Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра гидравлики

И.В. Качанов
В.В. Кулебякин
В.К. Недбальский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Ч а с т ь 1

Минск
БНТУ
2010

УДК 532.5÷533.6
ББК 30.123я7
К 30

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор В.И. Байков,
доктор физико-математических наук В.А. Бабенко

Качанов, И.В.
К 30 Механика жидкости и газа: курс лекций: в 4 ч. / И.В. Качанов, В.В. Кулебякин, В.К. Недбальский. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч. 1. – 42 с.

ISBN 978-985-525-260-4 (Ч. 1).

Издание содержит изложение основных разделов механики жидкости и газа в объеме курса лекций, предусмотренных учебным планом для строительных специальностей БНТУ. Может быть использовано в самостоятельной работе студентов для подготовки к экзаменам и зачетам, при проведении курса лабораторных работ и практических занятий, окажет большую помощь студентам других специальностей, изучающих гидравлику.

УДК532.5÷533.6
ББК30.123я7

ISBN 978-985-525-260-4 (Ч. 1)
ISBN 978-985-525-261-1

1. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Известно, что в отличие от твердых тел жидкости обладают так называемым свойством *текучести,* т. е. легко изменяют свою форму под действием самых ничтожных внешних сил. Это движение можно представить как последовательность непрерывно сменяющих друг друга бесконечно малых деформаций, происходящих под действием сил, в предельном случае стремящихся к нулю. В этом смысле жидкость определяется как среда, в которой в состоянии равновесия всякое сопротивление изменению формы равно нулю. Следует отметить, однако, что в случае быстрого изменения формы или движения жидкости она оказывает сопротивление этому изменению. Указанное свойство определяется как *вязкость*, или внутреннее трение жидкости. Чем большие силы нужно приложить для приведения жидкости в движение, тем выше ее вязкость. По мере увеличения вязкости жидкость все более походит на твердое тело, но резкой границы между ними тем не менее провести нельзя. Все определяется величиной скорости деформации, и наличие связи между тензорами напряжений и скоростей деформаций в жидкости задает количественную сторону вязкости. Сказанное можно проиллюстрировать поведением такого распространенного вещества, как асфальт. Если опрокинуть бочку с асфальтом, то он вытечет и примет форму плоской лепешки, по которой можно пройти не оставляя следов. Но если на ней неподвижно постоять некоторое время – останется след, границы которого со временем будут размываться. При резком ударе можно отколоть кусок асфальта, как стекла.

Таким образом, можно сказать, что если жидкость находится в относительном покое, т. е. равны нулю касательные (недиагональные) компоненты тензора скоростей деформаций, то равны нулю и касательные составляющие тензора напряжений. В широко употребляемой модели *идеальной* (лишенной внутреннего трения, или вязкости) жидкости касательные компоненты тензора напряжений равны нулю по определению, независимо от форм ее механических движений и связанных с этим скоростей деформаций сдвига. Вышесказанное отличает жидкости и газы от твердых тел, в которых, как известно, даже в состоянии относительного покоя имеются касательные напряжения, обусловленные наличием конечных деформаций (но не скоростей) сдвига.

В то же время свойством, отличающим жидкости от газов, является их практическая ***несжимаемость,*** т. е. способность сохранения объема почти неизменным при весьма значительных повышениях давления. ***Сжимаемость*** различных сред, как известно, характеризуется коэффициентом объемного сжатия

$$\beta_V = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

величина которого для такой распространенной жидкости, как вода, составляет, например, $\beta_V \approx 5\cdot 10^{-5}$ см^2/кг. Для газов же известен закон Бойля–Мариотта, который определяет обратную пропорциональность давления объему, занимаемому определенной массой газа:

$$pV = \text{const}, \text{ т. е. } \beta_V = -1/p\ .$$

Что касается температурной зависимости объема жидкости (или газа), то эта связь формально одинакова и выражается зависимостью

$$V = V_0(1 + \alpha\Delta T),$$

где $\alpha = \dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — коэффициент температурного расширения, величина которого для газов $\alpha \approx 1/273{,}2$ градус$^{-1}$, а для жидкостей определяется индивидуально.

Вообще говоря, параметры газов в пределах, достаточных для многих практических приложений, связаны между собой известным уравнением газового состояния Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \ ,$$

где m – масса газа;

μ – молекулярная масса;

R – универсальная газовая постоянная.

Под ***плотностью*** или, вообще говоря, плотностью физически бесконечно малого объема, понимают частное от деления его массы на объем, т. е.

$$\rho = \frac{M}{V} \ .$$

Плотность в Международной системе единиц выражается в кг/м^3.

В технике и технической литературе часто используют понятие удельного веса, т. е. частного от деления веса элементарной частицы жидкости (или газа) на ее объем:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{gM}{V} \cdot$$

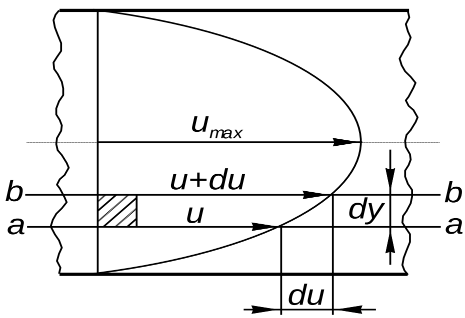
Как следует из приведенной формулы, удельный вес выражается в Н/м^3. Заменяя в M/V его значением ρ, получаем связь между плотностью и удельным весом:

$$\gamma = \rho g \ .$$

Под ***вязкостью*** понимают свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению ее частиц. Физической причиной вязкости является молекулярное взаимодействие, и, по существу, она характеризует внутреннее трение. Вследствие различия в молекулярной структуре капельных жидкостей и газов различна и природа их вязкостей. В жидкостях вязкость есть проявление сил сцепления между молекулами, в газах она – результат взаимодействия, обусловленного хаотическим движением и соударением молекул, приводящим к обмену импуль-сом. Поэтому при повышении температуры в газах вязкость увеличивается в связи с повышением скорости молекул и уменьшением пути их свободного пробега. В капельных же жидкостях повышение температуры приводит к снижению вязкости, т. к. происходит увеличение среднего расстояния между молекулами и вероятности перехода в свободные дислокации.

