



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

---

Кафедра «Двигатели внутреннего сгорания»

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Минск  
БНТУ  
2010

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Двигатели внутреннего сгорания»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторные работы для студентов  
специальности 1-37 01 01 «Двигатели внутреннего сгорания»

Минск  
БНТУ  
2010

УДК 621.432.016.4:519.86 (076.5) (075.8)

ББК 31.365я7

М 34

С о с т а в и т е л и :

*В.А. Бармин, А.В. Предко*

Р е ц е н з е н т ы :

*Л.А. Молибошко, Д.В. Капский*

М<sup>34</sup> Математическое моделирование производственных процессов:  
лабораторные работы для студентов специальности 1-37 01 01  
«Двигатели внутреннего сгорания» / сост.: В.А. Бармин,  
А.В. Предко. – Минск: БНТУ, 2010. – 42 с.

Лабораторные работы по дисциплине «Математическое моделирование производственных процессов» для студентов специальности 1-37 01 01 «Двигатели внутреннего сгорания» содержат математические модели, которые относятся к различным классам и уровням. Приведенные модели позволяют моделировать кинематические и динамические характеристики кривошипно-шатунного и газораспределительного механизмов, напряженное состояние стрелней и балок, термодинамические циклы поршневых двигателей внутреннего сгорания, процессы передачи теплоты в многослойных стенках.

## ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и конструирование надежных и долговечных в эксплуатации машин, обладающих высокой экономичностью и малой материалоемкостью, – основная задача в области машиностроения.

В двигателестроении решение этой задачи связано с оценкой теплового и напряженно-деформированного состояния элементов ДВС на этапе проектирования. Разработанные в 1930–1940 гг. методы расчета деталей двигателя, ориентированные на ручной счет, не в состоянии обеспечить требуемую точность результатов и не удовлетворяют технологии оптимального проектирования конструкции. Поэтому длительное время в основе проектирования лежали экспериментальные работы.

Создание и развитие вычислительной техники привело к разработке и внедрению в практику проектирования численных методов моделирования и оптимизации технических систем и процессов.

## ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по лабораторной работе оформляется на стандартной белой бумаге формата А4, можно с двух сторон, в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32-2003 «Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления».

Отчет должен включать следующие элементы:

1. Титульный лист.
2. Цель лабораторной работы.
3. Исходные данные для модели.
4. Математическое описание модели.
5. Блок-схема или описание алгоритма составления модели.
6. Преобразование математического описания модели в программу на алгоритмическом языке программирования или полное описание составления модели на одном из приложений Windows.
7. Результаты моделирования в виде таблицы.
8. Построение графиков зависимости  $S_n(\varphi)$ ,  $V_n(\varphi)$ ,  $j_n(\varphi)$ .
9. Анализ результатов моделирования.

## **КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА ДВИГАТЕЛЯ**

**Цель работы:** моделирование кинематической характеристики кривошипно-шатунного механизма (КШМ) двигателя, построение диаграмм перемещения, скорости и ускорения поршня в зависимости от угла поворота коленчатого вала и их анализ.

### **Общие положения**

При динамическом расчете двигателя определяется кинематическая характеристика его кривошипно-шатунного механизма. Она позволяет провести кинематический анализ движения таких элементов КШМ, как поршень, шатун, кривошип. Уравнения, которые описывают движение этих элементов КШМ, дают возможность определить точное положение каждого элемента для любого угла поворота коленчатого вала. Особенно важным является положение поршня в цилиндре двигателя в зависимости от угла поворота коленчатого вала для расчета рабочего процесса. Ускорение поршня и масса поршневой группы вместе с частью шатуна, совершающие возвратно-поступательное движение, формируют силу инерции, которые учитываются при прочностных расчетах движущихся деталей КШМ. Скорость поршня учитывается при расчетах проходных сечений горловин и клапанов в впускном и выпускном трактах двигателя при проектировании газораспределительного механизма, а также при движении газовых потоков. Ускорение и скорость поршня используются для прогнозирования срока службы двигателя. Диаметр цилиндра, ход поршня и радиус кривошипа влияют на компоновочно-габаритные размеры двигателя.

## Математическая основа модели

Исходными данными для моделирования кинематической характеристики КШМ являются полный ход поршня  $S$  и выбранная конструктивная схема КШМ (центральный или смещенный КШМ). Центральный КШМ такой, в котором ось цилиндра пересекает ось коленчатого вала. При помощи этого механизма совершается передача работы газов в цилиндре двигателя на его коленчатый вал, и поступательное движение поршня преобразуется во вращательное движение вала. В смещенном КШМ ось цилиндра или поршневого пальца не пересекает ось коленчатого вала и смещена относительно ее на некоторую величину  $a$ . Такой механизм называется *дезаксиальным*.

Для наиболее распространенного центрального КШМ основной кинематический параметр – радиус кривошипа – определяется как половина полного хода поршня ( $R = S/2$ ). Значение другого, безразмерного геометрического параметра  $\lambda$ , представляющего отношение радиуса кривошипа  $R$  к длине шатуна  $l_{ш}$  ( $\lambda = R/l_{ш}$ ), обычно задают в пределах  $0,24 \dots 0,31$ .

