифференцирования. Например,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

По индукции несложно доказать и общую формулу для нахождения *дифференциала произвольного порядка функции двух переменных*[1]:

$$\mathrm{d}^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^n z.$$

Пример 2. *Найти дифференциал второго порядка функции* $z = \mathrm{tg}(xy)$.

Решение. Так как

$$z'_x = (\mathrm{tg}(xy))'_x = \frac{1}{\cos^2(xy)}\,(xy)'_x = \frac{y}{\cos^2(xy)},\ z'_y = \frac{x}{\cos^2(xy)},$$

то

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{\cos^2(xy)}\right)'_x = y(-2\cos^{-3}(xy))(-\sin(xy))y = \frac{2y^2\sin(xy)}{\cos^3(xy)},$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{\cos^2(xy)}\right)'_y = \frac{\cos^2(xy) - y\cdot 2\cos(xy)(-\sin(xy))x}{\cos^4(xy)} = \frac{\cos(xy) + 2xy\sin(xy)}{\cos^3(xy)},$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{\cos^2(xy)}\right)'_y = \frac{2x^2\sin(xy)}{\cos^3(xy)}.$$

Тогда по формуле (1)

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{2}{\cos^2(xy)}\left(y^2\,\mathrm{tg}(xy)\mathrm{d}x^2 + (1 + 2xy\,\mathrm{tg}(xy))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{tg}(xy)\mathrm{d}y^2\right).$$

Займемся теперь *формулой Тейлора.* Пусть функция двух переменных $f(M)$ *непрерывно дифференцируема* $n{+}1$ *раз в некоторой* ε*-окрестности* $U(\varepsilon, M_0)$ *точки* $M_0(x_0, y_0)$, т. е. в любой точке этой окрестности существуют и непрерывны все частные производные данной функции до $(n+1)$-го порядка включительно.

Найдем *представление функции* $f(M)$ *в окрестности* $U(\varepsilon, M_0)$ *с помощью полинома степени* n от переменных x, y.

Возьмем произвольную точку $M(x,y) \in U(\varepsilon, M_0)$. Для удобства перепишем координаты точки M в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где, очевидно, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = f(M_t),\ M_t(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),\ t \in [-1, 1].$$

[1]Степень в правой части этого равенства раскрывается по формуле *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, $k = \overline{1, n}$.

Ввиду сделанных предположений функция $g(t)$ дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[-1,\,1]$ и, следовательно, ее можно представить по формуле Маклорена (глава V, §5, пункт 1, формула (2)) в виде:

$$g(t)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},\ c\in(0,t). \tag{3}$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций многих переменных и определением дифференциалов высших порядков, получим:

$$g'(t)=f'_x(M_t)\Delta x+f'_y(M_t)\Delta y=\mathrm{d}f(M_t),\ g'(0)=\mathrm{d}f(M_0),$$
$$g''(t)=\mathrm{d}(\mathrm{d}f(M_t))=\mathrm{d}^2f(M_t),\ g''(0)=\mathrm{d}^2f(M_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{(n)}(t)=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f(M_t))=\mathrm{d}^nf(M_t),\ g^{(n)}(0)=\mathrm{d}^nf(M_0),$$
$$g^{(n+1)}(t)=\mathrm{d}(\mathrm{d}^nf(M_t))=\mathrm{d}^{n+1}f(M_t),\ g^{(n+1)}(c)=\mathrm{d}^{n+1}f(M_c).$$

Тогда, заметив, что $g(0)=f(M_0)$, $g(1)=f(M)$, из формулы (3) при $t=1$ найдем:

$$f(M)=f(M_0)+\frac{\mathrm{d}f(M_0)}{1!}+\frac{\mathrm{d}^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{\mathrm{d}^nf(M_0)}{n!}+S_n(M), \tag{4}$$

где

$$S_n(M)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}f(x_0+c\Delta x,\,y_0+c\Delta y)}{(n+1)!},\ c\in(0,1).$$

Представление (4) называется *формулой Тейлора порядка n для функции $f(M)$ в точке M_0*. В частном случае при $M_0=O(0,\,0)$ получим *формулу Маклорена*:

$$f(M)=f(O)+\frac{\mathrm{d}f(O)}{1!}+\frac{\mathrm{d}^2f(O)}{2!}+\ldots+\frac{\mathrm{d}^nf(O)}{n!}+S_n(M)$$

с остатком

$$S_n(M)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}f(cx,\,cy)}{(n+1)!},\ c\in(0,1).$$

Если функция $f(M)$ *непрерывно дифференцируема n раз в ε-окрестности $U(\varepsilon,M_0)$ точки M_0*, то, как и для функции одной переменной, формулу Тейлора для нее мы можем записать в виде

$$f(M)=f(M_0)+\frac{\mathrm{d}f(M_0)}{1!}+\frac{\mathrm{d}^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{\mathrm{d}^nf(M_0)}{n!}+\mathrm{o}(\Delta r^n) \tag{5}$$

и, таким образом, остаток этой формулы является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δr^n, где $\Delta r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Заметим, что по виду формулы Тейлора (4) и (5) вполне аналогичны соответствующим формулам для функции одной переменной (глава V, §5, пункт 1), однако на практике они могут оказаться весьма громоздкими, так как нахождение дифференциалов связано с большим количеством выкладок.

Пример 3. *Записать формулу Маклорена второго порядка вида* (5) *для функции* $z=\operatorname{tg}(xy)$ *из предыдущего примера.*

Решение. Так как для этой функции

$$z(O)=0;\ \mathrm{d}z=z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\cos^2(xy)},\ \mathrm{d}z(O)=0;$$
$$\mathrm{d}^2z=\frac{2}{\cos^2(xy)}\left(y^2\operatorname{tg}(xy)\mathrm{d}x^2+(1+2xy\operatorname{tg}(xy))\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x^2\operatorname{tg}(xy)\mathrm{d}y^2\right),\ \mathrm{d}^2z(O)=2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

то, учитывая, что здесь $\mathrm{d}x=\Delta x=x$, $\mathrm{d}y=\Delta y=y$, по формуле (5) при $n=2$ получим:

$$\operatorname{tg}(xy)=xy+\mathrm{o}(x^2+y^2).$$

§4. Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности

Пусть поверхность Q в пространстве задана *неявным уравнением*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой поверхности. Функцию $F(x, y, z) = 0$ мы будем предполагать непрерывной в некоторой окрестности точки M_0 и дифференцируемой в этой точке.

Рассмотрим произвольную непрерывную кривую L на поверхности Q, проходящую через точку M_0, и пусть

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

– ее параметрические уравнения, причем точке M_0 соответствует значение параметра t_0 и функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ непрерывны в некотором интервале (t_1, t_2), содержащем точку t_0 и дифференцируемы в этой точке. Поскольку

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0,\ t \in (t_1, t_2),$$

то, воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций многих переменных (§2), получим:

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0.$$

В главе V, §7 мы установили, что вектор $\bar{\tau}(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ является направляющим вектором касательной к кривой L в точке M_0. Если ввести еще в рассмотрение вектор

$$\bar{n}\left(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\right), \tag{2}$$

то предыдущее равенство мы можем переписать в векторной форме

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau} = 0$$

и, следовательно, $\bar{n} \perp \bar{\tau}$. Таким образом, мы убедились в том, что направляющий вектор касательной к любой линии на данной поверхности в точке M_0 ортогонален фиксированному вектору $\bar{n}$ и, следовательно, вполне естественным будет следующее

Определение. *Касательной плоскостью к поверхности Q, заданной уравнением* (1), *в точке M_0 называется плоскость, проходящая через эту точку перпендикулярно вектору* (2)[1]. *Вектор* (2) *условимся называть нормальным вектором к данной поверхности в точке M_0.*

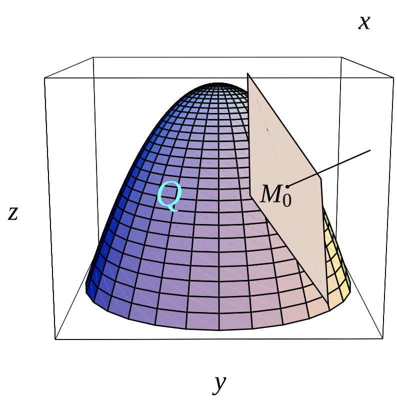
Запишем *общее уравнение касательной плоскости*:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Нормальной прямой к поверхности Q в точке M_0 называется прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости.

Поскольку нормальный вектор касательной плоскости является направляющим вектором нормальной прямой, то ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{4}$$



[1]Чтобы касательная плоскость была определена мы, естественно, должны предполагать, что $\bar{n} \neq \bar{0}$.

Предположим теперь, что поверхность Q задана *явно* уравнением

$$z = f(x, y), \tag{5}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и дифференцируема в этой точке. Переписав уравнение поверхности в виде

$$z - f(x, y) = 0,$$

мы видим, что здесь $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ и, следовательно,

$$F'_x(x, y, z) = -f'_x(x, y),\ F'_y(x, y,\ z) = -f'_y(x, y),\ F'_z(x, y, z) = 1.$$

Тогда уравнения (3) и (4) касательной плоскости и нормальной прямой к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ принимают, соответственно, вид:

$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0;$$
$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Выше мы вели речь о касательной плоскости в фиксированной точке M_0 поверхности. Если же *в каждой точке* M поверхности Q *существует непрерывно изменяющаяся касательная плоскость* и, значит, *непрерывно изменяющийся нормальный вектор* $\bar{n}(M) \neq \bar{0}$, то данная поверхность называется *гладкой.* В частности, поверхность, заданная уравнением (5), где $f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая в некоторой области функция, является, очевидно, гладкой.

Пример. *Найти уравнения всех нормальных прямых к поверхности*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

которые проходят через точку $A(2, 2, 0)$.

Решение. Здесь, очевидно, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ и, стало быть,

$$F'_x(x, y, z) = 2x,\ F'_y(x, y, z) = 2y,\ F'_z(x, y, z) = -2z.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на поверхности, через которую проходит нормальная прямая. Поскольку вектор $\overline{M_0A}(2-x_0, 2-y_0, -z_0)$ коллинеарен нормальному вектору $\bar{n}(2x_0, 2y_0, -2z_0)$, то координаты точки M_0 мы можем найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2 - x_0}{x_0} = \dfrac{2 - y_0}{y_0} = \dfrac{-z_0}{-z_0}, \\ x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $x_0 = y_0$. Тогда, если $z_0 = 0$, то из второго уравнения системы мы находим $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и, таким образом, мы имеем две симметричные относительно начала координат точки на поверхности

$$M_1\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right) \text{ и } M_2\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right).$$

Нормальные прямые к поверхности в этих точках совпадают, так как они имеют общий направляющий вектор $\bar{l}(1, 1, 0)$, коллинеарный радиусам-векторам точек M_1 и M_2. Запишем канонические уравнения общей нормальной прямой:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z}{0}.$$

Если в системе (6) $z_0 \neq 0$, то из первого уравнения мы сразу же получаем $x_0 = y_0 = 1$. Тогда из второго уравнения следует, что $z_0 = \pm 1$ и, значит, мы нашли еще две точки на поверхности:

$$M_3(1, 1, -1) \text{ и } M_4(1, 1, 1).$$

Для первой из этих точек направляющим вектором нормальной прямой служит вектор $\bar{l}_3(1, 1, 1)$, для второй – вектор $\bar{l}_4(1, 1, -1)$ и, следовательно, канонические уравнения нормальных прямых в точках M_3 и M_4 имеют, соответственно, вид:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z}{1} \text{ и } \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

§5. Экстремум функции двух переменных

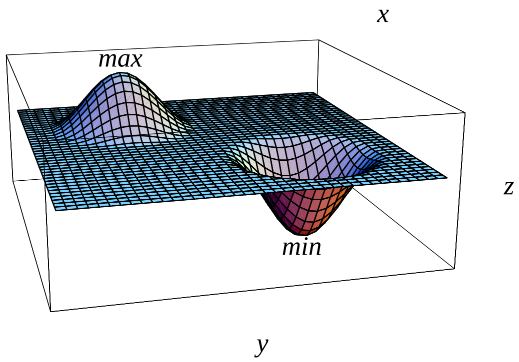
Предположим, что функция двух переменных $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. *Точка M_0 называется точкой локального минимума (максимума) функции $f(M)$, если для всех точек M из достаточно малой ε-окрестности $U(\varepsilon, M_0)$ точки M_0 выполняется неравенство*

$$f(M) \geq f(M_0) \quad (f(M) \leq f(M_0)). \tag{1}$$

Если, кроме того, $f(M) \neq f(M_0)$ при $M \neq M_0$, то будем говорить, что в точке M_0 функция имеет строгий локальный минимум (максимум).

Точки (строгого) локального минимума или максимума функции называются точками ее *(строгого) локального экстремума.*



Очевидно, условия (1) равносильны тому, что в точке экстремума приращение функции

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

сохраняет знак вблизи точки M_0, а именно, $\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) \geq 0$, $M \in U(\varepsilon, M_0)$ для точки минимума и $\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) \leq 0$, $M \in U(\varepsilon, M_0)$ для точки максимума.

По аналогии с экстремумом функции одной переменной установим *необходимое и достаточное условия экстремума* функции двух переменных.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *В точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$ каждая из ее частных производных обращается в нуль или не существует.*

Для доказательства теоремы рассмотрим функции

$$f_1(x) = f(x, y_0) \text{ и } f_2(y) = f(x_0, y)$$

переменных x и y, соответственно. Поскольку функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0, то функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ также имеют экстремум того же характера в точках x_0 и y_0, соответственно. Следовательно, по теореме 2 (глава V, §6, пункт 1) каждая из производных $f_1'(x_0)$ и $f_2'(y_0)$ равна нулю или не существует, что и завершает доказательство, так как, очевидно, $f_x'(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$, $f_y'(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$.

Как и для функции одной переменной доказанное выше *необходимое условие не является достаточным*, т. е., если в некоторой точке частные производные функции равны нулю или не существуют, то совсем необязательно, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, для функции $z = x^3 \sqrt[3]{y}$ ее частная производная $z_x' = 3x^2 \sqrt[3]{y}$ на осях координат обращается в нуль, а вторая частная производная $z_y' = \frac{x^3}{3\sqrt[3]{y^2}}$ равна нулю на оси Oy и не существует на оси Ox, однако ни одна из точек осей координат не является точкой экстремума, так как функция, очевидно, меняет знак в сколь малой окрестности любой из этих точек.

Точка на плоскости, в которой каждая из частных производных равна нулю или не существует, называется *критической точкой функции.*

Приведенный выше пример свидетельствует о том, что не всякая критическая точка является точкой экстремума функции. Выясним условия, при которых критическая точка будет в то же время и точкой экстремума функции.

Предположим, что функция $f(M)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности своей критической точки $M_0(x_0, y_0)$. Представим полное приращение функции в точке M_0 по формуле Тейлора второго порядка (5), §3, учитывая, что в данной точке $\mathrm{d}f(M_0) = 0$:

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(M_0) + \mathrm{o}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right), \tag{2}$$

где приращения аргументов Δx, Δy достаточно малы. Покажем, что, если второй дифференциал $\mathrm{d}^2 f(M_0)$ как функция переменных Δx, Δy *знакоопределен*, т. е. сохраняет определенный знак, когда приращения Δx, Δy не обращаются в нуль одновременно, то в некоторой малой окрестности точки M_0 правая часть формулы (2) имеет тот же знак. Поскольку

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)\Delta y^2, \tag{3}$$

то для этого необходимо прежде всего, чтобы $f''_{xx}(M_0) \neq 0$ и $f''_{yy}(M_0) \neq 0$, так как иначе дифференциал $\mathrm{d}^2 f(M_0)$ обратится в нуль, если одно из приращений аргументов будет равно нулю, а второе – произвольно. Представив далее второй дифференциал в виде

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) = \frac{1}{f''_{xx}(M_0)}\left(\left(f''_{xx}(M_0)\Delta x + f''_{xy}(M_0)\Delta y\right)^2 + \left(f''_{xx}(M_0)f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2\right)\Delta y^2\right), \tag{4}$$

мы замечаем, что он будет сохранять знак в том и только в том случае, когда будет положительной величина

$$D(M_0) = f''_{xx}(M_0)f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2,$$

которую мы с целью обобщения на случай большего числа переменных запишем в виде определителя

$$D(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Из (2) следует, что, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ_ε–окрестность точки M_0, для всех точек которой

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) < \mathrm{o}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) < \frac{\varepsilon}{2}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right),$$

то в той же окрестности

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}^2 f(M_0) - \varepsilon\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)\right) < \Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) < \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}^2 f(M_0) + \varepsilon\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)\right). \tag{5}$$

Учитывая, что величины

$$f''_{xx}(M_0) \pm \varepsilon \text{ и } \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) \pm \varepsilon & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \pm \varepsilon \end{vmatrix}$$

непрерывно зависят от ε и, значит, по свойству 3) непрерывности (глава IV, §5, пункт 1), при малом ε они сохраняют знак чисел $f''_{xx}(M_0) \neq 0$ и $D(M_0) \neq 0$, соответственно, мы можем утверждать, сославшись на представление (4), что при $D(M_0) > 0$ в указанной выше δ_ε–окрестности точки M_0 выражения

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) \pm \varepsilon\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) = (f''_{xx}(M_0) \pm \varepsilon)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + (f''_{yy}(M_0) \pm \varepsilon)\Delta y^2$$

сохраняют знак второго дифференциала $\mathrm{d}^2 f(M_0)$, а именно, при $f''_{xx}(M_0) > 0$ они положительны, а при $f''_{xx}(M_0) < 0$ – отрицательны, если только приращения аргументов Δx и Δy не обращаются в нуль одновременно. Отсюда, принимая во внимание неравенство (5), мы заключаем, что вблизи точки M_0

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) > 0, \text{ если } f''_{xx}(M_0) > 0$$

и, значит, в точке M_0 данная функция имеет *строгий минимум*, а

$$\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y) < 0, \text{ если } f''_{xx}(M_0) < 0$$

и, стало быть, M_0 – точка *строгого максимума* функции.

Если $D(M_0) < 0$, то, как следует из (3), если $f''_{xx}(M_0) = 0$, или из (4), если $f''_{xx}(M_0) \neq 0$, второй дифференциал $\mathrm{d}^2 f(M_0)$, а вместе с ним и выражения $\mathrm{d}^2 f(M_0) \pm \varepsilon\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)$ при малом $\varepsilon > 0$ могут менять знак в сколь угодно малой окрестности точки M_0 и, следовательно, ввиду (5) приращение $\Delta f(M_0, \Delta x, \Delta y)$ также меняет знак вблизи точки M_0, т. е. в этой точке *функция не имеет экстремума.*

Если $D(M_0) = 0$, *то по второму дифференциалу ничего определенного о наличии или отсутствии экстремума в точке* M_0, *вообще говоря, сказать нельзя.* Действительно, рассмотрим функции $z = x^4 + y^4$ и $z = x^4 - y^4$. Для обеих из них начало координат $O(0, 0)$ – критическая точка, в которой частные производные второго порядка, а, значит, и определители $D(O)$, равны нулю. Однако первая из этих функций имеет, очевидно, в точке O *строгий минимум*, а вторая *экстремума не имеет*, так как она меняет знак в любой окрестности начала координат.

