МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Теоретическая механика
СТАТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов
дневной, заочной и дистанционной форм обучения

Электронный учебный материал

Минск ◊ БНТУ ◊ 2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Т82

Авторы: В.Д. Тульев, М.В. Мышковец

В данном учебном пособии в сокращенном варианте практически рассмотрены все основные темы полного курса теоретической механики по статике. Приведено много примеров, поясняющих различные положения теории. Грамотно подобраны задачи по всем разделам. Методически правильно объяснено решение этих задач. Учебное пособие написано простым и понятным языком. В нем, несмотря на краткость, сохранены основные фундаментальные положения теоретической механики. Данное пособие будет полезно для всех студентов, изучающих теоретическую механику. Его могут использовать преподаватели, ведущие занятия со студентами заочной формы обучения, а также для дистанционного обучения.

Требования к системе: IBM PC-совместимый ПК стандартной конфигурации, дисковод CD-ROM. Программа работает в среде Windows.

Открытие электронного издания производится посредством запуска файла Teor_mech_statika.pdf. Возможен просмотр электронного издания непосредственно с компакт-диска без предварительного копирования на жесткий диск компьютера.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
Регистрационный номер № БНТУ/МСФ25-1.2013

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТИКА

Статика — это раздел теоретической механики, в котором изучают условия равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, а также приведение сложной системы сил к простейшему виду.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ. СВЯЗИ. ЗАДАЧИ СТАТИКИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого пренебрегают, и обладающую некоторой массой.

Механической системой называют совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой.

Абсолютно твердым телом называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях.

Сила — мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться. Сила является векторной величиной, т. е. она характеризуется величиной, точкой приложения и направлением. Используя единичные векторы, силу можно выразить через ее проекции на оси координат (рис. 1):

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}\ , \qquad (1)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы на соответствующие оси; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы (орты) осей x, y, z. Размерность силы: $[F]$ = Ньютон (Н).

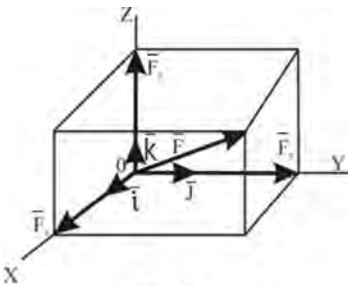


Рис. 1

Системой сил называют совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел.

Пример 1.

$(\bar{F}_1, ..., \bar{F}_n)$ — система сил (рис. 2).

Рис. 2

Эквивалентными системами сил (рис. 3) называют такие системы сил, действие которых на одно и тоже тело одинаково при прочих равных условиях.

$$(\bar{F}_1,\ ...,\ \bar{F}_n) \sim (\bar{Q}_1,\ ...,\ \bar{Q}_m)\,.$$

Пример 2.

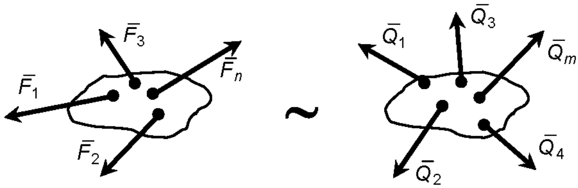


Рис. 3

Равнодействующей силой данной системы сил (рис. 4) называют силу, действие которой на тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил:

$$\bar{R} \sim (\bar{F}_1,\ ...,\ \bar{F}_n)\,,$$

где $\bar{R}$ — равнодействующая.

Пример 3.

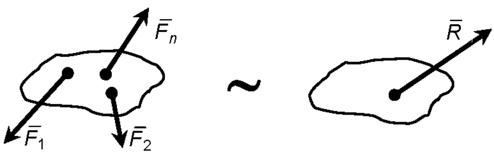


Рис. 4

Уравновешенной системой сил называют систему сил, действие которой на твердое тело, находящееся в покое или движущееся по инерции, не приводит к изменению его состояния. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю:

$$(\bar{F}_1,\ ...,\ \bar{F}_n) \sim 0\,.$$

Уравновешивающей силой заданной системы сил $(\bar{F}_1,\ ...,\ \bar{F}_n)$ называют такую силу, которая, будучи присоединенной к этой системе сил, составит вместе с ней новую систему сил, эквивалентную нулю: $(\bar{F}_1,\ ...,\ \bar{F}_n,\ \bar{F}_y) \sim 0$, причем $\bar{F}_y = -\bar{R}$.

Сосредоточенной силой $\bar{F}$ называют силу, приложенную к какой-либо точке твердого тела. На рис. 4 силы $\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\ ...,\ \bar{F}_n$ являются сосредоточенными.

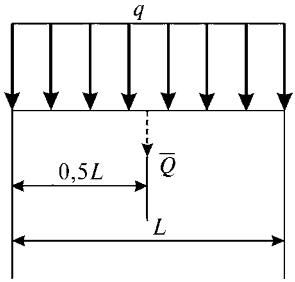


Рис. 5

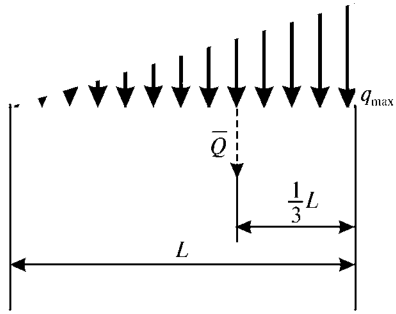


Рис. 6

Распределенными называют силы, действующие на все точки данного объема, или данной части поверхности или линии. Распределенные силы характеризуются интенсивностью q, т. е. силой, приходящейся на единицу объема, поверхности или длины линии. Распределенные силы обычно заменяют сосредоточенными.

Если распределенные силы действуют в плоскости на прямую линию, то их заменяют сосредоточенной силой следующим образом.

Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяют сосредоточенной силой $Q = qL$, которая приложена в середине участка. Равномернораспределенной нагрузкой называют силы, имеющие одинаковые величины и направления на заданном участке тела (рис. 5).

Если распределенные силы изменяются по линейному закону (по треугольнику), то сосредоточенная сила $Q = q_{max} \frac{L}{2}$ приложена в центре тяжести треугольника, расположенного на расстоянии $\frac{L}{3}$ от его основания (рис. 6).

Внутренними силами называют силы взаимодействия между телами, входящими в механическую систему.

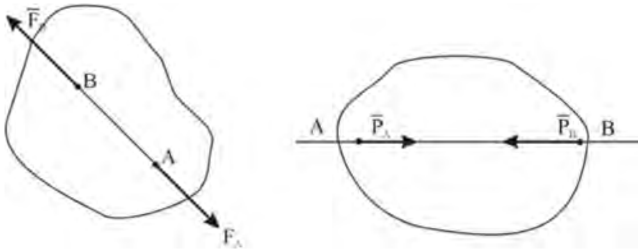
Внешними силами называют силы, с которыми на тела рассматриваемой механической системы действуют тела, не входящие в данную механическую систему.

Пример 4.

Груз, подвешенный на пружине, находится в равновесии. Сила тяжести, обусловленная притяжением Земли, является внешней силой. Силы упругости, возникающие при растяжении пружины, будут внутренними силами

Аксиомы статики

1. **Аксиома о равновесии системы двух сил.** Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю), если равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположных направлениях (рис. 7, *а*, *б*).



а $- F_A = F_B$; $\bar{F}_A = -\bar{F}_B$ *б* $- P_A = P_B$; $\bar{P}_A = -\bar{P}_B$

Рис. 7

2. **Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю.** Не нарушая состояние абсолютно твердого тела, к нему можно приложить или отбросить уравновешенную систему сил.

Следствие. Не нарушая состояние твердого тела, силу можно переносить по линии ее действия, т. е. сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является скользящим вектором.

Скользящими векторами называют множества коллинеарных направленных в одну сторону векторов, лежащих на одной прямой.

3. **Аксиома параллелограмма сил**. Не нарушая состояние твердого тела, две силы, приложенные в одной его точке, можно заменить равнодействующей, равной их геометрической сумме и приложенной в той же точке (рис. 8).

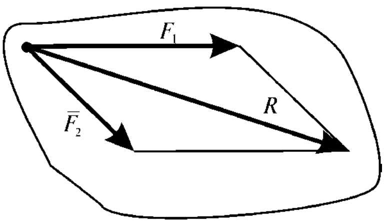


Рис. 8

Справедливо и обратное, т. е. одну силу, приняв ее за равнодействующую, можно разложить на две составляющие силы:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 . \qquad (2)$$

Модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\bar{F}_1 \hat{,} \bar{F}_2)} . \qquad (3)$$

4. **Аксиома о равенстве сил действия и противодействия**. Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной пря-

мой в противоположные стороны (третий закон Ньютона). Силами взаимодействия являются силы действия и силы противодействия.

Силы взаимодействия (действия и противодействия) двух тел приложены к разным телам и не являются уравновешенной системой сил.

Пример 5.

Тело находится на гладкой горизонтальной поверхности и давит на эту поверхность с силой $\overline{P}$. В свою очередь поверхность действует на тело с силой $\overline{N}$. Сила $\overline{P}$ — сила действия, а сила $\overline{N}$ — противодействия. Эти силы равны по модулю и противоположно направлены, но приложены к различным телам (рис. 9).

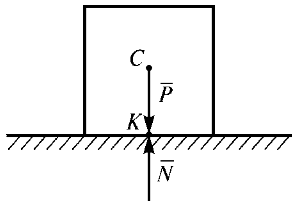


Рис. 9

5. **Аксиома затвердения.** Равновесие деформируемого тела не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

Активные силы и реакции связей

Свободным называют тело, перемещения которого в данный момент в пространстве не ограничены. Несвободным называют тело, перемещения которого ограничены. Связями называют тела, которые ограничивают перемещения другого тела. Реакциями связей или просто реакциями называют силы, с которыми связи воздействуют на тело.

Принцип освобождаемости от связей. Несвободное тело будет свободным, если отбросить связи и заменить их реакциями.

Активными (заданными) силами называют силы, не зависящие от связей. Реакции связей называют пассивными силами. Реакции связей зависят от активных сил. Направление реакций можно определить, исходя из вида связей.

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ СВЯЗЕЙ

1. *Гибкая нерастяжимая нить.* Действия нити заменяем силой натяжения нити $\overline{T}$, которая направлена вдоль нити (рис. 10, *а*, *б*): $|\overline{T}| = |\overline{P}|$.

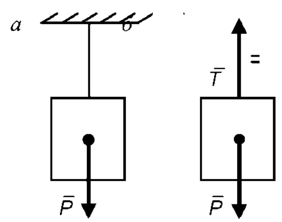


Рис. 10

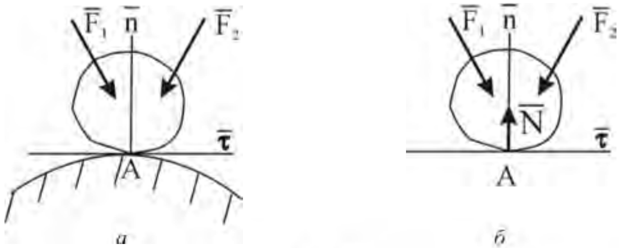


Рис. 11

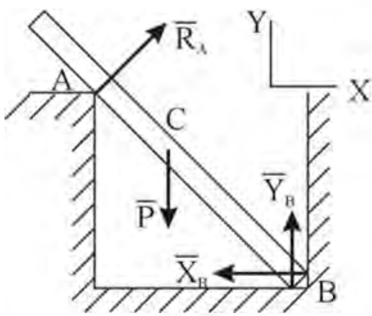


Рис. 12

2. *Абсолютно гладкая (без трения) поверхность.* Реакция $\bar{N}$ такой поверхности направлена по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 11, *а*, *б*).

3. *Гладкий угол.* В точке *A* реакция $\bar{R}_A$ перпендикулярна поверхности тела. В точке *B* две реакции $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$, перпендикулярные поверхностям, на которые опирается тело (рис. 12).

4. *Невесомый стержень с двумя шарнирами.* Реакция стержня направлена по линии шарниров от данного тела в предположении, что эти стержни растягиваются под действием приложенных сил (рис. 13, *а*, *б*) (AA', BB', CC' — стержни).

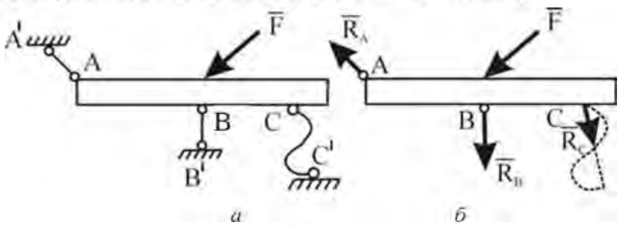


Рис. 13

5. *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора.* Реакция шарнирно-подвижной опоры перпендикулярна опорной поверхности (рис. 14, *а*, б).

6. *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора.* Направление реакции $\bar{R}_A$ шарнирно-неподвижной опоры неизвестно, но она приложена в точке *A*. По аксиоме параллелограмма сил разложим реакцию $\bar{R}_A$ на две составляющие по выбранным осям координат (рис. 15, *а*, *б*).

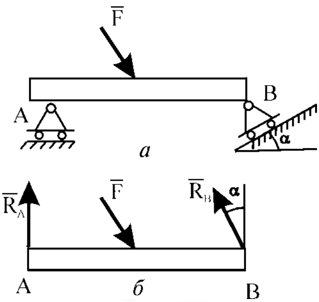


Рис. 14

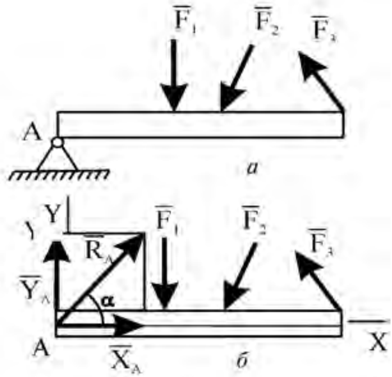


Рис. 15

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A \quad \text{или} \quad \bar{R}_A = X_A\bar{i} + Y_A\bar{j}.$$

Модуль реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{X_A}{R_A}$.

7. *Сферический шарнир.* Направление реакции $\bar{R}_A$ сферического шарнира может быть любое в зависимости от активных сил. Реакцию $\bar{R}_A$ раскладываем по трем выбранным взаимно перпендикулярным осям (рис. 16):

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$$

Модуль реакции

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}.$$

Углы с осями координат

$$\cos\left(x \,\hat{,}\, \bar{R}_A\right) = \frac{X_A}{R_A},$$

$$\cos\left(y \,\hat{,}\, \bar{R}_A\right) = \frac{Y_A}{R_A}, \quad \cos\left(z \,\hat{,}\, \bar{R}_A\right) = \frac{Z_A}{R_A}.$$

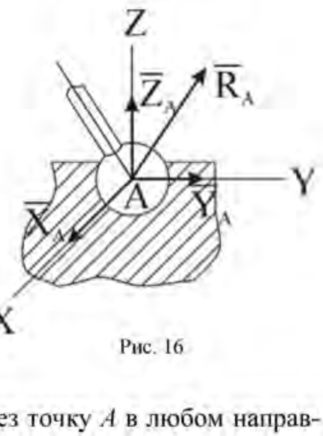


Рис. 16

8. *Подпятник.* Реакция $\bar{R}_A$ проходит через точку *A* в любом направлении в зависимости от активных сил. Реакцию $\bar{R}_A$ раскладываем по трем выбранным взаимно перпендикулярным осям (рис. 17, *а*, *б*):

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$$

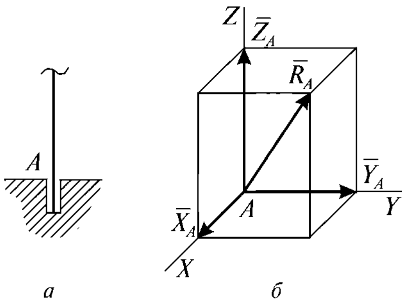


Рис. 17

Модуль реакции и углы с осями координат:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2},$$

$$\cos\left(x \hat{,} \bar{R}_A\right) = \frac{X_A}{R_A},$$

$$\cos\left(y \hat{,} \bar{R}_A\right) = \frac{Y_A}{R_A},$$

$$\cos\left(z \hat{,} \bar{R}_A\right) = \frac{Z_A}{R_A}.$$

9. *Глухая заделка.* В точке *A* имеются реакция $\bar{R}_A$ и момент глухой заделки M_A, направление которых неизвестно. Реакцию $\bar{R}_A$ раскладываем по выбранным осям, а направление момента выбираем против хода часовой стрелки (рис. 18, *а*, *б*).

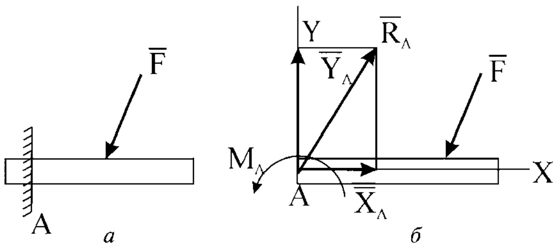


Рис. 18

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A.$$

Модуль реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ и угол реакции с осью *X*:

$$\cos\left(x \hat{,} \bar{R}_A\right) = \frac{X_A}{R_A}.$$

П р и м е ч а н и е. Если направление реакций точно неизвестно, то направляем их в сторону положительного направления осей. Если при решении задачи соответствующая реакция получится со знаком минус, то это означает, что она направлена в действительности противоположно принятому первоначально направлению.

Основные задачи статики

1. *Задача о равновесии.* Каким условиям должна удовлетворять система сил, чтобы она была уравновешенной системой сил.

2. *Задача о приведения системы сил*. Каким образом данную сложную систему сил заменить другой более простой системой.

Теорема о трех непараллельных силах

Если твердое тело под действием трех непараллельных сил, две из которых пересекаются, находится в равновесии, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Пример 6.