Равновесное состояние вещества в замкнутой системе характеризуется определенным распределением его массы и параметров в пространстве. Если за счет какого-либо воздействия оказывается, что в каком-то месте пространства возникла неравновесность, то в системе начинают происходить процессы массо- и (или) теплообмена, которые стремятся сгладить неравномерность. В общем случае этот обмен называют про-цессом переноса. В различных явлениях можно наблюдать процессы переноса энергии, массы (вещества) и количества движения. Как будет показано ниже, вязкость обусловлена процессом переноса количества движения.

Для уяснения того, как проявляются силы вязкости, рассмотрим течение жидкости в круглой трубе. Будем считать, что векторы скоростей частиц параллельны оси x. Забегая вперед, отметим, что такое течение существует в природе и носит название *ламинарного.*



На основе чисто интуитивных представлений установим вид распределения скоростей в поперечном сечении потока. Сразу же отметим, что графическое изображение распределения скоростей в поперечном сечении называют эпюрой скоростей (либо профилем скоростей). Очевидно, что скорости частиц, находящихся на стенках трубы, равны нулю (вследствие принципа прилипания) и возрастают по мере приближения к оси (на оси $u = u_{max}$).

Рассмотрим два слоя жидкости (a–a и b–b), расположенные на расстоянии dy. Пусть слой a–a движется со скоростью u, тогда, как следует из эпюры, слой b–b имеет скорость $u + du$. Таким образом, на верхней и нижней гранях прямоугольной жидкой частицы, расположенной между слоями, скорости различны, что в соответствии с законами механики должно привести к деформации частицы. Заметим, что такое движение в гидромеханике называют простым сдвигом, либо течением чистого сдвига.

Взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения. При этом направление этого напряжения таково, что оно пытается уменьшить разность скоростей по обе стороны рассматриваемого элемента. Величина силы трения, возникающей между слоями движущейся жидкости, определяется по формуле, предложенной Ньютоном и подтвержденной многочисленными и тщательно поставленными опытами. Эта формула имеет вид

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{du}{dy} S ,$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, зависящий от физической природы жидкости, ее агрегатного состояния и температуры, и практически не зависящий от давления. В системе СИ коэффициент динамической вязкости измеряется в Па·с;

S – площадь поверхности соприкасающихся слоев.

В технических приложениях, особенно связанных с кинематикой течения, часто используется коэффициент кинематической вязкости, представляющий собой отношение

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

В Международной системе единиц величина коэффициента кинематической вязкости выражается в м^2/с.

Величина $\frac{du}{dy}$ характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней либо, если говорить об эпюре, – темп изменения скорости. Иногда эту величину называют поперечным градиентом скорости.

Разделим правую и левую части формулы Ньютона на S.

Отношение $F_{\text{тр}} / S$ есть не что иное, как касательное напряжение τ, т. е.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

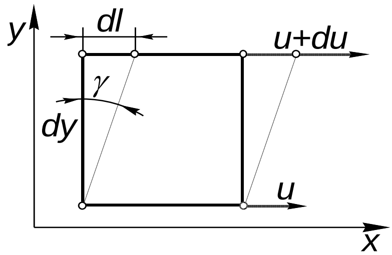
Таким образом, можно сказать, что вязкость жидкости – это ее способность оказывать сопротивление касательным напряжениям.

Из закона Ньютона для вязкости можно сделать еще один важный вывод. Если жидкость находится в состоянии покоя, то $u = 0$ и, следовательно, $\tau = 0$, т. е. в покоящейся жидкости проявление сил вязкости отсутствует. Действительно, для того чтобы ответить на вопрос о том, в какой степени вязкой является среда, налитая в сосуд, например, стакан, стоящий на столе, необходимо либо попытаться перелить ее в другой сосуд, либо, обмакнув в нее какой-то предмет, попытаться помешать ее.

Выше было сказано, что вязкость обусловлена переносом количества движения. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим формулу Ньютона с позиций физических величин, входящих в нее:

$$[\tau] \to \text{Па} \to \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \to \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2} \to \frac{\text{кг}\cdot \text{м}/\text{с}}{\text{м}^2\text{с}}.$$

В числителе приведенной формулы находится количество движения, т. е. τ – это количество движения, переносимое через единицу поверхности в единицу времени.



И, наконец, попытаемся установить физический смысл поперечного градиента скорости, для чего рассмотрим жидкую частицу, показанную на рисунке. Из-за разности скоростей на верхней и нижней гранях первоначально прямоугольная частица будет деформироваться и превращаться в параллелограмм.

Отрезок dl характеризует величину деформации за время dt, т. е.

$$dl = du \cdot dt,$$

тогда

$$\frac{du}{dy} = \frac{dl}{dt \cdot dy},$$

но

$$\frac{dl}{dy} = \operatorname{tg}\gamma,$$

и, значит:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{dt}.$$

Следовательно, поперечный градиент скорости представляет собой скорость относительной деформации сдвига. Таким образом, касательное напряжение в жидкости линейно зависит от скорости относительной деформации. В этом – принципиальное отличие жидкости от твердого тела, в котором касательные напряжения зависят от величины деформации, а не от ее скорости.

Жидкости, подчиняющиеся закону Ньютона, называются ньютоновскими, а не подчиняющиеся ему – неньютоновскими. К числу последних относятся растворы полимеров, лакокрасочные покрытия, строительные растворы, многие пищевые продукты (кефир, ряженка, йогурт), разнообразные кремы, нефть и вязкие нефтепродукты и многие другие жидкости, окружающие человека в его повседневной жизни.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

Общие теоремы о равновесии сил, приложенных к твердому телу, применимы и к жидкостям. Это следует из принципа отвердевания:

Если в любой подвижной системе, находящейся в равновесии, отдельные ее части сделать неподвижными, то равновесие всей системы не нарушится.

Это значит, что в жидкости, находящейся в равновесии, какую-то ее часть всегда можно представить отвердевшей, равновесие при этом не нарушится, а к отвердевшей части можно применить теоремы о равновесии твердых тел. Известно, что любые силы представляют собой взаимодействие между массами. Причем если масса m_1 взаимодействует с массой m_2, то силы их взаимодействия равны по величине, но противоположны по направлению. В системе масс, выделенной каким-либо образом, действуют два типа сил: ***внутренние***, действующие между массами данной системы, и ***внешние***, действующие между каждой массой системы и другими массами, находящимися вне системы. Причем очевидно, что внутренние силы всегда попарно равны и противоположны по направлению, а внешние действуют в одиночку. Поэтому при суммировании всех сил внутренние попарно уничтожаются, а внешние образуют некую результирующую силу. Условие равновесия требует, чтобы векторная сумма сил, приложенных к каждой массе системы, была равна нулю. Отсюда, с учетом вышесказанного, вытекает, что должна быть равна нулю сумма всех внешних сил, т. е.

