УДК 004.9: 621.01/.03

РАСЧЕТ ЯЧЕИСТОЙ СТРУКТУРЫ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ ЯЧЕЙКИ В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗАДАВАЕМОГО ОБЪЕМА

Юхо Е.Н., Рагуля С.А., Полозков Ю.В.
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Важной задачей в решении проблемы снижения материалоемкости деталей является выявление закономерностей влияния геометрической конфигурации ячеистой структуры на технико-эксплуатационные свойства получаемых легковесных деталей [1]. В этой связи актуальны исследования изменений напряженно-деформированного состояния деталей в зависимости от изменения количества и размеров ячеек при условии неизменного объема (массы) детали. Для проведения таких исследований была решена задача расчета параметров, необходимых для построения ячеистой структуры на основе ячеек в виде параллелепипедов и, в частности, куба. Задача формулировалась следующим образом: дана деталь в форме параллелепипеда, объем и другие параметры которого известны. Для этой детали необходимо построить равномерно распределенную по двум направлениям ячеистую структуру, включающую ячейки в виде параллелепипедов одинаковой формы. Для различных вариантов ячеистой структуры суммарный объем ячеек должен оставаться постоянным при изменяющихся значениях количества и размеров параллелепипедов. Исходя из этих условий, для автоматизации построения ячеистой структуры требуется рассчитать значения сторон каждого параллелепипеда, координаты опорной точки, задающей его положение в текущей структуре, а также толщины стенок между ячейками и между гранями ячеек и исходной детали.

Для решения поставленной задачи примем, что ячейки представляют собой отверстия в исходной детали, выполненные таким образом, что боковые грани отверстия параллельны соответствующим внешним боковым граням исходной детали в форме параллелепипеда (в частности, куба) (рисунок 1). Обозначим расстояния от внешних боковых граней параллелепипеда до соответствующих внутренних боковых граней отверстий, а также расстояния от пятых граней отверстий до соответствующей внешней торцовой грани, задающие толщину стенок исходного тела, равными k. Также, ввиду проектирования структуры с равномерно распределенными ячейками по двум направлениям пространственной системы координат, условимся принимать равными значения толщины стенок между боковыми гранями призматических отверстий.

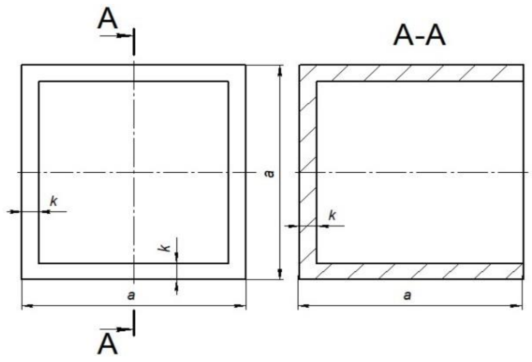


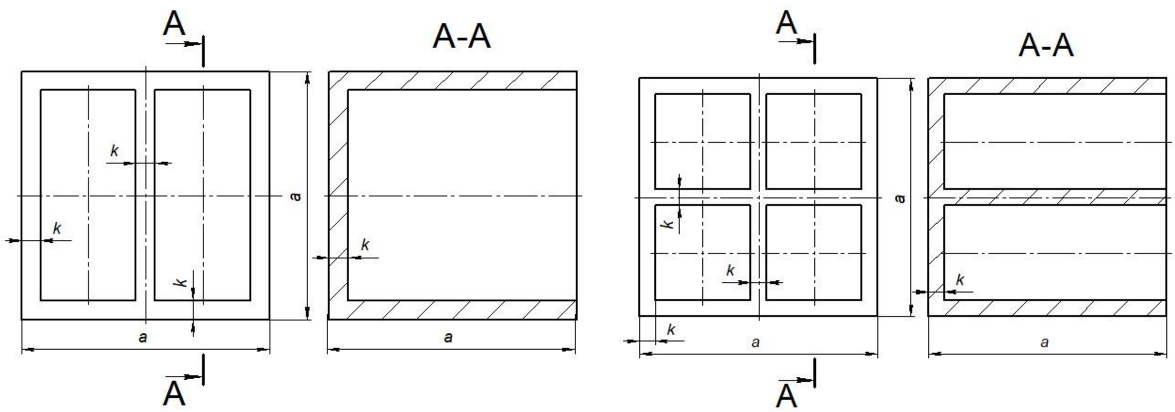
Рисунок 1 – Исходная деталь с одной призматической ячейкой

Назовём каждое добавление отверстий в структуру итерацией. Тогда при каждом добавлении новых отверстий в ячеистую структуру их суммарный объём будет равен $V_{\text{отв}}^{0}$:

$$V_{\text{отв}}^{0} = \sum_{i=1}^{n} V_i,$$

где V_i – объём i-го отверстия.