Результатом проведенных выше исследований является следующая

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). *Пусть функция двух переменных* $f(M)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности своей критической точки* M_0. *Тогда в этой точке функция имеет строгий экстремум, если*

$$D(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0,$$

а именно, M_0 *– точка строгого минимума, если* $f''_{xx}(M_0) > 0$, *если же* $f''_{xx}(M_0) < 0$, *то в точке* M_0 *функция имеет строгий максимум. В случае* $D(M_0) < 0$ *функция не имеет экстремума в критической точке* M_0.

Пример. *Исследовать на экстремум функцию* $z = x \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. Найдем частные производные данной функции:

$$z'_x = \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2},\ z'_y = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Критические точки функции мы определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \ln\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} & = & 0, \\ \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & = & 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $x = 0$ или $y = 0$. При $x = 0$ из первого уравнения мы находим $y = \pm 1$ и, таким образом, в этом случае мы отыскали две критические точки функции $M_1(0, 1)$ и $M_2(0, -1)$. Аналогично при $y = 0$ найдем еще две критические точки $M_3(e^{-1}, 0)$ и $M_4(-e^{-1}, 0)$. Исследуем на экстремум каждую из критических точек. Найдем частные производные второго порядка функции:

$$z''_{xx} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 2 \cdot \frac{2x(x^2 + y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z''_{xy} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} + 2x^2 \cdot \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)'_y = 2x \cdot \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Поскольку

$$z''_{xx}(M_{1,2}) = z''_{yy}(M_{1,2}) = 0,\ z''_{xy}(M_{1,2}) = \pm 2,$$

то

$$D(M_{1,2}) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

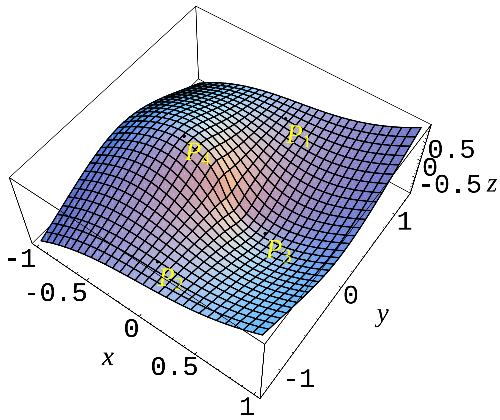
и, следовательно, функция не имеет экстремума в точках M_1 и M_2. Аналогично,

$$z''_{xx}(M_{3,4}) = z''_{yy}(M_{3,4}) = \pm 2e,\ z''_{xy}(M_{3,4}) = 0$$

и

$$D(M_{3,4}) = \begin{vmatrix} \pm 2e & 0 \\ 0 & \pm 2e \end{vmatrix} = 4e^2 > 0.$$

Таким образом, в точках M_3 и M_4 экстремум есть и коль скоро $z''_{xx}(M_3) > 0$, то M_3 – точка строгого минимума, причем $z_{\min} = z(M_3) = -2e^{-1}$; аналогично, поскольку $z''_{xx}(M_4) < 0$, то M_4 – точка строгого максимума и $z_{\max} = z(M_4) = 2e^{-1}$.



На изображенной поверхности точки P_1, P_2, P_3, P_4 соответствуют критическим точкам M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно.

Аналогично формулируется достаточное условие экстремума и для функции большего числа переменных. Например, *если функция трех переменных $f(x,y,z)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности своей критической точки M_0, то в этой точке она будет иметь строгий минимум, если все главные миноры матрицы*

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{xz}(M_0) & f''_{yz}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix},$$

т. е. определители

$$D_1(M_0) = f''_{xx}(M_0),\ D_2(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix},\ D_3(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{xz}(M_0) & f''_{yz}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}$$

положительны. Если же $D_1(M_0) < 0$, $D_2(M_0) > 0$, $D_3(M_0) < 0$, то M_0 – точка строгого максимума данной функции.

§6. Условный экстремум функции двух переменных. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутом ограниченном множестве

Пусть функции двух переменных $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_0 \in D_\varphi$, где D_φ – множество точек на плоскости, удовлетворяющих уравнению

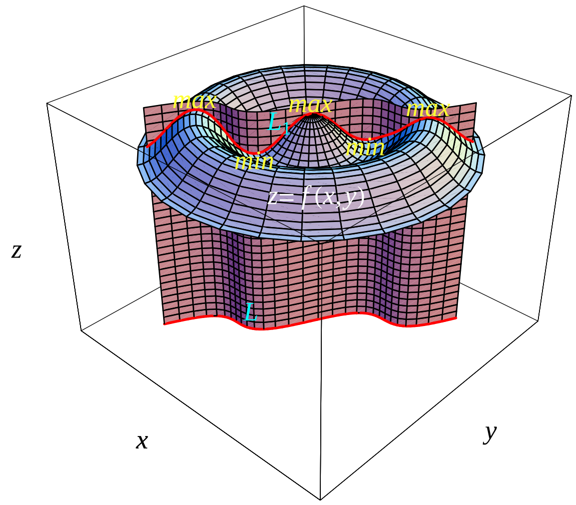
$$\varphi(x,y) = 0, \tag{1}$$

которое мы в дальнейшем будем называть *уравнением связи* или *условием.*

Локальный экстремум в точке M_0 функции $f(x,y)$, рассматриваемой на множестве D_φ, называется условным (относительным) локальным экстремумом.

Если уравнение (1) определяет на плоскости некоторую линию L, то в пространстве ему соответствует цилиндр с направляющей L и образующей, параллельной оси Oz. Поверхность с уравнением $z = f(x,y)$ пересекается с цилиндром по некоторой линии L_1 в пространстве. Пусть точке M_0 условного экстремума функции $f(x,y)$ соответствует точка M_1 на линии L_1.

Тогда все точки линии L_1, достаточно близкие к точке M_1, располагаются не ниже (не выше) этой точки, если M_0 – точка условного минимума (максимума) данной функции.



Если уравнение связи (1) удается разрешить (возможно и неоднозначно) относительно одной из переменных, то, подставив найденное выражение для этой переменной в функцию $f(x, y)$, мы сведем тем самым задачу на условный экстремум функции двух переменных к задаче на экстремум функции одной переменной.

Пример 1. *Найти экстремумы функции $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, если переменные x, y связаны условием $x - y = \frac{\pi}{4}$.*

Решение. Из уравнения связи $y = x - \frac{\pi}{4}$ и, следовательно,

$$z = \cos^2 x + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как

$$z' = 2\cos x(-\sin x) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin 2x - \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 2x + \cos 2x,$$

то критические точки этой функции находятся из уравнения

$$-\sin 2x + \cos 2x = 0,$$

корнями которого являются числа

$$x_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathrm{Z}.$$

Поскольку $z'' = -2\cos 2x - 2\sin 2x$, то

$$z''(x_n) = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \begin{cases} 2\sqrt{2}, & \text{если } n = 2k-1; \\ -2\sqrt{2}, & \text{если } n = 2k \end{cases}$$

и, следовательно, воспользовавшись достаточным признаком экстремума II для функции одной переменной (глава V, §6, пункт 1, теорема 4), мы видим, что функция имеет строгий минимум в точках $x_{2k-1} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi(2k-1)}{2}$, $k \in \mathrm{Z}$ и строгий максимум в точках $x_{2k} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Таким образом, исходная функция имеет строгий условный минимум в точках

$$M_{2k-1}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi(2k-1)}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi(2k-1)}{2}\right),\ k \in \mathrm{Z},$$

причем во всех этих точках $z_{\min} = z(M_{2k-1}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, и, соответственно, строгий условный максимум в точках

$$M_{2k}\left(\frac{\pi}{8} + \pi k, -\frac{\pi}{8} + \pi k\right),\ k \in \mathrm{Z}$$

с максимальным значением $z_{\max} = z(M_{2k}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathrm{Z}$.

Изложим теперь общий метод исследования функции на условный экстремум, который называется *методом множителей Лагранжа.*

Для этого найдем сначала *необходимое условие относительного экстремума.* Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка условного экстремума дифференцируемой в этой точки функции $f(x, y)$ при наличии связи (1), причем будем предполагать, что функция $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и по крайней мере одна из частных производных $\varphi'_x(M_0)$ или $\varphi'_y(M_0)$ отлична от нуля, для определенности будем считать, что $\varphi'_y(M_0) \neq 0$. Тогда уравнение (1) определяет неявную, дифференцируемую в точке x_0 функцию $y = y(x)$, график которой проходит через точку M_0. По правилу дифференцирования неявной функции (формула (10), §2)

$$y'(x_0) = -\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}. \tag{2}$$

Поскольку функция $f(x, y(x))$ имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке ее производная обращается в нуль. Воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций и формулой (2), получим:

$$f'_x(x_0, y(x_0)) + f'_y(x_0, y(x_0))y'(x_0) = 0 \iff f'_x(M_0) - f'_y(M_0)\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = 0 \iff \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}.$$

Следовательно, векторы $(f'_x(M_0), f'_y(M_0))$ и $(\varphi'_x(M_0), \varphi'_y(M_0))$ коллинеарны и, значит, существует действительное число λ_0 такое, что

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda_0\varphi'_x(M_0) = 0, \\ f'_y(M_0) + \lambda_0\varphi'_y(M_0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если при сделанных выше предположениях на функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в точке $M = M_0$ функция $f(x, y)$ имеет условный экстремум, то при некотором действительном $\lambda = \lambda_0$ координаты этой точки *необходимо* удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(M) + \lambda\varphi'_x(M) = 0, \\ f'_y(M) + \lambda\varphi'_y(M) = 0, \\ \varphi(M) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть теперь точка (M_0, λ_0) является решением системы (3). Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что эта точка является *критической* для функции трех переменных

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

которая называется *функцией Лагранжа.* Естественно попытаться использовать второй дифференциал функции Лагранжа в точке (M_0, λ_0) для исследования функции $f(x, y)$ на условный экстремум в точке M_0. Пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки M_0. Как и выше мы предполагаем, что уравнение связи (1) определяет одну из переменных как неявную функцию другой, например, $y = y(x)$ вблизи точки x_0. Поскольку

$$f_1(x) = f(x, y(x)) = L(x, y(x), \lambda),$$

то, учитывая, что ввиду (3) $\mathrm{d}f_1(x_0) = \mathrm{d}L(M_0, \lambda_0) = 0$ и из уравнения связи

$$\varphi'_x(M_0)\mathrm{d}x + \varphi'_y(M_0)\mathrm{d}y = 0, \tag{4}$$

получим:

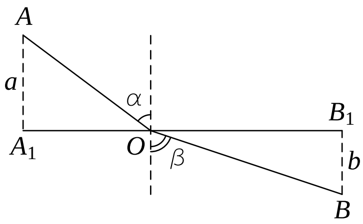
$$\mathrm{d}^2 f_1(x_0) = \mathrm{d}^2 L(M_0, \lambda_0) = L''_{xx}(M_0, \lambda_0)\mathrm{d}x^2 + 2L''_{xy}(M_0, \lambda_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + L''_{yy}(M_0, \lambda_0)\mathrm{d}y^2, \tag{5}$$

где дифференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ связаны линейным равенством (4). Следовательно, *если второй дифференциал* (5) *функции Лагранжа с учетом линейной связи* (4) *между дифференциалами независимых переменных сохраняет знак, если* $\mathrm{d}x$ *и* $\mathrm{d}y$ *не равны нулю одновременно, то* M_0 *– точка строгого условного экстремума функции* $f(x, y)$*, причем, если* $\mathrm{d}^2L(M_0, \lambda_0) > 0$*, то в точке* M_0 *функция имеет строгий условный минимум, а при* $\mathrm{d}^2L(M_0, \lambda_0) < 0$ *– строгий условный максимум.*

Преимуществом описанного метода является тот факт, что в этом случае при исследовании функции на условный экстремум *нет необходимости в явном представлении одной из переменных через другую из уравнения связи*, которого, вообще говоря, может и не существовать.

Пример 2. *Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй – v_2. Пользуясь принципом Ферма, согласно которому световой луч распространяется вдоль той линии AOB, для прохождения которой требуется минимум времени, найти закон преломления света.*

Решение. Обозначим через α и β, соответственно, углы падения и преломления светового луча.



Из треугольников AOA_1 и BOB_1 следует, что расстояния от точек A и B до точки O на отрезке A_1B_1 равны, соответственно, $|AO| = \frac{a}{\cos\alpha}$ и $|OB| = \frac{b}{\cos\beta}$. Тогда общее время прохождения светового луча равно

$$t = \frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta}. \tag{6}$$

Кроме того,

$$|A_1O| + |OB_1| = |A_1B_1| = c \Longleftrightarrow a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta - c = 0. \tag{7}$$

Таким образом, мы имеем задачу на условный экстремум функции (6) при условии (7). Здесь функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta} + \lambda(a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta - c).$$

В критической точке этой функции необходимо $L'_\alpha(\alpha,\beta,\lambda) = 0$, $L'_\beta(\alpha,\beta,\lambda) = 0$ и, следовательно, так как

$$L'_\alpha(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha} + \frac{\lambda a}{\cos^2\alpha},\ L'_\beta(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{b\sin\beta}{v_1\cos^2\beta} + \frac{\lambda b}{\cos^2\beta},$$

то

$$\begin{cases} \dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha} + \dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha} = 0, \\ \dfrac{b\sin\beta}{v_1\cos^2\beta} + \dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta} = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы множитель Лагранжа λ, мы и получим *закон преломления света*:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Замечание. Аналогично мы можем исследовать на условный экстремум функцию большего числа переменных при большем количестве связей. Подробности такого исследования можно найти в любом из учебников по математическому анализу, имеющихся в списке литературы.

Обсудим теперь как находить *глобальные экстремумы, т. е. наименьшее и наибольшее значения* непрерывной в замкнутом ограниченном множестве D на плоскости функции двух переменных $f(x,y)$, которые мы будем обозначать через $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ и $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, соответственно. Заметим, прежде всего, что по теореме Вейерштрасса (§1, теорема 2) глобальные экстремумы существуют. Если какой-то из этих экстремумов достигается во внутренней точке множества D, то необходимо эта точка является критической для данной функции. Отсюда следует, что *для нахождения глобальных экстремумов необходимо определить все критические точки функции, попадающие в множество D и вычислить значения функции в них,* *найти наименьшее и наибольшее значения функции на границе множества D (т. е. решить задачу на условный экстремум) и выбрать среди всех полученных значений минимальное и максимальное.*

Пример 3. *Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 e^{-y}$ в круге $x^2+y^2 \leq 1$.*

Решение. Найдем сначала критические точки функции. Так как

$$z'_x = 2xe^{-y},\ z'_y = -x^2e^{-y},$$

то они находятся из системы

$$\begin{cases} 2xe^{-y} = 0, \\ -x^2e^{-y} = 0, \end{cases}$$

решениями которой в данном круге являются точки $M_1(0, y)$, $y \in [-1, 1]$. В каждой из этих точек $z(M_1) = 0$.

Осталось найти наименьшее и наибольшее значения этой функции на окружности $x^2+y^2=1$. Функция Лагранжа этой задачи на условный экстремум имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = x^2e^{-y} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Поскольку

$$L'_x(x, y, \lambda) = 2xe^{-y} + 2\lambda x,\ L'_y(x, y, \lambda) = -x^2e^{-y} + 2\lambda y,\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1,$$

то для нахождения критических точек функции Лагранжа следует решить систему

$$\begin{cases} 2xe^{-y} + 2\lambda x = 0, \\ -x^2e^{-y} + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Исключив из первых двух уравнений этой системы параметр λ, мы получим уравнение

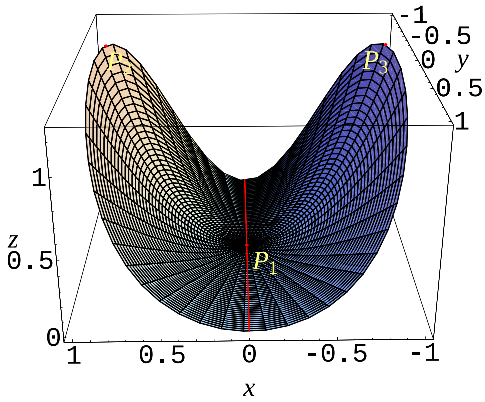
$$x(2y + x^2) = 0,$$

решая которое вместе с последним уравнением системы, мы найдем точки $(0, \pm 1)$, содержащиеся среди найденных выше критических точек данной функции, и точки

$$M_{2,3}\left(\pm\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}, 1-\sqrt{2}\right),$$

для которых $z(M_{2,3}) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}-1}$. Следовательно,

$$\min_{x^2+y^2\leq 1} z(x, y) = z(M_1) = 0,\ \max_{x^2+y^2\leq 1} z(x, y) = z(M_{2,3}) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}-1}.$$



На поверхности точки P_1, P_2, P_3 соответствуют критическим точкам M_1, M_2, M_3, соответственно.

ГЛАВА IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При исследовании различного рода динамично развивающихся процессов, возникающих в физике, химии, биологии, технике, экономике или в какой-нибудь иной науке или области человеческой деятельности, часто бывает трудно, а то и невозможно, найти непосредственно характеристику, определяющую этот процесс, однако сравнительно несложно отыскать функциональную зависимость, связывающую, например, время, искомую характеристику и скорость или ускорение ее изменения, т. е. производные. Указанную зависимость называют *дифференциальным уравнением.* Решение дифференциального уравнения и даст нам неизвестную характеристику.

В качестве простого примера, приводящего к дифференциальному уравнению, рассмотрим следующую задачу: *принято считать, что скорость распада радиоактивного вещества прямо пропорциональна имеющемуся количеству этого вещества. Найти массу радиоактивного вещества в произвольный момент времени, если в начальный момент времени его масса была равна m_0. Найти также период полураспада вещества.*

Обозначим через $m(t)$ массу вещества в момент времени $t \geq 0$. Поскольку скорость распада представляет собой производную массы по времени, то по условию задачи мы можем записать следующее дифференциальное уравнение распада:

$$m'(t) = -km(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности и знак " $-$ " в правой части отражает тот факт, что с течением времени количество радиоактивного вещества уменьшается. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt},$$

где C – произвольная действительная постоянная. Обратим здесь внимание на особенность, характерную для дифференциального уравнения: *его решение представляет собой, вообще говоря, множество функций, зависящих от одной или нескольких произвольных постоянных.* Чтобы выделить из этого множества какое-нибудь *отдельное решение* необходимо задать какие-нибудь *дополнительные условия*, чаще всего, *начальные.* В нашем примере известна начальная масса $m(0) = m_0$, подстановка которой в решение дает нам значение постоянной $C = m_0$ и, таким образом, искомым *решением дифференциального уравнения распада* является функция

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Период полураспада вещества является решением уравнения

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Все встречающиеся ниже в этой главе функции, если не оговорено противное, мы будем предполагать действительными и зависящими от действительных переменных.

В общем виде *дифференциальное уравнение* можно определить как уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

которое связывает независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и n ее производных $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$. Функция F предполагается непрерывной или непрерывно дифференцируемой в некоторой области евклидова пространства R^{n+2}.