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum Y_i = 0, \qquad \sum Z_i = 0,$$

где X_i, Y_i, Z_i – проекции внешних сил на оси координат.

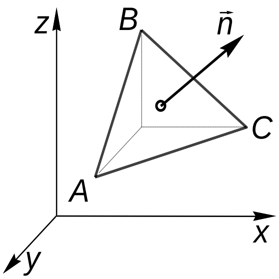
Аналогичные рассуждения приводят к условию равенства нулю моментов всех внешних сил для равновесия системы.

Вообще говоря, для жидких тел нужно знать напряженное состояние внутри объема, т. е. величины и направления внутренних сил, действующих на элементарные объемы жидкости во всем пространстве. Однако в большинстве практических задач приходится довольствоваться рассмотрением среднего напряженного состояния (т. е. осредненного по некоторой площадке). Более того, возникает вопрос, как вычислить внутренние силы, если условия равновесия сформулированы только для внешних. С этой целью применяется метод сечений, позволяющий часть внутренних сил заменить внешними.

Представим некое тело, находящееся в равновесии, к которому приложены внешние силы. Если мысленно разрезать его на две половины и заменить внутренние силы, действующие на площадь сечения, их результирующей, то для того чтобы равновесие отрезанной части не нарушилось, необходимо равенство результирующей внутренних сил и оставшейся внешней силы. Величина результирующей внутренних сил, отнесенная к площади сечения, даст среднюю величину напряжения в данном сечении. При этом следует понимать, что на различных элементарных площадках сечения напряжения могут быть разными как по величине, так и по направлению.

Этот ***способ сечения*** для определения внутренних сил допускает применение в случаях, когда необходимо исследовать напряженное состояние внутри жидкости. Обычно при этом с помощью нескольких сечений вырезается небольшое простое геометрическое тело (параллелепипед, призма, тетраэдр) и рассматривается его равновесие. Как известно, существует следующая теорема:

Если в трех сечениях, образующих трехгранный угол, напряжения известны, то могут быть определены напряжения во всех других сечениях.



Таким образом, напряжение $\vec{p}_n$ при произвольной ориентации нормали $\vec{n}$ может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям Ox, Oy и Oz:

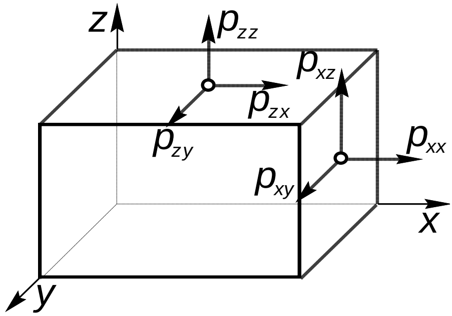
$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z \, .$$

Проекции векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$ и $\vec{p}_z$ на координатные оси x, y, z обозначаются как

$$\begin{matrix} p_{xx}, & p_{xy}, & p_{xz}, \\ p_{yx}, & p_{yy}, & p_{yz}, \\ p_{zx}, & p_{zy}, & p_{zz}. \end{matrix}$$

Первый подстрочный индекс указывает ось, перпендикулярную ориентации площадки, второй – ось, на которую спроецировано напряжение.

Для уяснения ориентации рассмотрим параллелепипед, выделенный в жидкости и показанный на рисунке, приведенном ниже. Из рисунка, в частности, видно, что напряжения с одинаковыми индексами являются нормальными, а с разными – касательными. В проекциях на оси декартовой системы координат выражение для напряжения при произвольной ориентации может быть записано как



$$p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx};$$
$$p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy};$$
$$p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}.$$

Совокупность этих девяти составляющих компонентов напряжения образует тензор напряжения. В матричной форме он записывается в следующем виде:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, ***напряженным состоянием в какой-либо точке называется совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через эту точку.***

Геометрическая интерпретация тензора напряжений представляет собой эллипсоид напряжений. В соответствии с приведенной выше теоремой напряженное состояние в точке известно, если определены напряжения в трех сечениях, составляющих трехгранный угол. Напряжения, перпендикулярные сечениям, проходящим через главные оси эллипсоида напряжений, называются ***главными напряжениями,*** а соответствующие направления – ***главными направлениями напряженного состояния.***

3. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Выше уже отмечалось, что одно из фундаментальных свойств жидкости – ее вязкость – не проявляется, если жидкость находится в состоянии равновесия, т. е. в этом случае ***касательные компоненты тензора напряжений равны нулю*** и действуют лишь нормальные напряжения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, ориентированные по внешним нормалям. При этом ясно, что они не являются растягивающими напряжениями. Как показывает опыт, в отличие от твердого тела, которое может воспринимать как растягивающие (положительные) нормальные напряжения, так и сжимающие (отрицательные) нормальные напряжения ***без разрыва сплошности,*** жидкое тело способно воспринимать лишь сжимающие усилия. Можно показать, что при отсутствии касательных напряжений $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$, из чего следует, что ***нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки.*** Величину, численно равную нормальному напряжению, но взятую с противоположным знаком, в гидромеханике называют ***давлением*** либо более полно – гидростатическим давлением. Гидростатическое давление обозначают буквой ***P***, т. е. $p = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}$.

Таким образом, ***в жидкости, находящейся в равновесии, давление везде перпендикулярно к поверхности того сечения, на которое оно действует, и одинаково во всех направлениях (не зависит от ориентации площадки).***

Основной задачей гидростатики, т. е. учения о равновесии весомых жидкостей, является вычисление распределения или поля давления в однородной весомой жидкости.