На середину балки *AB* действует сила *P* (рис. 19). В точке *A* балка имеет шарнирно-неподвижную опору, а в точке *B* — шарнирно-подвижную. Определить линию действия реакции в точке *A*.

Решение. Реакция $\bar{R}_B$ шарнирно-неподвижной опоры перпендикулярна опорной поверхности и пересекается с линией действия силы *P* в точке *C*. По теореме о трех непараллельных силах реакция опоры *A* должна пройти через эту точку:

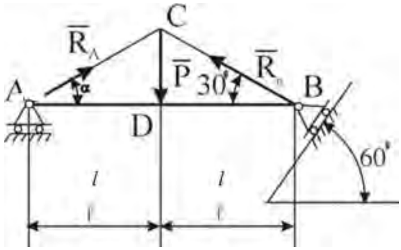


Рис. 19

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AD} : CD = l\operatorname{tg}30°,\ \ AD = l,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l\operatorname{tg}30°}{l} = \operatorname{tg}30°,$$

$$\alpha = 30°.$$

Ответ. Реакция $\bar{R}_A$ образует угол 30° с осью балки *AB*.

Вопросы для повторения

1. Что изучает статика?
2. Если при взаимодействии расстояния между точками тела уменьшаются, то можно ли это тело считать абсолютно твердым?
3. Если тела не сообщают друг другу ускорения, но при этом деформируются, то действует ли в этом случае сила?
4. Можно ли определить силу, задав только величину силы и ее точку приложения?

5. При каком условии две системы сил можно считать эквивалентными?
6. Будет ли уравновешенной такая система сил, если она приводит в движение покоящееся тело?
7. Дайте определение равнодействующей силы.
8. Если книга лежит на горизонтальной поверхности стола, то ее действие на стол характеризуется сосредоточенной или распределенной силой?
9. Можно ли считать давление книги на стол равномерно распределенной нагрузкой?
10. Если распределенные силы изменяются по линейному закону, то будет ли такая нагрузка равномерно распределенной?

2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой точкой схода сил.

Пример 7.

Линии действия четырех сил, пересекаются в одной точке, которая является точкой схода сил. Систему сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$) называют системой сходящихся сил (рис. 1).

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

Система сходящихся сил приводится к равнодействующей, которая равна геометрической сумме всех сил системы и проходит через точку схода сил, т. е. точку пересечения линий действия этих сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \tag{1}$$

Графический способ нахождения равнодействующей

Нахождение равнодействующей основано на построении векторного многоугольника сил, который называют силовым многоугольником. Равнодействующая в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней.

Пример 8.

Используя условие примера 7, найти равнодействующую этой системы сил, построив векторный многоугольник сил.

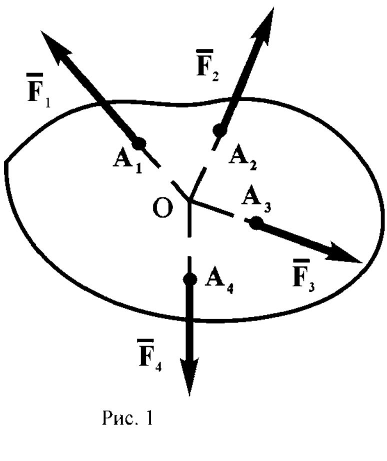


Рис. 1

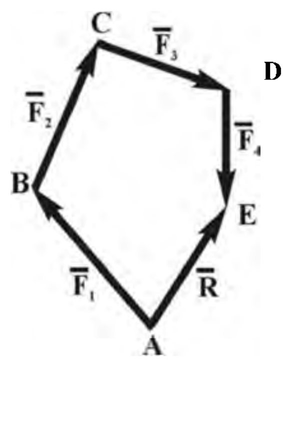


Рис. 2

Решение. Из произвольно выбранного центра *A* (рис. 2) проводим линию, параллельную вектору силы $\overline{F_1}$, и откладываем отрезок *AB*, равный в масштабе модулю этой силы. Из точки *B* проводим отрезок *BC*, параллельный вектору силы $\overline{F_2}$ и равный в масштабе модулю этой силы. Из точки *C* проводим отрезок *CD*, параллельный вектору силы $\overline{F_3}$ и равный в масштабе модулю этой силы. Из точки *D* проводим отрезок *DE*, параллельный вектору силы $\overline{F_4}$ и равный в масштабе модулю этой силы.

Отрезок *AE*, который соединяет начало вектора $\overline{F_1}$ с концом вектора $\overline{F_4}$, будет равнодействующей этой системы сходящихся сил. Величина равнодействующей равна в масштабе отрезку *AE*.

Ответ. Равнодействующая с заданной системой сходящихся сил проходит через точку схода сил *A*, направлена от точки *A* к точке *E*. Величина равнодействующей равна в масштабе отрезку *AE*.

Строить многоугольник сил можно в любой последовательности, от которой меняется лишь форма многоугольника, а равнодействующая остается неизменной. Для пространственной системы сходящихся сил многоугольник является пространственной фигурой, для плоской — плоской фигурой.

Если многоугольник строить в масштабе, то равнодействующую можно найти непосредственным измерением ее.

Равнодействующую произвольного числа пересекающихся в одной точке сил также можно получить последовательным построением параллелограммов сил (построение выполняется в точке схода сил данной системы).

Аналитический способ нахождения равнодействующей

Равнодействующую системы сходящихся сил можно определить аналитическим способом, который основан на проектировании сил системы и равнодействующей на выбранные оси координат, начало которых находится обычно в точке схода сил:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, \\ R_y &= \sum F_{ky}, \\ R_z &= \sum F_{kz} \end{aligned} \tag{3}$$

(R_x, R_y, R_z – проекции равнодействующей на соответствующие оси координат).

Модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \tag{4}$$

Направление равнодействующей в системе координат

$$\cos\left(x,\hat{}\,\overline{R}\right) = \frac{R_x}{R},\ \cos\left(y,\hat{}\,\overline{R}\right) = \frac{R_y}{R},\ \cos\left(z,\hat{}\,\overline{R}\right) = \frac{R_z}{R}. \tag{5}$$

Пример 9.

В точке O приложены силы $F_1 = 26$ Н, $F_2 = 26$ Н, $F_3 = 44$ Н. Определить величину и направление равнодействующей (рис. 3, *а*).

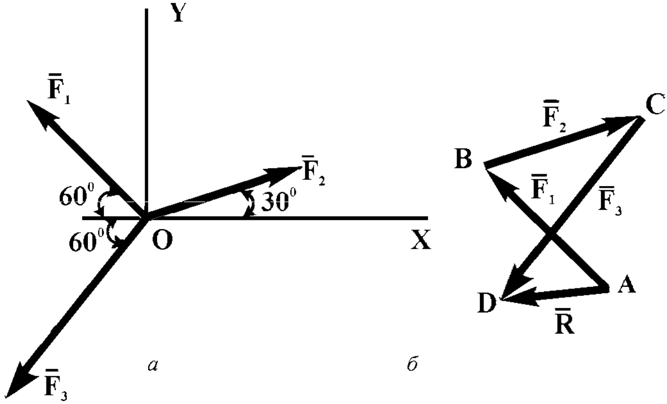


Рис. 3

Решение. *а) Графический метод.* В выбранном масштабе строим многоугольник сил. Начинаем с $\overline{F}_1$, прикладываем ее в точке *A,* $\overline{F}_2$ проводим с конца вектора $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$ проводим с конца вектора $\overline{F}_2$. Конец вектора $\overline{F}_3$ соединяем с точкой *A*. На рис. 3, *б* $\overline{F}_1 = AB$, $\overline{F}_2 = BC$, $\overline{F}_3 = CD$, $\overline{R} = AD$.

б) Аналитический метод

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_1 \cos 60° + F_2 \cos 30° - F_3 \cos 60° = -26 \cdot 0{,}5 +$$

$$+ 26 \cdot 0{,}87 - 44 \cdot 0{,}5 = -12{,}38 \text{ Н},$$

$$R_y = \sum F_{ky} = F_1 \cos 30° + F_2 \cos 60° - F_3 \cos 30° = 26 \cdot 0{,}87 +$$

$$+ 26 \cdot 0{,}5 - 44 \cdot 0{,}87 = -2{,}66 \text{ Н},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-12{,}381)^2 + (-2{,}66)^2} = 12{,}66 \text{ Н},$$

$$\cos\left(x, \hat{\overline{R}}\right) = \frac{R_x}{R} = -\frac{12,38}{12,66} = -0,978; \quad \angle x, \overline{R} = 167,96^\circ.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0. \qquad (6)$$

Геометрически условие равновесия означает, что силовой многоугольник будет замкнут, т. е. при построении силового многоугольника конец последнего вектора совпадает с началом первого вектора.

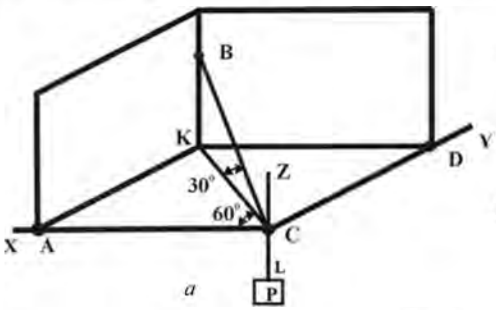
Аналитически для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы проекции всех сил системы на соответствующие координаты оси равнялись нулю:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx} = 0, \\ R_y &= \sum F_{ky} = 0, \\ R_z &= \sum F_{kz} = 0. \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{аналитическое условие} \\ \text{равновесия пространственной} \\ \text{системы сходящихся сил.}\end{matrix} \qquad (7)$$

Для плоской системы сходящихся сил достаточно будет двух уравнений.

Пример 10.

Три невесомых стержня соединены в точке *C* шарниром, к которому нитью прикреплен груз *P* = 100 Н. В положении, когда плоскость *ACDK* горизонтальна, $\angle ACK = 60°$, $\angle BCK = 30°$, найти усилия в стержнях *AC, BC, DC.* Направление осей координат показано на рис. 4, *а*.



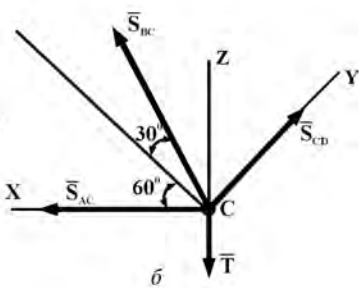


Рис. 4

Решение. На основании принципа освобождаемости от связей заменяем действие стержней *AC, BC, DC* и нити *CL* на шарнир *C* реакциями:

$\overline{S}_{AC}$, $\overline{S}_{CD}$, $\overline{S}_{BC}$, $\overline{T}$, которые направляем от шарнира (рис. 4, *б*), считая, что $T = P$. Найдем проекции всех сил на соответствующие оси и запишем уравнения равновесия (7).

Для удобства вычислений представим данные в виде таблицы.

Проекция сил на оси координат

Проекция	Сила			
	S_{AC}	S_{CD}	S_{BC}	T
F_{kx}	S_{AC}	0	$S_{BC}\cos 30° \cos 60°$	0
F_{ky}	0	S_{CD}	$S_{BC}\cos 30° \cos 30°$	0
F_{kz}	0	0	$S_{BC}\cos 60°$	$-T$

Тогда уравнения равновесия принимают вид

1. $\sum F_{kx} = S_{AC} + S_{BC}\cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0,$

2. $\sum F_{ky} = S_{CD} + S_{BC}\cos^2 30^\circ = 0,$

3. $\sum F_{kz} = S_{BC}\cos 60^\circ - T = 0.$

Находим из 3.

$$S_{BC} = \frac{T}{\cos 60^\circ} = \frac{100}{0,5} = 200\,\text{Н},$$

из 2.

$$S_{CD} = -S_{BC}\cos^2 30^\circ = -200\frac{3}{4} = -150\,\text{Н},$$

из 1.

$$S_{AC} = -S_{BC}\cos 30^\circ \cos 60^\circ = -200\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = -87\,\text{Н}.$$

Ответ. $S_{BC} = 200$ Н, $S_{CD} = -150$ Н, $S_{AC} = -87$ Н.

Минус означает, что стержни AC и CD сжаты, а не растянуты, как предполагалось вначале.

Пример 11.

Два невесомых стержня, соединенные в точке C шарниром, удерживают груз $P = 50$ Н, который нитью прикреплен к шарниру C. Найти усилия в стержнях AC и BC, если $\angle CB = 60°$.

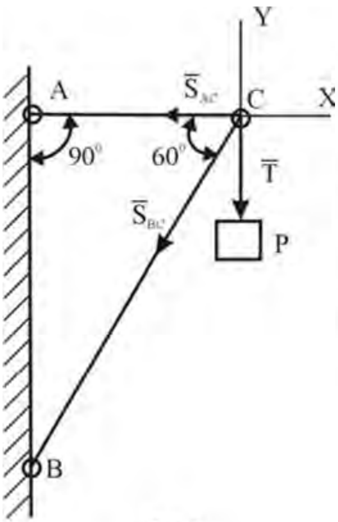


Рис. 5

Решение. Используя принцип освобождаемости от связей, заменяем действие стержней AC, BC и нити на шарнир C реакциями $\overline{S}_{AC}$, $\overline{S}_{BC}$, $\overline{T}$. Учтем, что $T = P = 50$ Н. Реакции показаны на рис. 5. Считаем стержни растянутыми и не делаем дополнительный рисунок. Запишем уравнения равновесия, учитывая, что конструкция находится в плоскости CXY. Направления осей показаны на рисунке.

1. $\sum F_{kx} = -S_{AC} - S_{BC}\cos 60^\circ = 0.$
2. $\sum F_{ky} = -T - S_{BC}\cos 30^\circ = 0.$

Находим из 2.

$$S_{BC} = -\frac{T}{\cos 30^\circ} = -\frac{50 \cdot 2}{\sqrt{3}} = -57{,}74\,\text{Н},$$

из 1.

$$S_{AC} = -S_{BC}\cos 60^\circ = -(-57{,}74)0{,}5 = 28{,}87\,\text{Н}.$$

Ответ. $S_{BC} = -57{,}74$ Н, $S_{AC} = 28{,}87$ Н.

Отрицательное значение указывает, что стержень BC сжат, а не растянут, как предполагалось.

Вопросы для повторения

1. Дайте определение системы сходящихся сил.
2. Как найти равнодействующую системы сходящихся сил графическим методом?
3. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил аналитическим методом?
4. Сформулируйте условие равновесия системы сходящихся сил.
5. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.
6. Сформулируйте аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.

3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

Алгебраический момент силы относительно точки

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют произведение модуля силы на плечо этой силы относительно выбранной точки, взятое со знаком плюс или минус.

Плечом h силы $\bar{F}$ относительно выбранной точки называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

Момент силы считают положительным, если под ее действием тело стремится повернуться относительно выбранной точки против хода часовой стрелки, если по ходу часовой стрелки, то момент будет отрицательным.

Обозначают алгебраический момент силы $M_0(\bar{F})$ (момент силы $\bar{F}$ относительно выбранной точки *О*). Сила не дает момента, если линия действия проходит через точку, относительно которой определяется момент:

$$M_0(\bar{F}) = \pm Fh. \tag{1}$$

Пример 12.

Определить момент силы $F = 100$ Н относительно точек *A, C, B*. Сила действует по диагонали прямоугольника *ABCD*, где *BC* = 3 м, *AC* = 4 м.

Решение. Определим плечо силы относительно точек *A* и *B*. Для этого опускаем перпендикуляр на линию действия силы (прямую *CD*) из точек *A* и *B* (рис. 1):

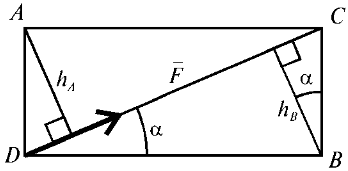


Рис. 1

$$h_A = AD\cos\alpha, \quad h_B = BC\cos\alpha,$$

Из ΔCBD : $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0,8,$

$h_A = h_B = 3\cdot 0,8 = 2,4$ м, так как *AD* = *BC* = 3 м.

$M_A(\bar{F}) = Fh_A = 100\cdot 2,4 = 240$ Н·м,

$M_B(\bar{F}) = -Fh_B = -100\cdot 2,4 = -240$ Н·м (момент силы *F* относительно точки *B* отрицательный, так как сила *F* стремится повернуться относительно точки *B* по ходу часовой стрелки),

$M_C(\bar{F}) = Fh_C = 0$, так как $h_C = 0$.

Ответ. $M_A(\bar{F}) = 240$ Н·м, $M_B(\bar{F}) = -240$ Н·м, $M_C(\bar{F}) = 0$.

Векторный момент силы относительно точки

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на ее плечо относительно точки. Векторный момент силы перпендикулярен плоскости, проведенной через вектор силы и точку, и направлен таким образом, чтобы с его конца можно было бы видеть «стремление» силы вращать тело против хода часовой стрелки.

Векторный момент силы относительно точки *O* обозначают $\bar{M}_0(\bar{F})$.

Векторный момент силы можно определить из векторного произведения вектора $\bar{r}_A$ на вектор $\bar{F}$ (рис. 2):

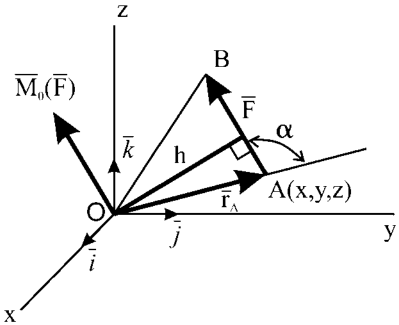


Рис. 2

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F},$$

$$\left|\bar{r}_A \times \bar{F}\right| = r_A F \sin\alpha,$$

$$h = r_A \sin\alpha,$$

$$\left|\bar{r}_A \times \bar{F}\right| = hF.$$

По правилу векторного произведения вектор $\bar{r}_A \times \bar{F}$ направлен перпендикулярно плоскости, образованной $\bar{r}_A$ и $\bar{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\bar{r}_A$ к вектору $\bar{F}$ виден против хода часовой стрелки, т. е. векторное произведение $\bar{r}_A \times \bar{F}$ совпадает с векторным моментом $\bar{M}_0(\bar{F})$.