При моделировании используются следующие формулы:  
угловая скорость вращения кривошипа (рад/с)

$$\omega = d\varphi / dt = \pi n / 30, \quad (1.1)$$

где  $\varphi$  – угол поворота кривошипа, отсчитываемый от положения, при котором поршень находится в верхней мертвой точке (ВМТ), градус поворота коленчатого вала (ПВК);

$n$  – частота вращения коленчатого вала, мин<sup>-1</sup>;

окружная скорость конца кривошипа (м/с)

$$u_k = R\omega; \quad (1.2)$$

центростремительное ускорение конца кривошипа (м/с<sup>2</sup>)

$$\varepsilon_k = R\omega^2; \quad (1.3)$$

перемещение  $S_{п}$ , скорость  $v_{п}$  и ускорение  $j_{п}$  поршня в центральном КШМ:

$$s_{\text{п}} = R[(1 - \cos \varphi) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\varphi)], \quad (1.4)$$

$$v_{\text{п}} = R\omega(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi), \quad (1.5)$$

$$j_{\text{п}} = R\omega^2(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi); \quad (1.6)$$

перемещение, скорость и ускорение поршня в смещенном КШМ:

$$s_{\text{п}} = R[(1 - \cos \varphi) + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\varphi) - k\lambda \sin \varphi], \quad (1.7)$$

$$v_{\text{п}} = R\omega(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi - k\lambda \cos \varphi), \quad (1.8)$$

$$j_{\text{п}} = R\omega^2(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi + k\lambda \sin \varphi), \quad (1.9)$$

где  $k = a/R$  – относительное смещение (выбирается в пределах 0,05...0,15);  $a$  – смещение оси цилиндра или поршневого пальца от оси коленчатого вала.

Средняя скорость поршня (м/с)

$$v_{\text{ср}} = \frac{S \cdot n}{30} = \frac{2}{\pi} R\omega. \quad (1.10)$$

Максимальная скорость поршня (м/с)

$$v_{\text{макс}} = R\omega\sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (1.11)$$

Для современных автотракторных двигателей средняя скорость поршня составляет 8...20 м/с, ускорение находится в пределах 5000...20000 м/с<sup>2</sup>.

Обычно при рассмотрении кинематики КШМ считают, что угловая скорость вращения коленчатого вала  $\omega$  постоянна и в расчетах принимается соответствующей частоте вращения его при максимальной мощности двигателя. Следовательно, угол поворота коленчатого вала пропорционален времени  $t$ . В дей-



ствительности из-за неравномерности крутящего момента двигателя эта угловая скорость переменна, но изменяется в некоторых пределах, и это учитывается при определении крутильных колебаний системы коленчатого вала. В математической модели кинематики КШМ изменение угловой скорости вращения коленчатого вала не учитывается.

Математическая модель для определения кинематических характеристик кривошипно-шатунного механизма двигателя относится к детерминированным математическим моделям, так как существует жесткая кинематическая связь между подвижными элементами КШМ и геометрические параметры его неизменны в процессе решения задачи. Иными словами, каждому значению независимой входной переменной, которой является угол поворота коленчатого вала, соответствует вполне определенное значение выходной переменной (перемещение, скорость и ускорение поршня). При неизменных геометрических параметрах КШМ соответствие между значениями входной и выходной переменной в такой модели всегда будет однозначным, то есть определенным.

### **Методика разработки модели**

Математическая модель для определения кинематических характеристик кривошипно-шатунного механизма двигателя может быть реализована на любом алгоритмическом языке программирования или в приложениях Windows для решения инженерных задач.

После получения от преподавателя исходных данных для составления модели должен быть сформирован ввод исходных данных на компьютере с обязательной проверкой их правильности.

Составляется алгоритм расчета и преобразуется математическое описание модели, приведенное выше, в математическую модель.

После получения модели проводится тестирование и отладка компьютерной реализации модели.

Далее проводится расчет на полученной модели, результаты которого выводятся в виде таблицы. Таблица должна содержать шапку из независимых и зависимых переменных с их размерностями. Значения перемещения, скорости и ускорения поршня выводятся от 0 до 360 градусов ПКВ с шагом 10 градусов. В формулах расчета значения угла ПКВ подставляется в радианах. Полученные в таблице результаты используются для построения графиков зависимости  $S_{п}(\varphi)$ ,  $V_{п}(\varphi)$ ,  $j_{п}(\varphi)$ .

Графики зависимости  $S_{п}(\varphi)$ ,  $V_{п}(\varphi)$ ,  $j_{п}(\varphi)$  строятся с помощью специальных программ, встроенных в алгоритмические языки программирования или в приложения Windows. По осям координат ставятся обозначения зависимых и независимых переменных, стрелками указывается направление их увеличения. Размерности зависимых и независимых переменных ставятся в место предпоследнего числа на осях координат. На графики наносится сетка. Значения переменных на осях координат напротив линий сетки определяются по результатам моделирования и наносятся с шагом, кратным четным числам или десяти.

### **Анализ результатов моделирования**

Полученные результаты моделирования анализируются по характерным точкам зависимых переменных, соответствующим точкам пересечения с осями координат и точкам экстремума. Отмечаются также области, в которых зависимые переменные принимают отрицательные и положительные значения по углу ПКВ.

## **КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГАЗОРАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ДВИГАТЕЛЯ**

**Цель работы:** моделирование кинематической характеристики газораспределительного механизма (ГРМ) двигателя, построение диаграмм перемещения, скорости и ускорения толкателя в зависимости от угла поворота распределительного вала и их анализ.