Порядок n старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется его *порядком.*

Решением данного дифференциального уравнения называется n раз непрерывно дифференцируемая в некотором интервале (a, b) функция $y = y(x)$, для которой

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \ x \in (a, b).$$

График решения $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ дифференциального уравнения на плоскости Oxy называется *интегральной кривой.*

Перейдем теперь к изучению определенных классов дифференциальных уравнений, простейшими из которых являются

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Ограничимся здесь рассмотрением дифференциальных уравнений первого порядка в *нормальной форме* или разрешенных относительно производной:

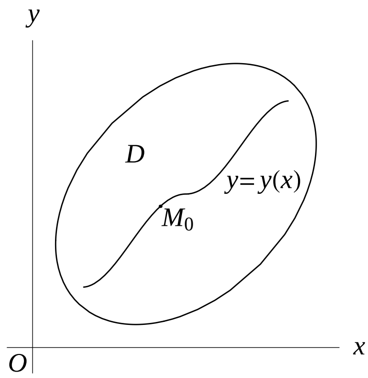
$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ – непрерывная функция своих аргументов в некоторой области D на плоскости.

Как уже отмечалось выше, решение дифференциального уравнения (1) в общем случае зависит от произвольной постоянной и для того, чтобы выделить какое-нибудь определенное решение необходимо задать дополнительное условие, например, начальное.

Задача нахождения решения $y = y(x)$ *дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющего при* $x = x_0$ *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, *где* y_0 *– заданное действительное число и точка* $M_0(x_0, y_0)$ *принадлежит области* D, *называется задачей Коши.*

Геометрически, решить задачу Коши означает найти *интегральную кривую* данного дифференциального уравнения, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости.

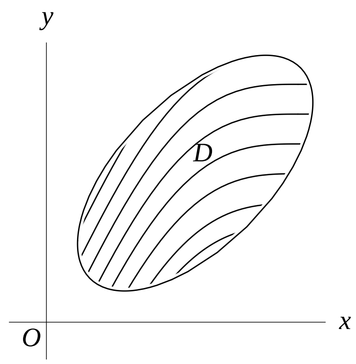


Решение $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ дифференциального уравнения (1) называется *непродолжаемым в области* D, если в этой области не существует его *продолжения*, т. е. решения этого уравнения, определенного в интервале $(a_1, b_1) \supset (a, b)$ и совпадающего с данным решением в интервале (a, b).

В общем случае поведение интегральных кривых дифференциального уравнения (1) может быть очень сложным. Сформулируем теорему, которая при не очень обременительных условиях на правую часть данного уравнения гарантирует простую структуру интегральных кривых этого уравнения.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция* $f(x, y)$ *в правой части дифференциального уравнения* (1) *непрерывна вместе с частной производной* $f'_y(x, y)$ *в области* D. *Тогда для любой точки* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует и единственно непродолжаемое решение задачи Коши с начальным условием* $y(x_0) = y_0$. *Единственность здесь понимается в том смысле, что два решения дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющие данному начальному условию, совпадают.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что в ее условиях интегральные кривые дифференциального уравнения (1) в определенном смысле "*параллельны*" в области D, т. е. они не могут пересекаться.



Введем еще одно важное в теории дифференциальных уравнений определение *общего решения.*

Общим решением дифференциального уравнения (1) *в области D называется функция*

$$y = y(x, C),\ C - \textit{действительная постоянная,}$$

обладающая тем свойством, что для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ из области D существует единственное значение постоянной $C = C_0$, для которого функция $y(x, C_0)$ является непродолжаемым решением задачи Коши с данным начальным условием.

Решение дифференциального уравнения (1), получающееся из общего при конкретном значении постоянной C, называется *частным решением.*

Постоянную C в общем решении можно считать *меткой* или *маркером* задачи Коши. Оказывается, что, вообще говоря, *не все задачи Коши можно промаркировать*, т. е. не для любой задачи Коши в области D существует подходящая константа в общем решении. Однако локально это все-таки верно, а именно, *в условиях сформулированной выше теоремы для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует ее окрестность $U(M_0) \subset D$, в которой существует общее решение дифференциального уравнения* (1).

Доказательство как этого утверждения, так и приведенной выше теоремы существования и единственности, весьма сложны и приводить их здесь мы не будем. Все эти доказательства можно найти, например, в учебнике *Романко В.К.* по курсу дифференциальных уравнений, приведенному в списке литературы.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -y^2.$$

Для него, очевидно, во всей плоскости Oxy выполняются все условия теоремы существования и единственности решений. Прямой проверкой мы можем убедиться в том, что решениями этого уравнения являются функции

$$y = 0 \text{ и } y = \frac{1}{x + C},$$

где C – постоянная. Функция

$$y = \frac{1}{x + C}$$

общим решением данного дифференциального уравнения во всей плоскости не является, так как ни при каком значении постоянной C решения задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = 0$ мы, очевидно, получить не можем. А вот в полуплоскостях $y > 0$ или $y < 0$ эта функция общим решением уже является. Например, для верхней полуплоскости задаче Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0 > 0$ отвечает постоянная $C_0 = \frac{1}{y_0} - x_0$ и соответствующим решением этой задачи является функция $y = \frac{1}{x + C_0}$, $x > -C_0$.

Часто дифференциальное уравнение первого порядка записывают в *симметричной форме* или *дифференциалах*:

$$f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{2}$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – непрерывные в некоторой области D на плоскости функции, причем мы будем предполагать, что

$$|f_1(x, y)| + |f_2(x, y)| > 0$$

в области D, т. е. в любой точке области эти функции не могут обратиться в нуль одновременно (это последнее условие необходимо для того, чтобы при выполнении требований теоремы существования и единственности в области D для дифференциального уравнения (2) существовала касательная к любой интегральной кривой в этой области. Точки, где нарушается данное условие, называются *особыми*). Симметричная форма дифференциального уравнения первого порядка, вообще говоря, *более удобна*, поскольку в этом случае переменные x и y *равноправны*.

Для того, чтобы представить уравнение (1) в форме (2) достаточно записать производную y' как отношение дифференциалов

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

и формально умножить обе его части на $\mathrm{d}x$. В результате получим:

$$f(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

Обратно, уравнение в дифференциалах (2) мы всегда можем представить в нормальной форме (1) в окрестности любой точки области D. Действительно, пусть, например, в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$ $f_1(M_0) \neq 0$. Тогда ввиду непрерывности функции $f_1(M)$ найдется окрестность $U(M_0)$ точки M_0, в которой $f_1(M) \neq 0$, $M \in U(M_0)$ и, стало быть, в этой окрестности мы можем переписать уравнение (2) в виде

$$x' = -\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)},$$

т. е. в нормальной форме (1), где переменная x рассматривается как функция аргумента y. Аналогично, если $f_2(M_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки M_0 мы можем записать уравнение (2) в нормальной форме

$$y' = -\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}.$$

Таким образом, *локально уравнения* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Решение как уравнения (1), так и уравнения (2) может существовать и в *неявном виде*

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

где $F(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая в некоторой области $D_0 \subseteq D$ функция, причем в любой точке этой области по крайней мере одна из частных производных $F'_x(x, y)$ или $F'_y(x, y)$ отлична от нуля. Тогда оно называется *интегралом* дифференциального уравнения. Заметим, что уравнение (3) определяет решение дифференциального уравнения, вообще говоря, не единственным образом.

Для интеграла (3) уравнения (1) должно выполняться равенство $F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y' = 0$ и, следовательно,

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)f(x, y) = 0. \tag{4}$$

Верно и обратное, а именно, если неявно заданная в некотором интервале уравнением (3) функция $y = y(x)$ удовлетворяет соотношению (4), то (3) – интеграл дифференциального уравнения (1).

Аналогично, неявная функция, определяемая уравнением (3) является интегралом дифференциального уравнения (2) в том и только в том случае, когда векторы

$$\big(F'_x(x, y),\ F'_y(x, y)\big) \text{ и } (f_1(x, y),\ f_2(x, y))$$

коллинеарны, что равносильно тому, что

$$\frac{F'_x(x, y)}{f_1(x, y)} = \frac{F'_y(x, y)}{f_2(x, y)}. \tag{5}$$

По аналогии с общим решением можно ввести также определение *общего интеграла*

$$F(x, y, C) = 0,$$

где C – действительная постоянная, дифференциального уравнения (1) или (2).

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x + \left(2y + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y = 0.$$

Интеграл этого дифференциального уравнения в любой из четвертей координатной плоскости, как легко проверить, пользуясь условием (5), имеет вид:

$$x^2 + y^2 + \ln|xy| = C,\ C \in \mathrm{R}.$$

Этот интеграл является в то же время и общим интегралом, так как задаче Коши с произвольным начальным условием $y(x_0) = x_0$, $x_0 y_0 \neq 0$ соответствует единственное значение постоянной $C_0 = x_0^2 + y_0^2 + \ln|x_0 y_0|$.

Как мы увидим ниже, решение простейших дифференциальных уравнений находится с помощью интегрирования или, как говорили наши великие предшественники, *квадратуры*, в связи с чем и сам процесс решения дифференциального уравнения часто называют *интегрированием.* Говорят также, что *дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах*, если его решение выражается через конечное число элементарных функций или интегралов от них.

Существуют дифференциальные уравнения, которые *не интегрируются в квадратурах*, а также уравнения, которые в квадратурах интегрируются, однако *решения их не выражаются через элементарные функции.* Например, дифференциальное уравнение

$$y' = \sin x^2$$

в квадратурах интегрируется, так как его решением является функция

$$y = \int \sin x^2 \mathrm{d}x + C,$$

где C – постоянная, а под интегралом здесь понимается одна из первообразных функции $\sin x^2$, которая, как уже отмечалось (глава VI, §2), через элементарные функции не выражается. Примером дифференциального уравнения, которое не интегрируется в квадратурах, является *уравнение Риккати*

$$y' = x^2 + y^2.$$

Рассмотрим теперь некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка, которые *интегрируются в квадратурах* при условии, что все функции, входящие в эти уравнения являются элементарными.

1. Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое в некоторой прямоугольной области D не имеет особых точек и с помощью эквивалентных преобразований может быть приведено к виду

$$f_1(x)\mathrm{d}x + f_2(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1}$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$ – непрерывные в соответствующих интервалах осей Ox и Oy функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Пусть $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ (или $x = x(y)$, $y \in (c, d)$) – решение уравнения (1) в области D. Тогда для этого решения

$$f_1(x)\mathrm{d}x + f_2(y(x))\mathrm{d}y(x) = 0,\ x \in (a, b).$$

Поскольку функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ непрерывны, то интеграл от левой части последнего равенства существует и, следовательно, данное решение удовлетворяет уравнению

$$\int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(y)\mathrm{d}y = C,\ C \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

где $F_1(x) = \int f_1(x)\mathrm{d}x$ и $F_2(y) = \int f_2(y)\mathrm{d}y$ – фиксированные первообразные данных функций. Таким образом, (2) – *интеграл дифференциального уравнения* (1). Верно и обратное, а именно, функция $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ или $x = x(y)$, $y \in (c, d)$, определяемая в области D уравнением

(2), является решением дифференциального уравнения (1), в чем можно убедиться, взяв дифференциалы от обеих частей равенства (2).

Рассуждая как и выше, мы получим, что интегральная кривая дифференциального уравнения (1), проходящая через точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ имеет уравнение

$$\int_{x_0}^{x} f_1(z)\mathrm{d}z + \int_{y_0}^{y} f_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, последнее уравнение мы можем переписать в виде (2), где $C = F_1(x_0) + F_2(y_0)$ и, таким образом, интеграл (2) содержит решения всех задач Коши данного дифференциального уравнения в области D.

Замечание 1. В процессе приведения исходного дифференциального уравнения к виду (1) мы можем иногда терять некоторые его решения, которые не охватываются уравнением (2).

Замечание 2. Иногда из уравнения (2) мы можем получить явное представление одной переменной через другую, т.е записать множество решений дифференциального уравнения (1) в виде

$$y = y(x, C) \text{ или } x = x(y, C).$$

Пример. *Найти общий интеграл дифференциального уравнения*

$$2e^{x^2-y} - \frac{yy'}{x} = 0.$$

Решение. Разделим переменные в этом уравнении, учитывая, что $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. В результате получим:

$$2xe^{x^2}\mathrm{d}x - ye^y\mathrm{d}y = 0.$$

Так как

$$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 = e^{x^2} + C, \int ye^y\mathrm{d}y = \int y\mathrm{d}e^y = ye^y - \int e^y\mathrm{d}y = e^y(y-1) + C,$$

то при $x \neq 0$ общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$e^{x^2} - e^y(y-1) = C.$$

Разрешив это уравнение относительно переменной x, получим:

$$x = \pm\sqrt{\ln(C + e^y(y-1))}.$$

2. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

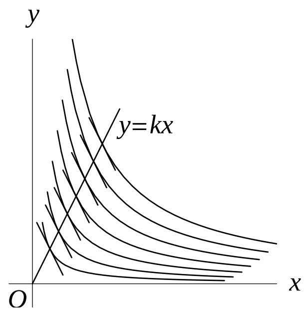
Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если при $x \neq 0$ оно может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

где $f(z)$ – непрерывная в некотором интервале (a, b) функция.

Очевидно, областью, в которой задано данное однородное уравнение, является множество внутренних точек пары вертикальных углов, образованных прямыми $y = ax$, $y = bx$.

Интегральные кривые однородного дифференциального уравнения пересекают фиксированную прямую $y = kx$ под одним и тем же углом, поскольку в точках этой прямой $f\left(\frac{y}{x}\right) = f(k)$.



Подстановкой $y = xz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, однородное уравнение (1) *приводится к уравнению с разделяющимися переменными.* В самом деле, $y' = z + xz'$ и, следовательно,

$$z + xz' = f(z). \tag{2}$$

Рассмотрим три случая.

1) $f(z) \neq z$, $z \in (a, b)$. Здесь уравнение (2) мы можем преобразовать к виду

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{3}$$

и, стало быть,[1]

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \ln|x| + \ln|C| \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \ln|Cx|.$$

Проведя в полученном решении обратную замену $z = \frac{y}{x}$, получим решение (возможно в неявном виде) исходного однородного уравнения.

2) $f(z) \equiv z$. В этом случае из (2) следует, что $xz' = 0$ и, значит, $z = C \Longrightarrow y = Cx$.

3) $f(z_k) = z_k$ в изолированных точках[2] интервала (a, b). Прямой проверкой мы можем убедиться в том, что функции $z = z_k$ – решения дифференциального уравнения (2) и, следовательно, $y = z_k x$ – решения исходного уравнения (1). Остальные решения мы получим, интегрируя уравнение (3).

Замечание. Дифференциальное уравнение без особых точек

$$f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{4}$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – непрерывные *однородные одного порядка*[3] в некоторой области функции, может быть приведено к виду (1). В самом деле, поскольку функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ являются однородными одного порядка, то

$$f_1(x, y) = x^s f_1(1, y/x), \; f_2(x, y) = x^s f_2(1, y/x)$$

при $x \neq 0$ и, следовательно, уравнение (4) равносильно следующему:

$$f_1(1, y/x)\mathrm{d}x + f_2(1, y/x)\mathrm{d}y = 0.$$

Последнее уравнение, очевидно, является однородным.

Пример. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$\left(\mathrm{d}y - \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\right)\cos\frac{y}{x} = \sin^2\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Разделив обе части данного уравнения на $\mathrm{d}x$, преобразуем его к виду

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sin^2\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}.$$

Таким образом, данное уравнение является *однородным.* Проведем в нем подстановку

$$y = xz, \; y' = z + xz'.$$

В результате получим при $\sin z \neq 0$:

$$z + xz' = z + \frac{\sin^2 z}{\cos z} \Longleftrightarrow xz' = \frac{\sin^2 z}{\cos z} \Longleftrightarrow \frac{\cos z}{\sin^2 z}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

---

[1] Произвольную постоянную мы иногда будем записывать в виде, удобном для дальнейших преобразований. Например, если при интегрировании возникают логарифмы, то и произвольную постоянную удобнее записать в виде $\ln|C|$.

[2] Т. е. в некоторых малых интервалах, содержащих эти точки, нет других точек, где $f(z) = z$.

[3] *Однородность порядка* α функции $f(x, y)$ здесь понимается в том смысле, что при всех допустимых значениях параметра s в области, где задана эта функция выполняется тождество

$$f(sx, sy) \equiv s^\alpha f(x, y).$$

Осталось проинтегрировать:

$$\int \frac{\cos z}{\sin^2 z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}\sin z}{\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin z} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|.$$

Выполнив обратную замену, найдем интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\ln|Cx| + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}} = 0.$$

Корни уравнения $\sin z = 0$, т. е. $z_n = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$ дают еще счетное множество решений исходного уравнения:

$$y = \pi n x,\ n \in \mathrm{Z}.$$

3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a(x)$, $f(x)$ – непрерывные в некотором интервале (c, d) функции, называется *линейным.* Если в этом интервале $f(x) \equiv 0$, то данное уравнение называется *линейным однородным.*

Для линейного уравнения в области $D = \{(x, y)\,|\, c < x < d,\ -\infty < y < +\infty\}$ выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, так как записав уравнение (1) в виде

$$y' = -a(x)y + f(x),$$

мы замечаем, что его правая часть непрерывна вместе со своей частной производной по переменной y в области D.

Интегрировать линейное уравнение мы будем *методом Лагранжа* или *методом вариации произвольной постоянной.*

Начнем с соответствующего *однородного линейного уравнения*

$$y' + a(x)y = 0. \tag{2}$$

Очевидно, это уравнение имеет тривиальное решение $y = 0$. При $y \neq 0$ разделим переменные в уравнении (2) и проинтегрируем:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = -\int a(x)\mathrm{d}x + \ln|C| \Longrightarrow \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \Longrightarrow y = \pm C e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Оставив для произвольной постоянной $\pm C$ прежнее обозначение C, мы получим решение однородного уравнения

$$\bar{y} = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x}. \tag{3}$$

Очевидно, это решение при $C = 0$ содержит и тривиальное решение.

Решение исходного линейного уравнения (1) мы будем искать в виде (3), *варьируя постоянную* C, т. е. считая C непрерывно дифференцируемой функцией переменной x :

$$y = \varphi(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

Так как

$$y' = \varphi'(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \varphi(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right)' = \varphi'(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - a(x)\varphi(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x},$$

то после подстановки в (1), получим:

$$\varphi'(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - a(x)\varphi(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)\varphi(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} = f(x)$$

Отсюда,

$$\varphi'(x) = e^{\int a(x)\mathrm{d}x} f(x)$$

и, стало быть,

$$\varphi(x) = \int e^{\int a(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x + C.$$

Подставив найденную функцию $\varphi(x)$ в (4), получим, наконец, решение линейного дифференциального уравнения (1):

$$y = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \left(\int e^{\int a(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x + C \right), \tag{5}$$

где $F_1(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$, $F_2(x) = \int e^{\int a(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x$ – фиксированные первообразные функций $a(x)$ и $e^{F_1(x)} f(x)$, соответственно.