Вычислим векторный момент силы $\bar{F}$ относительно точки *O*, если известны координаты точки приложения *A*(*x*, *y*, *z*) и $\bar{F} = F_X\bar{i} + F_Y\bar{j} + F_Z\bar{k}$:

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} = \tag{2}$$

$$= \left(yF_Z - zF_Y\right)\bar{i} + \left(zF_X - xF_Z\right)\bar{j} + \left(xF_Y - yF_X\right)\bar{k}.$$

Тогда

$$M_{0X}(\bar{F}) = yF_Z - zF_Y,$$
$$M_{0Y}(\bar{F}) = zF_X - xF_Z, \qquad (3)$$
$$M_{0Z}(\bar{F}) = xF_Y - yF_X,$$

где M_{0X}, M_{0Y}, M_{0Z} — проекции векторного момента на соответствующие оси координат.

Модуль векторного момента

$$\left|\bar{M}_0(\bar{F})\right| = \sqrt{(M_{0X}(\bar{F}))^2 + (M_{0Y}(\bar{F}))^2 + (M_{0Z}(\bar{F}))^2}. \qquad (4)$$

Пример 13.

Используя условие примера 12, найти направление векторного момента точек *A* и *B*, если

$$\left(\bar{F} \in Dyz, \quad \bar{F} \perp Dx\right).$$

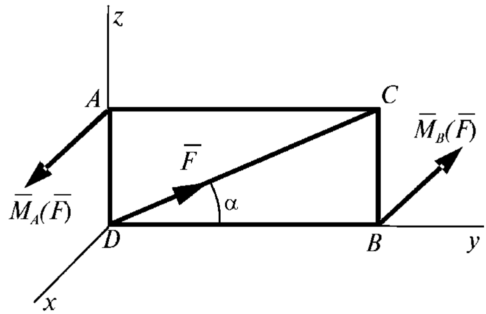


Рис. 3

Решение. Используя определение векторного момента, можно сделать вывод, что векторный момент относительно точки *A* направлен перпендикулярно плоскости чертежа на читателя, а относительно *B* — в обратную от читателя сторону (рис. 3).

Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называют произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятую со знаком плюс или минус.

Момент силы относительно оси будет положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремится повернуться против хода часовой стрелки вокруг положительного направления оси (рис. 4):

$$M_Z(\bar{F}) = M_0(\Pi p_Q \bar{F}) = h(\Pi p_Q \bar{F}) = hF_{XY}, \qquad (5)$$

где h — плечо проекции силы относительно точки O пересечения оси и плоскости Q; $F_{XY} = \Pi p_Q \bar{F}$ — проекция силы F на плоскость Q.

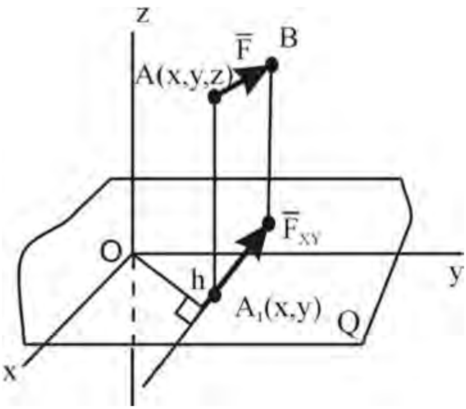


Рис. 4

Для определения момента силы относительно оси необходимо:

1. Спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Определить плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью,
3. Перемножить проекцию силы с плечом и определить знак момента.

Момент силы относительно оси равен нулю если:

1. Сила параллельна оси.
2. Линия действия силы пересекает ось.

Таким образом момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось находятся в одной плоскости.

Связь между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно точки на оси

Определим момент силы $\bar{F}_{XY}$ (рис. 4) (проекции силы $\bar{F}$ на плоскость XOY) относительно точки O пересечения плоскости Q и оси OZ по формуле (2), учитывая, что координата точки приложения силы F_{XY} по оси Z равна нулю и проекция силы F_{XY} на ось Z также равна нулю, т. е. $Z = 0$ и $F_Z = 0$:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_{XY}) = (y \cdot 0 - 0 \cdot F_y)\bar{i} + (0 \cdot F_X - x \cdot 0)\bar{j} + (xF_y - yF_X)\bar{k},$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_{XY}) = (xF_y - yF_X)\bar{k} = M_{OZ}(\bar{F}_{XY})\bar{k} = M_{OZ}(\bar{F})\bar{k}.$$

Момент силы $\bar{F}$ относительно оси Z равен проекции векторного момента силы $\bar{F}_{XY}$ на ось Z, а также моменту силы $\bar{F}_{XY}$ относительно точки O:

$$M_Z(\bar{F}) = M_{0Z}(\bar{F}) = M_{0Z}(\bar{F}_{XY}) = hF_{XY}. \qquad (6)$$

Момент силы относительно оси равен проекции векторного момента этой силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку.

Пример 14.

Определить момент силы $F = 40$ Н относительно осей координат и относительно начала координат, если сторона куба равна 0,5 м (рис. 5).

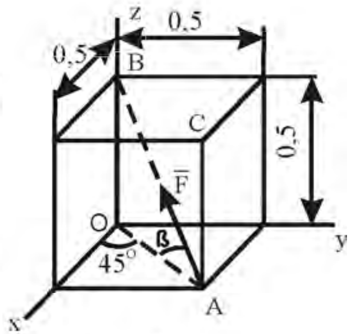


Рис. 5

Решение.

I способ. По формуле (3) найдем проекции векторного момента на оси координат:

$$M_{0X}(\overline{F}) = y_A F_Z - z_A F_Y,$$

$$M_{0Y}(\overline{F}) = z_A F_X - x_A F_Z,$$

$$M_{0Z}(\overline{F}) = x_A F_Y - y_A F_X.$$

Найдем координаты точки A и проекции силы F на оси координат

$$\cos\beta = \frac{OA}{AB} = \frac{0,707}{\sqrt{0,5^2 + 0,707^2}} = 0,866,$$

$$\sin\beta = 0,5,$$

$$x_A = 0,5\,\text{м},\ \ y_A = 0,5\,\text{м},\ \ z_A = 0,$$

$$F_X = -F\cos\beta\cos 45^\circ = -40 \cdot 0,87 \cdot 0,707 = -24,5\,\text{Н},$$

$$F_Y = -F\cos\beta\cos 45^\circ = -24,5\,\text{Н},$$

$$F_Z = F\sin\beta = 20\,\text{Н}.$$

Тогда

$$M_{0X}(\overline{F}) = 0,5 \cdot 20 - 0(-24,5) = 10\,\text{Н·м},$$

$$M_{0Y}(\overline{F}) = 0(-24,5) - 0,5 \cdot 20 = -10\,\text{Н·м},$$

$$M_{0Z}(\overline{F}) = 0,5(-24,5) - 0,5(-24,5) = 0,$$

$$M_0(\overline{F}) = \sqrt{(M_{0X}(\overline{F}))^2 + (M_{0Y}(\overline{F}))^2} = 14,14\ \text{Н·м}.$$

II способ. Определим моменты силы $\overline{F}$ относительно осей координат по формуле (5).

Спроектируем силу F на плоскость, перпендикулярно осям x, y, z:

$$F_{XY} = F\cos\beta = 17,32\,\text{Н}\ ,\ \bar{F}_{XY} \perp 0Z,$$

$$F_{ZY} = F\sin\beta = 20\,\text{Н},\ \bar{F}_{ZY} \perp 0Y,\ \ \bar{F}_{ZY} \perp 0X.$$

Получим

$$M_X(\bar{F}) = 0,5F_{ZY} = 10\,\text{Н·м},$$

$$M_Y(\bar{F}) = -0,5F_{ZY} = -10\,\text{Н·м},$$

$$M_Z(\bar{F}) = 0F_{XY} = 0$$

(так как $\bar{F}_{XY}$ не рассекает ось Z, то момент силы $\bar{F}$ относительно оси Z равен нулю).

Результаты, полученные обоими способами, совпадают.

Ответ.

$$M_X(\bar{F}) = M_{0X}(\bar{F}) = 10\,\text{Н·м},$$

$$M_Y(\bar{F}) = M_{0Y}(\bar{F}) = -10\,\text{Н·м},$$

$$M_Z(\bar{F}) = M_{0Z}(\bar{F}) = 0.$$

$$M_0\bar{F} = 14,14\,\text{Н·м}.$$

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте определение алгебраического момента силы относительно точки.
2. Как определить плечо силы относительно точки?
3. В каком случае момент силы считают положительным, а в каком – отрицательным?
4. Сформулируйте определение векторного момента силы относительно точки.
5. Как направлен векторный момент силы?
6. Как определить проекции векторного момента силы на оси координат, если известна проекции силы на соответствующие оси и координаты точки приложения силы?
7. Сформулируйте определение момента силы относительно оси.
8. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
9. Какая связь существует между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно точки, лежащей на оси?

4. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Две параллельные и направленные в одну сторону силы приводятся к равнодействующей, параллельной этим силам и равной их алгебраической сумме, направленной в ту же сторону.

Точка приложения равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил (рис. 1):

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \quad R = F_1 + F_2. \qquad (1)$$

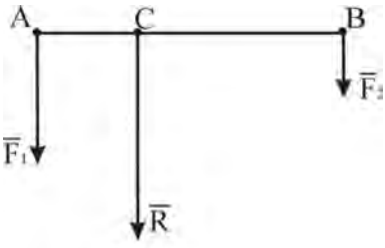


Рис. 1

Пример 15.

Найти равнодействующую и ее точку приложения, если $F_1 || F_2$, $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 5$ Н, $AB = 0{,}4$ м (рис. 1).

Решение.

$$R = F_1 + F_2 = 25 \text{ Н},$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \quad BC = AB - AC,$$

$$F_1 AC = F_2, \quad BC = F_2(AB - AC),$$

$$F_1 AC + F_2 AC = F_2 AB,$$

$$AC = \frac{F_2 AB}{F_1 + F_2} = \frac{5 \cdot 0{,}4}{20 + 5} = \frac{2}{25} = 0{,}08 \text{ м},$$

$$BC = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32 \text{ м}.$$

Ответ. $R = 25$ Н, $AC = 0{,}08$ м.

Сложение двух параллельных неравных по модулю сил, направленных в противоположные стороны

Две параллельные, неравные по модулю и направленные в противоположные стороны силы приводятся к равнодействующей, параллельный этим силам, равной разности их модулей и направленной в сторону большей силы.

Точка приложения равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, и расположена за большей по модулю силой (рис. 2):

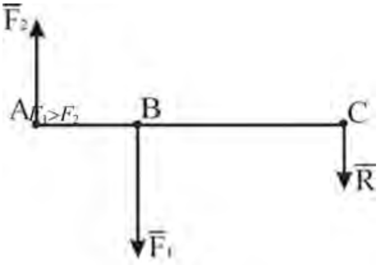


Рис. 2

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{AC}{BC},\quad R=F_1-F_2. \qquad (2)$$

Пример 16.

Найти равнодействующую и ее точку приложения, если $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 5$ Н, $AB = 0{,}4$ м, $F_1 \parallel F_2$.

Решение.

$$R = F_1 - F_2 = 20 - 5 = 15\,\text{Н},$$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{AC}{BC},\quad AC = BC + AB,$$

$$F_1BC = F_2AC = F_2(BC + AB),$$

$$F_1BC - F_2BC = F_2AB,$$

$$BC = \frac{F_2AB}{F_1-F_2}=\frac{5\cdot 0{,}4}{20-5}=\frac{2}{15}=0{,}13\,\text{м},$$

$$AC = 0{,}4 + 0{,}13 = 0{,}53\,\text{м}.$$

Ответ. $R = 15$ Н, $BC = 0{,}13$ м.

Пара сил

Парой сил называют неупрощаемую систему двух равных по модулю и противоположно направленных параллельных сил с несовпадающими линиями действия.

Пару сил нельзя заменить одной силой, т. е. она не имеет равнодействующей.

Пара сил характеризуется плоскостью действия, (рис. 3, плоскость $\overline{F}$, $\overline{F}'$), величиной момента пары и направлением вращения. Пара сил определяется векторным моментом пары. Он является вектором, перпендикулярным плоскости действия пары, и направлен в сторону, соответствующую вращению пары против хода часовой стрелки. По модулю векторный момент равен произведению одной из сил пары на плечо пары (рис. 3). Пару

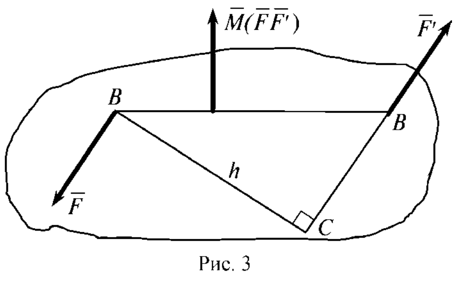


Рис. 3

сил обозначают ($\overline{F}$, $\overline{F}'$)

$$\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}') \perp \text{пл.}\,(\overline{F}_1, \overline{F}'),$$

$$\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}') = \overline{AB} \times \overline{F}' = \overline{BA} \times \overline{F},$$

модуль момента

$$M(\overline{F}, \overline{F}') = hF = hF'.$$

Векторный момент пары является свободным вектором и может быть приложен к любой точке твердого тела. Это объясняется тем, что сумма векторных моментов сил, входящих в пару, всегда равна векторному моменту пары.

Пример 17.

Силы $(\overline{F}, \overline{F}')$, равные 30 Н, образуют пару с плечом 0,5 м. Найти момент пары сил относительно точки *O*, если *OB* □= 1,5 м (рис. 4).

Решение. Найдем модуль момента пары

$$M(\overline{F}, \overline{F}') = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ Н·м.}$$

Знак момента положительный, так как пара стремится повернуться против хода часовой стрелки.

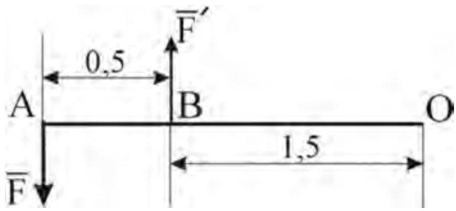


Рис. 4

Найдем моменты сил $\overline{F}$ и $\overline{F}'$ относительно точки *O*:

$$M_0(\overline{F}) = F \cdot AO = 30(0,5 + 1,5) = 60 \text{ Н·м,}$$

$$M_0(\overline{F}') = -F' \cdot BO = -30 \cdot 1,5 = -45 \text{ Н·м,}$$

$$M_0(\overline{F}_1\overline{F}') = M_0(\overline{F}) + M_0(F') = 60 - 45 = 15 \text{ Н·м,}$$

$$M_0(\overline{F}, \overline{F}') = M(\overline{F}, \overline{F}') = 15 \text{ Н·м.}$$

Момент пары не зависит от положения точки, относительно которой вычисляются моменты сил.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПАР СИЛ

Две пары сил называют эквивалентными, если они обладают геометрически равными моментами, т. е. эти пары имеют одинаковые по модулю моменты, и эти моменты одинаково направлены.

СВОЙСТВА ПАР СИЛ

Не меняя направление вращения пары и модуль ее момента:

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия и поворачивать,
2. Пару сил можно переносить в другую плоскость, параллельную плоскости действия пары,
3. У пары сил можно одновременно менять модуль силы и плечо пары.

СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ И В ПЛОСКОСТИ

Две пары сил, действующие на одно и то же твердое тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов исходных пар сил (рис. 5). Пара сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}'_1\right)$, находящаяся в плоскости $П_1$, имеет векторный момент $\overline{M}_1$. Дру-

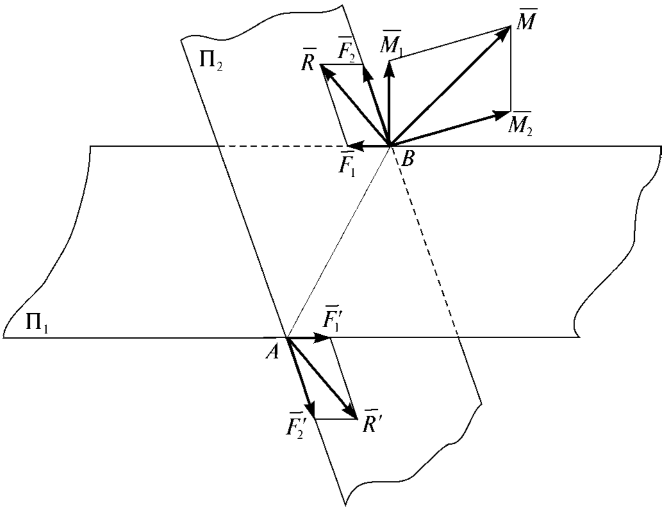


Рис. 5

гая пара сил $\left(\overline{F}_2, \ \overline{F}_2'\right)$, лежащая в плоскости $П_2$, имеет векторный момент $\overline{M}_2$. Векторные моменты $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ перпендикулярны соответственно плоскостям $П_1$ и $П_2$. Эквивалентную пару с моментом $\overline{M}$ получим, сложив векторные моменты $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

Если пары лежат в одной плоскости, то они имеют параллельные векторные моменты, и векторная сумма перейдет в алгебраическую.

Любое количество пар сил в пространстве в общем случае можно заменить одной эквивалентной (результирующей) парой, применяя последовательное сложение векторных моментов исходных пар сил:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \sum \overline{M}_k \tag{3}$$

Если пары сил лежат в плоскости, то векторная сумма перейдет в алгебраическую:

$$M = \sum M_k . \tag{4}$$

Пример 18.