### **Общие положения**

Динамический и прочностной расчеты газораспределительного механизма двигателя начинаются с определения его кинематической характеристики. Она позволяет провести кинематический анализ движения таких элементов ГРМ, как толкатель и клапан. Уравнения, которые описывают движение этих элементов ГРМ, дают возможность определить точное положение каждого элемента для любого угла поворота распределительного вала. В двигателях современных автомобилей с увеличением частоты вращения коленчатого вала происходит значительное отклонение действительного движения клапана от движения, задаваемого профилем кулачка распределительного вала. Из-за инерционности деталей привода клапанного механизма и долгого времени колебаний клапанной пружины происходит рассогласование движения клапана и толкателя. Это приводит к повышенной шумности работы двигателя, потере герметичности внутрицилиндрового пространства, значительным динамическим нагрузкам в деталях клапанного механизма и преждевременному износу деталей ГРМ. Особенно значительные нарушения нормальной работы ГРМ имеют место в двигателях с подвесными клапанами и

нижним расположением распределительного вала. В таких клапанных механизмах указанные нарушения вызываются резкими изменениями сил инерции и недостаточной жесткостью деталей клапанного привода. В настоящее время в многооборотных двигателях применяют кулачки распределительного вала с профилем, построенным по заданному закону движения клапана. Такой закон обеспечивает плавный подъем клапана и безударную работу ГРМ. Поэтому кулачки, спрофилированные по этим законам, называются безударными. К числу таких относятся кулачки спрофилированные по методу Курца и «полидайн».

### Математическая основа модели

В основу математической модели для моделирования кинематической характеристики движения толкателя положен метод Курца. Для моделирования кинематической характеристики ГРМ исходными данными являются:

- диаметр цилиндра  $D$ ;
- площадь поршня  $F_{\text{п}}$ ;
- частота вращения коленчатого вала двигателя при номинальной мощности  $n_N$ ;
- угловая скорость вращения коленчатого вала  $\omega$ ;
- угловая скорость вращения распределительного вала (кулачка)  $\omega_{\text{к}} = \omega/2$ ;
- диаметр горловины  $d_{\text{гор}}$ ;
- площадь проходного сечения клапана с коническим уплотнением  $F_{\text{кл}}$ .

Безударные кулачки проектируют в следующей последовательности:

1. Устанавливаются фазы газораспределения  $\varphi_{\text{пр}}$ ,  $\varphi_{\text{зп}}$  и  $\varphi_{\text{ро}}$  :
  - $\varphi_{\text{пр}}$  – угол предварения открытия впускного клапана, градус;
  - $\varphi_{\text{зп}}$  – угол запаздывания впускного клапана, градус.

Величину угла  $\varphi_{po}$  определяют в соответствии с выбранными фазами газораспределения

$$\varphi_{po} = \frac{(\varphi_{пр} + 180 + \varphi_{зп})}{4}. \quad (2.1)$$

2. Определяется максимальная высота подъема клапана  $h_{кл\max}$  и толкателя  $h_{Т\max}$  (мм):

$$h_{кл\max} = \frac{\sqrt{4,93d_{гор}^2 + 4,44F_{кл}}}{2,22} - d_{гор}, \quad (2.2)$$

$$h_{Т\max} = h_{кл\max} \frac{l_{Т}}{l_{кл}}, \quad (2.3)$$

где  $l_{Т}$  и  $l_{кл}$  – длина плеч коромысла, прилегающих соответственно к толкателю и клапану.

Определяется закон изменения ускорения толкателя, обеспечивающий положительные ускорения, не превышающие 1500...3500, и отрицательные, не превышающие 500...1500 м/с<sup>2</sup>.

3. Задаем начальную окружность радиусом  $r_0$ :

$$r_0 = (3...4) h_{кл\max}. \quad (2.4)$$

Для обеспечения зазора в клапанном механизме тыльная часть кулачка выполняется радиусом  $r_k$ , меньшим радиуса  $r_0$  на величину зазора  $\Delta S$ :

$$r_k = r_0 - \Delta S. \quad (2.5)$$

Величина  $\Delta s$  включает в себя температурный зазор и упругие деформации механизма газораспределения. Для выпускных клапанов  $\Delta s = (0,35 \dots 0,45)$  мм. Для впускных клапанов  $\Delta s = (0,25 \dots 0,35)$  мм.

4. Определяется положение точек начала открытия  $A$  и конца закрытия  $A'$  клапана в соответствии с принятым углом  $\Phi_{po}$ .

5. Откладываются углы  $\Phi_{ко}$ , соответствующие выбору зазора на участках набегания и сбегания (участок сбегания  $\Phi_0$ , рад):

$$\Phi_0 = \frac{\pi^2 \Delta s}{2 \cdot 180 \cdot \omega_{ток}}, \quad (2.6)$$

где  $\omega_{ток}$  – скорость толкателя в конце сбегания, мм/градус,  $\omega_{ток} = 0,008 \dots 0,022$ .

6. Проводятся из центра  $O$  через  $0,5^\circ$  (или  $1-2^\circ$  в зависимости от точности построения) радиальные лучи  $OO_1, O_1, O_2$ .

7. Откладываются на проведенных лучах от окружности радиуса  $r_k$  величины подъемов толкателя (с учетом выбора зазора  $\Delta s$ )  $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots$

8. Восстанавливаются перпендикуляры к радиальным лучам из точек  $b_1, b_2, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots$  в сторону оси симметрии кулачка.

9. Проводится к восстановленным перпендикулярам огибающая, которая и будет искомым профилем безударного кулачка. В зависимости от требований, предъявляемых к ГРМ, безударные кулачки можно проектировать с учетом или без учета упругости деталей привода клапана.

К числу кулачков, проектируемых без учета упругости деталей ГРМ, относится кулачок, спроектированный на основе закона изменения ускорения по методу Курца. Графики ускорений этого кулачка состоят из четырех участков:

1) сбега  $\Phi_0$  – косинусоида;

2) положительных ускорений  $\Phi_1$  – половина волны синусоиды;

3) первого участка отрицательных ускорений  $\Phi_2$  – четверть волны синусоиды;

4) второго участка отрицательных ускорений  $\Phi_3$  – отрезок параболы.