Заметим, что после каждой итерации количество отверстий увеличивается в два раза, как показано на рисунке 2.



а. Ячеистая структура первой итерации

б. Ячеистая структура второй итерации

Рисунок 2 – Изображения детали с ячеистыми структурами

Так как суммарный объём n-го количества отверстий должен быть равен объёму одного (первого) отверстия, а ячеистая структура должна быть равномерной, получаем формулу расчета общего объёма ячеистой структуры на первой итерации:

$$V_{\text{отв}}^{0} = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 = V_2.$$

Объем отверстия на этой итерации рассчитывается как:

$$V_1 = V_2 = l_x l_y l_y,$$

где ширина $l_x = \frac{(a-3k_1)}{2}$, длина $l_y = a - 2k_1$, высота $l_z = a - k_1$, где а – размер стороны исходной детали, k_1 – размер толщины стенок между отверстиями на первой итерации.

Подставляя значения получаем:

$$V_{\text{отв}}^0 = 2 * \frac{(a-3k_1)}{2} * (a-2k_1) * (a-k_1)\,. \qquad (1)$$

Учитывая, что $V_{\text{отв}}^0$ и a – величины постоянные, то формула (1) содержит только одно неизвестное. Можно увидеть, что делитель выражения $\frac{(a-3k_1)}{2}$ равен количеству отверстий в ряд, т.е. 2, в то время как на нулевой итерации делитель такого выражения равен 1, т.к. в столбце существует только одно отверстие.

На второй итерации количество отверстий в строке и столбце одинаково (рисунок 2 б). Обозначим расстояния, задающие толщину стенок между ячейками и ячейками с гранями исходной детали через k_2.

По аналогии с расчетами на первой итерации, получаем:

$$V_{\text{отв}}^0 = \sum_{i=1}^{4} V_i\,, \text{при } V_1 = V_2 = V_3 = V_4 \Rightarrow V_{\text{отв}}^0 = 4V_1.$$

Тогда ширина $l_x = \frac{(a-3k_2)}{2}$, высота $l_y = \frac{(a-3k_2)}{2}$, длина $l_z = a - k_2$.

Подставляя значения в формулу расчета объема, получаем:

$$V_{\text{отв}}^0 = 4 * \frac{(a-3k_2)}{2} * \frac{(a-3k_2)}{2} * (a-k_2)\,.$$

Количество ячеек на каждой итерации увеличивается в 2^t раз, где t – целое число. Заметим, что на нечетных итерациях количество ячеек в сроке и столбце одинаковое, а на четных – разное. Тогда, для четной итерации суммарный объем ячеистой структуры вычисляется по следующей формуле:

$$V_{\text{отв}}^0 = 2^t * \left(\frac{a-(n+1)k_t}{n}\right)^2 * (a-k_t), \qquad (2)$$

где n задает количество отверстий в ряду и столбце:

$$n = \sqrt{2^t},$$

где t – чётное число (чётная итерация).

Для проведения инженерных расчетов объем ячеистой структуры должен оставаться постоянным на каждой итерации, независимо от количества. Поэтому толщина стенок k_n будет являться переменной величиной. Тогда, из (2) получаем кубическое уравнение для расчета значений k_t на четной итерации:

$$(n+1)^2k_t^3 - a(n^2+4n+3)k_t^2 + a^2(2n+3)k_t - a^3 + \frac{V_{\text{отв}}^0 n^2}{2^t} = 0. \qquad (3)$$

Для нечетной итерации суммарный объем ячеистой структуры вычисляется по следующей формуле:

$$V^0_{\text{отв}} = 2^t * \left(\frac{a-(n+1)k_t}{n}\right) * \left(\frac{a-(p+1)k_t}{p}\right) * (a-k_t), \tag{4}$$

где $n*p = 2^t$, p – количество отверстий в строке.

Исходя из того, что количество отверстий в строке нечётной итерации в два раза меньше, чем в ряду, то p вычисляется следующим образом:

$$p = \sqrt{2^{t-1}}.$$

Окончательно формула расчета суммарного объема ячеистой структуры примет следующий вид:

$$V^0_{\text{отв}} = 2^t * \left(\frac{a-(2p+1)k_t}{2p}\right) * \left(\frac{a-(p+1)k_t}{p}\right) * (a-k_t), \tag{5}$$

где $p = \sqrt{2^{t-1}}$; t – нечётное число (нечётная итерация).