Определить модуль момента эквивалентной пары сил, если известны пары сил с моментами: M_1 = 12 Н·м; M_2 = 16 Н·м; M_3 = 4 Н·м. Направление моментов показано на рис. 6.

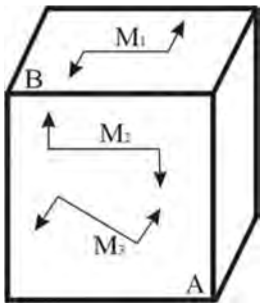


Рис. 6

Решение. В плоскости A действуют два момента, направленных противоположно: $M_A = M_3 - M_2 = 4 - 16 = -12$ Н·м.

Сложим моменты, действующие в перпендикулярных плоскостях A и B:

$$M_{A-B} = \sqrt{M_1^2 + M_A^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ Н·м.}$$

Ответ. Момент эквивалентной пары равен $M_{A-B} = 12\sqrt{2}$ Н·м.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПАР

Для равновесия пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы момент эквивалентной (результирующей) пары был бы равен нулю:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \sum \overline{\boldsymbol{M}}_k = 0. \tag{5}$$

Проектируя (5) на декартовы координатные оси, получаем три скалярных выражения:

$$M_x = \sum M_{kx} = 0,$$
$$M_y = \sum M_{ky} = 0, \qquad (6)$$
$$M_z = \sum M_{kz} = 0.$$

Из (3) следует, чтобы уравновесить систему, состоящую из пар сил, необходимо приложить уравновешивающую пару, т. е. пару сил можно уравновесить другой парой сил с равными модулями и противоположно направленными моментами.

Пару сил невозможно уравновесить одной силой или какой-либо системой сил, отличной от пары сил.

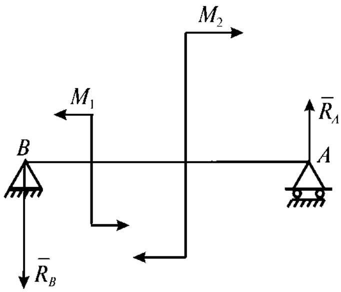


Рис. 7

Пример 19.

Найти результирующую пару, которая уравновесила бы две пары сил с моментами M_1 = 14 Н·м, M_2 = 40 Н·м, приложенные к балке *AB*, длиной 2 м (рис. 7).

Решение. Используя принцип освобождаемости от связей, заменяем действие опор на балку реакциями R_A и R_B. Вектор силы $\bar{R}_A$ перпендикулярен опорной поверхности. Вектор силы $\bar{R}_B$ должен быть параллелен $\bar{R}_A$, так как они должны образовать эквивалентную результирующую пару.

Исходя из условия равновесия пар сил, запишем:

$$M_1 - M_2 + M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 0,$$
$$M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = M_2 - M_1 = 40 - 14 = 26\,\text{Н}\cdot\text{м}.$$

Так как дана длина балки, то можно найти силы, образующие результирующую пару:

$$R_A = R_B = \frac{M(\bar{R}_A, \bar{R}_B)}{AB} = 13\,\text{Н}.$$

Ответ. $M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 26\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

Величина результирующего момента получилась с плюсом. Это означает, что направление реакций в точках *A* и *B* выбрано правильно.

Вопросы для повторения

1. Как найти равнодействующую двух параллельных сил, направленных в одну сторону, и точку ее приложения?
2. Как найти равнодействующую двух параллельных неравных по модулю, сил, направленных в разные стороны, и точку ее приложенния?
3. Что такое пара сил?
4. Можно ли пару сил заменить равнодействующей?
5. Чем характеризуется пара сил?
6. Какие две пары называют эквивалентными?
7. Сформулируйте свойства пар.
8. Условия равновесия пар сил.
9. Как можно уравновесить пару сил?

5. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Приведение силы к заданному центру

Чтобы привести силу, приложенную в какой-либо точке твердого тела, к заданному центру необходимо (рис. 1, *а*, *б*):

1. Перенести силу параллельно самой себе в заданный центр, не изменяя модуля силы.
2. В заданном центре приложить пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно нового центра. Эту пару сил называют *присоединенной парой.*

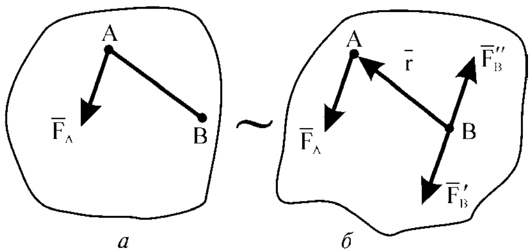


Рис. 1

Образование новой системы, состоящей из переносимой силы и пары сил, называют *приведением силы к заданному центру.*

Следовательно, действие силы на твердое тело не изменяется при переносе ее параллельно самой себе в другую точку твердого тела, если добавить пару сил.

В точке A твердого тела приложена сила $\bar{F}_A$ (рис. 1, *а*). Приложим в точке B уравновешенную систему сил $\left(\bar{F}'_B,\ \bar{F}''_B\right)$. При этом $\bar{F}_A = \bar{F}'_B = \bar{F}''_B$, $\bar{F}'_B = -\bar{F}''_B$. Силы $\left(\bar{F}_A,\ \bar{F}''_B\right)$ образуют пару сил с векторным моментом, равным $\bar{r} \times \bar{F}_A$. Таким образом, сила $\bar{F}_A$ эквивалентна силе $\bar{F}'_B$ и паре сил $\left(\bar{F}_A,\ \bar{F}''_B\right)$.

Пример 19.

Перенести силу $F_1 = 10$ Н, приложенную в точке A, в новый центр на расстоянии 0,2 м от точки A (рис. 2, *а*).

Решение. Согласно теореме о приведении силы к заданному центру, приложим в точке B силу $F_2' = F_1 = 10$ Н .

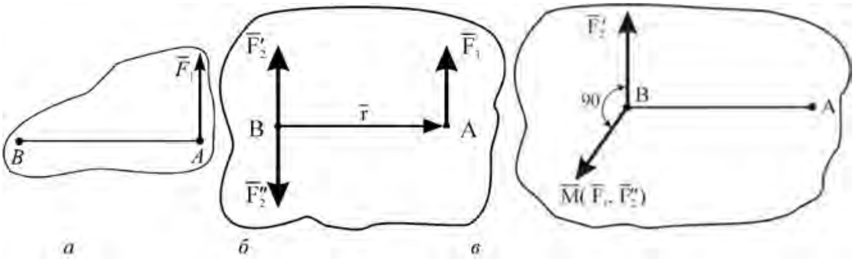


Рис. 2

В точке B приложим пару сил, которая образована силами $(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2'')$, и определим векторный момент присоединенной пары (рис. 2, *б*):

$$\bar{M}\,(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2'') = \bar{r} \times \bar{F}_1 .$$

Модуль момента пары равен:

$$M\,(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2'') = rF_1 \sin(\bar{r}, \bar{F}_1)\ ,\ r = AB = 0{,}2 \text{ м},$$

$$\angle \bar{r},\ \bar{F}_1 = 90^\circ,\ \ M\,(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2'') = rF_1 = 0{,}2 \cdot 10 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Векторный момент перпендикулярен плоскости векторов $\bar{r}$ и $\overline{F_1}$ и направлен в сторону читателя в соответствии с правилом знаков (рис. 2, *в*).

Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил. (Основная теорема статики. Теорема Пуансо)

> Произвольную систему сил, приложенную к твердому телу, можно заменить одной силой — главным вектором и одной парой сил — главным моментом, не нарушая при этом состояние твердого тела.

Приведем произвольную систему сил $(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\ \ldots,\ \bar{F}_n)$ (рис. 3, *а*) к центру O. Для этого используем предыдущую теорему и переносим каждую силу параллельно самой себе в центр O, добавляя пару сил (рис. 3, *б*):

$$\bar{F}_1 \sqcup \left(\bar{F}_1',\ \left(\bar{F}_1,\ \bar{F}_1''\right)\right),\ \ \bar{F}_2 \sqcup \left(\bar{F}_2',\ \left(\bar{F}_2,\ \bar{F}_2''\right)\right),\ \ \bar{F}_n \sqcup \left(\bar{F}_n',\ \left(\bar{F}_n,\ \bar{F}_n''\right)\right).$$

Получим из исходной системы сил новую систему сил, состоящую из $3n$ сил, или систему из n сил, приложенных в точке O и образующих систему сходящихся сил, и n присоединенных пар:

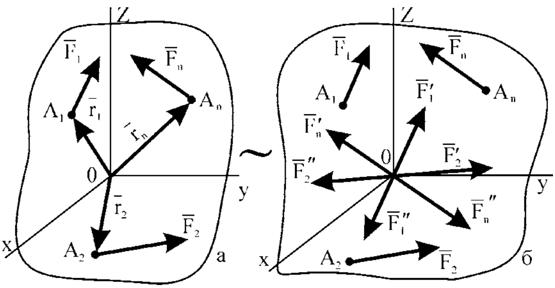


Рис. 3

$$(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2, \ldots,\ \overline{F}_n) \sim ((\overline{F}_1',\ (\overline{F}_1,\ \overline{F}_1''),\ (\overline{F}_2',\ (\overline{F}_2,\ \overline{F}_2''),\ (\overline{F}_n',\ (\overline{F}_n,\ \overline{F}_n'')) \sim \qquad (1)$$

$$\sim ((\overline{F}_1', \overline{F}_2', \ldots,\ \overline{F}_n'),\ (\overline{F}_1,\ \overline{F}_1''),\ (\overline{F}_2,\ \overline{F}_2''),\ \ldots,\ (\overline{F}_n,\ \overline{F}_n'')).$$

Система сил $(\overline{F}_1',\ \overline{F}_2', \ldots,\ \overline{F}_n')$, приложенная в точке *O,* является системой сходящихся сил, которая приводится к равнодействующей:

$$\overline{R}_0 = \sum \overline{F}_k'.$$

Так как $\overline{F}_1' = \overline{F}_1,\ \overline{F}_2' = \overline{F}_1, \ldots \ldots\ldots\ldots,\ \overline{F}_n = \overline{F}_n',$ то получим

$$\overline{R}_0 = \sum \overline{F}_k = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n. \qquad (2)$$

Для заданной системы сил $\overline{R}_0$ будет главным вектором, который равен векторной сумме заданных сил.

Векторные моменты присоединенных пар определим следующим образом:

$$\overline{M}_1 = \overline{M}\left(\overline{F}_1,\ \overline{F}_1''\right) = \overline{M}_0\ (\overline{F}_1) = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1,$$

$$\overline{M}_2 = \overline{M}\left(\overline{F}_2,\ \overline{F}_2''\right) = \overline{M}_0\ (\overline{F}_2) = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{M}_n = \overline{M}\left(\overline{F}_n,\ \overline{F}_n\right) = \overline{M}_0\ (\overline{F}_n) = \overline{r}_n \times \overline{F}_n.$$

По теореме о сложении пар сил все присоединенные пары сил можно заменить результирующей парой, равной их геометрической сумме:

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n = \sum \overline{M}_k. \qquad (3)$$

Вектор $\overline{M}_0$ для заданной системы сил, приведенной к центру *O,* является главным моментом, которым называют векторную сумму моментов всех заданных сил относительно точки *O*.

Подставив (2) и (3) в (1), получим доказательство теоремы.

$$(\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\ldots,\ \bar{F}_n) \sim (\bar{R}_0,\ \bar{M}_0)\,. \tag{4}$$

Формулы для определения главного вектора и главного момента в декартовой системе координат

Модуль главного вектора

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, \\ R_y &= \sum F_{ky}, \\ R_z &= \sum F_{kz} \end{aligned} \tag{6}$$

(R_x, R_g, R_z — проекции главного вектора на соответствующие оси координат).

Углы, образованные главным вектором с соответствующей осью координат.

$$\cos(\widehat{x,\ \bar{R}_0}) = \frac{R_x}{R_0},\ \cos(\widehat{y,\ \bar{R}_0}) = \frac{R_y}{R_0},\ \cos(\widehat{z,\ \bar{R}_0}) = \frac{R_z}{R_0}. \tag{7}$$

Модуль главного момента, относительно выбранного центра приведения 0.

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}\,, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \sum M_x(\bar{F}_k), \\ M_{0y} &= \sum M_y(\bar{F}_k), \\ M_{0z} &= \sum M_z(\bar{F}_k) \end{aligned} \tag{9}$$

(M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} — проекции главного момента относительно точки O на координатные оси).

Если заданы проекции сил на оси и координаты точек их приложения, то выражения (9) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \sum (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \\ M_{0y} &= \sum (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \\ M_{0z} &= \sum (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \end{aligned} \tag{10}$$

Углы, образованные главным моментом с соответствующими осями координат:

$$\cos(x\hat{,}\,\overline{M}_0) = \frac{M_{0x}}{M_0}, \quad \cos(y\hat{,}\,\overline{M}_0) = \frac{M_{0y}}{M_0}, \quad \cos(z\hat{,}\,\overline{M}_0) = \frac{M_{0z}}{M_0}. \qquad (11)$$

Пример 20.

Найти главный вектор и главный момент системы сил, приложенных к кубу. Известно, что

$F_1 = 20$ Н, $F_2 = 6$ Н, $F_3 = 12$ Н, $F_4 = 4$ Н, $F_5 = 10$ Н.

Ребро куба $a = 0{,}5$ м (рис. 4).

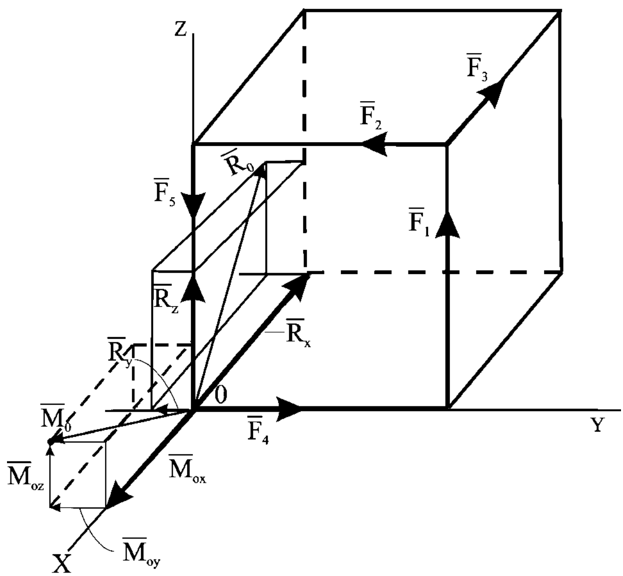


Рис. 4

Решение.

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$ — модуль главного вектора.

Находим проекции главного вектора на оси координат:

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_3 = -12 \text{ Н},$$

$$R_y = \sum F_{ky} = -F_2 + F_4 = -6 + 4 = -2 \text{ Н},$$

$$R_z = \sum F_{kz} = F_1 - F_5 = 20 - 10 = 10 \text{ Н},$$

$$R_0 = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + 10^2} = 15{,}75 \text{ Н}.$$

Модуль главного момента

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}.$$

Находим проекции главного момента на оси координат:

$$M_{0x} = \sum M_x(\bar{F}_k) = F_1 a + F_2 a = 20 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 = 13 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{0y} = \sum M_y(\bar{F}_k) = -F_3 a = -12 \cdot 0,5 = -6 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{0z} = \sum M_z(\bar{F}_k) = F_3 a = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_0 = \sqrt{13^2 + (-6)^2 + 6^2} = 15,52 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Углы, образованные главным вектором и главным моментом с осями координат:

$$\cos(\widehat{x, \bar{R}_0}) = \frac{R_x}{R_0} = -\frac{12}{15,75} = -0,7619, \quad \angle x, \bar{R}_0 = 139,63^\circ,$$

$$\cos(\widehat{y, \bar{R}_0}) = \frac{R_y}{R_0} = -\frac{2}{15,75} = -0,1269, \quad \angle y, \bar{R}_0 = 97,29^\circ,$$

$$\cos(\widehat{z, \bar{R}_0}) = \frac{R_z}{R} = \frac{10}{15,75} = 0,6349, \quad \angle z, \bar{R}_0 = 50,59^\circ,$$

$$\cos(\widehat{x, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M} = \frac{13}{15,52} = 0,8376, \quad \angle x, \bar{M}_0 = 33,11^\circ,$$

$$\cos(\widehat{y, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0} = -\frac{6}{15,52} = -0,3866, \quad \angle y, \bar{M}_0 = 112,74^\circ,$$

$$\cos(\widehat{z, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{6}{15,52} = 0,3866, \quad \angle z, \bar{M}_0 = 67,26^\circ.$$

Ответ. $R_0 = 15,75$ Н, $M_0 = 15,52$ Н · м.

Зависимость главного момента от выбора центра приведения

Главный момент относительно нового центра приведения равен сумме главного момента относительно старого центра приведения и векторного произведения радиуса-вектора, соединяющего эти центры на главный вектор:

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 + \bar{O}_1\bar{O} \times \bar{R}_0, \tag{12}$$

где $\bar{M}_{01}$ — главный момент относительно центра O_1; $\bar{M}_0$ — главный момент относительно центра O; $\overline{O_1O}$ — радиус-вектор, соединяющий центры O_1 и O; $\bar{R}_0$ — главный вектор.

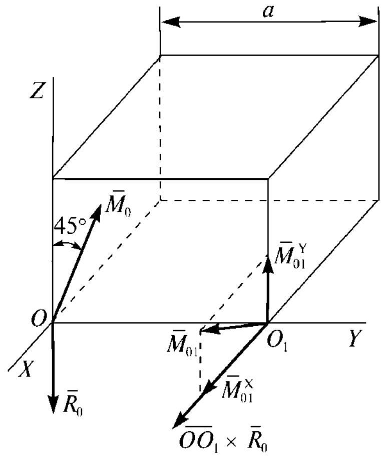


Рис. 5

Пример 21.