Угловую протяженность  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  различных участков ускорения толкателя рекомендуется выбирать из соотношений:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \left( \frac{\pi}{180} \right) \Phi_{\text{по}}, \quad (2.7)$$

$$\Phi_2 = (0,10 \dots 0,25) \Phi_3, \quad (2.8)$$

$$\Phi_2 + \Phi_3 = (1,5 \dots 3,0) \Phi_1. \quad (2.9)$$

Выражения для пути, скорости и ускорения толкателя при безударном кулачке для различных участков профиля кулачка:

– участок сбега кулачка  $(0 \leq \varphi_{\text{к}} = \varphi_{\text{к0}} \leq \Phi_0)$ ,

где  $\varphi_{\text{к0}} = 0 \dots \Phi_0$ .

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \Delta s \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2\Phi_0} \varphi_{\text{к0}} \right); \\ \omega_{\text{т0}} &= \Delta s \omega_{\text{к}} \frac{\pi}{2\Phi_0} \sin \frac{\pi}{2\Phi_0} \varphi_{\text{к0}}; \\ j_{\text{т0}} &= \Delta s \omega_{\text{к}}^2 \left( \frac{\pi}{2\Phi_0} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2\Phi_0} \varphi_{\text{к0}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

– участок положительных ускорений ( $0 \leq \varphi_K = \varphi_{K1} \leq \Phi_1$ ),

где  $\varphi_{K1} = 0 \dots \Phi_1$ .

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \Delta S + c_{11} \varphi_{K1} - c_{12} \sin \frac{\pi}{\Phi_1} \varphi_{K1}; \\ \omega_{T1} &= \omega_K (c_{11} - c_{12} \frac{\pi}{\Phi_1} \cos \frac{\pi}{\Phi_1} \varphi_{K1}); \\ j_{T1} &= \omega_K^2 \left[ c_{12} \left( \frac{\pi}{\Phi_1} \right)^2 \sin \frac{\pi}{\Phi_1} \varphi_{K1} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

– первый участок отрицательных ускорений ( $0 \leq \varphi_K = \varphi_{K2} \leq \Phi_2$ ),

где  $\varphi_{K2} = 0 \dots \Phi_2$ .

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= h_{1K} + c_{21} \varphi_{K2} + c_{22} \sin \frac{\pi}{2\Phi_2} \varphi_{K2}; \\ h_{1K} &= \Delta S + c_{11} \Phi_1; \\ \omega_{T2} &= \omega_K (c_{21} + c_{22} \frac{\pi}{2\Phi_2} \cos \frac{\pi}{2\Phi_2} \varphi_{K2}); \\ j_{T2} &= \omega_K^2 \left[ -c_{22} \left( \frac{\pi}{2\Phi_2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2\Phi_2} \varphi_{K2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

– второй участок отрицательных ускорений ( $0 \leq \varphi_K = \varphi_{K3} \leq \Phi_3$ ),

где  $\varphi_{K3} = 0 \dots \Phi_3$ .



$$\left. \begin{aligned} h_3 &= h_{2K} + c_{31} (\Phi_3 - \varphi_{K3})^4 - c_{32} (\Phi_3 - \varphi_{K3})^2 + c_{33}; \\ h_{2K} &= \Delta S + c_{11} \Phi_1 + c_{21} \Phi_2 + c_{22}; \\ \omega_{T3} &= \omega_K \left[ -4c_{31} (\Phi_3 - \varphi_{K3})^3 + 2c_{32} (\Phi_3 - \varphi_{K3}) \right]; \\ j_{T3} &= \omega_K^2 \left[ 12c_{31} (\Phi_3 - \varphi_{K3})^2 - 2c_{32} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где  $\omega_K$  – угловая скорость вращения распределительного вала, рад/с;

$\varphi_K$  – текущее значение угла поворота кулачка, градус;

$\varphi_{K0}, \varphi_{K1}, \varphi_{K2}, \varphi_{K3}$  – текущие значения угла поворота кулачка от начала соответствующего участка профиля кулачка до конца участка (значения, не находящиеся под знаком тригонометрических функций, выражены в радианах, в остальных случаях – в градусах);

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  и  $\Phi_3$  – угловые интервалы соответствующих участков ускорения толкателя, рад;

$h_0, h_1, h_2, h_3$  – текущие перемещения толкателя на соответствующих участках профиля кулачка, мм;

$\omega_{T0}, \omega_{T1}, \omega_{T2}, \omega_{T3}$  – скорости толкателя на соответствующих участках профиля кулачка, мм/с;

$\omega''_{T0K}$  – скорость толкателя в конце участка сбегания, мм/рад;

$j_{T0}, j_{T1}, j_{T2}, j_{T3}$  – ускорения толкателя на соответствующих участках профиля кулачка, мм/с<sup>2</sup>;

$h_H, \omega_{TH}, j_{TH}, \varphi_{KH}$  – путь, скорость, ускорение толкателя и угол поворота кулачка в начале соответствующего участка;

$h_K, \omega_{TK}, j_{TK}, \varphi_{KK}$  – путь, скорость, ускорение толкателя и угол поворота кулачка в конце соответствующего участка;