Если рассмотреть равновесие малой призмы с осью, ориентированной по горизонтали, то очевидно, что вес призмы не дает составляющей силы вдоль ее оси, поскольку направлен перпендикулярно. Силы давления, действующие на боковые грани, взаимно уравновешивают друг друга. Поэтому из равенства сил, действующих на основания призмы, вытекает, что

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2,$$

т. е. ***давление в горизонтальной плоскости остается постоянным.***

Для нахождения связи между давлениями жидкости в различных горизонтальных плоскостях следует рассмотреть равновесие призмы (или цилиндра) с осью, ориентированной по вертикали. В этом случае вес призмы оказывает существенное влияние на ее равновесие, а именно, для равновесия необходимо, чтобы

$$\gamma F h + p_1 F = p_2 F,$$

где γ – удельный вес жидкости;

F – площадь основания призмы;

h – высота призмы.

Отсюда следует, что

$$P_2 - P_1 = \gamma h.$$

Таким образом, ***давление в весомой жидкости возрастает с увеличением глубины, причем увеличению глубины на единицу длины соответствует увеличение давления на величину*** γ.

Принцип отвердевания позволяет очень просто решить задачу об определении сил давления, действующих на тело, погруженное в жидкость. Результат, найденный еще Архимедом, можно коротко выразить следующим образом:

Тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость (закон Архимеда).

Можно предложить также другую формулировку этого закона:

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом.

С помощью рассмотрения равновесия малой призмы (или цилиндра) в неоднородной жидкости (например, с распределением температур или разным содержанием соли в разных местах жидкости) можно показать, что ***в неоднородной весомой жидкости равновесие возможно лишь тогда, когда в каждом горизонтальном слое плотность постоянна.*** Устойчивое равновесие при этом будет иметь место только в случае, если плотность всюду уменьшается снизу вверх, т. е. более плотные слои жидкости расположены ниже менее плотных.

Что касается распределения давления в неоднородной жидкости, то для каждого слоя, в котором плотность можно считать приблизительно одинаковой, можно записать соотношение в дифференциальной форме:

$$dP = -\gamma dZ,$$

и если удельный вес γ задан как функция высоты Z, то это соотношение можно проинтегрировать и в результате получить распределение давления с высотой.

4. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Уравнения равновесия жидкости могут быть получены из рассмотрения равновесия элементарного объема жидкости в виде, например, прямоугольного куба. Силы, действующие на жидкость, сводятся к объемным силам и давлению, действующему на поверхностные грани куба. Кроме того, как было показано, в покоящейся жидкости касательные напряжения не проявляются. Условия равновесия можно записать как равенство нулю результирующей этих внешних сил. Таким образом, в проекциях на оси декартовых координат можно записать

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

В векторной форме эта система может быть записана в виде

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0.$$

Это уравнение называется ***основным уравнением гидростатики.*** Оно показывает, что существует непосредственная связь между величиной гидростатического давления в точке и ее координатами. Эта связь может быть раскрыта, если проинтегрировать данное дифференциальное уравнение.

На жидкое тело могут действовать силы, имеющие различную физическую природу. Поэтому правомерна такая постановка вопроса: всегда ли под действием приложенных сил жидкость может находиться в состоянии равновесия?

Умножим каждое из уравнений, входящих в приведенную выше систему, соответственно на dx, dy, dz и просуммируем их, в результате получим

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0 \cdot$$

Выражение, стоящее в скобках во втором члене уравнения, есть не что иное, как полный дифференциал давления – dp, поэтому можем записать

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Это уравнение называют основным ***уравнением гидростатики в дифференциальной форме.*** Его левая часть представляет собой полный дифференциал, поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Следовательно, силы и плотность должны быть такими функциями x, y, z, чтобы они обращали правую часть в полный дифференциал. Если этого не происходит, то равновесие жидкости невозможно. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть является полным дифференциалом некоей функции Ф. Считая плотность постоянной, можем записать

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi .$$

Известно, что скалярное произведение силы на элементарное перемещение частицы называют элементарной работой, т. е. $f_x dx + f_y dy + f_z dz$.

Силы, работа которых не зависит от пути движения, а только от начального и конечного положений, называют потенциальными. При этом для того чтобы работа силы не зависела от пути движения, необходимо и достаточно, чтобы выражение для элементарной работы было полным дифференциалом некоторой скалярной функции P, называемой *силовой*. Взятая с противоположным знаком, она называется потенциалом. Таким образом, рассмотренную выше функцию можно назвать силовой функцией, а представить как

$$dp = \rho d\Phi .$$

Из чего следует, что ***несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием сил, имеющих потенциал.***

Поверхности, в каждой точке которых $\Phi = \mathrm{const}$, называют *эквипотенциальными.* Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т. е. поверхность, в каждой точке которой $p = \mathrm{const}$. В этом случае, $dp = 0$, т. е.

$$\rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) = 0 .$$

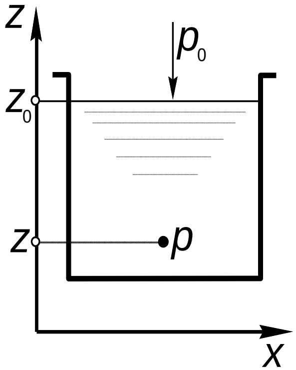
Но плотность $\rho \neq 0$, и, следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 .$$

Уравнение, приведенное выше, называют уравнением поверхности равного давления. Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то $X = Y = 0$; $Z = -g$ (знак «минус», т. к. сила тяжести ориентирована в сторону, противоположную оси z); $-gdz = 0$ и $z = \text{const}$, т. е. в покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость есть поверхность равного давления.

5. РАВНОВЕСИЕ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Проинтегрируем основное уравнение гидростатики в предположении, что $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаема), а из массовых сил действует только сила тяжести. В этом случае $X = Y = 0$, $Z = -g$, т. е. $dp = -\rho g dz$, и после интегрирования



$$p = -\rho g z + C,$$

где С – произвольная постоянная. Для ее нахождения используем следующее граничное условие:

при $z = z_0$ $p = p_0$.

После подстановки в уравнение получим

$$C = p_0 + \rho g z_0,$$

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z).$$

Как видно из рисунка, разность ($z_0 - z$) – глубина погружения рассматриваемой частицы, которую будем обозначать буквой h, т. е.