Покажем, что в (5) содержатся решения всех задач Коши данного дифференциального уравнения. Действительно, пусть в области D поставлена задача Коши $y(x_0) = y_0$. Решением этой задачи является функция

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(s)\mathrm{d}s} \left(\int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s} f(t)\mathrm{d}t + y_0 \right) = e^{-F_1(x)} \left(F_2(x) - F_2(x_0) + e^{F_1(x_0)} y_0 \right),$$

которая может быть получена из (5) при $C = -F_2(x_0) + e^{F_1(x_0)} y_0$. Таким образом, функция (5) является *общим решением* линейного дифференциального уравнения (1).

Переписав формулу (5) в виде

$$y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \int e^{\int a(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x$$

и приняв во внимание (3), мы констатируем, что *общее решение линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму частного решения данного уравнения и общего решения соответствующего однородного линейного уравнения.*

Замечание. Иногда дифференциальное уравнение, не являясь линейным относительно функции $y = y(x)$, становится таковым, если искомой считать функцию $x = x(y)$.

Пример 1. *Решить задачу Коши для дифференциального уравнения*

$$y' + y \operatorname{tg} x = \cos x \ln x, \tag{6}$$

если $y(1) = 0$.

Решение. Данное уравнение является *линейным.* Решим сначала соответствующее однородное линейное уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln|y| - \ln|C| = \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|\cos x|.$$

Следовательно, общим решением однородного уравнения является функция

$$\bar{y} = C\cos x.$$

Решение исходного уравнения мы будем искать в виде

$$y = \varphi(x)\cos x.$$

Подстановка его в дифференциальное уравнение (6) дает

$$\varphi'(x)\cos x - \varphi(x)\sin x + \varphi(x)\cos x \operatorname{tg} x = \cos x \ln x \Longleftrightarrow \varphi'(x) = \ln x,$$

откуда

$$\varphi(x) = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\mathrm{d}\ln x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

и, значит,

$$y = (x\ln x - x + C)\cos x$$

– общее решение уравнения (6).

Найдем постоянную C, использовав заданное начальное условие:

$$0 = (1\ln 1 - 1 + C)\cos 1 \Longrightarrow C = 1.$$

Стало быть, решением поставленной задачи Коши является функция

$$y = (x \ln x - x + 1) \cos x.$$

Пример 2. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$y' = \frac{2y-1}{y^{100} - 4x}.$$

Решение. Очевидно, функция $y = 1/2$ является решением данного уравнения. При $y \neq 1/2$, переписав данное уравнение в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y^{100} - 4x}{2y-1} \Longleftrightarrow x' = -\frac{4}{2y-1}\,x + \frac{y^{100}}{2y-1}, \tag{7}$$

мы замечаем, что оно является *линейным* относительно функции $x = x(y)$.

Интегрируем сначала соответствующее *однородное уравнение*:

$$x' = -\frac{4}{2y-1}\,x \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{4}{2y-1}\,\mathrm{d}y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{4}{2y-1}\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = -2\int \frac{\mathrm{d}(2y-1)}{2y-1} \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \ln|2y-1|^{-2},$$

$$\bar{x} = \frac{C}{(2y-1)^2}.$$

Решение дифференциального уравнения (7) имеет структуру

$$x = \varphi(y)\frac{1}{(2y-1)^2}.$$

Подставляя его в данное уравнение, получим:

$$\varphi'(y)\frac{1}{(2y-1)^2} - \varphi(y)\frac{4}{(2y-1)^3} = -\varphi(y)\frac{4}{(2y-1)^3} + \frac{y^{100}}{2y-1}.$$

Отсюда,

$$\varphi'(y) = (2y-1)y^{100}$$

и, следовательно,

$$\varphi(y) = \int (2y-1)y^{100}\mathrm{d}y = \frac{y^{102}}{51} - \frac{y^{101}}{101} + C.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = \left(\frac{y^{102}}{51} - \frac{y^{101}}{101} + C\right)\frac{1}{(2y-1)^2}.$$

4. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = f(x)y^{\alpha},\ \alpha \in \mathrm{R},\ \alpha(\alpha-1) \neq 0, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $f(x)$ – непрерывные в некотором интервале функции, называется *уравнением Бернулли.*

Умножим обе части уравнения (1) на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ и перепишем его в виде

$$\left(y^{1-\alpha}\right)' + (1-\alpha)a(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)f(x).$$

Тогда, если мы проведем в уравнении Бернулли *подстановку* $z = y^{1-\alpha}$, то оно преобразуется к линейному уравнению

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)f(x)$$

относительно новой неизвестной функции $z = z(x)$. Проинтегрировав последнее уравнение, мы обратной заменой найдем решение исходного уравнения Бернулли.

Замечание. Уравнение Бернулли мы можем интегрировать точно также, как и линейное уравнение, т. е. *методом Лагранжа.*

Пример. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y' - y\operatorname{arctg} x = \frac{e^{3x\operatorname{arctg} x}}{y^2\sqrt{(1+x^2)^3}}. \tag{2}$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли. Будем интегрировать его, как и линейное, методом Лагранжа. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' - y\operatorname{arctg} x = 0.$$

Интегрируем его:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x\operatorname{arctg} x - \int x\,\mathrm{d}\operatorname{arctg} x =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int\frac{x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2},$$

$$\bar{y} = C\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение исходного уравнения мы будем искать в виде

$$y = \varphi(x)\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Подставив его в (2), получим:

$$\varphi'(x)\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \varphi(x)\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x - \varphi(x)\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x = \frac{e^{3x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\cdot\frac{1+x^2}{(\varphi(x))^2e^{2x\operatorname{arctg} x}}.$$

Отсюда,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(\varphi(x))^2} \Longrightarrow \varphi^2\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x \Longrightarrow \int\varphi^2\mathrm{d}\varphi = \int\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\varphi^3}{3} = x + \frac{C}{3} \Longrightarrow \varphi(x) = \sqrt[3]{3x+C}.$$

Окончательно,

$$y = \sqrt[3]{3x+C}\cdot\frac{e^{x\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

– общее решение уравнения Бернулли (2).

5. Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$f_1(x,y)\mathrm{d}x + f_2(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

с непрерывными в некоторой области D функциями $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, причем, как всегда, мы предполагаем, что это уравнение не имеет особых точек в данной области. Если существует дифференцируемая в области D функция $u = u(x,y)$, для которой

$$\mathrm{d}u(x,y) = f_1(x,y)\mathrm{d}x + f_2(x,y)\mathrm{d}y \Longleftrightarrow u'_x(x,y) = f_1(x,y),\; u'_y(x,y) = f_2(x,y),\; (x,y)\in D, \tag{2}$$

то (1) называется *уравнением в полных дифференциалах.*

Если $y = y(x)$ – решение уравнения в полных дифференциалах (1) в области D, то для него

$$\mathrm{d}u(x,y(x)) = f_1(x,y(x))\mathrm{d}x + f_2(x,y(x))\mathrm{d}y(x) = 0$$

и, следовательно, $u(x,y(x)) = C$, т. е.

$$u(x,y) = C \tag{3}$$

– *интеграл* данного дифференциального уравнения. Интеграл (3) содержит решения всех задач Коши дифференциального уравнения (1) в данной области, так как интегральная кривая этого уравнения, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)\in D$, имеет уравнение $u(x,y) = u(x_0,y_0)$.

Найдем *простой критерий*, позволяющий определить, является ли уравнение (1) уравнением в полных дифференциалах при условии, что в области D существуют непрерывные частные производные $\partial_y f_1(x,y)$ и $\partial_x f_2(x,y)$.

Предположим сначала, что (1) – уравнение в полных дифференциалах. Ввиду (2) со ссылкой на теорему о равенстве смешанных частных производных из §3 предыдущей главы мы можем утверждать, что

$$u''_{xy}(x,y) = \partial_y f_1(x,y) \equiv u''_{yx}(x,y) = \partial_x f_2(x,y)$$

и, таким образом,

$$\partial_y f_1(x,y) \equiv \partial_x f_2(x,y). \tag{4}$$

Предположим теперь, что область D представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Покажем, что тождество (4) является и достаточным для того, чтобы в этой области (1) было уравнением в полных дифференциалах. Для этого зафиксируем точку $M_0(x_0,y_0) \in D$ и покажем, что функция

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(z,y)\mathrm{d}z + \int\limits_{y_0}^{y} f_2(x_0,z)\mathrm{d}z \tag{5}$$

удовлетворяет условию (2) в любой точке данной области. Найдем ее частные производные, воспользовавшись свойством 7) определенного интеграла (глава VII, §1) и теоремой о дифференцировании под знаком интеграла (глава VIII, §2):

$$u'_x(x,y) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} f_1(z,y)\mathrm{d}z\right)'_x = f_1(x,y),$$

$$u'_y(x,y) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} f_1(z,y)\mathrm{d}z\right)'_y + \left(\int\limits_{y_0}^{y} f_2(x_0,z)\mathrm{d}z\right)'_y = \int\limits_{x_0}^{x} \partial_y f_1(z,y)\mathrm{d}z + f_2(x_0,y) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \partial_z f_2(z,y)\mathrm{d}z + f_2(x_0,y) = f_2(z,y)\Big|_{x_0}^{x} + f_2(x_0,y) = f_2(x,y) - f_2(x_0,y) + f_2(x_0,y) = f_2(x,y).$$

Таким образом, функция (5) обладает свойством (2) и, значит (1) – уравнение в полных дифференциалах.

Резюмируя все вышесказанное, мы можем сказать, что *если функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\partial_y f_1(x,y)$ и $\partial_x f_2(x,y)$ в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, то (1) является уравнением в полных дифференциалах в том и только в том случае, когда в этом прямоугольнике выполняется тождество (4). В этом случае*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(z,y)\mathrm{d}z + \int\limits_{y_0}^{y} f_2(x_0,z)\mathrm{d}z = C$$

– интеграл дифференциального уравнения (1).

Пример. *Найти общий интеграл дифференциального уравнения*

$$\left(\frac{y}{x}\cos\ln x + \ln\cos y\right)\mathrm{d}x + (\sin\ln x - x\,\mathrm{tg}\,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{6}$$

Решение. Здесь функции $f_1(x,y) = \frac{y}{x}\cos\ln x + \ln\cos y$, $f_2(x,y) = \sin\ln x - x\,\mathrm{tg}\,y$ непрерывно дифференцируемы в полосах $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < y < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. В каждой из них тождество (4) имеет место, так как

$$\partial_y f_1(x,y) = \frac{\cos\ln x}{x} + \frac{1}{\cos y}(\cos y)' = \frac{\cos\ln x}{x} - \mathrm{tg}\,y,$$

$$\partial_x f_2(x,y) = \cos\ln x\,(\ln x)' - \mathrm{tg}\,y = \frac{\cos\ln x}{x} - \mathrm{tg}\,y.$$

Таким образом, (6) – уравнение в полных дифференциалах. Найдем его общий интеграл в произвольной полосе, зафиксировав в ней точку $M_0(1, y_n)$, $y_n = 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

$$u(x,y) = \int\limits_1^x \left(\frac{y}{z}\cos\ln z + \ln\cos y\right)\mathrm{d}z + \int\limits_{y_n}^{y}(\sin\ln 1 - \operatorname{tg} z)\mathrm{d}z =$$

$$= y\int\limits_1^x \cos\ln z\,\mathrm{d}\ln z + \ln\cos y \cdot z\Big|_1^x + \int\limits_{y_n}^{y}\frac{\mathrm{d}\cos z}{\cos z} = y\sin\ln z\Big|_1^x + (x-1)\ln\cos y + \ln\cos z\Big|_{y_n}^{y} =$$

$$= y\sin\ln x + (x-1)\ln\cos y + \ln\cos y - \ln\cos y_n = y\sin\ln x + x\ln\cos y.$$

Следовательно,

$$y\sin\ln x + x\ln\cos y = C$$

– общий интеграл дифференциального уравнения (6).

§2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Переформулируем *основные определения* предыдущего параграфа для дифференциального уравнения порядка выше первого.

Дифференциальное уравнение n-го порядка в нормальной форме имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1}$$

где $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ – непрерывная в некоторой области D пространства R^{n+1} функция.

Если уравнение (1) интегрируется в квадратурах, то операцию интегрирования приходится выполнять n раз и, следовательно, решение этого дифференциального уравнения зависит от n произвольных постоянных. Поэтому, если требуется найти частное решение, то необходимо подчинить его n дополнительным условиям, чаще всего начальным, которые позволят найти постоянные.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) *называется задача нахождения его решения $y = y(x)$, удовлетворяющего при $x = x_0$ n начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где y_0, y'_0, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — заданные действительные числа и $M_0\left(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$.

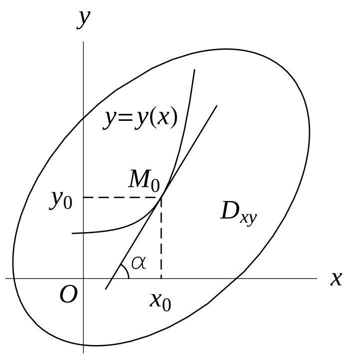
Для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3}$$

мы можем дать *геометрическую интерпретацию* задачи Коши с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$$

Эта задача заключается в нахождении интегральной кривой уравнения (3), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} y'_0$ с положительным направлением оси Ox.



Теорема существования и единственности решения задачи Коши обобщается, естественно, и на дифференциальное уравнение (1).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Пусть функция* $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *в правой части дифференциального уравнения* (1) *непрерывна вместе с частными производными*

$$f'_y\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),\; f'_{y'}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),\; \ldots,\; f'_{y^{(n-1)}}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

в области D. *Тогда для любой точки* $M_0\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ *существует и единственно непродолжаемое решение задачи Коши с начальными условиями* (2).

Функция

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_n – постоянные, называется *общим решением дифференциального уравнения* (1) *в области* D, если для любой точки $M_0\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственная совокупность значений постоянных $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, $\ldots$, $C_n = C_{n0}$, для которой функция

$$y = y\left(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}\right)$$

является непродолжаемым решением задачи Коши с начальными условиями (2).

Рассмотрим теперь *некоторые типы дифференциальных уравнений* (1), *порядок которых мы можем понизить* и, следовательно, в некоторых случаях свести их к дифференциальным уравнениям первого порядка, изученным в предыдущем параграфе.

a) *Уравнение вида* $y^{(n)} = f(x)$, $f(x)$ *– непрерывная в некотором интервале функция.*

Интегрирование правой части этого уравнения понижает, очевидно, его порядок на единицу. Следовательно, *решение данного дифференциального уравнения находится* n*-кратным интегрированием функции* $f(x)$:

$$y = \int\left(\int\left(\ldots\int f(x)\mathrm{d}x\ldots\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

Пример 1. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$x^3y''' = 1.$$

Решение. Здесь

$$y''' = \frac{1}{x^3}$$

и, следовательно,

$$y'' = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{x^{-2}}{-2} + 2C_1,\; y' = -\frac{1}{2}\int x^{-2}\mathrm{d}x + 2C_1x + C_2 = \frac{1}{2}x^{-1} + 2C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{2}\int x^{-1}\mathrm{d}x + C_1x^2 + C_2x + C_3 = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

– общее решение данного дифференциального уравнения.

b) *Уравнение* $y^{(n)} = f\left(x, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, *правая часть которого не содержит искомой функции* $y = y(x)$ *и непрерывна в некоторой области пространства* R^n.

Подстановка $y' = z$, *где* $z = z(x)$ *– новая неизвестная функция, понижает порядок этого уравнения на единицу.* Результатом данной подстановки является дифференциальное уравнение

$$z^{(n-1)} = f\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-2)}\right).$$

Пример 2. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$-y''\operatorname{ctg}x = y' + 1.$$

Решение. Подстановка $y' = z(x)$ приводит данное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $z = z(x)$:

$$-z'\operatorname{ctg}x = z + 1 \iff \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = -\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x.$$

Проинтегрируем его:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = -\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(z+1)}{z+1} = \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} \Longleftrightarrow \ln|z+1| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|.$$

Следовательно,

$$z+1 = C_1\cos x \Longrightarrow y' = C_1\cos x - 1 \Longrightarrow y = \int (C_1\cos x - 1)\mathrm{d}x = C_1\sin x - x + C_2.$$

Исходное дифференциальное уравнение исключает точки $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$ и в процессе разделения переменных мы также исключили точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. Поэтому функция

$$y = C_1\sin x - x + C_2$$

является общим решением исходного дифференциального уравнения в каждой из полос

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

c) *Уравнение* $y^{(n)} = f\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *с непрерывной в некоторой области пространства* R^n *правой частью, которая не содержит независимой переменной* x.

Здесь понижает порядок данного дифференциального уравнения на единицу подстановка $y' = z$, $z = z(y)$. Действительно, использовав правило дифференцирования композиции функций, найдем

$$y'' = z'_y y' = z'_y z,\ y''' = z''_{yy} y' z + z'_y z'_y y' = z''_{yy} z^2 + (z'_y)^2 z,\ \ldots,\ y^{(n)} = z^{(n-1)}_{y^{n-1}} z^{n-1} + \ldots + (z'_y)^{n-1} z$$

и, стало быть, данное дифференциальное уравнение приводится к виду

$$z^{(n-1)}_{y^{n-1}} z^{n-1} = f_1\left(y, z, z'_y, \ldots, z^{(n-2)}_{y^{n-2}}\right),$$

где f_1 – непрерывная функция своих аргументов.

Пример 3. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$yy'' = 3(y')^2 + y^2 y'.$$

Решение. Проведем в уравнении подстановку $y' = z(y)$. Поскольку $y'' = z'_y y' = z'_y z$, то данное уравнение приводится к виду

$$y z'_y z = 3z^2 + y^2 z.$$

1) Если $z = 0$, то $y' = 0$ и, значит, $y = C$ – решения данного уравнения.

2) В случае $z \neq 0$ мы приходим к линейному относительно функции $z = z(y)$ уравнению

$$y z'_y = 3z + y^2.$$

Проинтегрируем сначала соответствующее однородное линейное уравнение:

$$y z'_y = 3z \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z} = 3\frac{\mathrm{d}y}{y} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = 3\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Longleftrightarrow \ln|z| = 3\ln|y| + \ln|C_1| \Longrightarrow \bar{z} = C_1 y^3.$$

Тогда решение линейного неоднородного уравнения мы будем искать в виде

$$z = \varphi(y) y^3.$$

Поскольку $z'_y = \varphi'(y) y^3 + 3\varphi(y) y^2$, то

$$y\left(\varphi'(y) y^3 + 3\varphi(y) y^2\right) = 3\varphi(y) y^3 + y^2$$

и, следовательно,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow \varphi(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y} + C_1.$$

Таким образом,

$$y' = z = \left(-\frac{1}{y} + C_1\right) y^3 = y^2\left(C_1 y - 1\right).$$

Разделим переменные в этом последнем уравнении и проинтегрируем:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2\,(C_1y-1)}=\mathrm{d}x \Longrightarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{y^2\,(C_1y-1)}=\int\mathrm{d}x \Longleftrightarrow x=\int\left(\frac{C_1^2}{C_1y-1}-\frac{C_1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=C_1\int\frac{d(C_1y-1)}{C_1y-1}-C_1\ln|y|+\frac{1}{y}=C_1\ln|C_1y-1|-C_1\ln|y|+\frac{1}{y}+C_2.$$

Значит, в этом случае

$$x=C_1\ln|C_1y-1|-C_1\ln|y|+\frac{1}{y}+C_2$$

– общий интеграл данного дифференциального уравнения.