$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$  – коэффициенты закона движения толкателя, определяемые из равенства перемещений, скоростей и ускорений на границах участков по системе уравнений:

$$h_{3K} = h_{Tmax} + \Delta S, \quad (2.14)$$

$$c_{11}\Phi_1 + c_{21}\Phi_2 + c_{22} + c_{33} - h_{Tmax} = 0, \quad (2.15)$$

$$h_{3H} = h_{2K}, \quad (2.16)$$

$$c_{31}\Phi_3^4 - c_{32}\Phi_3^2 + c_{33} = 0, \quad (2.17)$$

$$\omega_{T1H} = \omega_{T0K}, \quad (2.18)$$

$$c_{11} - \frac{c_{12}\pi}{\Phi_1} - \omega_{T0K}'' = 0, \quad (2.19)$$

$$\omega_{T2H} = \omega_{T1K}, \quad (2.20)$$

$$c_{11} + \frac{c_{12}\pi}{\Phi_1} - c_{21} - \frac{c_{22}\pi}{2\Phi_2} = 0, \quad (2.21)$$

$$\omega_{T3H} = \omega_{T2K}, \quad (2.22)$$

$$c_{21} + 4c_{31}\Phi_3^3 - 2c_{32}\Phi_3 = 0, \quad (2.23)$$

$$j_{T3H} = j_{T2K}, \quad (2.24)$$

$$c_{22} \left( \frac{\pi}{2\Phi_2} \right)^2 + 12c_{31}\Phi_3^2 - 2c_{32} = 0. \quad (2.25)$$

Так как уравнений только шесть, а коэффициентов семь, добавляется еще одна зависимость, характеризующая форму отрицательной части кривой ускорения:

$$j_{Т2К} / j_{Т3К} = Z. \quad (2.26)$$

Для кулачка Курца рекомендуется  $Z = 5/8$ .

Принимая для сокращения записи обозначения

$$k_1 = 8Z \left( \frac{\Phi_2}{\pi} \right)^2, \quad (2.27)$$

$$k_2 = \frac{5+Z}{6} \Phi_3^2, \quad (2.28)$$

$$k_3 = \frac{4+2Z}{3} \Phi_3, \quad (2.29)$$

$$K_1 = k_1 + k_2 + k_3 \Phi_2, \quad (2.30)$$

$$K_2 = k_3 + 4Z \frac{\Phi_2}{\pi}, \quad (2.31)$$

получаем окончательную систему уравнений для определения семи коэффициентов закона движения толкателя

$$c_{11} = \frac{K_1 \omega_{Т0К}'' + K_2 h_{Тmax}}{2K_1 + K_2 \Phi_1}, \quad (2.32)$$

где  $\omega_{Т0К}''$  – скорость толкателя в конце сбega, мм/рад.

$$\omega_{\text{ТОК}}'' = \omega_{\text{ТОК}}' \frac{180}{\pi}, \quad (2.33)$$

$$c_{12} = (c_{11} - \omega_{\text{ТОК}}'') \frac{\Phi_1}{\pi}, \quad (2.34)$$

$$c_{32} = \frac{(2c_{11} - \omega_{\text{ТОК}}'')}{K_2}, \quad (2.35)$$

$$c_{21} = c_{32} k_3, \quad (2.36)$$

$$c_{22} = c_{32} k_1, \quad (2.37)$$

$$c_{31} = c_{32} \frac{1-Z}{6\Phi_3^2}, \quad (2.38)$$

$$c_{33} = c_{32} k_2. \quad (2.39)$$

Проверяются значения вычисленных коэффициентов:

$$c_{11} \Phi_1 + c_{21} \Phi_2 + c_{22} + c_{33} - h_{\Gamma_{\max}} = 0 \quad (2.40)$$

$$c_{31} \Phi_3^4 - c_{32} \Phi_3^2 + c_{33} = 0 \quad (2.41)$$

$$c_{11} - \frac{c_{12} \pi}{\Phi_1} - \omega_{\text{ТОК}}'' = 0 \quad (2.42)$$

$$c_{11} + \frac{c_{12} \pi}{\Phi_1} - c_{21} - \frac{c_{22} \pi}{2\Phi_2} = 0 \quad (2.43)$$

$$c_{21} + 4c_{31}\Phi_3^3 - 2c_{32}\Phi_3 = 0 \quad (2.44)$$

$$c_{22} \left( \frac{\pi}{2\Phi_2} \right)^2 + 12c_{31}\Phi_3^2 - 2c_{32} = 0 \quad (2.45)$$

Несовпадение величин перемещений и скоростей в точках перехода одного участка в другой не должно превышать 0,0001, а ускорений – 0,001.

После вычисления коэффициентов рассчитываются по формулам (2.10)–(2.13) перемещения, скорости и ускорения толкателя, а также характерные для кинематики толкателя величины.

Максимальная скорость толкателя (мм/с)

$$\omega_{T\max} = \omega_K (c_{11} + c_{12}\pi / \Phi_1) = \omega_K (c_{21} + c_{22}\pi / 2\Phi_1) = \omega_K K_2 c_{32}. \quad (2.46)$$

Максимальное и минимальное ускорение толкателя (мм/с<sup>2</sup>)

$$\begin{aligned} j_{T\max} &= \omega_K^2 c_{12} (\pi / \Phi_1)^2; \\ j_{T\min} &= -\omega_K^2 2c_{32}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Расчет производится при помощи ЭВМ. Результаты расчета сводятся в таблицу.

По результатам, приведенным в таблице, строятся диаграммы подъема (перемещения), скорости и ускорений толкателя при движении по безударному кулачку в зависимости от угла поворота распределительного вала. Эти же диаграммы, но в масштабе, измененном на величину  $l_k/l_t$ , являются диаграммами подъема, скорости и ускорения клапана.

## ПРОФИЛИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК РАВНОЙ ПРОЧНОСТИ

**Цель работы:** изучение методов моделирования напряженного состояния стержней при растяжении-сжатии и балок при изгибе с использованием одномерных конечных элементов. Построение математической модели профилирования стержней и балок равной прочности и расчет профилей равнопрочных стержней и балок.