Определить главный момент относительно точки O_1, если главный вектор $R_0 = 24$ Н, главный момент относительно центра O $M_0 = 8$ Н · м. Расстояние между точками приведения $a = \sqrt{2}$ м, угол между главным вектором и главным моментом 45° (рис. 5).

Решение. Применим формулу (12):

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 + \overline{O_1O} \times \bar{R}_0. \qquad (а)$$

Найдем модуль вектора

$$\left|\overline{O_1O} \times \bar{R}_0\right| = O_1O\, R_0 \sin(\overline{O_1O} \,\hat{}\, \bar{R}_0),$$

$$\angle \overline{O_1O},\ \bar{R}_0 = 90^\circ,$$

$$\left|\overline{O_1O} \times \bar{R}_0\right| = O_1OR_0 \sin 90^\circ = 24\sqrt{2} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вектор $\overline{O_1O} \times \bar{R}_0$ будет перпендикулярен плоскости ZOY и направлен на читателя согласно принятому правилу знаков для моментов.

Проектируем (а) на оси координат:

$$M_{01}^{x} = \left|\overline{O_1O} \times \bar{R}\right| - M_0 \cos 45^\circ = 24\sqrt{2} - 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{01}^{y} = 0,$$

$$M_{01}^{z} = M_0 \cos 45^\circ = 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{01} = \sqrt{(M_{01}^{x})^2 + (M_{01}^{z})^2} = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 28{,}84 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Угол между осью X и $\bar{M}_{01}$

$$\cos(\hat{x, \bar{M}_{01}}) = \frac{M_{01}^{x}}{M_{01}} = \frac{20\sqrt{2}}{28,84} = 0,9807, \quad \angle(x, \bar{M}_{01}) = 11,27^\circ.$$

Угол между осью Z и M_{01}

$$\cos(\hat{z, \bar{M}_{01}}) = \frac{M_{01}^{z}}{M_{01}} = \frac{4\sqrt{2}}{28,84} = 0,1961, \quad \angle(z, \bar{M}_{01}) = 78,73^\circ.$$

Ответ. $M_{01} = 28{,}84$ Н·м.

Инварианты статики

Инвариантом в статике называют величину, которая не зависит от центра приведения.

Векторным инвариантом статики является главный вектор системы сил

$$\bar{R}_{01} = \bar{R}_0 = \text{const}. \tag{13}$$

Скалярным инвариантом статики называют скалярное произведение главного момента на главный вектор

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = \bar{M}_{01} \cdot \bar{R}_{01} = \text{const}. \tag{14}$$

Пример 22.

Найти скалярный инвариант системы сил в точках O и O_1, используя условие и результаты примера 21.

Решение. Определим скалярный инвариант в точке O:

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = M_0 \cdot R_0 \cos(\hat{\bar{R}_0, \bar{M}_0}) = 8 \cdot 24 \cos 135^\circ = -135,76.$$

Определим скалярный инвариант в точке O_1.

$$\bar{M}_{01} \cdot \bar{R}_0 = \bar{M}_{01} \cdot \bar{R}_0 \cos(\hat{\bar{M}_{01}, \bar{R}_0}) = 28,84 \cdot 24 \cos 101,27^\circ =$$
$$= 28,84 \cdot 24 \cdot 0,1961 = -135,75.$$

Ответ. Скалярные инварианты в точках O и O_1 равны.

Частные случаи приведения системы сил

В зависимости от модулей главного вектора и главного момента и их взаимного направления можно произвести дальнейшее упрощение системы сил.

I. *Приведение к паре сил*

$$\bar{R}_0 = 0,\ \bar{M}_0 \neq 0,\ \bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = 0\ .$$

Система сил приводится к одной паре сил, равной главному моменту и не зависящей от выбора центра приведения.

Пример 23.

Привести систему сил, действующую на куб к простейшему виду, если $a = 2$ м, $F_1 = 8$ Н, $F_2 = 16$ Н, $F_3 = 8$ Н, $F_4 = 8\sqrt{2}$ Н (рис. 6).

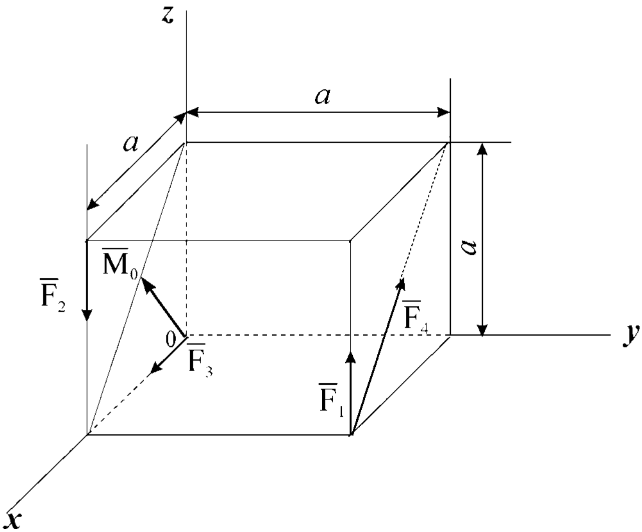


Рис. 6

Решение. Определим модуль и направление главного вектора:

1. $R_x = \sum F_{kx} = F_3 - F_4 \cos 45^\circ = 8 - 8\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

2. $R_y = \sum F_{ky} = 0.$

3. $R_z = F_1 - F_2 + F_4 \cos 45^\circ = 8 - 16 + 8\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

$$R_0 = 0.$$

Определим модуль и направление главного момента:

4. $M_x = F_1 a + F_4 a \sin 45^\circ = 8 \cdot 2 + 8\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} 2 = 32\,\text{Н} \cdot \text{м}.$

5. $M_y = F_2a - F_1a - F_4a\cos 45^\circ = 16\cdot 2 - 8\cdot 2 - 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}2 = 0.$

6. $M_z = F_4a\cos 45^\circ = 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}2 = 16$ Н $\cdot$ м,

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{32^2 + 16^2} = 16\sqrt{5} \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$\cos(x \,\hat{,}\, \bar{M}_0) = \frac{M_x}{M_0} = \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos(z \,\hat{,}\, \bar{M}_0) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, система сил приводится к главному моменту, лежащему в плоскости $0xz$. Направление главного момента определяется найденными косинусами.

II. *Приведение к равнодействующей*

а) $\bar{R}_0 \neq 0, \;\; \bar{M}_0 = 0, \;\; \bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = 0$.

Система сил приводится к равнодействующей, равной главному вектору по модулю и направлению, и проходящей через центр приведения.

Пример 24.

Привести систему сил, (рис. 7) к простейшему виду, если $P_1 = P_2 = P_3 = 4$ Н , $a = 10$ м, $b = 16$ м, $c = 6$ м.

Решение. Определим модуль и направление главного вектора системы сил:

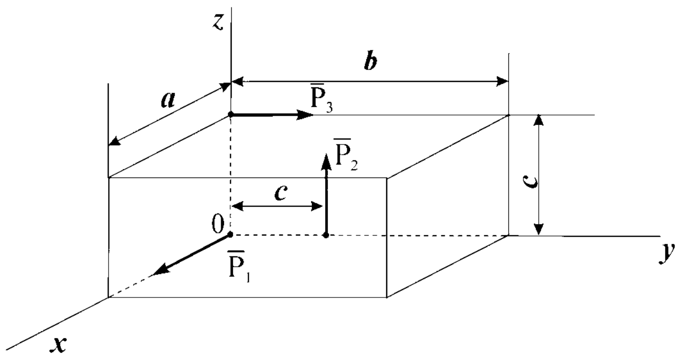


Рис. 7

$$1.\ R_x = \sum F_{kx} = P_1 = 4\ \text{Н}.$$

$$2.\ R_y = \sum F_{ky} = P_3 = 4\ \text{Н}.$$

$$3.\ R_z = \sum F_{kz} = P_2 = 4\ \text{Н}.$$

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 6,93\ \text{Н}.$$

$$\cos(x \hat{,} \bar{R}_0) = \frac{R_x}{R_0} = \frac{4}{6,93} = 0,5772, \quad \angle x, \bar{R}_0 = 54,75^\circ,$$

$$\cos(y \hat{,} \bar{R}_0) = \frac{R_y}{R_0} = \frac{4}{6,93} = 0,5772, \quad \angle y, \bar{R}_0 = 54,75^\circ,$$

$$\cos(z \hat{,} \bar{R}_0) = \frac{R_z}{R_0} = \frac{4}{6,93} = 0,5772, \quad \angle z, \bar{R}_0 = 54,75^\circ.$$

Определим модуль и направление главного момента:

$$4.\ M_x = \sum M_x(\bar{F}) = -P_3 c + P_2 c = -4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 0\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

$$5.\ M_y = \sum M_y(\bar{F}) = 0\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

$$6.\ M_z = \sum M_z(\bar{F}) = 0\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0.$$

Ответ. Система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через начало координат:

б) $\bar{R}_0 \neq 0,\ \bar{M}_0 \neq 0,\ \bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = 0$, т. е. $\bar{M}_0 \perp \bar{R}_0$.

Система сил приводится к равнодействующей, равной по модулю и направлению главному вектору и отстоящей от центра приведения на расстоянии $d = \dfrac{M_0}{R_0}$. Линия действия равнодействующей называется центральной осью системы.

Пример 25.

Привести систему сил к равнодействующей, если главный вектор (R_0 = 20 Н) перпендикулярен главному моменту (M_0 = 80 Н·м) в центре приведения *O* (рис. 8).

Решение. Главный момент заменим парой сил $(\bar{R},\ \bar{R}')$, сохраняя его величину. Значение силы в паре примем равной величине главного вектора: $R = R' = R_0 = 20\ \text{Н}$.

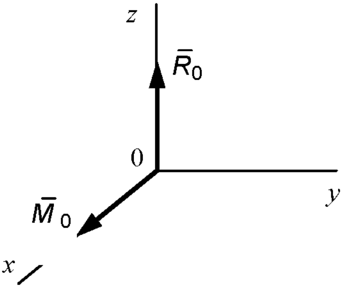


Рис. 8

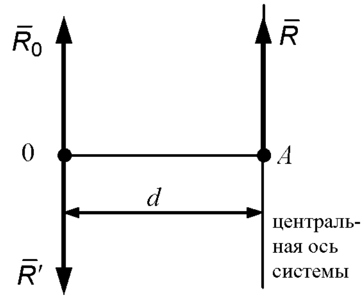


Рис. 9

Плечо пары $d = \dfrac{M_0}{R_0} = \dfrac{80}{20} = 4$ м.

Направление вращения пары соответствует главному моменту. Получим в точке O две равные по модулю и противоположно направленные силы (рис. 9), которые являются уравновешенной системой сил (аксиома 1):

$$(\bar{R}_0, \bar{R}') \sim 0.$$

Следовательно, получим что

$$(\bar{R}_0, \bar{M}_0) \sim (\bar{R})_A.$$

Линия действия равнодействующей в точке A будет центральной осью системы.

Приведение системы сил к динаме (динамическому винту)

Известно, что $\bar{R}_0 \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, $\bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 \neq 0$.

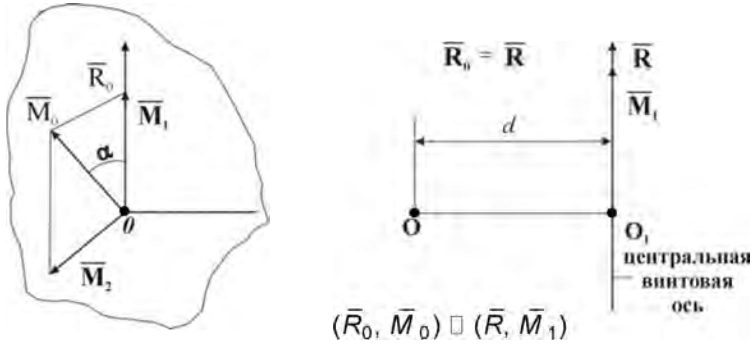
Система сил приводится к динаме (динамическому винту). *Динамой* называют совокупность силы и пары сил, векторный момент которой направлен параллельно вектору силы. Линию действия динамы называют центральной винтовой осью (рис. 10).

Главный момент раскладываем на направление главного вектора и перпендикулярно главному вектору:

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2,$$

$$M_1 = M_0 \cos\alpha, \quad M_2 = M_0 \sin\alpha.$$

Так как $\bar{M}_2 \perp \bar{R}_0$ (рис. 10, *а*), то эта система сил приводится к равнодействующей, которая находится от точки приведения на расстоянии:



а *б*

Рис. 10

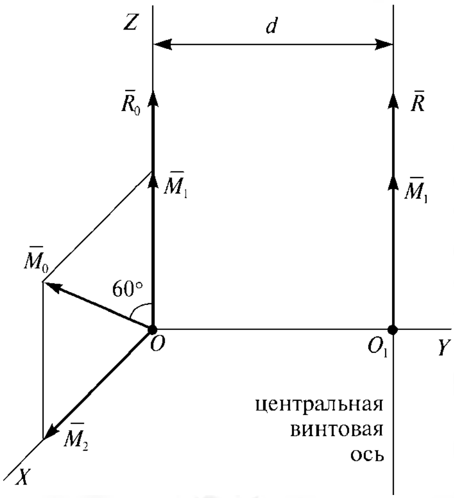


Рис. 11

$$d = \frac{M_2}{R_0} = \frac{M_0 \sin\alpha}{R_0}.$$

Пара сил с векторным моментом $M_1 = M_0 \cos\alpha$ является свободным вектором и поэтому $\bar{M}_1$ перенесем в точку O_1, где приложена равнодействующая (рис. 10, *б*). Получим в точке O_1 систему, эквивалентную исходной системе сил:

$(\bar{R}_0, \bar{M}_0)_0$ □ $(\bar{R}, \bar{M}_1)_{01}$,

где $(\bar{R}_0, \bar{M}_1)$ — динама.

Пример 26.

В центре приведения O главный вектор ($R_0 = 20$ Н) и главный момент ($M_0 = 40$ Н·м) расположены в плоскости ZOX и образуют угол в 60°. Определить момент динамы и линию ее действия.

Решение. Момент динамы равен $M_1 = M_0 \cos 60° = 40 \cdot 0{,}5 = 20$ Н·м. Динама отстоит от точки O на расстоянии (рис. 11):

$$d = \frac{M_2}{R_0} = \frac{M_0 \sin\alpha}{R_0} = \frac{40\frac{\sqrt{3}}{2}}{20} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ м}.$$

Значение d необходимо откладывать по направлению оси Y в соответствии с правилом знаков для момента пары.

Уравнение центральной винтовой оси системы

Если известны проекции главного вектора и главного момента на оси координат и координаты точки O_1, через которую проходит динама, то уравнение центральной винтовой оси в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \\ = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \frac{M_1}{R_0}, \tag{15}$$

где

$$M_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k},$$

$$\overline{R_0} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k},$$

x, y, z — координаты точки O_1, через которую проходит динама.

Проекция главного момента M_1 относительно центра приведения O на направление главного вектора (рис. 10):

$$M_1 = M_0 \cos(\bar{R}_0 \hat{,} \bar{M}_0) = M_0 \cos\alpha = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{R_0}. \tag{16}$$

Минимальный главный момент системы сил

Из скалярного инварианта статики (формула (14)) следует:

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = \bar{M}_{01} \cdot \bar{R}_{01} = \text{const},$$

или

$$M_0 \cdot R_0 \cdot \cos(\bar{M}_0 \hat{,} \bar{R}_0) = M_{01} \cdot R_{01} \cdot \cos(\bar{M}_{01} \hat{,} \bar{R}_{01}) = \text{const}.$$

Так как $R_0 = R_{01}$, то

$$M_0 \cdot \cos(\bar{M}_0 \hat{,} \bar{R}_0) = M_{01} \cdot \cos(\bar{M}_{01} \hat{,} \bar{R}_{01}) = \text{const}. \tag{17}$$

Из формулы (17) видно, что проекция главного момента на направление главного вектора является постоянной величиной. Если главный момент направлен по главному вектору, то модуль главного момента будет минимальным.

Для системы сил, приводящейся к динаме, проекция главного момента на направление главного вектора будет минимальным главным моментом системы. Величину минимального главного момента находят по формуле (16).

Теорема Вариньона
о моменте равнодействующей

Момент равнодействующей системы сил относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки:

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k)\,. \qquad (18)$$

Момент равнодействующей системы сил относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси:

$$M_z(\bar{R}) = \sum M_z(\bar{F}_k) \qquad (19)$$

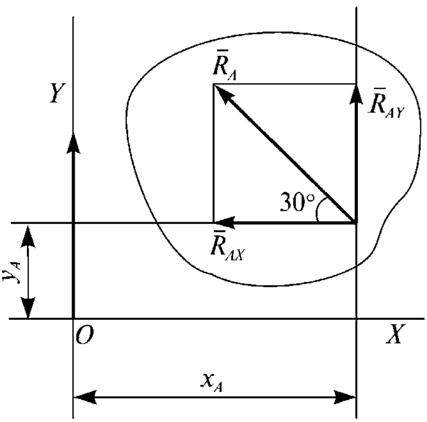


Рис. 12

Пример 27.

Система сил приведена к равнодействующей. Определить момент равнодействующей R_A = 100 Н относительно начала координат, если x_A = 0,15 м, $y_A = 0{,}12$ м (рис. 12).