§3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

В этом параграфе излагаются основы общей теории линейных дифференциальных уравнений – на взгляд автора, наиболее изящной и законченной в курсе дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{1}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ – непрерывные в некотором интервале (c,d) функции. Если в этом интервале $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, иначе – *неоднородным.*

Как следует из теоремы существования и единственности (§2), для линейного уравнения (1) любая задача Коши

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

однозначно разрешима в области, где $x_0\in(c,d)$, а y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ – произвольные действительные числа. В этой же области существует и *общее решение* данного уравнения.

Для удобства дальнейшего изложения левую часть линейного уравнения (1) мы будем рассматривать как результат действия *линейного оператора* L_n, определенного на множестве $\mathfrak{M}_n$ n раз непрерывно дифференцируемых в интервале (c,d) функций $y=y(x)$, т. е.

$$L_ny=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y. \tag{2}$$

Таким образом, уравнение (1) мы можем переписать в следующей компактной форме:

$$L_ny=f(x). \tag{3}$$

Из определения (2) оператора L_n и линейности производной следует, что для любых действительных чисел α_1, α_2, …, α_s и функций $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, …, $y_s=y_s(x)\in\mathfrak{M}_n$ имеет место *свойство линейности оператора* L_n :

$$L_n(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_sy_s)=\alpha_1L_ny_1+\alpha_2L_ny_2+\ldots+\alpha_sL_ny_s. \tag{4}$$

Займемся сначала *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка*

$$L_ny=0. \tag{5}$$

Отметим прежде всего, что функция $y=0$ является решением этого уравнения.

Из свойства (4) следует, что *любая линейная комбинация решений линейного однородного дифференциального уравнения является его решением*, т. е. если

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_s(x)$$

– решения уравнения (5), то функция

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\ldots+\alpha_sy_s(x),$$

где α_1, α_2, …, α_s – действительные постоянные (коэффициенты), также является решением этого уравнения:

$$L_n(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_sy_s)=0. \tag{6}$$

В самом деле, коль скоро $L_n y_1 = 0$, $L_n y_2 = 0$, $\ldots$, $L_n y_s = 0$, то

$$L_n(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_s y_s) = \alpha_1 L_n y_1 + \alpha_2 L_n y_2 + \ldots + \alpha_s L_n y_s = 0.$$

В §8 главы V была определена комплексная функция действительного аргумента. Там же было указано и правило ее дифференцирования. Поэтому оператор L_n мы можем применить и к комплексной функции $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, где $y_1(x),\ y_2(x) \in \mathfrak{M}_n$ и, следовательно, *линейное однородное уравнение (5) может иметь комплексные решения.* Ввиду линейности оператора L_n для комплексного решения

$$z(x) = y_1(x) + iy_2(x),$$

где $y_1(x),\ y_2(x) \in \mathfrak{M}_n$ справедливо

$$L_n z = L_n(y_1 + iy_2) = L_n y_1 + iL_n y_2 = 0 \Longleftrightarrow L_n y_1 = 0,\ L_n y_2 = 0, \tag{7}$$

т. е. *действительная и мнимая части комплексного решения однородного уравнения (5) являются действительными решениями этого уравнения.*

Для того, чтобы выяснить *структуру общего решения* однородного уравнения (5) введем понятие *линейной зависимости функций.*

Функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_s(x)$ из множества $\mathfrak{M}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$, не все равные нулю, для которых

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_s y_s(x) \equiv 0. \tag{8}$$

Иначе говоря, функции линейно зависимы, если одна из этих функций представляется в виде линейной комбинации остальных.

Если тождество (8) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, то данные функции называются *линейно независимыми.* В этом случае ни одна из этих функций не выражается линейно через остальные.

Выясним, например, являются ли линейно зависимыми на всей числовой оси функции $1,\ \sin x,\ \cos x$. Для этого рассмотрим тождество

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x \equiv 0.$$

Из него мы при $x = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi$ получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно первое и третье уравнения, найдем $2\alpha_1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = 0$. Тогда из первого и второго уравнений $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Следовательно, данные функции линейно независимы.

Для функций же $1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$ выполняется тождество

$$1 - \sin^2 x - \cos^2 x \equiv 0$$

и, значит, эти функции линейно зависимы.

Исследовать линейную зависимость функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_s(x)$, $s \le n$ весьма удобно с помощью специального функционального определителя

$$W_s(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_s(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_s'(x) \\ . & . & \ldots & . \\ y_1^{(s-1)}(x) & y_2^{(s-1)}(x) & \ldots & y_s^{(s-1)}(x) \end{vmatrix},$$

который называется *определителем Вронского.*

Лемма 1. *Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_s(x)$, $s \le n$ линейно зависимы, то $W_s(x) \equiv 0$.*

Доказательство. По определению линейной зависимости найдутся действительные числа, не все равные нулю, для которых выполняется тождество (8). Дифференцируя почленно это тождество $s-1$ раз, мы придем к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, ..., α_s :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 y_1(x) & + & \alpha_2 y_2(x) & + & \dots & + & \alpha_s y_s(x) & \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) & + & \alpha_2 y_2'(x) & + & \dots & + & \alpha_s y_s'(x) & \equiv 0, \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ \alpha_1 y_1^{(s-1)}(x) & + & \alpha_2 y_2^{(s-1)}(x) & + & \dots & + & \alpha_s y_s^{(s-1)}(x) & \equiv 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

Определителем матрицы этой системы является как раз определитель Вронского $W_s(x)$ и, следовательно, $W_s(x) \equiv 0$, поскольку данная однородная система имеет ненулевое решение (здесь мы воспользовались замечанием, сделанным в главе I, §5, пункт 3).

Для n решений линейного однородного дифференциального уравнения (5) справедливо и *обратное* утверждение.

Лемма 2. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – решения уравнения* (5), *то они линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W_n(x) \equiv 0$.*

Необходимость этого утверждения доказана в лемме 1. Докажем *достаточность* условия $W_n(x) \equiv 0$ для линейной зависимости решений. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (c, d)$ и рассмотрим в этой точке однородную систему линейных алгебраических уравнений (9) при $s = n$. Определитель матрицы этой системы равен $W_n(x_0) = 0$ и, значит, она имеет ненулевое решение α_{10}, α_{20}, ..., α_{n0}. Рассмотрим функцию

$$y(x) = \alpha_{10} y_1(x) + \alpha_{20} y_2(x) + \dots + \alpha_{n0} y_n(x).$$

Ввиду (6) она является решением однородного уравнения (5) и, коль скоро

$$\begin{array}{l} y(x_0) = \alpha_{10} y_1(x_0) + \alpha_{20} y_2(x_0) + \dots + \alpha_{n0} y_n(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = \alpha_{10} y_1'(x_0) + \alpha_{20} y_2'(x_0) + \dots + \alpha_{n0} y_n'(x_0) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{10} y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_{20} y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_{n0} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{array}$$

то по теореме существования и единственности решения задачи Коши $y(x) \equiv 0$, т. е.

$$\alpha_{10} y_1(x) + \alpha_{20} y_2(x) + \dots + \alpha_{n0} y_n(x) \equiv 0,$$

что и означает линейную зависимость решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Из леммы 1 следует

Лемма 3. *Если для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_s(x)$, $s \le n$ в некоторой точке x_0 интервала (c, d) $W_s(x_0) \ne 0$, то эти функции линейно независимы.*

Действительно, если бы они были линейно зависимыми, то по лемме 1 всюду в интервале (c, d) выполнялось бы равенство $W_s(x) = 0$, что противоречит условию.

Аналогично, следствием леммы 2 является

Лемма 4. *Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ однородного уравнения* (5) *линейно независимы в том и только в том случае, когда $W_n(x) \ne 0$, $x \in (c, d)$.*

Пример 1. *Являются ли функции*

$$e^{\lambda x}, \ x e^{\lambda x}, \ \dots, \ x^k e^{\lambda x}, \ \lambda \in \mathrm{C}, \ k \in \mathrm{N}$$

линейно независимыми?

Решение. Общий множитель $e^{\lambda x}$ этих функций отличен от нуля при всех действительных x, поэтому он не влияет на характер их линейной зависимости. Вычислим определитель Вронского для функций 1, x, ..., x^k.

$$W_{k+1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^k \\ 0 & 1 & \dots & k x^{k-1} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & k! \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot k! \ne 0,$$

следовательно, по лемме 3 данные функции *линейно независимы.*

Линейная зависимость *комплексных функций действительного аргумента* определяется по аналогии с действительными функциями, причем коэффициенты линейных комбинаций этих функций следует также считать комплексными.

Лемма 5. *Пусть* $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\ldots$, $z_s(x)$, $x \in (c,d)$ *– линейно независимые функции, среди которых имеются комплексные, причем вместе с каждой комплексной функцией в эту систему входит и комплексно сопряженная с ней. Тогда, заменив любую пару комплексно сопряженных функций действительной и мнимой частями одной из них, мы опять же получим систему линейно независимых функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перенумеровав, если необходимо, функции, будем считать, что

$$z_1(x) = y_1(x) + iy_2(x),\; z_2(x) = y_1(x) - iy_2(x)$$

– пара комплексно сопряженных функций. Складывая и вычитая эти два равенства, найдем

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(z_1(x) + z_2(x)),\; y_2(x) = -\frac{i}{2}(z_1(x) - z_2(x)).$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 z_3(x) + \ldots + \alpha_s z_s(x) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 i}{2} z_1(x) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 i}{2} z_2(x) + \ldots + \alpha_s z_s(x)$$

с комплексными коэффициентами. Поскольку функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, $\ldots$, $z_s(x)$ линейно независимы, то данная линейная комбинация тождественна равна нулю в интервале (c,d) только в том случае, когда

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2 i}{2} = 0,\; \frac{\alpha_1 + \alpha_2 i}{2} = 0,\; \alpha_3 = 0,\; \ldots,\; \alpha_s = 0.$$

Следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots$, $\alpha_s = 0$, что и доказывает линейную независимость системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_3(x)$, $\ldots$, $z_s(x)$.

Совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (5) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Покажем, что фундаментальная система решений однородного уравнения *существует.* Рассмотрим произвольную *невырожденную* матрицу n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Решения

$$y_1(x),\; y_2(x),\; \ldots,\; y_n(x)$$

уравнения (5) с начальными условиями

$$y_k(x_0) = a_{1k},\; y_k'(x_0) = a_{2k},\; \ldots,\; y_k^{(n-1)}(x_0) = a_{nk},\; k = \overline{1,n}$$

как раз и образуют фундаментальную систему решений этого уравнения, так как, во-первых, по теореме существования и единственности эти решения существуют и, во-вторых, по лемме 3 они линейно независимы, поскольку для них $W_n(x_0) = |A| \neq 0$.

Покажем, что знания фундаментальной системы решений достаточно, чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения.

Теорема 1 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). *Пусть*

$$y_1(x),\; y_2(x),\; \ldots,\; y_n(x)$$

– фундаментальная система решений уравнения (5). Тогда функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{10}$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_n *– произвольные действительные числа, является общим решением данного уравнения, т. е. общее решение линейного однородного дифференциального уравнения представляет собой линейную комбинацию с произвольными действительными коэффициентами решений фундаментальной системы решений этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что ввиду (6) функция (10) является решением уравнения (5) при любых значениях постоянных. Рассмотрим теперь произвольную задачу Коши для данного уравнения с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Подберем постоянные так, чтобы для них функция (10) являлась решением поставленной задачи Коши. Продифференцировав функцию (10) $n-1$ раз и воспользовавшись начальными условиями, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n(x_0) & = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n'(x_0) & = y_0', \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \ldots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Определителем основной матрицы этой системы является определитель Вронского $W_n(x_0)$. По лемме 4 $W_n(x_0) \neq 0$ и, стало быть, данная система имеет единственное решение

$$C_1 = C_{10},\ C_2 = C_{20},\ \ldots,\ C_n = C_{n0}.$$

Таким образом, функция $y = C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x) + \ldots + C_{n0}y_n(x)$ – решение сформулированной выше задачи Коши, что и доказывает теорему.

Пример 2. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Решение. Прямой проверкой несложно убедиться в том, что функции

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x$$

являются решениями данного линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка. Кроме того (пример 1), эти решения линейно независимы и, значит, они образуют фундаментальную систему решений. Осталось воспользоваться теоремой 1 и записать общее решение данного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Замечание 1. Несмотря на то, что структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения известна, найти это решение в общем случае *не представляется возможным.* Существуют линейные однородные уравнения, которые не интегрируются в квадратурах. Рассмотрим, например, однородное уравнение второго порядка

$$y'' = -x^2y.$$

Выполним в нем при $y \neq 0$ подстановку $y = \pm e^{-\int z(x)\mathrm{d}x}$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Так как

$$y' = \pm e^{-\int z(x)\mathrm{d}x}\left(-\int z(x)\mathrm{d}x\right)' = -yz,\ y'' = -y'z - yz' = yz^2 - yz',$$

то исходное дифференциальное уравнение приводится к виду

$$yz^2 - yz' = -x^2y$$

или

$$z' = x^2 + z^2.$$

Полученное *уравнение Риккати*, как уже отмечалось в §1 настоящей главы, не интегрируется в квадратурах, следовательно, не интегрируется в квадратурах и данное линейное однородное уравнение второго порядка.

Рассмотрим теперь *линейное неоднородное дифференциальное уравнение* (3). Мы можем найти его общее решение, если известно какое-нибудь частное решение этого уравнения и общее решение соответствующего однородного уравнения.

Теорема 2 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, т. е. если $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (3) и $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (5), то*

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x) \tag{11}$$

– общее решение неоднородного уравнения (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны, функция (11) является решением уравнения (3), так как благодаря (4)

$$L_n y = L_n(y^* + \bar{y}) = L_n y^* + L_n \bar{y} = f(x) + 0 = f(x).$$

С другой, – функция (11) содержит решение любой задачи Коши для дифференциального уравнения (3) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

так как для решения $y(x)$ этой задачи функция $\bar{y}_0(x) = y(x) - y^*(x)$ служит решением[1] задачи Коши для однородного уравнения (5) с начальными условиями

$$\bar{y}_0(x_0) = y_0 - y^*(x_0),\ \bar{y}_0'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0),\ \ldots,\ \bar{y}_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - (y^*)^{(n-1)}(x_0)$$

и, значит, по теореме 1 она входит в общее решение $\bar{y}(x)$ однородного уравнения. Т е о р е м а д о к а з а н а.

Метод Лагранжа, который мы использовали для интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка, *обобщается* и на линейное неоднородное дифференциальное уравнение высших порядков при условии, что нам известна фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения.

Пусть

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

– фундаментальная система решений однородного уравнения (5), соответствующего неоднородному уравнению (3). Тогда по теореме 1 функция

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

является общим решением однородного уравнения.

Варьируя постоянные, мы будем искать решение уравнения (3) в виде

$$y = \varphi_1(x) y_1(x) + \varphi_2(x) y_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) y_n(x), \tag{12}$$

где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ – неизвестные дифференцируемые функции.

Станем последовательно дифференцировать $n-1$ раз функцию (12), заботясь на каждом шаге, чтобы для каждой производной сохранялась структура соответствующей производной общего решения линейного однородного уравнения. Поскольку

$$y' = \varphi_1'(x) y_1(x) + \varphi_2'(x) y_2(x) + \ldots + \varphi_n'(x) y_n(x) + \varphi_1(x) y_1'(x) + \varphi_2(x) y_2'(x) + \ldots + \varphi_n(x) y_n'(x),$$

то, полагая

$$\varphi_1'(x) y_1(x) + \varphi_2'(x) y_2(x) + \ldots + \varphi_n'(x) y_n(x) = 0,$$

мы получим

$$y' = \varphi_1(x) y_1'(x) + \varphi_2(x) y_2'(x) + \ldots + \varphi_n(x) y_n'(x).$$

Аналогично,

$$y'' = \varphi_1(x) y_1''(x) + \varphi_2(x) y_2''(x) + \ldots + \varphi_n(x) y_n''(x),$$

если

$$\varphi_1'(x) y_1'(x) + \varphi_2'(x) y_2'(x) + \ldots + \varphi_n'(x) y_n'(x) = 0.$$

Продолжая этот процесс, после $(n-1)$-го шага мы найдем

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \varphi_2(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n(x) y_n^{(n-1)}(x),$$

---

[1] Так как $L_n \bar{y}_0 = L_n(y - y^*) = L_n y - L_n y^* = f(x) - f(x) = 0$.

если

$$\varphi_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \varphi_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Дифференцируя еще один раз и подставляя функцию (12) и все ее производные в неоднородное уравнение (3), мы после перегруппировки слагаемых придем к уравнению

$$\varphi_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \varphi_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$+\varphi_1(x)L_n y_1 + \varphi_2(x)L_n y_2 + \ldots + \varphi_n(x)L_n y_n = f(x)$$

и, значит,

$$\varphi_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \varphi_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Таким образом, производные неизвестных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} \varphi_1'(x)y_1(x) & + & \varphi_2'(x)y_2(x) & + & \ldots & + & \varphi_n'(x)y_n(x) & = 0, \\ \varphi_1'(x)y_1'(x) & + & \varphi_2'(x)y_2'(x) & + & \ldots & + & \varphi_n'(x)y_n'(x) & = 0, \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & \varphi_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & \ldots & + & \varphi_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = 0, \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & \varphi_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & \ldots & + & \varphi_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = f(x). \end{array}\right. \tag{13}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку определителем ее основной матрицы является определитель Вронского фундаментальной системы решений, который по лемме 4 отличен от нуля в любой точке интервала (c, d). Решив систему (13), мы найдем производные

$$\varphi_1'(x) = \psi_1(x),\ \varphi_2'(x) = \psi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n'(x) = \psi_n(x),$$

а, значит, с помощью квадратур и неизвестные функции

$$\varphi_1(x) = \int \psi_1(x)\mathrm{d}x + C_1,\ \varphi_2(x) = \int \psi_2(x)\mathrm{d}x + C_2,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = \int \psi_n(x)\mathrm{d}x + C_n.$$

Подстановка найденных функций в (12) дает нам общее решение линейного неоднородного уравнения (3)

$$y = \left(\int \psi_1(x)\mathrm{d}x + C_1\right) y_1(x) + \left(\int \psi_2(x)\mathrm{d}x + C_2\right) y_2(x) + \ldots + \left(\int \psi_n(x)\mathrm{d}x + C_n\right) y_n(x).$$

Таким образом, метод Лагранжа позволяет *проинтегрировать в квадратурах* линейное неоднородное уравнение (3), если соответствующее линейное однородное уравнение (5) интегрируется в квадратурах, а правая часть $f(x)$ является элементарной функцией.