Из (5) получаем кубическое уравнение для расчета значений k_t на нечетной итерации:

$$(2p^2+3p+1)k_t^3 - a(2p^2+6p+3)k_t^2 + 3a^2(p+1)k_t - a^3 + \frac{V^0_{\text{отв}}2p^2}{2^t} = 0. \tag{6}$$

Из полученных формул вычисляются координаты центра верхнего левого отверстия (считающимся первым в ячеистой структуре) как относительно верхнего левого угла, так и геометрического центра исходного объекта, который является инвариантной точкой отсчета для тел различной геометрической формы.

Размеры сторон ячейки рассматриваемой конфигурации зависят от количества ячеек в ячеистой структуре, а также от их расположения на грани тела. Для чётной итерации ширина и высота рассчитываются как:

$$l_x = l_y = \frac{a-(n+1)k_t}{n},$$

длина рассчитывается как:

$$l_z = a - k_t,$$

где $n = \sqrt{2^t}$.

Для нечётной итерации ширина рассчитывается как:

$$l_x = \frac{a-(2p+1)k_t}{2p},$$

высота:

$$l_y = \frac{a-(p+1)k_t}{p},$$

длина:

$$l_z = a - k_t,$$

где $p = \sqrt{2^{t-1}}$.

Обозначая центр левого верхнего отверстия через А, определяем его координаты относительно левого верхнего угла:

$$A(\frac{x}{2}+k;\frac{y}{2}+k).$$

Учитывая, что центр грани куба находится в точке ($\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}$), для вычисления координат точки А относительно геометрического центра исходного тела, получаем:

$$A(\frac{a}{2}-\left(\frac{x}{2}+k\right);\frac{a}{2}-\left(\frac{y}{2}+k\right)).$$

На основе приведенных расчетов разработаны программные средства для построения ячеистой структуры, позволяющей автоматизировать проведение инженерных расчетов в среде Solid Works (рисунок 3).

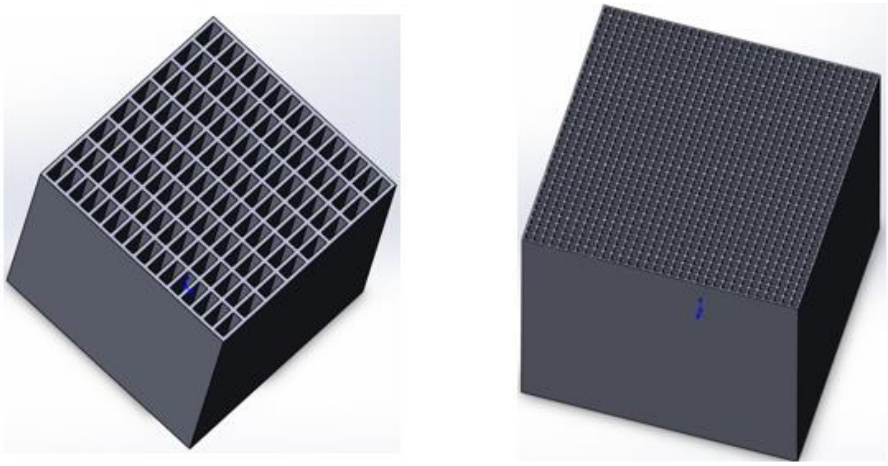


Рисунок 3 – Примеры построения 3D моделей деталей с ячеистыми структурами

Приведенный пример расчета геометрических объектов демонстрирует принципы задания ячеистой структуры для автоматизации проведения инженерных расчетов деталей с ячеистыми структурами и обоснования корректности полученных результатов. Продолжаются исследования по аналитическому расчету ячеистых структур, задаваемых на основе других базовых геометрических тел, например, цилиндров, трехгранных призм, сфер и др. Перспективные исследования связываются с расчетом ячеистых структур с не равномерно распределенными ячейками и ячейками, имеющими варьируемые размеры.

Литература

1. Ю.В. Полозков, Проблемы проектирования и формообразования легковесных деталей в аддитивном производстве / Ю.В. Полозков // Математические методы в технике и технологиях : сб. тр. междунар. науч. конф., Минск, 10 – 12 октября 2017 г. / СПб.: Изд-во Политехн. ун-та ; под общ. ред. А. А. Большакова. – Минск, 2017. – Т. 10 – С. 61 – 65.