### Общие положения

При расчете деталей на прочность в машиностроении собственный вес конструкции обычно не учитывается. Возникает вопрос, не вносится ли этим упрощением расчета слишком большая погрешность?

Рассмотрим случай растяжения вертикального стержня (рисунок 3.1, а), закрепленного своим верхним концом; к нижнему его концу подвешен груз  $P$ . Длина стержня  $l$ , площадь поперечного сечения  $F$ , плотность материала  $\rho$  и модуль упругости  $E$ . Подсчитаем напряжения по сечению АВ, расположенному на расстоянии  $x$  от свободного конца стержня.

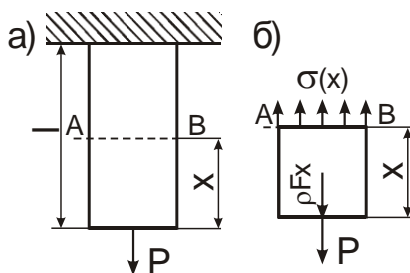


Рисунок 3.1 – Расчет стержня на растяжение с учетом собственной массы

Рассечем стержень сечением  $AB$  и выделим нижнюю часть длиной  $\chi$  с приложенными к ней внешними силами (рисунок 3.1, б): грузом  $P$  и ее собственным весом  $\rho F\chi$ . Эти две силы уравниваются напряжениями, действующими на площадь  $AB$  от отброшенной части. Напряжения будут нормальными, равномерно распределенными по сечению и направленными наружу от рассматриваемой части стержня, т.е. растягивающими. Величина их будет равна

$$\sigma(\chi) = \frac{P + \rho F\chi}{F} = \frac{P}{F} + \rho\chi.$$

Таким образом, при учете собственного веса нормальные напряжения оказываются неодинаковыми во всех сечениях. Наиболее напряженным, опасным, будет верхнее сечение, для которого  $\chi$  достигает наибольшего значения  $l$ ; напряжение в нем

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \rho l.$$

Условие прочности должно быть выполнено именно для этого сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \rho l \leq [\sigma].$$

Отсюда необходимая площадь стержня

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \rho l}.$$

От формулы, определяющей площадь растянутого стержня без учета влияния собственного веса, эта формула отличается лишь тем, что из допускаемого напряжения вычитается величина  $\rho l$ .

Чтобы оценить значение этой поправки, подсчитаем ее для двух случаев. Возьмем стержень из стали длиной 10 м; для него  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ , а величина  $\rho = 78,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ . Таким образом, для стержня из мягкой стали поправка составит  $\frac{78,5}{140}$ , т.е. около 0,6%. Теперь возьмем кирпичный столб высотой тоже 10 м; для него  $[\sigma] = 1,2 \text{ МПа}$ , а величина  $\rho = 18 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ . Таким образом, для кирпичного столба поправка составит  $\frac{18}{1,2}$ , т.е. уже 15%.

Влиянием собственного веса при растяжении и сжатии стержней можно пренебрегать, если мы не имеем дела с длинными стержнями или со стержнями из материала, обладающего сравнительно небольшой прочностью при достаточном весе. При расчете длинных канатов подъемников, различного рода длинных штанг приходится вводить в расчет и собственный вес конструкции.

В таких случаях возникает вопрос о целесообразной форме стержня. Если мы подберем сечение стержня так, что дадим одну и ту же площадь поперечного сечения по всей длине, то материал стержня будет плохо использован; нормальное напряжение в нем дойдет до допустимого лишь в одном верхнем сечении; во всех прочих сечениях мы будем иметь запас в напряжениях, т.е. излишний материал. Поэтому желательно так запроектировать размеры стержня, чтобы во всех его поперечных сечениях (перпендикулярных к оси) нормальные напряжения были постоянны.

Такой стержень называется стержнем равного сопротивления растяжению или сжатию. Если при этом напряжения равны допустимым, то такой стержень будет иметь наименьший вес.



## Основные физико-математические зависимости

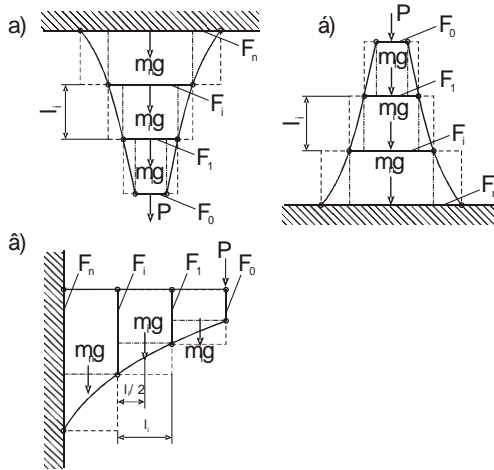


Рисунок 3.2 – Схемы нагружения:  
 а – растяжение; б – сжатие; в – изгиб;  
 - · - · - · - недостаточная прочность;  
 ······ - избыточная прочность

Масса  $i$ -го элемента

$$m_i = \rho \cdot F_i \cdot l_i,$$

где  $\rho$  – плотность материала;

$F_i$  – площадь сечения;

$l_i$  – длина элемента.