Решение. Применим теорему Вариньона

$$M_0(\bar{R}_A)=M_0(\bar{R}_{AX})+M_0(\bar{R}_{AY}).$$

Находим проекции равнодействующей на оси координат:

$$R_{AX} = R_A\cos 30^\circ = 100\frac{\sqrt{3}}{2} = 86{,}6\ \text{Н},$$

$$R_{AY} = R_A\cos 60^\circ = 100\cdot 0{,}5 = 50\ \text{Н}.$$

Находим моменты проекций равнодействующей относительно точки O:

$$M_0(\bar{R}_{AX}) = y_A\cdot R_{AX} = 0{,}12\cdot 86{,}6 = 10{,}4\ \text{Н}\cdot\text{м},$$

$$M_0(\bar{R}_{AY}) = x_A \cdot R_{AY} = 0{,}16 \cdot 50 = 8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_0(\bar{R}_A) = 10{,}4 + 8 = 18{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ. $M_0(\bar{R}_A) = 18{,}4$ Н · м.

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору и главному моменту.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы сил равнялись нулю.

Условия равновесия в векторной форме:

$$\bar{R}_0 = 0, \ \bar{M}_0 = 0. \qquad (20)$$

Условия равновесия в аналитической форме:

$$1. \sum F_{kx} = 0. \qquad 4. \sum M_x(\bar{F}_k) = 0. \qquad (21)$$

$$2. \sum F_{ky} = 0. \qquad 5. \sum M_y(\bar{F}_k) = 0.$$

$$3. \sum F_{kz} = 0. \qquad 6. \sum M_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Пример 28.

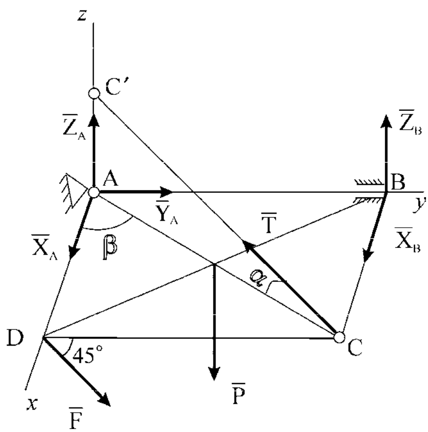


Рис. 13

Прямоугольная однородная плита весом P удерживается в горизонтальном положении тросом CC'. Определить реакции связей, если $P = 100$ Н, $F = 40$ Н, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $F \parallel zAy$ (рис. 13).

Решение. Используя принцип освобождаемости от связей, заменим действие связей реакциями, приложенными к плите. В точке A (сферический шарнир) будут три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$. В точке B — две составляющие:

$\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$. Реакцию нити $\bar{T}$ направим линии по CC'. Для уравновешенной произвольной пространственной системы сил составим шесть уравнений равновесия:

1. $\sum F_{kx} = X_A + X_B - T\cos\alpha\sin\beta = 0.$

2. $\sum F_{ky} = y_A + F\cos 45^\circ - T\cos\alpha\cos\beta = 0.$

3. $\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + T\sin\alpha - P - F\cos 45^\circ = 0.$

4. $\sum M_x(\bar{F}_k) = -P\dfrac{AB}{2} + Z_B AB + AB\cdot T\sin\alpha = 0.$

5. $\sum M_y(\bar{F}_k) = F\sin 45^\circ AD + P\dfrac{AD}{2} - AD\cdot T\sin\alpha = 0.$

6. $\sum M_z(\bar{F}_k) = AD\cdot F\cos 45^\circ - X_B AB = 0.$

Находим из 6.

$$X_B = \frac{AD\cdot F\cos 45^\circ}{AB} = \frac{AD\cdot F\cos 45^\circ}{AD\,\mathrm{tg}\beta} = \frac{40\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\mathrm{tg}60^\circ} = 16{,}33\ \text{Н},$$

из 5.

$$T = \frac{AD\cdot F\sin 45^\circ + P\,0{,}5AD}{AD\sin\alpha} = \frac{40\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 100\cdot 0{,}5}{0{,}5} = 156{,}56\ \text{Н},$$

из 4.

$$Z_B = \frac{P\,0{,}5AB - AB\cdot T\sin\alpha}{AB} = 100\cdot 0{,}5 - 156{,}56\cdot 0{,}5 = -28{,}28\ \text{Н},$$

из 1.

$$X_A = -X_B + T\cos\alpha\sin\beta = -16{,}33 + 156{,}56\cdot\cos 30^\circ\sin 60^\circ = 101{,}09\ \text{Н},$$

из 2.

$$y_A = -F\cos 45^\circ + T\cos\alpha\cos\beta = -40\frac{\sqrt{2}}{2} + 156{,}56\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = 39{,}51\ \text{Н},$$

из 3.

$$Z_A = -Z_B - T\sin\alpha + P + F\cos 45^\circ =$$

$$= 28{,}28 - 156{,}56\frac{1}{2} + 100 + 40\frac{\sqrt{2}}{2} = 78{,}28\ \text{Н}.$$

Ответ. $X_B = 16{,}33$ Н, $Z_B = -28{,}28$ Н, $X_A = 101{,}09$ Н,
$Y_A = 39{,}51$ Н, $Z_A = 78{,}28$ Н, $T = 156{,}56$ Н.

Минус показывает, что направление $\bar{Z}_B$ противоположно направлению, показанному на рис 13.

Равновесие пространственной системы параллельных сил

Для пространственной системы параллельных сил можно составить три уравнения равновесия. Если силы параллельны оси Z, то имеем следующие уравнения равновесия:

1. $\sum M_x(\bar{F}_k) = 0$.
2. $\sum M_y(\bar{F}_k) = 0$.
3. $\sum F_{kz} = 0$.

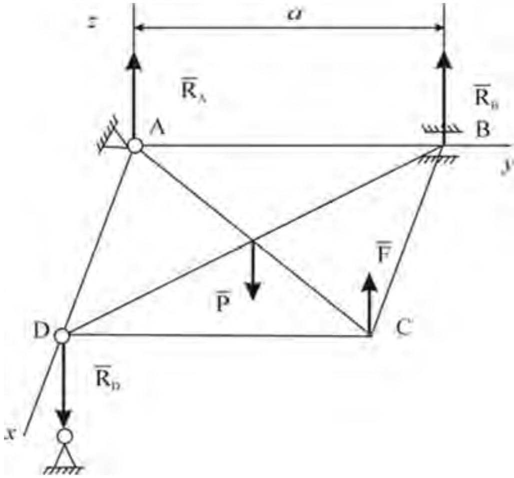


Рис. 14

Пример 29.

Квадратная однородная плита весом P находится в равновесии. Определить реакции связей, если $P = 100$ Н; $F = 20$ Н (рис. 14).

Решение. Рассмотрим равновесие плиты под действием системы параллельных сил $\bar{R}$, $\bar{F}$ и реакций связей $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$, $\bar{R}_D$. Составим три уравнения равновесия:

1. $\sum F_{kz} = R_A + R_B - R_D - P + F = 0.$
2. $\sum M_x(\bar{F}_k) = R_B a + Fa - 0,5Pa = 0.$
3. $\sum M_y(\bar{F}_k) = R_D a + 0,5P - Fa = 0.$

Находим из 2.

$$R_B = -F + 0,5P = -20 + 0,5 \cdot 100 = 30 \text{ Н},$$

из 3.

$$R_D = -0,5P + F = -0,5 \cdot 100 + 20 = -30 \text{ Н},$$

из 1.

$$R_A = -R_B + R_D + P - F = -30 - 30 + 100 - 20 = 20 \text{ Н}.$$

Ответ. $R_A = 20$ Н, $R_B = 30$ Н, $R_D = -30$ Н .

Минус показывает, что реакция связей $\bar{R}_D$ направлена противоположно направлению, показанному на рис. 14.

Равновесие произвольной плоской системы сил

Для произвольной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия.

Первая форма уравнений равновесия:

$$1.\ \sum F_{kx} = 0.$$

$$2.\ \sum F_{ky} = 0.$$

$$3.\ \sum M(\overline{F_k}) = 0.$$

Третье уравнение составляют относительно произвольной точки. Лучше всего брать точку, в которой имеется больше неизвестных реакций.

Вторая форма уравнений равновесия:

$$1.\ \sum F_{kx} = 0.$$

$$2.\ \sum M_A(\overline{F_k}) = 0.$$

$$3.\ \sum M_B(\overline{F_k}) = 0.$$

При использовании второй формы уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB.

Третья форма уравнений равновесия:

$$1.\ \sum M_A(\overline{F_k}) = 0.$$

$$2.\ \sum M_B(\overline{F_k}) = 0.$$

$$3.\ \sum M_C(\overline{F_k}) = 0.$$

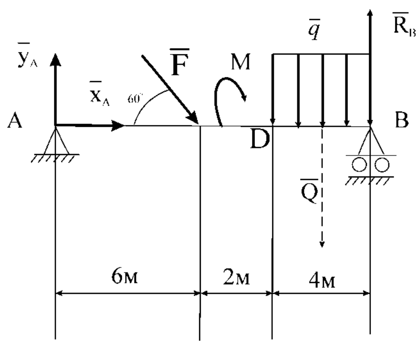


Рис. 15

При использовании третьей формы уравнений равновесия необходимо, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой.

Пример 30.

Определить реакции опор, если F = 10 кН, q = 2 кН/м, M = 3 кН·м (рис. 15).

Решение. Рассмотрим равновесие балки *AB* под действием силы *F*, момента *M*, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$. Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 4q = 8\,\text{кН}$, которая приложена в середине участка *BD*:

1. $\sum F_{kx} = X_A + F\cos 60^\circ = 0.$

2. $\sum F_{ky} = y_A - F\cos 30^\circ - Q + R_B = 0.$

3. $\sum M_A(\bar{F}_k) = -6F\cos 30^\circ - M - 10Q + 12R_B = 0.$

Находим из 1.

$$X_A = -F\cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5\,\text{кН},$$

из 3.

$$R_B = \frac{6F\cos 30^\circ + M + 10Q}{12} = \frac{10\frac{\sqrt{3}}{2}6 + 3 + 8\cdot 10}{12} = 11,25\,\text{кН},$$

из 2.

$$y_A = F\cos 30^\circ + Q - R_B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11,25 = 5,41\,\text{кН}.$$

Ответ. $X_A = -5$ кН, $Y_A = 5{,}41$ кН, $R_B = 11{,}25$ кН.

Минус показывает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рис 15.

Равновесие плоской системы параллельных сил

Для плоской системы параллельных сил можно составить два уравнения равновесия. Если силы параллельны оси *y*, то уравнения равновесия имеют вид.

Первая форма: уравнений равновесия

1. $\sum F_{ky} = 0.$

2. $\sum M(\bar{F}_k) = 0.$

Второе уравнение можно составить относительно любой очки.

Вторая форма: уравнений равновесия

$$1.\ \sum M_A(\overline{F_k}) = 0.$$

$$2.\ \sum M_B(\overline{F_k}) = 0.$$

Пример 31.

Определить реакции опор, если $P = 6$ кН, $q = 1$ кН/м, $M = 4$ кН·м (рис. 16).

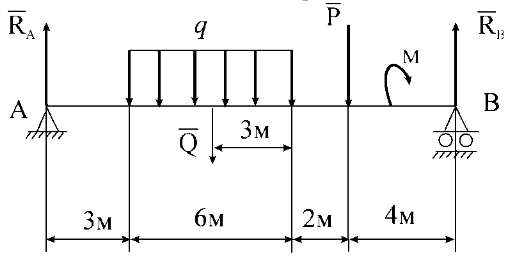


Рис. 16

Решение. Рассмотрим равновесие балки *AB* под действием силы *P*, момента *M*, равномерно распределенной нагрузки интенсивности *q* и реакций связей $\overline{R}_A, \overline{R}_B$. Составим два уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 6q = 6$ кН, которая приложена к середине нагруженного участка:

$$1.\ \sum F_{ky} = R_A + R_B - Q - P = 0.$$

$$2.\ \sum M_A(\overline{F_k}) = -6Q - 11P - M + 15R_B = 0.$$

Находим из 2.

$$R_B = \frac{6Q + 11P + M}{15} = \frac{6\cdot 6 + 6\cdot 11 + 4}{15} = 7,07\ \text{кН},$$

из 1.

$$R_A = -R_B + Q + P = -7,07 + 6 + 6 = 4,93\ \text{кН}.$$

Ответ. $R_A = 4,93$ кН , $R_B = 7,07$ кН.

Вопросы для повторения

1. Как привести силу к заданному центру?
2. Сформулируйте теорему о приведении произвольной системы сил к простейшему виду (теорему Пуансо).

3. Что такое главный вектор?
4. Что такое главный момент?
5. Как определить модуль главного вектора и главного момента?
6. Как зависит главный момент от выбора центра приведения?
7. Инварианты системы сил.
8. К какому простейшему виду можно привести произвольную пространственную систему сил, если:
   а) главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю;
   б) главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю;
   в) главный вектор и главный момент не равны нулю, а скалярный инвариант равен нулю.
9. В каком случае произвольная пространственная система сил приводится к динаме?
10. Какую совокупность сил называют динамой?
11. Что такое центральная винтовая ось?
12. Что такое минимальный главный момент и чему он равен?
13. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей.
14. Векторные и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
15. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для пространственной системы параллельных сил?
16. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для произвольной плоской системы сил?
17. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для плоской системы параллельных сил?

6. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически определимые системы — это системы, в которых число неизвестных не превышает числа независимых уравнений равновесия для данной системы сил.

Статически неопределимые системы — это системы, в которых число неизвестных превышает число независимых уравнений равновесия для данной системы сил.

Пример 32.

Будет ли система сил, приведенная на рис. 1, статически определимой?

Решение. На рис. 1 изображена плоская произвольная система сил, для которой можно составить только три независимых уравнения равновесия. Определим число неизвестных.

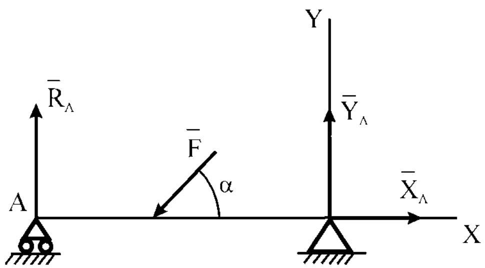


Рис. 1

Пользуясь принципом освобождаемости от связей, заменяем их действия реакциями. В точке A — одна реакция. На другой опоре (шарнирно-неподвижной) — две реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$.

Число неизвестных реакций равно числу уравнений равновесия. Изображенная система сил является статически определимой.

Пример 33.

Будет ли система сил, изображенная на рис. 2, статически определимой?

Решение. Изображенная система сил является плоской произвольной системой сил, для которой можно составить три уравнения равновесия. Определим число неизвестных реакций. В точке A имеем две неизвестные реакции: $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. В точке C связью является стержень с двумя шарнирами и реакция будет направлена через точки CC'. В точке B имеется еще одна реакция. Итого имеем четыре неизвестные реакции. Число иеиз-

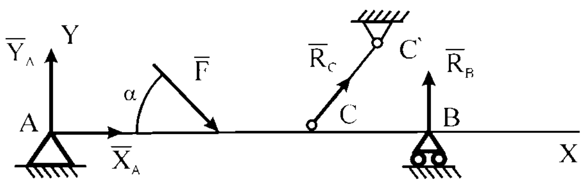


Рис. 2

вестных превышает число уравнений. Система, приведенная на рис. 2, будет статически неопределимой.

Равновесие системы тел

Система тел представляет собой несколько тел, соединенных между собой каким-то образом. Силы, действующие на тела системы, делят на внешние и внутренние. Внутренними называют силы взаимодействия между телами одной и той же системы, а внешними называют силы, с которыми на тела заданной системы сил действуют тела, не входящие в данную систему сил.

Если система тел находится в равновесии, то рассматриваем равновесие каждого тела в отдельности, учитывая внутренние силы взаимодействия между телами. Если задана плоская произвольная система N тел, то для этой системы можно составить $3N$ уравнений равновесия. Задача будет статически определимой, если число неизвестных не будет превышать числа уравнений равновесия. При решении задач на равновесие системы тел можно также рассматривать равновесие как системы тел в целом, так и для любых сочетаний тел. В случае рассмотрения равновесия системы в целом внутренние силы взаимодействия между телами не учитываются на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

Пример 34.

Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если M = 8 кН/м, q = 2 кН/м, P = 6 кН (рис. 3).

Решение. Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и реакций $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ шарнирно-неподвижной опоры A и реакцией X_c, Y_c шарнира C (рис. 4). Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия, заменяя

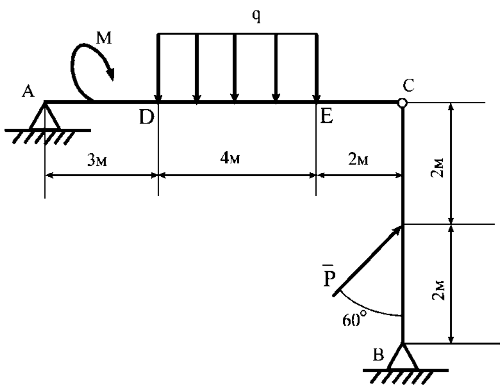


Рис. 3

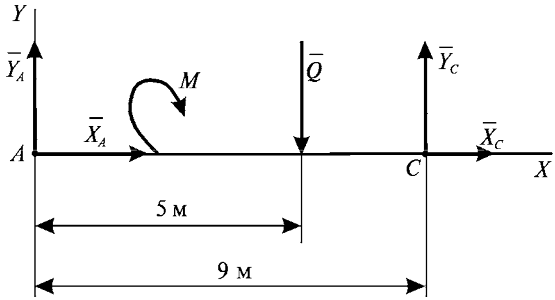


Рис. 4

равномерно распределенную нагрузку силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рис. 4.

$$1.\ \Sigma F_{kx} = X_A + X_C = 0.$$

$$2.\ \Sigma F_{ky} = Y_A + Y_C - Q = 0.$$

$$3.\ \Sigma M_A(F_k) = -M - 5Q + 9Y_C = 0.$$

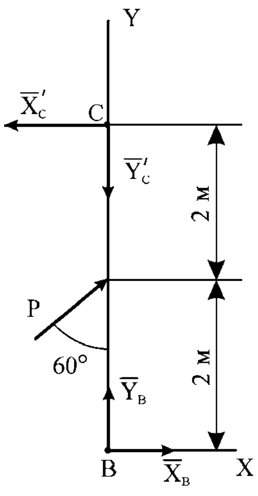


Рис. 5

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\overline{P}$, реакции $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\overline{X}_C{}'$, $\overline{Y}_C{}'$ шарнира C (рис. 5).