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Полученное уравнение выражает известный из курса физики закон Паскаля: ***давление, действующее на поверхность, передается по всем направлениям одинаково.***

Очевидно, что член ρgh должен выражаться в единицах давления, т. е. в паскалях (1 Па = 1 Н/м^2). Эту величину называют ***избыточным давлением.*** Она может быть как положительной, так и отрицательной. Такая трактовка приводит нас к понятию ***абсолютного давления,*** которое в соответствии с приведенным выше уравнением может быть представлено как сумма барометрического (атмосферного) и избыточного давления, т. е.

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{ат}} \pm p_{\text{изб}} .$$

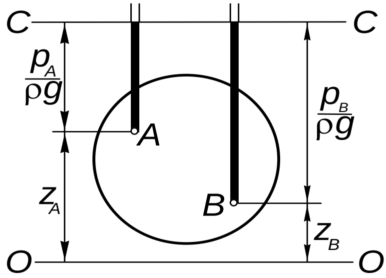
Отрицательное избыточное давление называют вакуумом.

Вернемся вновь к уравнению для гидростатического давления. После деления обеих его частей на ρg получаем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} .$$

В таком виде все его члены выражаются в единицах длины и носят название напоров. Величина z характеризует положение жидкой частицы над произвольно выбираемой горизонтальной плоскостью отсчета, т. е. z – это геометрический напор; $\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрический напор. Сумму этих величин $z + \frac{p}{\rho g}$ называют ***гидростатическим напором.*** Чтобы уяснить физический смысл этих величин, рассмотрим простую схему, показанную на рисунке.

Представим герметично закрытый сосуд, заполненный жидкостью, находящейся под давлением. Выберем в этом сосуде две произвольно расположенные точки A и B и, опять-таки произвольно, горизонтальную плоскость $O–O$, которую назовем плоскостью отсчета.



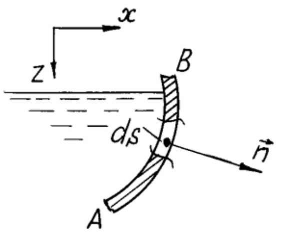
Координаты частиц, расположенных в точках A и B, будут z_A и z_B. В соответствии со сказанным выше величины z_A и z_B выражают геометрический напор. Теперь через крышку сосуда введем в точках A и B сообщенные с атмосферой стеклянные трубки. Эти трубки называют пьезометрами. Поскольку по условию жидкость находится под давлением, то она начнет подниматься по пьезометрам. Не представляет труда и ответ на вопрос о том, когда прекратится подъем. Очевидно, что это произойдет в тот момент, когда высота столба жидкости уравновесит давление в рассматриваемой точке. Это и есть ***пьезометрическая высота*** либо пьезометрический напор.

Вышеуказанное соотношение справедливо для любых произвольно выбранных частиц покоящейся жидкости, поэтому в общем виде его можно записать как $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$, т. е. для любых точек жидкости гидростатический напор одинаков. Следовательно, уровни в пьезометрах установятся на одной и той же высоте (плоскость $C–C$ на рисунке). Это уравнение выражает так называемый ***гидростатический закон распределения давления.***

6. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ**

Задача сводится к нахождению сил давления жидкости на поверхности стенок, ограничивающих ее.

Рассмотрим криволинейную поверхность AB произвольной формы, площадь которой S (см. рисунок). Выделим на ней элементарную площадку dS, пусть $\vec{n}$ – орт внешней нормали. Сила, действующая на эту площадку:



$$d\vec{F} = p\vec{n}dS,$$

где p – гидростатическое давление в центре площадки. Обычно в технических приложениях интерес представляет лишь сила, возникающая от избыточного давления. Имея в виду, что $p = \rho g h$, получаем

$$d\vec{F} = \rho g h \vec{n} dS.$$

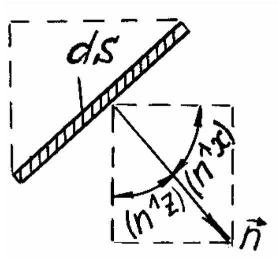
На всю площадь действует сила

$$\vec{F} = \iint_S \rho g h \vec{n} dS.$$

Запишем это выражение в проекциях на оси координат, что дает

$$F_x = \rho g \iint\limits_S h \cos(\vec{n}, \vec{x}) dS \ ;$$

$$F_z = \rho g \iint\limits_S h \cos(\vec{n}, \vec{z}) dS \ .$$



Для удобства элементарную площадку изобразим отдельно. Из этого рисунка следует, что

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}) = dS_{\text{г}} \ ;$$
$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}) = dS_{\text{в}} \ ,$$

где $dS_{\text{в}}$ – вертикальная и $dS_{\text{г}}$ –- горизонтальная проекции dS.

Таким образом

$$F_x = \rho g \iint\limits_S h \cdot dS_{\text{в}} \ ,$$

$$F_z = \rho g \iint\limits_S h \cdot dS_{\text{г}} \ .$$

Рассмотрим горизонтальную составляющую. Из механики известно, что интеграл для F_x есть статический момент площади, равный произведению $h_{\text{ц.т}} S_{\text{в}}$, где $h_{\text{ц.т}}$ – координата центра тяжести (инерции) вертикальной проекции.

Следовательно,

$$F_x = \rho g h_{\text{ц.т}} S_{\text{в}} \ ,$$

т. е. ***горизонтальная составляющая сил давления равна произведению площади вертикальной проекции стенки на гидростатическое давление в центре инерции этой проекции.***

Теперь определим вертикальную составляющую силы, для чего воспользуемся следствием из формулы Гаусса–Остроградского:

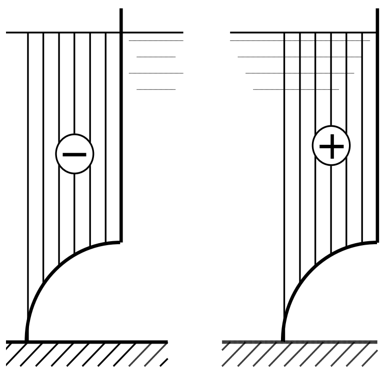
$$\iint\limits_S p\vec{n}dS = \iiint\limits_V \text{grad } pdV .$$

Из уравнения равновесия имеем $\rho\vec{F} = \text{grad } p$, т. е.

$$\iiint\limits_V \text{grad } pdV = \iiint\limits_V \rho\vec{F}dV .$$

Вертикальная проекция единичной массовой силы $\vec{F} = Z = g$ (знак «плюс», т. к. в данном случае ось z ориентирована вниз).