Нагрузка растяжения (сжатия) в  $i$ -м сечении

$$P_i = P_{i-1} + m_i g.$$

Напряжения, возникающие при растяжении-сжатии стержня

$$\sigma_{pi} = \frac{P_i}{F_i}.$$

### Изгибающий момент в $i$ -м сечении балки

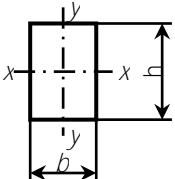
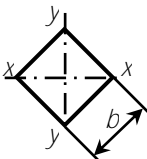
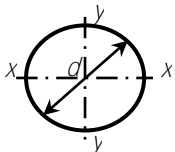
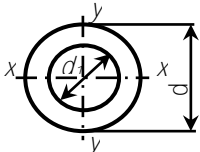
$$M_i = P \cdot i \cdot l_i + \sum_{j=1}^i \left( \frac{l_j}{2} + \sum_{k=1}^{j-1} l_k \right) \cdot m_j g.$$

### Напряжения, возникающие при изгибе

$$\sigma_{ui} = \frac{M_i}{W_i},$$

где  $W_i$  – момент сопротивления сечения на изгиб (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Моменты сопротивления изгибу различных сечений

	Форма сечения	Моменты сопротивления изгибу
1		$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$ $W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}$
2		$W_x = W_y = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12}$
3		$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$
4		$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^4 - d_1^4}{d}$

## Методика разработки модели

На первом этапе построения модели стержень (балка) разбивается на  $n$ -е число отрезков, представляющих собой линейные конечные элементы. Граничными условиями на входе и выходе элемента является нормальное напряжение, причем напряжение на выходе одного элемента должно равняться напряжению на входе в другой.

Расчет ведется с наименее нагруженного сечения. Профиль балки недостаточной прочности определяется без учета собственного веса расчетного элемента, профиль избыточной прочности рассчитывается из условия постоянства сечения и с учетом собственного веса элемента.

Математическая модель нагруженного состояния стержня (балки), может быть реализована на любом алгоритмическом языке программирования или в приложениях Windows для решения инженерных задач.

Исходные данные берутся из таблицы 3.2 согласно варианту.

Математическое описание модели преобразуется в математическую модель. При необходимости используются численные методы.

Составляется алгоритм реализации модели и программа расчета. Программа должна содержать блок ввода исходных данных, расчетный блок и блок вывода результатов моделирования. Результаты представляются в виде таблиц и графиков.

После составления программы модели проводится тестирование и отладка.

### Анализ результатов моделирования

Полученные результаты моделирования анализируются по значениям коэффициентов запаса прочности, определяемые как отношение допустимого напряжения к действующему:

$$K_j = \frac{[\sigma]}{\sigma_j}.$$

Сравнить массы стержней (балок) различных вариантов.

Сделать выводы о целесообразности расчета профилей стержней (балок) равной прочности.

Таблица 3.2 – Исходные данные для моделирования напряженного состояния

Вариант	Нагрузка $P$ , кН	Длина стержня (балки) $l$ , м	Плотность материала $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Предельное допустимое напряжение $[\sigma]$ , МПа	Форма сечения (для изгиба)
1	20	1,2	7800	250	1
2	15	2,0	7600	190	2
3	5,0	3,2	8300	70	3
4	22	4,8	2200	55	4
5	16	3,2	7400	120	1
6	30	10	1200	1,5	2
7	25	15	2500	2,3	3
8	32	7	6100	20,6	4
9	40	22	5300	12	3
10	12	3,2	6800	160	2

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ**

**Цель работы:** изучение методов моделирования термодинамических процессов. Построение математической модели термодинамических циклов поршневых двигателей внутреннего сгорания (ДВС) с целью определения параметров состояния рабочего тела в характерных точках, величин работ сжатия, расширения и полезной работы, количества подведенной и отведенной теплоты, термического коэффициента полезного действия.

### **Общие положения**

Двигатель внутреннего сгорания осуществляет преобразование тепловой энергии, полученной при сгорании топлива, в механическую работу. Этот процесс совершается при помощи рабочего тела – газов, которые при работе двигателя претерпевают изменения своего состояния. Последовательно протекающая совокупность изменений состояния рабочего тела (процессов), в результате которой оно обретает свое первоначальное термодинамическое состояние, называется рабочим циклом двигателя внутреннего сгорания.

В теоретическом цикле в отличие от действительного отсутствуют потери тепла, за исключением неизбежной отдачи тепла холодному источнику, без которой согласно второму закону термодинамики невозможно превращение в двигателе тепла в работу. Теоретический цикл осуществляется при соблюдении следующих условий:

1. Цикл является замкнутым (обратимым) и протекает с постоянным количеством одного и того же рабочего тела.

2. Теплоемкость рабочего тела на протяжении всего цикла считается постоянной, не зависящей от температуры.

3. В цилиндре двигателя не происходит сгорания топлива, а имеет место подвод тепла извне.

4. Процессы сжатия и расширения протекают по адиабатическому закону, т.е. без теплообмена с внешней средой.

По типу подвода теплоты различают следующие термодинамические циклы ДВС (рисунок 4.1):

а) цикл с подводом тепла при постоянном объеме  $V = \text{const}$  (цикл Отто);

б) цикл с подводом тепла при постоянном давлении  $p = \text{const}$  (цикл Дизеля);

в) цикл с подводом тепла при постоянных объеме и давлении  $V = \text{const}$  и  $p = \text{const}$  (цикл Тринклера).

Во всех трех циклах отвод тепла осуществляется при постоянном объеме.