Пример 3. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение*

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Функции $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, как нетрудно проверить, являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$y''' + y' = 0,$$

соответствующего данному линейному неоднородному уравнению третьего порядка. Выше мы убедились, что они линейно независимы и, значит, образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения. Запишем его общее решение:

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Воспользовавшись методом Лагранжа, представим решение данного неоднородного уравнения в форме

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\cos x + \varphi_3(x)\sin x. \tag{14}$$

Производные неизвестных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ удовлетворяют системе (13) для данного уравнения:

$$\left\{\begin{array}{r} \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_3'(x)\sin x = 0, \\ -\varphi_2'(x)\sin x + \varphi_3'(x)\cos x = 0, \\ -\varphi_2(x)\cos x - \varphi_3(x)\sin x = \operatorname{tg} x. \end{array}\right.$$

Из второго и третьего уравнений мы без труда находим

$$\varphi_2'(x) = -\sin x,\ \varphi_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Тогда из первого уравнения $\varphi_1'(x) = \operatorname{tg} x$. Следовательно,

$$\varphi_1(x) = \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C_1,\ \varphi_2(x) = -\int \sin x \, \mathrm{d}x = \cos x + C_2,$$

$$\varphi_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)\mathrm{d}x = \sin x + \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \sin x + \int \frac{\mathrm{d}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C_3.$$

Подставляя найденные функции в (14), получим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 - \ln|\cos x| + C_2 \cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C_3\right)\sin x.$$

Замечание 2. Предположим, что правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (3) представляет собой *сумму двух функций*, т. е.

$$L_n y = f_1(x) + f_2(x). \tag{15}$$

Тогда, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения дифференциальных уравнений

$$L_n y = f_1(x) \text{ и } L_n y = f_2(x),$$

соответственно, то функция

$$y = y_1(x) + y_2(x)$$

является решением дифференциального уравнения (15).

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством линейности оператора L_n :

$$L_n y = L_n(y_1 + y_2) = L_n y_1 + L_n y_2 = f_1(x) + f_2(x).$$

Аналогично несложно убедиться в том, что, если правая часть уравнения (3) представляет собой *комплексную функцию*

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

и мы нашли комплексное решение

$$y(x) = y_1(x) + i y_2(x)$$

этого дифференциального уравнения, то, во-первых,

$$L_n y_1(x) = f_1(x),\ L_n y_2(x) = f_2(x)$$

и, во-вторых,

$$L_n \overline{y(x)} = \overline{f(x)}$$

(здесь черта обозначает знак комплексного сопряжения).

§4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем изучать линейное дифференциальное уравнение в простейшем частном случае, когда все коэффициенты в его левой части постоянны:

$$L_n y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_1, a_2, …, a_n – действительные числа, $f(x)$ – непрерывная в некотором интервале функция.

Это дифференциальное уравнение, как мы увидим ниже, *интегрируется в квадратурах*, поскольку мы можем найти фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, причем интегрирование этого последнего сводится к решению *алгебраического уравнения* и, значит, обходится без квадратур.

1. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Займемся сначала линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами

$$L_n y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{1}$$

При $n = 1$ мы имеем линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + a_1 y = 0.$$

Разделим в нем переменные и проинтегрируем:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a_1 \mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a_1 \mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = -a_1 x + \ln|C| \Longrightarrow y = Ce^{-a_1 x}.$$

Таким образом, однородное уравнение первого порядка имеет своим решением *экспоненту.* Попытаемся в таком виде найти также и решение уравнения (1).

Итак, решение однородного уравнения (1) мы будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ – постоянная (вообще говоря, комплексная). Поскольку[1]

$$y^{(k)} = \left(e^{\lambda x}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x},\ k \in \mathrm{N},$$

то подставляя данную функцию в уравнение (1), получим

$$L_n e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Следовательно, постоянная λ удовлетворяет алгебраическому уравнению n-ой степени

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{2}$$

которое называется *характеристическим уравнением* однородного дифференциального уравнения (1). Соответственно, $P_n(\lambda)$ – *характеристический полином* этого уравнения.

В §8 главы V мы выяснили, что характеристическое уравнение (2), как любое алгебраическое, имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Кроме того, в том же параграфе мы доказали, что, поскольку уравнение (2) имеет действительные коэффициенты, то вместе с каждым комплексным корнем это уравнение имеет и комплексно сопряженный корень той же кратности.

Предположим сначала, что характеристическое уравнение (2) имеет n *различных корней.* Обозначим их через

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n.$$

Тогда функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x} \tag{3}$$

являются решениями однородного уравнения (1), причем каждому действительному корню соответствует действительное решение, а каждой паре

$$\lambda_k = \mu_k + \nu_k i,\ \lambda_l = \mu_k - \nu_k i$$

комплексно сопряженных корней характеристического уравнения отвечает пара комплексных решений

$$y_k = e^{(\mu_k + \nu_k i)x},\ y_l = e^{(\mu_k - \nu_k i)x},$$

которые мы, использовав определение комплексной экспоненты (глава V, §8), можем записать в виде

$$y_k = e^{\mu_k x}(\cos\nu_k x + i\sin\nu_k x),\ y_l = e^{\mu_k x}(\cos\nu_k x - i\sin\nu_k x) \tag{4}$$

и, значит, решения y_k и y_l дифференциального уравнения (1) являются комплексно сопряженными.

Покажем, что решения (3) являются *линейно независимыми.*

---

[1] Здесь мы используем тот факт, доказанный в §8, главы V, что при любом λ, действительном или комплексном, $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$.

Предположим, напротив, что эти функции линейно зависимы. Тогда существуют комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, для которых

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n x} \equiv 0.$$

Для удобства будем считать, что коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $s \le n$ отличны от нуля, а остальные равны нулю. Значит,

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_s e^{\lambda_s x} \equiv 0. \tag{5}$$

Умножим обе части тождества (5) на функцию $e^{-\lambda_1 x}$ и затем продифференцируем почленно получившееся равенство. В результате получим тождество

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} + \ldots + \alpha_s(\lambda_s - \lambda_1) e^{(\lambda_s - \lambda_1)x} \equiv 0,$$

которое по структуре ничем не отличается от (5). Повторив указанную процедуру еще $s-2$ раз, мы придем к противоречивому тождеству

$$\alpha_s(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - \lambda_{s-1}) e^{(\lambda_s - \lambda_{s-1})x} \equiv 0.$$

Таким образом, наше предположение неверно и, стало быть, функции (3) *линейно независимы.*

Из доказанной линейной независимости функций (3) следует, что в случае *различных действительных корней* характеристического уравнения (2) эти функции образуют *фундаментальную систему решений* однородного дифференциального уравнения (1).

Предположим, что характеристическое уравнение имеет комплексные корни. Тогда для каждой пары комплексно сопряженных корней $\mu_k \pm \nu_k i$ уравнение (1) имеет комплексно сопряженные решения (4). По лемме 5 из предыдущего параграфа мы можем заменить в системе функций (3) пару комплексно сопряженных решений (4) действительной и мнимой частями любой из них, например, парой функций

$$e^{\mu_k x} \cos \nu_k x, \ e^{\mu_k x} \sin \nu_k x, \tag{6}$$

причем линейная независимость новой системы функций не нарушится. Учитывая, что функции (6), как действительная и мнимая части комплексного решения однородного уравнения (1) также являются решениями этого уравнения (§3, формула (7)), мы и в этом случае получим *фундаментальную систему действительных решений* уравнения (1).

Рассмотрим теперь случай *кратных корней* характеристического уравнения. Пусть уравнение (2) имеет s различных корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$

кратностей

$$n_1, n_2, \ldots, n_s,$$

соответственно. Для кратностей выполняется равенство $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$.

Покажем, что *каждому корню* λ_k, $k = \overline{1, s}$ *соответствует* n_k *линейно независимых решений* линейного однородного уравнения (1).

Для этого изучим более подробно действие оператора L_n на функцию $e^{\lambda x}$, причем λ мы будем считать переменной величиной. Выше мы выяснили, что

$$L_n e^{\lambda x} = P_n(\lambda) e^{\lambda x},$$

где $P_n(\lambda)$ – характеристический полином. Продифференцируем почленно это равенство по переменной λ. Поскольку функция $e^{\lambda x}$ бесконечно дифференцируема по переменным λ и x, то, учитывая, что в этом случае результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (глава VIII, §3), получим

$$\left(L_n e^{\lambda x}\right)'_\lambda = L_n \left(e^{\lambda x}\right)'_\lambda = L_n x e^{\lambda x}.$$

С другой стороны,

$$\left(P_n(\lambda) e^{\lambda x}\right)'_\lambda = P'_n(\lambda) e^{\lambda x} + P_n(\lambda) e^{\lambda x} x.$$

Следовательно,

$$L_n x e^{\lambda x} = P'_n(\lambda) e^{\lambda x} + P_n(\lambda) e^{\lambda x} x.$$

Аналогично, почленное дифференцирование последнего равенства по переменной λ даст нам

$$L_n x^2 e^{\lambda x} = P''_n(\lambda)e^{\lambda x} + 2P'_n(\lambda)e^{\lambda x}x + P_n(\lambda)e^{\lambda x}x^2.$$

Продолжая процесс дифференцирования, после m шагов мы придем к равенству

$$L_n x^m e^{\lambda x} = P_n^{(m)}(\lambda)e^{\lambda x} + mP_n^{(m-1)}(\lambda)e^{\lambda x}x + \ldots + P_n(\lambda)e^{\lambda x}x^m, \tag{7}$$

правая часть которого раскрыта по *формуле Лейбница* для произведения $P_n(\lambda)e^{\lambda x}$ (глава V, §2, пункт 3).

Подставляя в равенство (7) корень λ_k характеристического уравнения и воспользовавшись тем, что, как доказано в главе V, §8

$$P_n(\lambda_k) = P'_n(\lambda_k) = \ldots = P_n^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0,\ P_n^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0,$$

получим

$$L_n e^{\lambda_k x} = L_n x e^{\lambda_k x} = \ldots = L_n x^{n_k-1}e^{\lambda_k x} = 0,$$

т. е. *функции*

$$y_{k1} = e^{\lambda_k x},\ y_{k2} = xe^{\lambda_k x},\ \ldots,\ y_{kn_k} = x^{n_k-1}e^{\lambda_k x} \tag{8}$$

– *решения линейного однородного дифференциального уравнения* (1). Эти решения *линейно независимы* (§3, пример 1).

Объединив s групп решений (8) для всех корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ характеристического уравнения, мы получим систему n решений уравнения (1):

$$\begin{array}{l} y_{11} = e^{\lambda_1 x},\ y_{12} = xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_{1n_1} = x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ y_{21} = e^{\lambda_2 x},\ y_{22} = xe^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_{2n_2} = x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{s1} = e^{\lambda_s x},\ y_{s2} = xe^{\lambda_s x},\ \ldots,\ y_{sn_s} = x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}. \end{array} \tag{9}$$

Решения (9), как и решения (3), *линейно независимы*, в чем можно убедиться с помощью аналогичных рассуждений.

Если *все корни характеристического уравнения* (2) *действительны*, то функции (9) составляют *фундаментальную систему решений* данного однородного уравнения.

С комплексными корнями характеристического уравнения поступим точно также, как и выше в случае простых корней. Комплексному корню $\lambda_k = \mu_k + \nu_k i$ кратности n_k соответствует n_k комплексных решений (8), а комплексно сопряженному корню $\mu_k - \nu_k i$ той же кратности – n_k комплексно сопряженных к (8) решений уравнения (1). Принимая во внимание, что $e^{\lambda_k x} = e^{\mu_k x}(\cos\nu_k x + i\sin\nu_k x)$, заменим каждую пару комплексно сопряженных решений действительной и мнимой частями одного из них. В результате в системе решений (9) мы заменим $2n_k$ комплексных решений, соответствующих комплексно сопряженным корням $\mu_k \pm \nu_k i$ таким же количеством действительных решений

$$\begin{array}{c} e^{\mu_k x}\cos\nu_k x,\ e^{\mu_k x}\sin\nu_k x; \\ xe^{\mu_k x}\cos\nu_k x,\ xe^{\mu_k x}\sin\nu_k x; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n_k-1}e^{\mu_k x}\cos\nu_k x,\ x^{n_k-1}e^{\mu_k x}\sin\nu_k x. \end{array} \tag{10}$$

Построенная таким образом совокупность функций является *фундаментальной системой решений* однородного уравнения (1).

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать

Алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

1) *Для дифференциального уравнения* (1) *мы записываем характеристическое уравнение* (2), *находим его корни и определяем их кратность.*

2) *Для каждого действительного корня* λ_k *характеристического уравнения кратности* n_k *мы выписываем соответствующую ему систему решений* (8). *Аналогично, для каждой пары*

комплексно сопряженных корней $\mu_k \pm \nu_k i$ *кратности* n_k *мы строим системy решений* (10). *Объединяя все решения, мы получим фундаментальную систему решений*

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

линейного однородного уравнения (1).

3) *Воспользовавшись теоремой* 1 *предыдущего параграфа, записываем общее решение данного уравнения*:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ *– произвольные постоянные.*

Пример 1. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y^V + y^{IV} - 2y''' = 0.$$

Решение. Данное уравнение имеет вид (1). Отыщем корни его характеристического уравнения

$$\lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 = 0.$$

Поскольку $\lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 + \lambda - 2) = \lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 1)$, то характеристическое уравнение имеет *трехкратный корень* $\lambda_1 = 0$ и *два простых корня* $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 1$.

Первому корню соответствуют три линейно независимых решения

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1,\ y_2 = xe^{\lambda_1 x} = x,\ y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x} = x^2,$$

второму и третьему – решения

$$y_4 = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x},\ y_5 = e^{\lambda_3 x} = e^x$$

исходного уравнения. Тогда

$$1,\ x,\ x^2,\ e^{-2x},\ e^x$$

– фундаментальная система решений данного однородного дифференциального уравнения и

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x} + C_5 e^x$$

– его общее решение.

Пример 2. *Решить дифференциальное уравнение*

$$y''' - 27y = 0.$$

Решение. Характеристический полином

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 27$$

этого уравнения вида (1) разлагается на множители $P_3(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda + 9)$, поэтому корнями характеристического уравнения являются действительное число $\lambda_1 = 3$ и пара комплексно сопряженных чисел $\lambda_{2,3} = \mu_2 \pm \nu_2 i = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} i$. Первому корню соответствует решение

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{3x},$$

а комплексно сопряженным корням – решения

$$y_2 = e^{\mu_2 x} \cos \nu_2 x = e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{3\sqrt{3}}{2} x,\ y_3 = e^{\mu_2 x} \sin \nu_2 x = e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} x$$

данного дифференциального уравнения. Решения $y_1,\ y_2,\ y_3$ составляют фундаментальную систему решений исходного уравнения и, стало быть,

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{3\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} x$$

– общее решение этого уравнения.

Пример 3. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = 0.$$

Решение. Найдем для этого линейного однородного дифференциального уравнения вида (1) корни его характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0.$$

Так как $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+2)^2$, то

$$(\lambda^2+2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет *пару комплексно сопряженных корней* $\lambda_{1,2} = \mu_1 \pm \nu_1 i = \pm\sqrt{2}i$ *кратности* 2. Им соответствуют четыре линейно независимых решения данного однородного уравнения

$$y_1 = e^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x = \cos\sqrt{2}x,\ y_2 = e^{\mu_1 x}\sin\nu_1 x = \sin\sqrt{2}x,$$
$$y_3 = xe^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x = x\cos\sqrt{2}x,\ y_4 = xe^{\mu_1 x}\sin\nu_1 x = x\sin\sqrt{2}x,$$

которые образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + C_3 x\cos\sqrt{2}x + C_4 x\sin\sqrt{2}x.$$

2. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$L_n y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x). \tag{1}$$

Здесь a_1, a_2, …, a_n – действительные числа, $f(x)$ – непрерывная в некотором интервале функция.

В предыдущем пункте мы убедились, что общее решение соответствующего однородного уравнения мы можем найти по корням его характеристического уравнения, поэтому проинтегрировать данное неоднородное уравнение (1) мы можем *методом Лагранжа* и, таким образом, оно *интегрируется в квадратурах.*

Покажем, что и здесь в случае, когда правая часть имеет *специальный вид* найти частное, а, значит, и общее решение уравнения (1) мы можем без квадратур.

Пусть

$$f(x) = e^{\alpha x}(Q_k(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x), \tag{2}$$

где α, β – действительные числа, $Q_k(x)$, $R_l(x)$ – полиномы степеней k и l, соответственно, т. е. правая часть данного уравнения представляет собой линейную комбинацию линейно независимых решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Очевидно, дифференцирование функции вида (2) приводит к функции такой же структуры, поэтому можно попытаться и частное решение неоднородного уравнения (1) найти в таком же виде, использовав линейную независимость функций составляющих правую часть.

I. Рассмотрим сначала *случай, когда* $\beta = 0$ и, стало быть,

$$f(x) = e^{\alpha x}Q_k(x) = e^{\alpha x}(b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_{k-1}x + b_k). \tag{3}$$

Здесь, в свою очередь, мы рассмотрим две возможности.

1) Число α *не является корнем* характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Для частного решения неоднородного уравнения (1) мы сохраним структуру (3), т. е. будем искать решение этого уравнения в виде

$$y^* = e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k(x) = e^{\alpha x}(c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_{k-1}x + c_k), \tag{4}$$

где неизвестные коэффициенты c_0, c_1, …, c_k подлежат определению. Подставим решение (4) в уравнение (1), учитывая, что по *формуле Лейбница* для произведения $e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k(x)$

$$(y^*)' = \alpha e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k(x) + e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k'(x),$$
$$(y^*)'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k(x) + 2\alpha e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k'(x) + e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k''(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y^*)^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k(x) + n\alpha^{n-1}e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k'(x) + \ldots + e^{\alpha x}\widetilde{Q}_k^{(n)}(x).$$

В результате после перегруппировки слагаемых получим:

$$L_n y^* = e^{\alpha x}\left(P_n(\alpha)\widetilde{Q}_k(x) + P_n'(\alpha)\widetilde{Q}_k'(x) + \frac{P_n''(\alpha)}{2!}\widetilde{Q}_k''(x) + \ldots + \widetilde{Q}_k^{(n)}(x)\right) = e^{\alpha x} Q_k(x).$$

Отсюда

$$P_n(\alpha)\widetilde{Q}_k(x) + P_n'(\alpha)\widetilde{Q}_k'(x) + \frac{P_n''(\alpha)}{2!}\widetilde{Q}_k''(x) + \ldots + \widetilde{Q}_k^{(n)}(x) = Q_k(x). \tag{5}$$

Как следует из линейной независимости системы функций $1,\ x,\ \ldots,\ x^k$ (§3, пример 1) два полинома тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты этих полиномов при одинаковых степенях переменной. Поэтому, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, мы придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
x^k:&\quad P_n(\alpha)c_0 = b_0,\\
x^{k-1}:&\quad P_n(\alpha)c_1 + P_n'(\alpha)kc_0 = b_1,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^0:&\quad P_n(\alpha)c_k + P_n'(\alpha)c_{k-1} + \ldots + P_n^{(k)}(\alpha)c_0 = b_k
\end{aligned}$$

относительно неизвестных коэффициентов. Поскольку здесь у нас $P_n(\alpha) \neq 0$, то из первого уравнения мы однозначно находим коэффициент c_0, затем из второго – c_1, ..., из последнего – c_k. Таким образом, эта линейная система *однозначно разрешима*. Подстановка ее решения в (4) даст нам частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1).

2) Число α *является корнем* характеристического уравнения *кратности* r.