Следовательно, $F_z = \iiint\limits_V \rho g dV = \rho g \iiint\limits_V dV = \rho g V$.



V носит название объема ***тела давления.*** Таким образом, вертикальная составляющая равна весу жидкости, заключенному в объеме тела давления. Для нахождения этого объема следует использовать формальное правило: ***тело давления – это объем, образованный криволинейной стенкой, ее проекцией на свободную поверхность (либо на продолжение свободной поверхности) и вертикальными проецирующими плоскостями.*** На рисунке показаны примеры определения тел давлений для двух случаев. Как следует из рисунка, тело давления может быть как положительным, так и отрицательным (фиктивным).

Плоская поверхность

Этот случай можно рассматривать как частный предыдущего, но можно получить и более удобное соотношение. Действительно, общее выражение для силы давления имеет вид, приведенный в начале раздела, но так как поверхность плоская, то ориентация нормали для всех ее точек остается одинаковой, и, следовательно:

$$\vec{F} = \rho g \vec{n} h_{\text{ц.т}} S .$$

$\vec{F}$ направлена по нормали к стенке, следовательно, можно записать

$$F = \rho g h_{\text{ц.т}} S .$$

Таким образом, сила давления на плоскую поверхность равна произведению ее площади на гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности. Следует отметить, что задачи, связанные с определением сил давления на поверхности, играют исключительно важную роль в гидротехнической практике. Применительно к энергетике и машиностроению круг этих задач заметно сужается и ограничивается главным образом расчетом болтовых соединений люков различных резервуаров, находящихся под давлением.

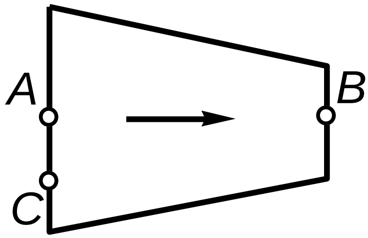
7. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ. ПОНЯТИЕ ЛИНИИ И ТРУБКИ ТОКА

Кинематика занимается изучением движения жидкости без выяснения причин, которые его вызвали. Принципиально можно использовать два подхода к составлению картины течения. Первый из них был предложен Лагранжем, и в нем изучается движение каждой отдельной жидкой частицы. Чтобы выделить ее, в начальный момент времени t_0 отмечаются ее координаты x_0, y_0 и z_0. Движение считается определенным, если в каждый момент времени для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т. е. известны параметрические уравнения траекторий всех частиц.

По методу Эйлера индивидуальное поведение отдельных частиц не принимается во внимание, а изучается изменение скорости и других параметров в точках пространства x, y, z. Математически обычно задаются зависимости, связывающие три проекции скорости на прямоугольные оси координат (в необходимых случаях также давление и плотность) с пространственными координатами и временем.

Установившимся (стационарным) называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени, т. е.

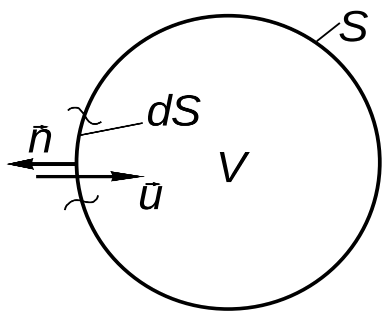
$$\vec{u} = f(x, y, z); \quad p = f(x, y, z); \quad \rho = f(x, y, z).$$



Если это условие не соблюдается и параметры в точке меняются с течением времени: $\vec{u} = f(x, y, z, t)$; $p = f(x, y, z, t)$; $\rho = f(x, y, z, t)$, движение называют ***неустановившимся***.

В этих формулировках следует обратить внимание на то, что речь идет о параметрах в точке. Чтобы уяснить это, рассмотрим канал, показанный на рисунке. В гидромеханике такие каналы, в которых площадь сечения уменьшается по ходу потока, называют конфузорами. Исходя из чисто интуитивных представлений, ясно, что скорость течения по ходу канала будет возрастать. Возникает вопрос, может ли быть установившимся движение в таком канале? Очевидно, может, если параметры в точках A и B не будут изменяться с течением времени. Определение вида движения не требует, чтобы параметры в точках *A, B* и *C* были одинаковы.

Уравнение неразрывности (или сплошности) выражает один из фундаментальных законов природы – ***закон сохранения массы применительно к жидкой среде***.



Рассмотрим объем V, ограниченный поверхностью S. Выделим элемент поверхности dS. Пусть $\vec{n}$ – орт внешней нормали, а $\vec{u}$ – вектор скорости. Через выделенный элемент dS в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости – $\rho\vec{u} \cdot \vec{n} dS$ (знак «минус», т. к. направления $\vec{u}$ и $\vec{n}$ противоположны). Масса, проникающая в объем за единицу времени через всю поверхность:

$$m = -\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \ .$$

С другой стороны, приток жидкости в объем приводит к изменению ее массы. При этом поскольку выделенный объем является постоянным, то изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Скорость изменения массы можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \ ,$$

либо с учетом того, что $V = \mathrm{const}$, можно записать

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \ .$$

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т. е.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \ .$$

Применяя преобразование Гаусса–Остроградского, получим

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iiint_V \mathrm{div}(\rho \vec{u}) dV$$

либо $$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0 \ .$$

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 .$$

Это и есть ***уравнение неразрывности.*** Поскольку при его выводе не вводилось никаких ограничений, то оно справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движения сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости и газа.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 .$$

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т. е. $\rho = \mathrm{const}$, то

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 .$$

Или в проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 .$$

Определим физический смысл этого соотношения. Частные производные $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ характеризуют скорость относительного удлинения жидкой частицы. Если этот процесс происходит одновременно вдоль всех координатных осей, то он приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Ясно, что если частица удлиняется вдоль осей x и y, то она должна укорачиваться относительно оси z. Другими словами, хотя бы одна из производных, входящих в это уравнение, должна быть отрицательна, т. к. в противном случае соотношение не может быть равным нулю.

Следует отметить, что поле, в котором $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, носит название соленоидального.

Линией тока называется кривая, обладающая тем свойством, что в данный момент времени векторы скоростей в любой ее точке по направлению совпадают с касательными.