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X_C{}',\ Y_C = Y_C{}',$$

$$\overline{X}_C = -\overline{X}_C,\ \overline{Y}_C = -\overline{Y}_C{}'.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$4.\ \Sigma F_{kx} = -X_C{}' + P\cos 30° + X_B = 0.$$

$$5.\ \Sigma F_{ky} = -Y_C{}' + P\cos 60° + Y_B = 0.$$

$$6.\ \Sigma M_C(F_k) = 2P\cos 30° + 4X_B = 0.$$

Находим из 6.

$$X_B = -\frac{2P\cos 30^\circ}{4} = -\frac{6\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}2 = -0{,}65\,\text{кН},$$

из 4.

$$X_C{}' = P\cos 30^\circ + X_B = 6\frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}65 = 4{,}55\,\text{кН},$$

из 3.

$$Y_c = \frac{M + 5Q}{9} = \frac{8 + 8\cdot 5}{9} = 5{,}33\,\text{кН},$$

из 5.

$$Y_B = Y_C{}' - P\cos 60^\circ = 5{,}33 - 6\cdot 0{,}5 = 2{,}33\,\text{кН},$$

из 2.

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67\ \text{кН},$$

из 1.

$$X_A = -X_C = -4{,}55\ \text{кН}.$$

Ответ. $X_A = -4{,}55$ кН, $Y_A = 2{,}67$ кН, $X_B = -0{,}65$ кН, $Y_B = 2{,}33$ кН, $X_C = 4{,}55$ кН, $Y_C = 5{,}33$ кН.

Минус показывает, что реакции $\overline{X}_B$ и $\overline{X}_A$ направлены противоположно направлению, показанному на рис. 5.

Вопросы для повторения

1. Какие системы сил называют статически определимыми?
2. Какие системы сил называют статически неопределимыми?
3. Какие силы называют внешними?
4. Какие силы называют внутренними?
5. Сколько уравнений равновесия можно составить для плоской произвольной системы, состоящей из N тел?

7. ТРЕНИЕ

Трение покоя

Тело находится на шероховатой поверхности в покое. Приложим к телу силы $\bar{Q}$ и $\bar{S}$ (рис. 1). Примем, что $\bar{Q}$ = const, а $|\bar{S}|$ изменяется от нуля до S_{max}. При увеличении $\bar{S}$ тело какое-то время будет находится в покое. При достижении некоторого значения силы $\bar{S}$ тело выйдет из состояния покоя и будет двигаться. Сопротивление движению оказывает реакция опоры $\bar{R}$, которая образует угол φ с нормалью к касательной. Разложим реакцию опоры на составляющие по правилу параллелограмма:

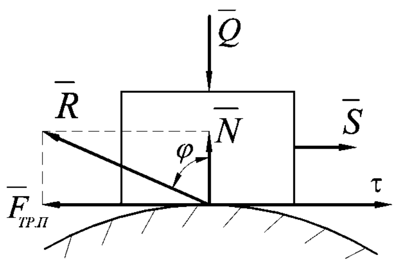


Рис. 1

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{тр.п}, \quad (1)$$

где $\bar{N}$ — сила нормального давления; $\bar{F}_{тр.п}$ — сила трения покоя.

Сила трения покоя направлена в сторону, противоположную возможному движению тела. Максимальное значение силы трения пропорционально силе нормального давления и достигается в момент выхода тела из положения равновесия:

$$F_{тр.п} \le f_п N, \quad (2)$$

где $f_п$ — безразмерная величина, которую называют коэффициентом трения покоя.

Трение скольжения

После выхода тела из положения равновесия сила трения покоя уменьшается и при движении ее называют силой трения скольжения, т. е. коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя. В технических расчетах принимают, что эти коэффициенты равны. С увеличением скорости движения для большинства материалов коэффициент трения скольжения уменьшается. Коэффициент трения скольжения определяют экспериментально.

Законы трения

1. Сила трения скольжения направлена противоположно возможному движению тела.

2. Сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

3. Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению. Под нормальным давлением понимают полное давление на всю площадь соприкосновения трущихся поверхностей:

$$F_{max} = fN. \tag{3}$$

4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

Законы трения справедливы для сухого трения. При наличии смазывающей жидкости трение происходит между слоями смазывающего вещества, а не между поверхностями. Максимальную силу трения находят по формуле (3) в случае, если точно известно, что сила трения является максимальной. В остальных случаях силу трения определяют из уравнений равновесия.

Угол и конус трения

При наличии трения полная реакция шероховатой поверхности отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол φ, который в случае выхода тела из равновесия достигает максимума и называется углом трения (рис. 2):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{max}}{N},$$

где $F_{max} = fN$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = f. \tag{4}$$

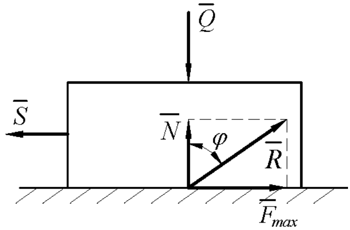


Рис. 2

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Конусом трения называют конус, описанный полной реакцией $\overline{R}$ вокруг направления нормальной реакции. Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то конус трения будет круговым (рис. 3).

Для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных сил находилась внутри конуса трения или проходила по образующей конуса (рис. 3).

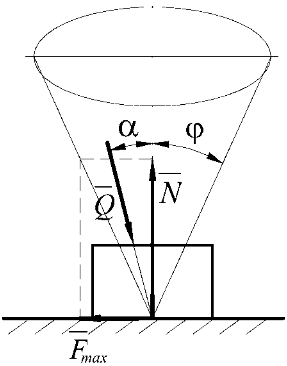


Рис. 3

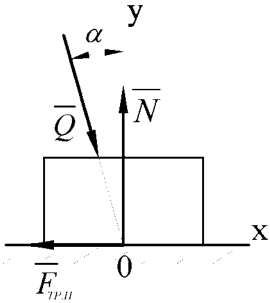


Рис. 4

Пример 35.

На тело, находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности, действует сила $\bar{Q}$ под углом $\alpha = 10°$. Определить, выйдет ли тело из положения равновесия, если коэффициент трения $f = 0{,}2$ (рис. 4).

Решение. Для уравновешенной плоской системы сходящихся сил можно составить два уравнения равновесия:

$$1.\ \sum F_{kX} = Q\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0.$$

$$2.\ \sum F_{kY} = -Q\cos\alpha + N = 0.$$

Находим из 2.

$$N = Q\cos\alpha,$$

из 1.

$$F_{\text{тр}} = Q\sin\alpha.$$

Так как $F_{\text{тр}} \le fN$, то $Q\sin\alpha \le fN$, или $Q\sin\alpha \le fQ\cos\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha \le f$.

Подставим исходные данные и получим

$$\operatorname{tg} 10° = 0{,}176 \le 0{,}2.$$

Ответ. Так как сила $\bar{Q}$ приложена под углом, меньшим угла трения, то тело не выйдет из положения равновесия.

Пример 36.

Тело весом 100 Н удерживается на шероховатой наклонной плоскости силой T (рис. 5). Коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью $f = 0{,}6$. Определить значение силы T при равновесии тела на плоскости, если $\alpha = 45°$.

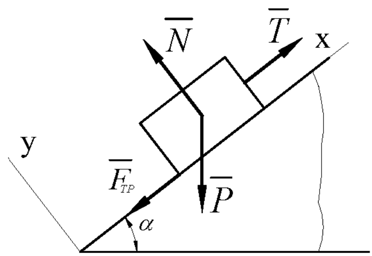


Рис. 5

Решение. Возможны два случая предельного равновесия тела и соответственно два предельных значения силы T при двух направлениях силы трения:

$$F_{тр} = f_1 N, \quad f_1 = \upsilon f, \quad \upsilon = \pm 1.$$

где k — коэффициент, учитывающий направление движения, $\upsilon = \pm 1$.

Составим для плоской произвольной системы сил два уравнения равновесия:

$$1.\ \sum F_{kX} = T - F_{тр} - P\sin\alpha = 0.$$

$$2.\ \sum F_{kY} = N - P\cos\alpha = 0.$$

Находим из 2.

$$N = P\cos\alpha,\ F_{тр} = f_1 P\cos\alpha,$$

из 1.

$$T = P\sin\alpha + f_1 P\cos\alpha = P(\sin\alpha + f_1\cos\alpha).$$

При $\upsilon = 1$

$$T = P(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}6\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 112\,\text{Н}.$$

При $\upsilon = -1$

$$T = P(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}6\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 28\,\text{Н}.$$

Ответ. Сила T при равновесии тела должна удовлетворять условию

$$28 \le T \le 112\ \text{Н}.$$

Трение качения

Трение качения возникает в результате деформации катящегося тела и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми. Поэтому контакт между телом

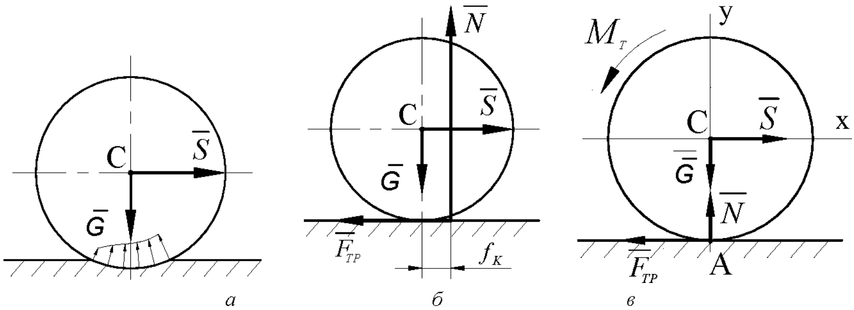


Рис. 6

и поверхностью происходит по некоторой площадке (рис. 6, *а*). Нормальная реакция смещается относительно центра катка на некоторую величину в сторону движения, которая при выходе тела из равновесия достигает максимума и называется коэффициентом трения качения $f_к$ (рис. 6, *б*). Коэффициент трения качения имеет размерность длины в отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения. Обычно нормальную реакцию проводят через центр катка, добавляя при этом к телу пару сил с моментом (рис. 6, *в*), который называют моментом трения качения:

$$M_т = Nf_к\,. \tag{5}$$

Для катка, находящегося в покое, составим три уравнения равновесия (рис. 6, *в*):

1. $\sum F_{kX} = S - F_{тр} = 0, \;\; S = F_{тр} \le fN$.
2. $\sum F_{kY} = N - G = 0, \;\; N = G$.
3. $\sum M_A(\bar F_k) = -Sr + M_т = 0, \;\; M_т = Sr$.

$$S = \frac{M_т}{r} = \frac{Nf_к}{r} \ge fN\,.$$

Из последнего выражения получим $\frac{f_к}{r} \le f$ — условие качения колеса без скольжения.

Обычно это условие соблюдается. Поэтому для начала качения катка требуется меньшая сила, чем для его скольжения.

Пример 37.

На наклонной поверхности находится цилиндр радиуса r (рис. 7). Определить, при каких углах α наклона плоскости к горизонту цилиндр будет находиться в равновесии, если f — коэффициент трения скольжения, $f_к$ — коэффициент трения качения.

Решение. Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх по наклонной поверхности. Момент трения качения направим по часовой стрелке, одну из осей направим по наклонной поверхности (рис. 7).

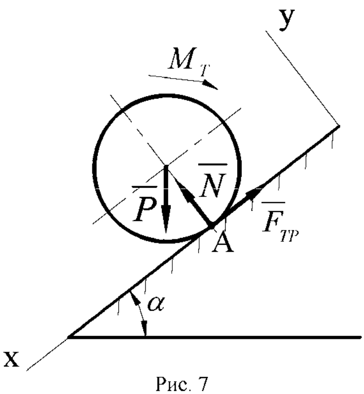


Рис. 7

Составим три уравнения равновесия для уравновешенной плоской произвольной системы сил:

1. $\sum F_{kX} = -F_{тр} + P\sin\alpha = 0.$

2. $\sum F_{kY} = N - P\cos\alpha = 0.$

3. $\sum M_A(\overline{F}_k) = M_т - rP\sin\alpha = 0.$

Находим из 1.

$$F_{тр} = P\sin\alpha,$$

из 2.

$$N = P\cos\alpha,$$

из 3.

$$M_т = rP\sin\alpha.$$

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$F_{тр} \le fN, \quad M_т \le f_к N. \tag{4}$$

Подставим $F_{тр}$, N, $M_т$ в (4):

$$P\sin\alpha \le fP\cos\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha \le f, \tag{5}$$

$$rP\sin\alpha \le f_к P\cos\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha \le \frac{f_к}{r}. \tag{6}$$

Для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы неравенства (5) и (6) выполнялись одновременно.

Если $\frac{f_к}{r} < f$, то потеря равновесия произойдет путем перехода к качению, так как нарушится неравенство (6).

Если $\frac{f_к}{r} > f$, то потеря равновесия произойдет за счет трения скольжения, так как нарушится неравенство (5).

Трение верчения

При вращении одного тела по поверхности другого, если тела не являются абсолютно твердыми, контакт происходит по некоторой площадке. Вращению тела препятствуют силы трения скольжения, которые распределены по площадке контакта и образуют пару сил, действующую в плоскости контакта. Эта пара сил характеризует так называемое трение верчения, которое оказывает сопротивление вращению одного тела по поверхности другого. Трение верчения характеризуется его моментом, предельная величина которого пропорциональна силе нормального давления:

$$M_в = f_в N,$$

где $f_в$ — коэффициент трения верчения, имеющий размерность длины.

Коэффициент трения верчения зависит от условий контакта тел и на практике значительно меньше коэффициента трения качения.

Вопросы для повторения

1. Какие составляющие имеет реакция шероховатой поверхности при сцеплении двух тел?
2. Чему равна и как направлена сила трения скольжения?
3. Что такое угол и конус трения?
4. Чему равен коэффициент трения скольжения и какова его размерность?
5. Сформулируйте законы трения?
6. Будет ли находиться в равновесии тело на шероховатой поверхности, если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения?
7. Что представляет собой коэффициент трения качения и какова его размерность?
8. От чего зависит коэффициент трения качения?
9. Что такое момент сопротивления качения?

8. ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ

Плоская ферма — это геометрически неизменяемая конструкция, лежащая в плоскости и состоящая из стержней, соединенных между собой шарнирами.

Узлами фермы называют шарниры, в которых сходятся стержни фермы.

Простой плоской фермой называют конструкцию, которая соединяет три стержня и три узла (рис. 1).

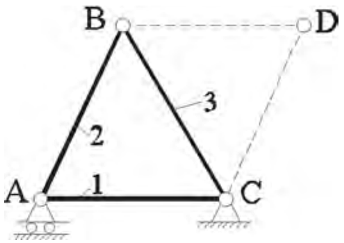


Рис. 1. Стержни (*1*, *2*, *3*) и узлы (*A*, *B*, *C*) фермы

Если добавить к простой ферме два стержня (*BD* и *CD*) и один шарнир (*D*), то получим новую простую ферму, состоящую из пяти стержней и четырех шарниров (на рис. 1 эти стержни показаны штриховой линией).

Простую плоскую ферму можно получить из треугольной путем последовательного присоединения нового узла и двух стержней. Число стержней в плоской простой ферме связано с числом узлов фермы выражением:

$$S = 2n - 3,$$

где S — число стержней; n — число узлов.

Простая ферма статически определима, так как число независимых уравнений равновесия равно числу неизвестных величин, которые надо определить. В число неизвестных величин входят три опорные реакции и усилия в стержнях фермы.

Расчет ферм заключается в определении усилий в стержнях, возникающих под действием заданной нагрузки. При этом считают, что:

1. Внешние активные силы приложены только в узлах фермы.
2. Весом стержней можно пренебречь.
3. Узлы являются идеальными шарнирами (силы трения отсутствуют).

Расчет ферм начинают с определения опорных реакций, а затем уже определяют усилия в стержнях фермы. В случае аналитического расчета используют:

а) способ вырезания узлов;

б) способ сечений (способ Риттера).

Способ вырезания узлов заключается в том, что вырезают узел фермы, к которому прикладывают соответствующие внешние силы и реакции стержней, образующие плоскую систему сходящихся сил. Для каждого узла составляют два уравнения равновесия в проекции на оси координат. Реакции стержней направляют от узла фермы, предполагая, что стержень растянут. Если в результате расчета получают в ответе минус, то соответствующий стержень будет сжат. Последовательность действий вырезания узлов диктуется тем, чтобы число неизвестных усилий в каждом узле не превышало двух.

Пример 38.

Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если P_1 = 20 Н, P_2 = 40 Н, α = 30°, a = 4 м (рис. 2).

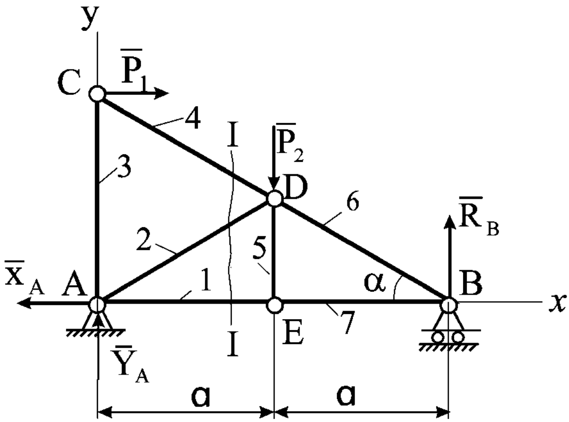


Рис. 2

Решение. Рассмотрим равновесие фермы, считая ее абсолютно твердым телом. Отбросим связи и заменим их реакциями связей.