В этом случае, как известно,

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(r-1)}(\alpha) = 0,\ P_n^{(r)}(\alpha) \neq 0,$$

поэтому, как следует из (5), мы должны повысить степень полинома $\widetilde{Q}_k(x)$ на r единиц. Проще всего это сделать, умножив его на x^r, т. е. частное решение неоднородного уравнения (1) здесь необходимо искать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}x^r\widetilde{Q}_k(x) = e^{\alpha x}x^r(c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_{k-1}x + c_k). \tag{6}$$

В остальном все приведенные выше рассуждения сохраняются.

II. Пусть теперь $\beta \neq 0$ и, таким образом, правая часть имеет *специальный вид* (2).

Обозначим $\lambda = \alpha + \beta i$. Поскольку

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\bar{\lambda}x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то, складывая и вычитая эти два равенства, получим:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda}x}\right),\ e^{\alpha x}\sin\beta x = -\frac{i}{2}\left(e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda}x}\right).$$

Следовательно, правую часть (2) мы можем записать как сумму комплексно сопряженных функций

$$f(x) = \frac{1}{2}(Q_k(x) - iR_l(x))e^{\lambda x} + \frac{1}{2}(Q_k(x) + iR_l(x))e^{\bar{\lambda}x}. \tag{7}$$

Функции $Q_k(x) \pm iR_l(x)$ действительной переменной x представляют собой комплексно сопряженные полиномы степени $m = \max\{k, l\}$.

Частное решение неоднородного уравнения (1) мы и здесь будем искать по виду правой части (2) в форме

$$y^* = e^{\alpha x}x^r(\widetilde{Q}_m(x)\cos\beta x + \widetilde{R}_m(x)\sin\beta x), \tag{8}$$

где r – кратность корня λ характеристического уравнения ($r = 0$, если λ не является корнем), $\widetilde{Q}_m(x)$, $\widetilde{R}_m(x)$ – полиномы степени m с действительными неопределенными коэффициентами. Это решение, как и правую часть (7), мы, разумеется, можем представить в виде суммы комплексно сопряженных функций:

$$y^* = \frac{1}{2}x^r(\widetilde{Q}_m(x) - i\widetilde{R}_m(x))e^{\lambda x} + \frac{1}{2}x^r(\widetilde{Q}_m(x) + i\widetilde{R}_m(x))e^{\bar{\lambda}x}. \tag{9}$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L_n y = \frac{1}{2}(Q_k(x) - iR_l(x))e^{\lambda x} \tag{10}$$

с комплексной правой частью. Покажем, что для него существует решение в форме

$$y_1^* = \frac{1}{2}x^r(\widetilde{Q}_m(x) - i\widetilde{R}_m(x))e^{\lambda x}.$$

Действительно, поскольку функция $\frac{1}{2}(\widetilde{Q}_m(x) - i\widetilde{R}_m(x))$ является полиномом степени m действительной переменной x с комплексными коэффициентами, то, как и выше в случае $\beta = 0$, коэффициенты этого полинома, а, значит, и действительные коэффициенты полиномов $\widetilde{Q}_m(x)$ и $\widetilde{R}_m(x)$ мы можем однозначно найти подстановкой решения y_1^* в дифференциальное уравнение (10) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x.

Воспользовавшись, далее, замечанием 2, сделанным в §3, мы можем утверждать, что комплексно сопряженная к решению y_1^* функция

$$y_2^* = \frac{1}{2}x^r(\widetilde{Q}_m(x) + i\widetilde{R}_m(x))e^{\bar{\lambda} x}$$

служит решением линейного неоднородного уравнения

$$L_n y = \frac{1}{2}(Q_k(x) + iR_l(x))e^{\bar{\lambda} x}$$

с правой частью, комплексно сопряженной с правой частью уравнения (10).

Отсюда, принимая во внимание (7), (9) и уже упоминавшееся замечание 2 из предыдущего параграфа, мы заключаем, что функция

$$y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

является решением вида (8) данного линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) с правой частью (2).

Замечание. При нахождении частного решения неоднородного уравнения (1) с правой частью (2) конечно же нет никакой необходимости представлять правую часть в виде (7), а решение в форме (9). Следует решение (8) подставить в уравнение (1) и, сократив затем обе части получившегося равенства на $e^{\alpha x}$, приравнять коэффициенты при одинаковых функциях $x^s \cos\beta x$, $x^s \sin\beta x$, $s = \overline{0, m}$, использовав их линейную независимость. В результате мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полиномов $\widetilde{Q}_m(x)$ и $\widetilde{R}_m(x)$, из которой они однозначно и определяются.

Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

1) *Сначала мы находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (пункт 1).*

2) *Затем по виду правой части мы определяем частное решение $y^*(x)$ данного линейного неоднородного уравнения. Если правая часть имеет вид (3), то частное решение следует искать в виде (6), где r – кратность корня α характеристического уравнения и $r = 0$, если α корнем не является. Аналогично, если правая часть имеет более общую структуру (2), то частное решение неоднородного уравнения необходимо разыскивать в форме (8) (r – кратность корня $\lambda = \alpha + \beta i$ характеристического уравнения, в противном случае – $r = 0$). В обоих случаях подставляя решение в исходное дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях получившегося тождества, мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полиномов, входящих в искомое решение, из которой они и находятся единственным образом.*

3) *Воспользовавшись теоремой 2 предыдущего параграфа, мы записываем общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения:*

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x).$$

Пример. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$y''' + 4y' = 2x^2 - 1 + e^{-x}(3x+2) - 5\cos 2x. \tag{11}$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение является линейным с постоянными коэффициентами и правой частью, равной сумме трех функций

$$f_1(x) = 2x^2 - 1,\ f_2(x) = e^{-x}(3x+2),\ f_3(x) = -5\cos 2x$$

специального вида (2).

Найдем сначала общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \mu_2 \pm \nu_2 i = \pm 2i.$$

Первому корню соответствует частное решение

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1,$$

а паре комплексно сопряженных корней – пара линейно независимых решений

$$y_2 = e^{\mu_2 x}\cos \nu_2 x = \cos 2x,\ y_3 = e^{\mu_2 x}\sin \nu_2 x = \sin 2x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Найдем теперь частные решения для каждой из указанных правых частей.

Правая часть дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = 2x^2 - 1 \tag{12}$$

имеет вид (3) при $\alpha = 0$ и $Q_2(x) = 2x^2 - 1$. Учитывая, что число α является простым корнем характеристического уравнения ($r = 1$), будем искать частное решение уравнения (12) в виде (6):

$$y_1^* = xe^{\alpha x}(b_1x^2 + b_2x + b_3) = b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x.$$

Поскольку

$$(y_1^*)' = 3b_1x^2 + 2b_2x + b_3,\ (y_1^*)'' = 6b_1x + 2b_2,\ (y_1^*)''' = 6b_1,$$

то подставляя это решение в уравнение (12)

$$6b_1 + 4(3b_1x^2 + 2b_2x + b_3) = 2x^2 - 1$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим

$$\begin{aligned} x^2 &:\quad 12b_1 = 2, \\ x &:\quad 8b_2 = 0, \\ x^0 &:\quad 6b_1 + 4b_3 = -1, \end{aligned}$$

откуда

$$b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{1}{2}$$

и, стало быть,

$$y_1^* = \frac{1}{6}x(x^2 - 3).$$

Найдем, далее, частное решение неоднородного уравнения

$$y''' + 4y' = e^{-x}(3x+2). \tag{13}$$

Правая часть этого уравнения также имеет вид (3), где $\alpha = -1$, $Q_1(x) = 3x + 2$. Поскольку число α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (13) мы будем искать в виде (4):

$$y_2^* = e^{\alpha x}(c_1x + c_2) = e^{-x}(c_1x + c_2).$$

Трижды дифференцируя его, получим:

$$(y_2^*)' = e^{-x}(-c_1x + c_1 - c_2),\ (y_2^*)'' = e^{-x}(c_1x - 2c_1 + c_2),\ (y_2^*)''' = e^{-x}(-c_1x + 3c_1 - c_2).$$

Тогда подстановка в (13) дает

$$e^{-x}(-c_1x + 3c_1 - c_2) + 4e^{-x}(-c_1x + c_1 - c_2) = e^{-x}(3x + 2)$$

и, значит,

$$-5c_1x + 7c_1 - 5c_2 = 3x + 2.$$

Следовательно,

$$-5c_1 = 3,\ 7c_1 - 5c_2 = 2,$$

откуда

$$c_1 = -\frac{3}{5},\ c_2 = -\frac{31}{25}.$$

Таким образом,

$$y_2^* = -\frac{1}{25}e^{-x}(15x + 31).$$

Осталось, наконец, отыскать частное решение неоднородного уравнения

$$y''' + 4y' = -5\cos 2x. \tag{14}$$

Правая часть уравнения (14) имеет структуру (2) при $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $Q_0(x) = -5$, $R_0(x) = 0$, причем, как мы установили выше комплексно сопряженные числа $\pm\beta i$ являются простыми корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение данного уравнения мы будем разыскивать в форме

$$y_3^* = xe^{\alpha x}(d_1\cos\beta x + d_2\sin\beta x) = x(d_1\cos 2x + d_2\sin 2x).$$

Три его первые производные равны

$$\begin{aligned}(y_3^*)' &= d_1\cos 2x + d_2\sin 2x + x(-2d_1\sin 2x + 2d_2\cos 2x),\\ (y_3^*)'' &= -4d_1\sin 2x + 4d_2\cos 2x + x(-4d_1\cos 2x - 4d_2\sin 2x),\\ (y_3^*)''' &= -12d_1\cos 2x - 12d_2\sin 2x + x(8d_1\sin 2x - 8d_2\cos 2x).\end{aligned}$$

Результатом подстановки данного решения в уравнение (14) является тождество

$$-8d_1\cos 2x - 8d_2\sin 2x = -5\cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа в этом тождестве, получим

$$\begin{aligned}\cos 2x:&\quad -8d_1 = -5,\\ \sin 2x:&\quad -8d_2 = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$d_1 = \frac{5}{8},\ d_2 = 0$$

и, следовательно,

$$y_3^* = \frac{5}{8}\,x\cos 2x.$$

Тогда, как известно (§3, замечание 2), сложив частные решения уравнений (12) – (14), мы найдем частное решение исходного неоднородного уравнения (11):

$$y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x) + y_3^*(x) = \frac{1}{6}\,x(x^2 - 3) - \frac{1}{25}e^{-x}(15x + 31) + \frac{5}{8}\,x\cos 2x.$$

Запишем искомое общее решение дифференциального уравнения (11):

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x) = \frac{1}{6}\,x(x^2 - 3) - \frac{1}{25}e^{-x}(15x + 31) + \frac{5}{8}\,x\cos 2x + C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

§5. О системах дифференциальных уравнений

В приложениях часто математической моделью исследуемого процесса является не одно дифференциальное уравнение, а *система уравнений*, связывающая несколько неизвестных функций вместе с их производными. Например, математическим выражением *второго закона динамики* (*Ньютона*) для материальной точки с массой m в пространстве является система трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'), \end{cases}$$

где в правой части этих уравнений записаны координаты F_x, F_y, F_z равнодействующей сил, действующих на точку, зависящие от времени t, текущих координат $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ данной точки и координат $x' = x'(t)$, $y' = y'(t)$, $z' = z'(t)$ ее скорости.

Системой n дифференциальных уравнений в нормальной форме или, короче, *нормальной системой n-го порядка* называется система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1}$$

где x – независимая переменная, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ – искомые функции, $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$ – заданные непрерывные в некоторой области D евклидова пространства R^{n+1} функции.

Решением данной системы называется совокупность n непрерывно дифференцируемых в некотором интервале (a, b) функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{2}$$

которые в области D обращают в тождество по переменной x каждое из уравнений нормальной системы (1).

Как и при интегрировании дифференциального уравнения n-го порядка, в том случае, когда система (1) интегрируется в квадратурах, в процессе ее решения необходимо выполнить n операций интегрирования и, стало быть, решение этой системы зависит от n произвольных постоянных. Чтобы найти какое-нибудь конкретное решение системы (1) следует подчинить его n дополнительным условиям.

Задача Коши для нормальной системы (1) заключается в нахождении решения (2) данной системы, удовлетворяющего при $x = x_0$ начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{3}$$

где y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} – заданные действительные числа и точка $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ принадлежит области D.

Функции (2) мы можем рассматривать, как уравнения некоторой линии в пространстве R^n. Тогда *решение задачи Коши с начальными условиями* (3) *представляет собой кривую* (2) в R^n, которая при $x = x_0$ проходит через точку $N_0(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$. В частности, в трехмерном пространстве решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y, z), \\ y' = f_2(t, x, y, z), \\ z' = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

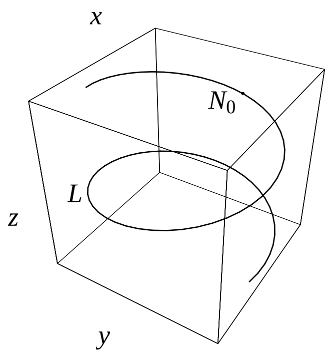
с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0$$

соответствует линия L с параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

проходящая через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$.



Приведем формулировку теоремы, которая при достаточно общих условиях на правые части системы дифференциальных уравнений (1) обеспечивает *существование и единственность решения задачи Коши* для этой системы.

Теорема. *Предположим, что функции* $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$ *в правых частях нормальной системы дифференциальных уравнений* (1) *непрерывны вместе с частными производными по всем переменным* y_1, y_2, $\ldots$, y_n *в области* D. *Тогда для любой точки* $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *из области* D *существует и единственно непродолжаемое решение задачи Коши для данной системы с* начальными условиями (3).

Введем понятие *общего решения* системы (1). Функции

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ \ldots,\ y_n = y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{4}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – постоянные, составляют *общее решение нормальной системы* (1), если для любых начальных условий (3) из области D существует единственная совокупность значений постоянных $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, $\ldots$, $C_n = C_{n0}$, подстановка которой в (4) дает непродолжаемое решение поставленной задачи Коши.

Покажем, что *дифференциальное уравнение n-го порядка в нормальной форме*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{5}$$

с непрерывной в некоторой области D пространства R^{n+1} и удовлетворяющей в ней условиям теоремы существования и единственности решения правой частью *мы всегда можем привести к нормальной системе n дифференциальных уравнений* вида (1).

Для этого достаточно ввести n неизвестных функций

$$y_1 = y(x),\ y_2 = y'(x),\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}(x), \tag{6}$$

которые, очевидно, связаны системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение (5) и система дифференциальных уравнений (7) *равносильны* в том смысле, что каждому решению $y(x)$ уравнения по формулам (6) соответствует единственное решение системы и, наоборот, каждому решению $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ системы уравнений отвечает единственное решение $y = y_1(x)$ уравнения. Первое следует из самого способа построения системы (7), для доказательства обратного заметим, что из первых $n-1$ уравнений системы $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_1''$, $\ldots$, $y_n = y_1^{(n-1)}$ и, значит, из последнего уравнения

$$y_n' = y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right),$$

т. е. функция $y = y_1(x)$ – решение дифференциального уравнения (5). Единственность решения в том и другом случае следует из теоремы существования и единственности.

При определенных условиях верно также и обратное, а именно, *нормальная система дифференциальных уравнений* (1) *может быть преобразована в дифференциальное уравнение n-го порядка* вида (5).

Изложим здесь *метод исключения* неизвестных функций, который позволяет это сделать, предполагая, что правая часть первого из уравнений системы (1) непрерывно дифференцируема $n-1$ раз, а все остальные правые части – $(n-2)$ раз в области D.

Исключим из системы (1) неизвестные функции $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$. Для этого продифференцируем по переменной x обе части первого из уравнений системы (1), использовав правило дифференцирования композиции функций многих переменных (глава VIII, §2) и выражения для производных неизвестных функций из уравнений системы:

$$y_1'' = \partial_x f_1 + \partial_{y_1} f_1 \cdot y_1' + \partial_{y_2} f_1 \cdot y_2' + \ldots + \partial_{y_n} f_1 \cdot y_n' = \partial_x f_1 + f_1 \partial_{y_1} f_1 + f_2 \partial_{y_2} f_1 + \ldots + f_n \partial_{y_n} f_1.$$

Таким образом,

$$y_1'' = \tilde{f}_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Аналогично, продифференцировав далее по переменной x обе части последнего уравнения, получим после соответствующих выкладок:

$$y_1''' = \tilde{f}_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, мы после $n-1$ шагов придем к дифференциальному уравнению

$$y_1^{(n)} = \tilde{f}_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{8}$$

Отметим, что на каждом шаге указанного процесса дифференцирования

$$\tilde{f}_{k+1} = \partial_x \tilde{f}_k + f_1 \partial_{y_1} \tilde{f}_k + f_2 \partial_{y_2} \tilde{f}_k + \ldots + f_n \partial_{y_n} \tilde{f}_k, \; k = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

причем мы считаем, что $\tilde{f}_1 = f_1$.

Рассмотрим, далее, систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1'' = \tilde{f}_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1^{(n-1)} = \tilde{f}_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{10}$$

порядка $n-1$. Предположим, что систему (10) мы можем в области D *однозначно разрешить* относительно неизвестных функций $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$. По *теореме о неявных функциях*[1] этого всегда можно добиться, если в области D

$$J(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \partial_{y_2} f_1 & \partial_{y_3} f_1 & \ldots & \partial_{y_n} f_1 \\ \partial_{y_2} \tilde{f}_2 & \partial_{y_3} \tilde{f}_2 & \ldots & \partial_{y_n} \tilde{f}_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \partial_{y_2} \tilde{f}_{n-1} & \partial_{y_3} \tilde{f}_{n-1} & \ldots & \partial_{y_n} \tilde{f}_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{11}$$

что мы и будем предполагать. Разрешив систему (10) относительно функций указанных выше, получим:

$$y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{12}$$

Подстановка найденных функций в (8) приводит нас к дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \tag{13}$$

где $f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)$ – непрерывная в некоторой области D_1 пространства R^{n+1} функция.

Покажем, что при выполнении условия (11) *система дифференциальных уравнений (1) и дифференциальное уравнение* (13) *равносильны.*

[1]Эту теорему можно найти во втором томе двухтомника Л.Д. Кудрявцева или первом томе трехтомника Г.М. Фихтенгольца, имеющихся в списке литературы.

Действительно, если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ – решение системы (1), то, как следует из самого алгоритма исключения неизвестных, функция $y_1(x)$ служит решением дифференциального уравнения (13), а функции $y_2(x)$, $y_3(x)$, …, $y_n(x)$ удовлетворяют равенствам (12).