В векторной форме это условие может быть записано как $\vec{u} \times d\vec{S} = 0$, т. е. векторное произведение должно быть равно нулю. Это, как известно, может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение линии тока в виде

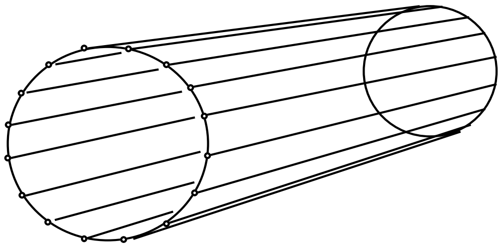
$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}.$$

Под ***траекторией*** понимается след, оставленный движущейся частицей в пространстве. Дифференциальное уравнение траектории:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt.$$

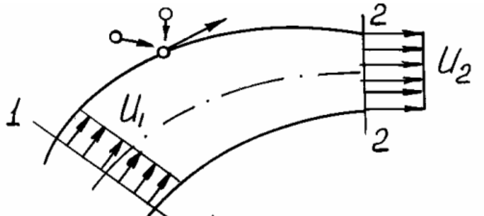
Из сопоставления уравнений линий тока и траекторий следует, что в общем случае, т. е. при неустановившемся движении, линии тока и траектории не совпадают.

В движущейся жидкости наметим бесконечно малый замкнутый контур и через все точки его периметра проведем линии тока.



Образованная таким образом поверхность носит название ***трубки*** либо ***поверхности тока.*** Ясно также, что поскольку контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, то какая-то ее часть должна находиться и внутри поверхности тока.

Под ***струйкой тока*** понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока. Если вспомнить, что границами боковой поверхности трубки тока являются линии тока, т. е. линии, к которым векторы скоростей частиц жидкости касательны в любой данный момент времени, то ясно, что ни одна частица не может проникнуть извне в струйку либо, наоборот, выйти из нее через боковую поверхность, т. е. поверхность трубки тока непроницаема. Действительно, вектор скорости частицы, пытающейся, например, проникнуть в струйку извне, должен быть ориентирован к ее границе под каким-то углом, но на самой границе трубки тока он ориентирован по касательной, что следует из самого определения линии тока.



Поперечное сечение струйки тока мало, поэтому можно допустить, что в пределах сечения все частицы движутся с одинаковыми скоростями либо, что то же самое, эпюра скоростей в сечении представляет собой цилиндр для трехмерной струйки или прямоугольник – для двумерной.

На рисунке показаны эпюры для двух произвольно выбранных сечений плоской струйки. Заметим лишь, что равномерность распределения скоростей в сечении, т. е. движение с одной и той же скоростью всех находящихся в нем частиц, вовсе не означает, что в другом сечении эти скорости должны быть такими же, т. е. не обязательно, чтобы $u_1 = u_2$. Совокупность струек, заполняющих поперечное сечение канала конечных размеров, образует поток.

Важное свойство струйки тока, говорящее о том, что боковая поверхность непроницаема для частиц, по существу выражает закон сохранения секундной массы. Действительно, если через сечение *1–1* в единицу времени вошла масса dm_1, то за то же время через сечение *2–2* должна выйти масса dm_2, равная dm_1. Массу жидкости, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени, называют элементарным массовым расходом и обозначают dQ_m.

Легко убедиться в том, что

$$dQ_m = \rho u dA,$$

где dA – площадь поперечного сечения струйки.

Действительно, выражая параметры, входящие в это соотношение, через единицы физических величин, получаем $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \text{м}^2 \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{с}}$.

Из сказанного выше следует, что

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2.$$

Это и есть уравнение неразрывности для струйки. Если жидкость несжимаема, т. е. $\rho = \text{const}$, то $\rho_1 = \rho_2$ и

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 .$$

При этом произведение udA выражает элементарный объемный расход dQ.

Запишем выражение для проекции ускорения жидкой частицы на какую-либо координатную ось, например, x. Имеем

$$a_x = \frac{du_x}{dt} .$$

Для нахождения этой величины следует учесть, что проекция скорости u_x (как и две другие проекции) является функцией координат $x, y, z,$ которые, в свою очередь, в общем случае зависят от времени t. Представим величину du_x в виде полного дифференциала:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz .$$

Разделим обе части на dt. Имея в виду, что $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$ и $\frac{dz}{dt} = u_z$, получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} .$$

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других компонент.

Выражение носит название полной либо субстанциональной производной. Установим смысл величин, входящих в нее. Производная $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ – проекция локального ускорения, которое характеризует изменение скорости во времени в данной точке пространства. Локальное ускорение обусловлено нестационарностью процесса, из чего следует, что если движение стационарное (установившееся), то локальное ускорение отсутствует, т. е. $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$. Три остальных члена – проекции конвективного ускорения, которое возникает при переходе частицы от одной точки пространства к другой, оно обусловлено неравномерностью скоростного поля, т. е. неравномерным распределением скоростей.

8. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

В механике жидкости понятию «гидродинамика» придается весьма широкий смысл. В настоящем пособии этот термин будет использоваться в его классическом значении, как раздел курса, который в отличие от кинематики, рассматривающей движение жидкости без учета причин, обусловивших его, изучает как само движение, так и причины, приводящие к его возникновению. Движение жидкости происходит под действием сил, причем если иметь в виду, что давление есть частное от деления силы на площадь, то можно считать, что причиной возникновения движения частиц может являться разность (перепад) давлений. Таким образом, для расчета течений необходимо иметь уравнение, связывающее давление в точке со скоростью движения частицы.

Уравнения движения идеальной жидкости можно получить, рассматривая динамическое равновесие элементарного куба жидкости под действием сил инерции, давления и внешних объемных сил. Уравнение, связывающее указанные силы, составляется на основе закона Ньютона.

Таким образом, уравнения гидродинамики принимают вид

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{dt};$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{du_y}{dt};$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{du_z}{dt}$$

либо в векторной форме

$$\vec{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\vec{a}.$$

Записанная выше система называется ***системой дифференциальных уравнений Эйлера,*** она связывает давления и скорости в движущейся идеальной (т. е. лишенной вязкости) жидкости. Следует понимать, что выражения в правой части уравнений системы являются полными либо субстанциональными производными. Наличие конвективных членов ускорения приводит к тому, что система является нелинейной, содержащей четыре неизвестных: три проекции скорости и давление. Проекции единичных массовых сил обычно известны из постановки задачи.

9. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Вывод этого основополагающего уравнения механики жидкости можно осуществить, рассматривая динамическое равновесие элементарной жидкой частицы, движущейся вдоль линии тока. Произведем преобразование системы дифференциальных уравнений Эйлера, приведенных в предыдущем разделе, путем умножения каждой из входящих в него проекций соответственно на *dx, dy и dz* и почленно их сложим аналогично тому, как это делалось ранее в гидростатике. Это преобразование уже рассматривалось в случае равновесия жидкости, находящейся в поле сил тяжести, и левая часть уравнений, как раньше, преобразуется в соотношение

$$-gdz - \frac{dp}{\rho}.$$

Поэтому рассмотрим лишь правую часть. Имеем

$$\frac{du_x}{dt}dx + \frac{du_y}{dt}dy + \frac{du_z}{dt}dz.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

и мы можем записать

$$u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2}du_x^2 + \frac{1}{2}du_y^2 + \frac{1}{2}du_z^2 =$$
$$= \frac{1}{2}d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2}du^2 = d\frac{u^2}{2}.$$

Таким образом, после подстановки в исходное уравнение получим

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} = d\frac{u^2}{2}$$

либо

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d\frac{u^2}{2} = 0.$$

Это выражение называют ***уравнением Бернулли в дифференциальной форме.*** При условии $\rho = \mathrm{const}$ (для несжимаемой жидкости) интегрирование его дает

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C.$$

Очевидно, для обеспечения математической строгости следовало бы доказать, что вдоль линии тока проекции вектора скорости могут быть представлены не как частные, а как полные производные от соответствующих координат частицы. Но при этом вывод уравнения Бернулли утратил бы свою простоту.

Энергетический смысл уравнения Бернулли

Прежде чем приступить к анализу физического содержания полученного соотношения, следует вспомнить одно важное обстоятельство. При введении понятия о струйке тока было показано, что одним из ее свойств является равномерное распределение скоростей в пределах любого ее поперечного сечения. Поэтому уравнение можно назвать уравнением Бернулли для струйки идеальной жидкости. Для двух произвольных поперечных сечений струйки можно записать

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}.$$

Выясним физический смысл величин, входящих в уравнение Бернулли. Любое правильное физическое соотношение размерностно однородно, т. е. все его члены имеют одинаковую размерность, поэтому достаточно рассмотреть один из его членов. Наиболее удобно обратиться к третьему $u^2/2$. Эта величина выражается в м^2/с^2. Умножим и разделим числитель и знаменатель на кг, тогда получим

$$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\frac{\text{кг}}{\text{кг}} \to \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\text{кг}} \to \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}} \to \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

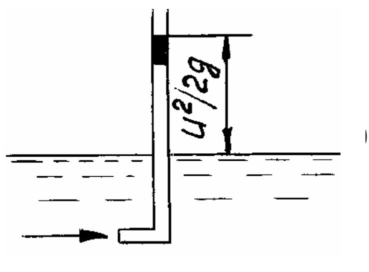
Отсюда следует, что каждый член уравнения выражает энергию, отнесенную к единице массы, т. е. удельную энергию. Это позволяет придать уравнению Бернулли энергетический смысл. Первые два члена выражают удельную потенциальную энергию (положения gz и давления p/ρ), а третий – удельную кинетическую энергию. Следовательно, полная удельная энергия в любом сечении струйки остается неизменной. Другими словами, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии в ее простейшей форме – форме сохранения механической энергии.

Уравнение Бернулли в геометрической форме

В практических приложениях широко используется другая форма уравнения Бернулли – геометрическая. Разделив обе части уравнения Бернулли в энергетической форме на ускорение свободного падения g, получаем

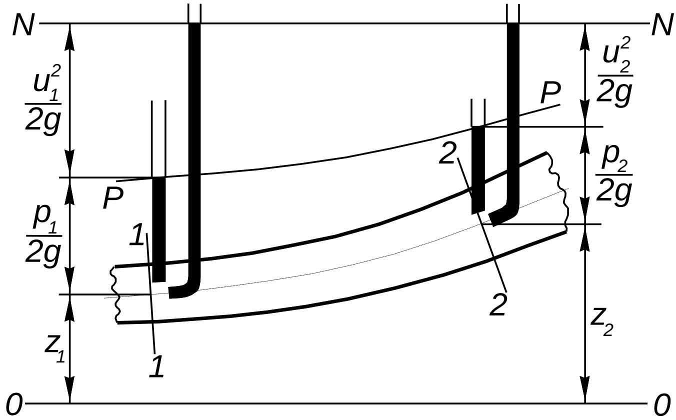
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Каждый член полученного уравнения имеет размерность длины и выражает напор, под ко-



торым в общем случае понимают высоту столба жидкости, уравновешивающую давление в данной точке. Таким образом, z – геометрический напор, характеризующий положение жидкой частицы над какой-то произвольной плоскостью, называемой плоскостью отсчета; $p/\rho g$ – пьезометрический напор – высота столба жидкости, уравновешивающая давление в данной точке; $u^2/2g$ – скоростной напор, представляющий собой высоту столба жидкости в так называемой трубке полного напора (трубке Пито). Принцип действия этого устройства легко уясняется из рисунка.

Сумма двух первых членов носит название гидростатического напора, а трех – полного либо гидродинамического напора. Таким образом, уравнению Бернулли придается геометрическое толкование, которое сводится к следующему. Сумма трех высот: геометрической (z), пьезометрической ($p/\rho g$) и скоростной ($u^2/2g$) есть величина, постоянная вдоль струйки. Таким образом, полный или гидродинамический напор при движении вдоль струйки остается неизменным. Сказанное иллюстрируется нижеследующим рисунком, который иногда называют диаграммой уравнения Бернулли.



На этом рисунке *N*–*N* – напорная линия; *O*–*O* – плоскость (линия) отсчета; *P*–*P* – пьезометрическая линия, лежащая ниже напорной на величину скоростного напора в данном сечении.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
КУЛЕБЯКИН Виталий Васильевич
НЕДБАЛЬСКИЙ Викентий Константинович

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Ч а с т ь 1

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка А.С. Жук

Подписано в печать 20.04.2010.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 1,91. Тираж 100. Заказ 1140.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.