На опоре A имеются две составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, на опоре B — одна составляющая $\bar{R}_B$. Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия и найдем реакции связей:

1. $\sum F_{kx} = -X_A + P_1 = 0.$

2. $\sum F_{ky} = Y_A + R_B - P_2 = 0.$

3. $\sum M_A(\bar{F}_k) = -P_1 \cdot 2a \cdot \text{tg}\alpha - P_2 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0.$

Находим из 1.

$$X_A = P_1 = 20 \text{ Н},$$

из 3.

$$R_B = \frac{2aP_1\,\mathrm{tg}\alpha + aP_2}{2a} = \frac{20 \cdot 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 40}{2} = 31,55\ \text{Н},$$

из 2.

$$Y_A = -R_B + P_2 = -31,55 + 40 = 8,45\ \text{Н}.$$

Определение усилий в стержнях начинаем с узла B (рис. 3), где число неизвестных равно двум. Составим для узла B два уравнения равновесия в проекции на оси x и y. Направление осей показано на рис. 2.

1. $\sum F_{kx} = -S_7 - S_6 \cos 30^\circ = 0.$

2. $\sum F_{ky} = R_B + S_6 \cos 60^\circ = 0.$

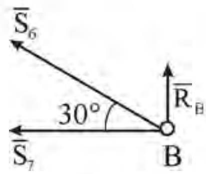


Рис. 3

Находим из 2.

$$S_6 = -\frac{R_B}{\cos 60^\circ} = -2R_B = -63,1\ \text{Н},$$

из 1.

$$S_7 = -S_6 \cos 30^\circ = -(-63,1)\frac{\sqrt{3}}{2} = 54,65\ \text{Н}.$$

Рассмотрим узел E (рис. 4). Составим два уравнения равновесия, учитывая, что $\bar{S}_7 = -\bar{S}_7'$, $S_7 = S_7'$:

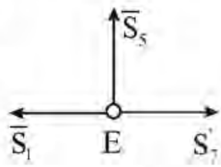


Рис. 4

3. $\sum F_{kx} = -S_1 + S_7' = 0.$

4. $\sum F_{ky} = S_5 = 0.$

Из 3. находим $S_1 = S_7' = 54,65$ кН.

Рассмотрим узел C (рис. 5). Составим два уравнения равновесия:

5. $\sum F_{kx} = P_1 + S_4 \cos 30^\circ = 0.$

6. $\sum F_{ky} = S_3 + S_4 \cos 60^\circ = 0.$

Находим из 5.

$$S_4 = \frac{-P_1}{\cos 30^\circ} = -23,1\ \text{Н},$$

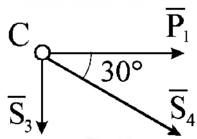


Рис. 5

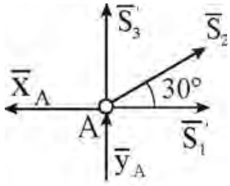


Рис. 6

из 6.

$$S_3 = -S_4\cos 60^\circ = -(-23{,}1)0{,}5 = 11{,}55 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел A (рис. 6). Составим одно уравнение равновесия, учитывая, что $S_1 = S_1'$, $\bar{S}_1 = -\bar{S}_1'$, $S_3 = S_3'$, $\bar{S}_3 = -\bar{S}_3'$.

$$7.\ \sum F_{ky} = S_3' + y_A + S_2\cos 60^\circ = 0.$$

Находим

$$S_2 = -\frac{S_3' + y_A}{\cos 60^\circ} = -2\left(S_3' + y_A\right) = -2(11{,}55 + 8{,}45) = -40 \text{ Н}.$$

Ответ. Результаты вычислений (таблица).

Параметр	Номер стержня						
	1	2	3	4	5	6	7
Знак усилия	+	–	+	–		–	+
Усилие, Н	54,65	40	11,55	23,1	0	63,1	54,65

Минус показывает, что стержни 2, 4, 6 сжаты, а не растянуты, как предполагалось.

Способ сечений (способ Риттера) позволяет найти усилие в любом стержне независимо от усилий в других стержнях. Этот способ заключается в мысленном рассечении фермы на две части. Сечение проводят таким образом, чтобы оно пересекало три стержня. Рассматривают равновесие любой части, учитывая реакции связей и усилия разрезаемых стержней, которые направляют от сечения, предполагая, что стержни растянуты. Уравнение равновесия составляют таким образом, чтобы оно содержало лишь одно неизвестное усилие. Способ сечений очень удобен для простых ферм. Для сложных ферм данный способ не всегда позволяет проводить сечения только через три стержня.

Пример 39.

Для фермы примера 38 найти усилия в стержнях 1, 2, 4.

Решение. Произведем сечение через стержни (1, 2, 4) и рассмотрим равновесие сечения I—I, лежащего слева (рис. 7). Составим уравнение моментов относительно точки D.

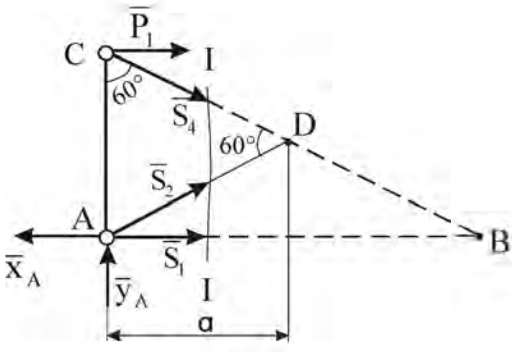


Рис. 7

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = -X_A a \operatorname{tg}30^\circ + S_1 a \operatorname{tg}30^\circ - Y_A a - P_1 a \operatorname{tg}30^\circ = 0.$$

Находим

$$S_1 = \frac{X_A a \operatorname{tg}30^\circ + Y_A a + P_1 a \operatorname{tg}30^\circ}{a \operatorname{tg}30^\circ} =$$

$$= \frac{20 \cdot 0,58 + 8,45 + 20 \cdot 0,58}{0,58} = 54,65 \text{ Н}.$$

Составим уравнение моментов относительно точки A

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -P_1 AC - S_4 AC \cos 30^\circ = 0.$$

$$S_4 = -\frac{P_1 AC}{AC \cos 30^\circ} = -\frac{20}{\cos 30^\circ} = -23,1 \text{ Н}.$$

Для определения S_2 рассмотрим равновесие сечения I—I, лежащего справа (рис. 8).

Составим уравнение моментов относительно точки B

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = P_2 a + S_2 h = 0,$$

где $h = BD \sin 60^\circ = \dfrac{a \sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = a,$

$$S_2 = -P_2 = -40 \text{ Н}.$$

Результаты, полученные способами вырезания узлов и Риттера совпадают.

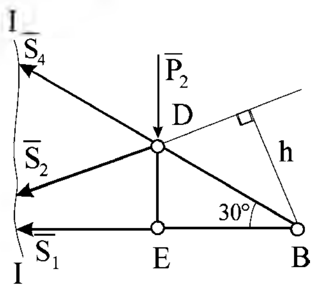


Рис. 8

Вопросы для повторения

1. Что такая плоская ферма?
2. Какой является простая плоская ферма?
3. Какие допущения применяют при расчете ферм?
4. Какие способы используют при расчете ферм?
5. В чем заключается способ вырезания узлов?
6. Сколько уравнений равновесия составляют для вырезанного узла?
7. В чем заключается способ сечений (способ Риттера)?

9. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Для системы параллельных сил возможны следующие частные случаи приведения сил:

1. $\bar{R}_0 = 0,\ \bar{M}_0 \neq 0$ — система приводится к паре сил, равной главному моменту.
2. $\bar{R} = 0,\ \bar{M}_0 = 0$ — система находится в равновесии.
3. $\bar{R} \neq 0,\ \bar{M}_0 = 0$ — система приводится к равнодействующей.
4. $\bar{R} \neq 0,\ \bar{M}_0 \neq 0$ — система приводится к равнодействующей.

Если все силы параллельны оси *Z*, то $\bar{R}_0 = \bar{R}_Z$. Для проекций главного момента имеем (рис. 1)

$$M_x = \sum M_x(\bar{F}_k) \neq 0,$$

$$M_y = \sum M_y(\bar{F}_k) \neq 0,$$

$$M_z = \sum M_z(\bar{F}_k) \equiv 0 \text{ (силы параллельны оси } Z).$$

Тогда главный момент находится в плоскости *OXY*, т. е. $\bar{M}_0 \perp \bar{R}_0$. Скалярный инвариант равен нулю $\bar{M}_0 \cdot \bar{R}_0 = 0$ и система приводится к равнодействующей. Найдем точку приложения равнодействующей (рис. 2).

По теореме Вариньона для системы параллельных сил, приводящейся к равнодействующей, можно записать

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k). \tag{1}$$

Считаем, что силы приложены в фиксированных точках твердого тела.

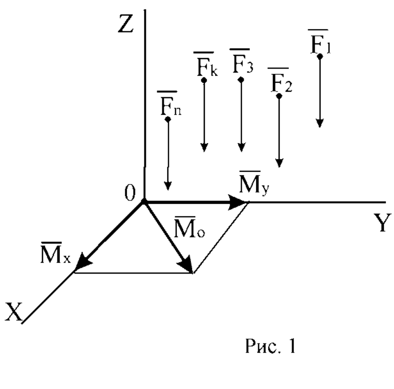


Рис. 1

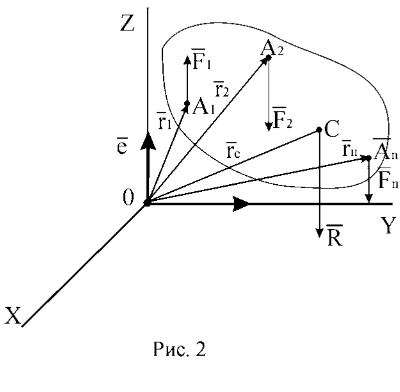


Рис. 2

Выбираем единичный вектор $\bar{e}$ по оси Z. Тогда каждая параллельная сила равна:

$$\bar{F}_k = F_k \cdot \bar{e}. \tag{2}$$

Для равнодействующей имеем:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = \bar{e} \sum F_k . \tag{3}$$

Найдем моменты сил и равнодействующей относительно центра координат:

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \bar{r}_c \times \bar{R} = \bar{r}_c \times \bar{e} \sum (F_k) , \tag{4}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{r}_k \times \bar{e}(F_k). \tag{5}$$

Подставим выражения (4) и (5) в формулу (1)

$$\bar{r}_c \times \bar{e} \sum (F_k) = \bar{r}_k \times \bar{e}(F_k) ,$$

или

$$(\bar{r}_c \sum F_k - \sum \bar{r}_k F_k) \times \bar{e} = 0. \tag{6}$$

Выражение (6) не зависит от направления единичного вектора и может выполняться при обращении в нуль множителя в скобках:

$$\bar{r}_c \sum F_k - \sum \bar{r}_k F_k = 0.$$

Тогда

$$\boxed{\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k F_k}{\sum F_k}.} \tag{7}$$

Векторную величину $\sum \bar{r}_k F_k$ называют статическим моментом системы параллельных сил относительно центра O.

Проектируя (7) на оси координат, имеем:

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_k F_k}{\sum F_k}, \\ y_c &= \frac{\sum y_k F_k}{\sum F_k}, \\ z_c &= \frac{\sum z_k F_k}{\sum F_k}. \end{aligned}} \tag{8}$$

Алгебраические величины $\sum x_k F_k$, $\sum y_k F_k$, $\sum z_k F_k$ называют статическими моментами относительно координатных плоскостей.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Если твердое тело разбить на отдельные части, то каждая часть будет притягиваться к центру Земли. Так как размеры Земли значительно больше размеров тел, то можно считать, что силы притяжения являются параллельными силами, направленными в одну сторону. Равнодействующая этих параллельных сил является весом тела, а центр системы параллельных сил, в котором будет приложен вес тела, называют центром тяжести тела. Для центра тяжести применим формулы (7) и (8), в которых силой будет вес каждой отдельной части тела ΔG_k :

$$\boxed{\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k},} \tag{9}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}, \\ y_c &= \frac{\sum y_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}, \\ z_c &= \frac{\sum z_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}. \end{aligned}} \tag{10}$$

Для частиц однородного тела вес выражаем следующим образом:

$$\Delta G_k = \gamma \Delta V_k , \tag{11}$$

где γ — плотность тела; ΔV_k — объем части тела.

Тогда центр тяжести однородного тела можно назвать центром тяжести объема.

Формулы (9) и (10) примут вид

$$\boxed{\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k \Delta V_k}{\sum \Delta V_k},} \tag{12}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_k \Delta V_k}{\sum \Delta V_k}, \\ y_c &= \frac{\sum y_k \Delta V_k}{\sum \Delta V_k}, \\ z_c &= \frac{\sum z_k \Delta V_k}{\sum \Delta V_k}. \end{aligned}} \tag{13}$$

Для однородной пластины центр тяжести можно назвать центром тяжести площади

$$x_c = \frac{\sum x_k \Delta F_k}{\sum \Delta F_k}, \quad y_c = \frac{\sum y_k \Delta F_k}{\sum \Delta F_k}, \tag{14}$$

где ΔF_k — площадь части пластины.

Для однородной пространственной линии

$$x_c = \frac{\sum x_k \Delta l_k}{\sum \Delta l_k}, \quad y_c = \frac{\sum y_k \Delta l_k}{\sum \Delta l_k}, \quad z_c = \frac{\sum z_k \Delta l_k}{\sum \Delta l_k}. \tag{15}$$

Способы определения положения центра тяжести тел

1. Метод симметрии

а) если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести находится на этой плоскости;

б) если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси;

в) если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести находится в центре симметрии.

2. Метод разбиения на части.

Сложные формы разбивают на части, центры тяжести которых известны. Тогда в формулы для нахождения координат центра тяжести тела входят объемы или площади этих частей.

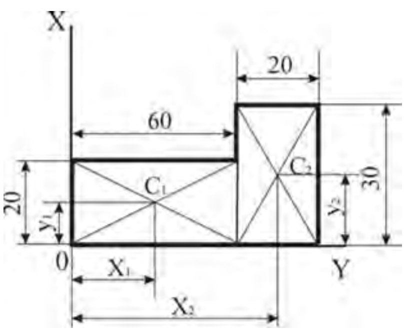


Рис. 3

Пример 40.

Определить центр тяжести плоской фигуры, изображенной на рис 3. Размеры даны в сантиметрах.

Решение. Разобьем фигуру на два прямоугольника с центрами тяжести в точках C_1 и C_2. Для определения центра тяжести фигуры составим таблицу: x_k, y_k — координаты центра тяжести k-й фигуры; F_k — площадь k-й фигуры.

Номер элемента	F_k, см^2	x_k, см	y_k, см	$F_k x_k$, см^3	$F_k y_k$, см^3
1	1200	30	10	36000	12000
2	600	70	15	42000	9000
Σ	1800	–	–	78000	21000

$$x_c = \frac{\sum x_k F_k}{\sum F_k} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{78000}{1800} = 43,33 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{21000}{1800} = 11,67 \text{ см}.$$

3. *Метод отрицательных площадей* применяют при определении центра тяжести тел, имеющих вырезанные (пустые) части. При этом тело разбивают на части, считая, что вырезанные (пустые) части тела имеют отрицательную площадь.

Пример 41.

Определить центр тяжести плоской фигуры, приведенной в примере 40 методом отрицательных площадей.

Решение. Дополним фигуру до прямоугольника размерами 30×80 (рис. 4). Центр тяжести этого прямоугольника в точке C_1. Пустым является прямоугольник размерами 10×60 с центром тяжести в точке C_2, площадь которого берется с отрицательным знаком.

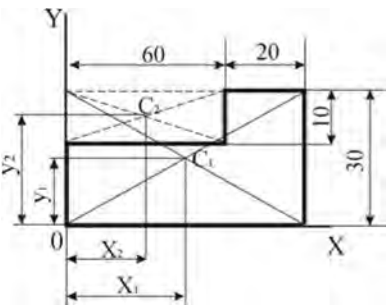


Рис. 4

Для определения центра тяжести составим таблицу.

Номер элемента	F_k, см^2	x_k, см	y_k, см	$F_k x_k$, см^3	$F_k y_k$, см^3
1	2400	40	15	96000	36000
2	−600	30	25	−18000	−15000
Σ	1800	–	–	78000	21000

$$X_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{78000}{1800} = 43,33 \text{ см}.$$

$$Y_c = \frac{y_1F_1 + y_2F_2}{F_1 + F_2} = \frac{21000}{1800} = 11,67 \text{ см}.$$

Вопросы для повторения

1. Почему система параллельных сил всегда приводится к равнодействующей, если главный вектор и главный момент не равны нулю?
2. Запишите векторную формулу для определения центра параллельных сил.
3. Что называют статическим моментом системы параллельных сил относительно центра?
4. По каким скалярным формулам можно определить центр тяжести тела?
5. Перечислите основные способы определения положения центра тяжести тел.
6. В чем заключается метод симметрии?
7. В чем заключается метод разбиения на части?
8. В чем заключается метод отрицательных площадей?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.** Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1998. — 736 с.
2. **Никитин Н. Н.** Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1990. — 606 с.
3. **Тарг С. М.** Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1995. — 416 с.
4. **Федута А. А., Чигарев А. В., Чигарев Ю. В.** Теоретическая механика и математические методы. — Мн.: Технопринт, 2000. — 500 с.
5. **Яблонский А. А.** Курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 1. — М.: Высшая школа, 1984. — 423 с.