Обратно, пусть функция $y_1(x)$ является решением дифференциального уравнения (13). Данная функция вместе с функциями, вычисленными по формулам (12) удовлетворяет системе (10) и уравнению (8). Продифференцируем обе части первого из уравнений этой системы:

$$y_1'' = \partial_x f_1 + \partial_{y_1} f_1 \cdot y_1' + \partial_{y_2} f_1 \cdot y_2' + \ldots + \partial_{y_n} f_1 \cdot y_n'.$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства соответствующие части второго уравнения системы (10), получим, принимая во внимание (9):

$$\partial_{y_2} f_1 (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} f_1 (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} f_1 (y_n' - f_n) = 0.$$

Аналогично, дифференцируя обе части второго из уравнений системы (10) и учитывая третье уравнение и (9), мы придем к уравнению

$$\partial_{y_2} \tilde{f}_2 (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} \tilde{f}_2 (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} \tilde{f}_2 (y_n' - f_n) = 0.$$

Продолжая эту процедуру, мы через $n-1$ шагов убедимся в справедливости равенства

$$\partial_{y_2} \tilde{f}_{n-1} (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} \tilde{f}_{n-1} (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} \tilde{f}_{n-1} (y_n' - f_n) = 0.$$

Таким образом, мы получили систему из $n-1$ линейных однородных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_{y_2} f_1 (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} f_1 (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} f_1 (y_n' - f_n) = 0, \\ \partial_{y_2} \tilde{f}_2 (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} \tilde{f}_2 (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} \tilde{f}_2 (y_n' - f_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial_{y_2} \tilde{f}_{n-1} (y_2' - f_2) + \partial_{y_3} \tilde{f}_{n-1} (y_3' - f_3) + \ldots + \partial_{y_n} \tilde{f}_{n-1} (y_n' - f_n) = 0, \end{array} \right.$$

в которой в качестве неизвестных мы рассматриваем функции

$$y_2' - f_2,\ y_3' - f_3,\ \ldots,\ y_n' - f_n.$$

Основная матрица данной системы имеет в области D ненулевой определитель (11), поэтому эта система обладает единственным нулевым решением и, стало быть,

$$y_2' = f_2,\ y_3' = f_3,\ \ldots,\ y_n' = f_n.$$

Присоединив сюда и первое из уравнений системы (10), мы заключаем, что функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

составляют решение системы (1).

Если мы знаем *общее решение дифференциального уравнения* (13), то, использовав формулы (12), мы можем найти также и *общее решение системы дифференциальных уравнений* (1).

Пример. *Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = x + 2y + z^3, \\ z' = \dfrac{y}{z^2}. \end{array} \right.$$

Решение. Воспользуемся *методом исключения* неизвестных. Продифференцировав по переменной x обе части первого уравнения системы и подставив далее вместо производной z' ее выражение из второго уравнения, получим:

$$y'' = 1 + 2y' + 3z^2 z' \Longrightarrow y'' = 1 + 2y' + 3y.$$

Таким образом, исключив из системы неизвестную функцию $z(x)$, мы пришли к дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' - 2y' - 3y = 1 \tag{14}$$

относительно неизвестной функции $y(x)$. Это уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (§4, пункт 2).

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

– общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (14), учитывая структуру его правой части мы будем искать в виде $y^* = a$, $a \in \mathrm{R}$. Подставив это решение в (14), получим $-3a = 1$, откуда $a = -\frac{1}{3}$ и, значит,

$$y^* = -\frac{1}{3}.$$

Запишем общее решение линейного неоднородного уравнения (14):

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x) = -\frac{1}{3} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Далее, учитывая, что $y' = 3C_2 e^{3x} - C_1 e^{-x}$, из первого уравнения данной системы мы находим

$$z = \sqrt[3]{y' - 2y - x} = \sqrt[3]{C_2 e^{3x} - 3C_1 e^{-x} + \frac{2}{3} - x}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = \sqrt[3]{C_2 e^{3x} - 3C_1 e^{-x} + \frac{2}{3} - x}. \end{cases}$$

§6. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

В приложениях часто возникают дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений, которые *не интегрируются в квадратурах* или их решения имеют очень *громоздкий вид* или *выражаются через специальные функции.* В этом случае мы можем использовать *методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*, которые позволяют найти неизвестное решение с заранее заданной точностью.

Рассмотрим два таких метода применительно к решению задачи Коши

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

для дифференциального уравнения первого порядка с дифференцируемой достаточное число раз в некоторой области D на плоскости правой частью $f(x, y)$. Решение задачи (1) существует и единственно в области D на некотором отрезке $[x_0, x_0 + l]$, $l > 0$, что следует из теоремы, сформулированной в §1.

Докажем сначала справедливость следующих приближенных равенств для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[x_0, x_0 + l]$ функции $y = y(x)$:

$$\begin{gathered} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathrm{o}(h), \\ y\left(x + \tfrac{h}{2}\right) = y(x) + \tfrac{h}{2}\, y'\left(x + \tfrac{h}{2}\right) + \mathrm{o}(h), \\ y(x+h) = y(x) + hy'\left(x + \tfrac{h}{2}\right) + \mathrm{o}(h). \end{gathered} \tag{2}$$

Во всех этих равенствах x – произвольная фиксированная точка промежутка $[x_0, x_0 + l)$, $0 < h$ – бесконечно малая величина, $\mathrm{o}(h)$ – бесконечно малые более высокого порядка, чем h, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o}(h)}{h} = 0.$$

Убедимся, например, в справедливости последнего из равенств (2). Рассмотрим функцию

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - hy'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

и, воспользовавшись определением производной и ее непрерывностью в точке x, найдем:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}-\lim_{h\to 0}y'\left(x+\frac{h}{2}\right)=y'(x)-y'(x)=0.$$

Таким образом, $\varphi(h)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем h и

$$y(x+h)=y(x)+hy'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\varphi(h),$$

что и доказывает утверждение.

Опустив при малых h в правых частях равенств (2) бесконечно малые $o(h)$, мы получим *приближенные равенства*

$$y(x+h)\approx y(x)+hy'(x), \tag{3}$$

$$y\left(x+\frac{h}{2}\right)\approx y(x)+\frac{h}{2}y'\left(x+\frac{h}{2}\right), \tag{4}$$

$$y(x+h)\approx y(x)+hy'\left(x+\frac{h}{2}\right), \tag{5}$$

которые мы будем использовать ниже.

а) *Метод Эйлера (ломаных).*

Разобьем отрезок $[x_0,x_0+l]$ на n частичных отрезков равной длины $h=\frac{l}{n}$ и обозначим через

$$x_k=x_0+kh,\ k=\overline{0,n}$$

точки этого разбиения. Совокупность всех этих точек мы будем называть *сеткой*, данные точки – *узлами сетки*, а число h – *шагом сетки*.

Пусть $y=y(x)$ – решение задачи Коши (1), а $y_k\approx y(x_k)$, $k=\overline{1,n}$ – приближенные значения решения в узлах сетки.

Мы *последовательно* найдем все значения

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

если воспользуемся приближенным равенством (3) при $x=x_k$, $k=\overline{0,n-1}$. В самом деле, при $k=0$

$$y(x_1)=y(x_0+h)\approx y(x_0)+hy'(x_0)=y_0+hf(x_0,y_0)$$

и, стало быть,

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0).$$

Аналогично, если $k=1$, то

$$y(x_2)=y(x_1+h)\approx y(x_1)+hy'(x_1)=y(x_1)+hf(x_1,y(x_1))$$

и, значит,

$$y_2=y_1+hf(x_1,y_1).$$

Продолжая этот процесс, мы через n шагов найдем

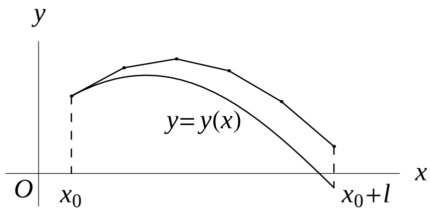
$$y_n=y_{n-1}+hf(x_{n-1},y_{n-1}).$$

Таким образом, расчетная *формула метода Эйлера* имеет вид:

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k),\ k=\overline{0,n-1}. \tag{6}$$

Подчеркивая геометрический смысл метода Эйлера, его называют иногда *методом ломаных.* Чтобы дать *геометрическое представление* данного метода последовательно соединим отрезками прямых на плоскости Oxy точки

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ \ldots,\ (x_n,y_n). \tag{7}$$



В результате получим ломаную, звеньями которой являются отрезки касательных к интегральным кривым данного дифференциального уравнения, проходящим через первые $n-1$ точек (7). Действительно, для любой такой точки (x_k, y_k), $k=\overline{0,n-1}$ обозначим через $\tilde{y}_k(x)$ решение задачи Коши, удовлетворяющее начальному условию $\tilde{y}_k(x_k)=y_k$. Тогда, как известно (глава V, §1, формула (1)),

$$y=\tilde{y}_k(x_k)+\tilde{y}_k'(x_k)(x-x_k) \Longleftrightarrow y=y_k+f(x_k,y_k)(x-x_k)$$

– уравнение касательной к интегральной кривой, соответствующей решению $\tilde{y}_k(x)$ в данной точке. Подставив в это уравнение вместо x значение x_{k+1}, мы найдем $y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$ и, значит, касательная проходит через точку (x_{k+1}, y_{k+1}).

Обсудим теперь величину *погрешности* метода Эйлера. Поскольку на каждом шаге этого метода мы меняем приращение искомого решения его дифференциалом по формуле (3), т. е. линейной частью приращения, то, естественно, трудно ожидать, что точность метода Эйлера будет высокой. В курсе вычислительной математики приводится доказательство того, что, если правая часть исходного дифференциального уравнения непрерывно дифференцируема в области D, то погрешность метода Эйлера

$$\varepsilon_n=\max_{k=\overline{1,n}}|y(x_k)-y_k|$$

имеет первый порядок малости относительно шага сетки h и, таким образом, данный метод имеет *первый порядок точности.*

b) ***Метод Рунге-Кутта.***

Возьмем ту же сетку, что и в методе Эйлера. Для любого отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$

$$y'(s)=f(s,y(s)),\ s\in[x_k,x_{k+1}].$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от x_k до x_{k+1}, получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(s)\mathrm{d}s=y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s,y(s))\mathrm{d}s,$$

откуда

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s,y(s))\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Заменим интеграл в правой части равенства (8) его приближенным значением по *формуле парабол* (глава VII, §6), разбив отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ на две равные части:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s,y(s))\mathrm{d}s\approx\frac{h}{6}\left(f(x_k,y(x_k))+4f\left(x_k+\frac{h}{2},y\left(x_k+\frac{h}{2}\right)\right)+f(x_{k+1},y(x_{k+1}))\right). \tag{9}$$

Обозначим

$$\tilde{g}_{k1}=hf(x_k,y(x_k)),\ \tilde{g}_{k2}=hf\left(x_k+\frac{h}{2},y(x_k)+\frac{\tilde{g}_{k1}}{2}\right),$$

$$\tilde{g}_{k3}=hf\left(x_k+\frac{h}{2},y(x_k)+\frac{\tilde{g}_{k2}}{2}\right),\ \tilde{g}_{k4}=hf(x_k+h,y(x_k)+\tilde{g}_{k3}).$$

Последовательно применив приближенные формулы (3) и (4) при $x = x_k$, причем первую из них с половинным шагом, получим, с одной стороны,

$$f\left(x_k + \frac{h}{2}, y\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right) \approx \frac{\tilde{g}_{k2}}{h},$$

а, с другой, –

$$f\left(x_k + \frac{h}{2}, y\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right) \approx \frac{\tilde{g}_{k3}}{h}.$$

Использование формулы (5) для $x = x_k$ дает нам

$$f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \approx \frac{\tilde{g}_{k4}}{h}.$$

Подстановка всех найденных выражений в (9), а затем и в (8) приводит нас к приближенному равенству

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + \frac{1}{6}(\tilde{g}_{k1} + 2\tilde{g}_{k2} + 2\tilde{g}_{k3} + \tilde{g}_{k4}).$$

Пользуясь последней формулой, мы можем последовательно, начиная с узла x_0, вычислить приближенные значения искомого решения. В результате мы получим расчетную *формулу метода Рунге-Кутта*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(g_{k1} + 2g_{k2} + 2g_{k3} + g_{k4}),\ k = \overline{0, n-1}, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{k1} &= hf(x_k, y_k),\\
g_{k2} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{g_{k1}}{2}\right),\\
g_{k3} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{g_{k2}}{2}\right),\\
g_{k4} &= hf(x_k + h, y_k + g_{k3}).
\end{aligned}$$

Формула (10) метода Рунге-Кутта хотя и сложнее формулы (6) метода Эйлера, поскольку на каждом шаге приходится вычислять четыре значения функции $f(x, y)$, но зато она обладает гораздо большей точностью. Если правая часть дифференциального уравнения четырежды непрерывно дифференцируема в области D, то погрешность метода Рунге-Кутта сравнима с h^4 и, таким образом, данный метод имеет *четвертый порядок точности.*

Замечание. При заданной точности вычислений $\varepsilon > 0$ здесь, как и при приближенном вычислении определенного интеграла (глава VII, §6), целесообразно применять *правило Рунге* для оценки погрешности. Для этого приближенно вычислим методом Эйлера или Рунге-Кутта решение задачи Коши (1) в узлах сетки с шагом h и в узлах в два раза более густой сетки с шагом $\frac{h}{2}$. Обозначим эти решения через y_h и $y_{\frac{h}{2}}$, соответственно. Будем считать, что требуемая точность достигнута, если во всех совпадающих узлах этих сеток выполняется неравенство

$$\frac{\left|y_h - y_{\frac{h}{2}}\right|}{2^s - 1} < \varepsilon,$$

где s – порядок точности приближенного метода, т.е. $s = 1$ и $s = 4$ для методов Эйлера и Рунге-Кутта, соответственно. Тогда в качестве приближенного решения задачи Коши здесь следует взять $y_{\frac{h}{2}}$.

Пример. *Найти приближенное решение задачи Коши*

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ y(1) = 1$$

на отрезке $[1, 2]$ a) *методом Эйлера с точностью* $\varepsilon = 10^{-2}$ *и* b) *методом Рунге-Кутта с точностью* $\varepsilon = 10^{-7}$.

Решение. Здесь

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ l = 1.$$

a) Проведем вычисления по формуле (6) при $n = 10$ и $n = 20$. Шаги сеток равны, соответственно, $h = 0,1$ и $\frac{h}{2} = 0,05$. Величину погрешности мы оценим по правилу Рунге. Сравним приближенное решение с точным

$$y = x\sqrt{1 + 2\ln x},$$

которое мы можем найти, проинтегрировав данное уравнение как однородное или уравнение Бернулли. Результаты вычислений[1] представлены в следующей таблице:

x	y_h	$y_{\frac{h}{2}}$	y	$\left\lvert y_h - y_{\frac{h}{2}}\right\rvert$	$\left\lvert y - y_{\frac{h}{2}}\right\rvert$
1	2	3	4	5	6
1,05		1,1	1,10004		0,0000374139
1,1	1,2	1,20011	1,20027	0,000108225	0,000162842
1,15		1,30049	1,30083		0,000346678
1,2	1,40076	1,40124	1,40182	0,00048735	0,000570356
1,25		1,50245	1,50327		0,000821769
1,3	1,60316	1,60415	1,60524	0,000990607	0,00109277
1,35		1,70636	1,70774		0,00137773
1,4	1,80757	1,80912	1,81079	0,00155527	0,00167267
1,45		1,91242	1,9144		0,00197475
1,5	2,01413	2,01628	2,01856	0,00215116	0,00228187
1,55		2,12069	2,12328		0,0025925
1,6	2,22288	2,22564	2,22855	0,00276258	0,00290549
1,65		2,33114	2,33436		0,00321996
1,7	2,43379	2,43717	2,4407	0,00338089	0,00353528
1,75		2,54373	2,54758		0,00385093
1,8	2,6468	2,6508	2,65497	0,00400115	0,00416652
1,85		2,75839	2,76287		0,00448178
1,9	2,86185	2,86647	2,87127	0,00462051	0,00479647
1,95		2,97505	2,98016		0,00511043
2,0	3,07887	3,0841	3,08953	0,00523727	0,00542351

Содержимое колонок 5 и 6 показывает, что требуемая точность $\varepsilon = 10^{-2}$ достигнута.

b) Аналогично, воспользовавшись формулой (10) метода Рунге-Кутта на тех же сетках, получим:

x	y_h	$y_{\frac{h}{2}}$	y	$\frac{1}{15}\left\lvert y_h - y_{\frac{h}{2}}\right\rvert$	$\left\lvert y - y_{\frac{h}{2}}\right\rvert$
1	2	3	4	5	6
1,05		1,10004	1,10004		$1,25611 \cdot 10^{-8}$
1,1	1,20027	1,20027	1,20027	$2,04605 \cdot 10^{-8}$	$2,05926 \cdot 10^{-8}$
1,15		1,30083	1,30083		$2,60045 \cdot 10^{-8}$
1,2	1,40182	1,40182	1,40182	$2,95935 \cdot 10^{-8}$	$2,98197 \cdot 10^{-8}$
1,25		1,50327	1,50327		$3,26221 \cdot 10^{-8}$
1,3	1,60524	1,60524	1,60524	$3,44759 \cdot 10^{-8}$	$3,47619 \cdot 10^{-8}$
1,35		1,70774	1,70774		$3,64573 \cdot 10^{-8}$
1,4	1,81079	1,81079	1,81079	$3,75241 \cdot 10^{-8}$	$3,7849 \cdot 10^{-8}$
1,45		1,9144	1,9144		$3,90296 \cdot 10^{-8}$
1,5	2,01856	2,01856	2,01856	$3,971 \cdot 10^{-8}$	$4,00619 \cdot 10^{-8}$
1,55		2,12328	2,12328		$4,09889 \cdot 10^{-8}$
1,6	2,22855	2,22855	2,22855	$4,14683 \cdot 10^{-8}$	$4,18406 \cdot 10^{-8}$

[1]Расчеты выполнены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

1	2	3	4	5	6
1,65		2,33436	2,33436		$4,26383 \cdot 10^{-8}$
1,7	2,4407	2,4407	2,4407	$4,3008 \cdot 10^{-8}$	$4,3397 \cdot 10^{-8}$
1,75		2,54758	2,54758		$4,41278 \cdot 10^{-8}$
1,8	2,65497	2,65497	2,65497	$4,44347 \cdot 10^{-8}$	$4,48385 \cdot 10^{-8}$
1,85		2,76287	2,76287		$4,55348 \cdot 10^{-8}$
1,9	2,87127	2,87127	2,87127	$4,58037 \cdot 10^{-8}$	$4,62211 \cdot 10^{-8}$
1,95		2,98016	2,98016		$4,69005 \cdot 10^{-8}$
2,0	3,08953	3,08953	3,08953	$4,71447 \cdot 10^{-8}$	$4,75751 \cdot 10^{-8}$

Таким образом и здесь найдено приближенное решение данной задачи Коши с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-7}$, которая, как и следовало ожидать, гораздо выше точности решения, полученного методом Эйлера.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М.
   Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М.
   Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М., Наука, 1981.
3. Романко В.К.
   Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М., Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
4. Кудрявцев Л.Д.
   Краткий курс математического анализа. ТТ. 1, 2. – Висагинас, Alfa, 1998.
5. Фихтенгольц Г.М.
   Курс дифференциального и интегрального исчисления. ТТ. I, II. – М., Наука, 1969.
6. Пискунов Н.С.
   Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. ТТ. 1, 2. – М., Наука, 1985.
7. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича) – М., Наука, 1986.
8. *Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа.* (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича) – М., Наука, 1986.
9. Ласый П.Г.
   Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (I *семестр*) [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: http://rep.bntu.by/handle/data/4484. – Дата доступа: 22.03.2013.