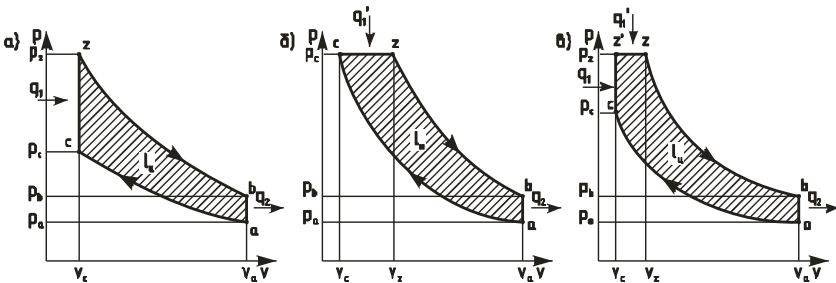


Рисунок 4.1 – Термодинамические циклы поршневых ДВС:  
а – цикл Отто; б – цикл Дизеля; в – цикл Тринклера

## Основные физико-математические зависимости

Введем следующие обозначения безразмерных параметров циклов (рисунок 4.1):

$$\text{степень сжатия } \varepsilon = \frac{V_a}{V_c};$$

степень предварительного расширения  $\rho = \frac{V_z}{V_c}$ ;

степень последующего расширения  $\delta = \frac{V_a}{V_z}$ ;

степень повышения давления  $\lambda = \frac{p_z}{p_c}$ .

Процессы сжатия и расширения описываются уравнением адиабаты

$$pV^k = \text{const},$$

где  $k$  – показатель адиабаты. Для идеального газа  $k = \frac{C_p}{C_v}$ , где

$C_p, C_v$  – удельные теплоемкости для изобарного и изохорного процессов, для воздуха  $k = 1,41$ .

Работа, затраченная в процессе сжатия:

$$L_{ac} = \int_a^c p(V) dV.$$

Работа, совершенная рабочим телом в процессе расширения:

$$L_{zb} = \int_z^b p(V) dV.$$

Полезная работа термодинамического цикла

$$L_{ц} = L_{zb} + L_{ac}.$$

Количество теплоты, подведенное в изохорном процессе:

$$Q_1 = c_v \cdot m \cdot (T_{z(z)} - T_c),$$

где  $m$  – масса газа;  $T_z$  и  $T_c$  – температура газа в соответствующих точках цикла.

Количество теплоты, подведенное в изобарном процессе:

$$Q_1' = c_p \cdot m \cdot (T_z - T_z').$$

Суммарное количество теплоты, подведенное к рабочему телу:

$$\sum Q_1 = Q_1 + Q_1'.$$

Количество теплоты, отведенное в изохорном процессе:

$$Q_2 = c_v \cdot m \cdot (T_a - T_b).$$

Термический КПД цикла определяется зависимостью

$$\eta_t = \frac{\sum Q_1 - Q_2}{Q_2}.$$

Для определения неизвестных параметров состояния рабочего тела в расчетных точках необходимо использовать уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона)

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T,$$

где  $R$  – газовая постоянная, для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг·К).

### **Методика разработки модели**

Математическая модель термодинамических циклов поршневых ДВС может быть реализована на любом алгоритмическом языке программирования или в приложениях Windows для решения инженерных задач.



Исходные данные берутся из таблиц 4.1, 4.2 согласно варианту.

Таблица 4.1 – Исходные данные для моделирования циклов Отто и Дизеля

Вариант	Начальные параметры состояния рабочего тела			Степень сжатия $\varepsilon$	Степень повышения давления $\lambda$	Степень предварительного расширения $\rho$
	$P_a$ , МПа	$T_a$ , К	$V_a$ , л			
1	0,110	300	0,25	11	3,2	1
2	0,100	293	0,30	10	3,0	1
3	0,095	288	0,40	9	2,8	1
4	0,090	305	0,45	8	2,4	1
5	0,085	310	0,50	7	2,0	1
6	0,170	318	1,75	15	1	1,8
7	0,150	310	1,50	17	1	2,0
8	0,120	300	1,25	19	1	2,2
9	0,100	293	1,00	21	1	2,0
10	0,098	305	0,75	23	1	1,8

Таблица 4.2 – Исходные данные для моделирования цикла Тринклера

Вариант	Начальные параметры состояния рабочего тела			Степень сжатия $\varepsilon$	Степень повышения давления $\lambda$	Степень предварительного расширения $\rho$
	$P_a$ , МПа	$T_a$ , К	$V_a$ , л			
1	0,085	300	0,50	23	1,8	1,50
2	0,088	295	0,60	20	2,0	1,45
3	0,090	300	0,80	19	2,2	1,40
4	0,092	305	1,00	18	2,4	1,25
5	0,095	310	1,12	17	2,6	1,20
6	0,100	293	1,25	16	2,4	1,15
7	0,125	300	1,12	17	2,2	1,25
8	0,150	310	1,00	18	2,0	1,40
9	0,170	318	0,80	16	1,8	1,55
10	0,200	320	0,50	15	1,6	1,7

Математическое описание модели преобразуется в математическую модель. При необходимости используются численные методы.

Составляется алгоритм реализации модели и программа расчета. Программа должна содержать блок ввода исходных данных, расчетный блок и блок вывода результатов моделирования. Результаты представляются в виде таблиц и графиков.

После составления программы модели проводится тестирование и отладка.

### **Анализ результатов моделирования**

Полученные результаты моделирования анализируются по значениям параметров состояния рабочего тела в характерных точках, величин затраченной работы на сжатие, совершенной работы при расширении, полезной работы цикла, количества подведенной и отведенной теплоты, термического КПД цикла.

Контрольные значения термических КПД определяются по следующим зависимостям:

$$\text{для цикла Отто } \eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}};$$

$$\text{для цикла Дизеля } \eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\rho^k - 1}{k \cdot (\rho - 1)};$$

$$\text{для цикла Тринклера } \eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\lambda \cdot \rho^k - 1}{(\lambda - 1) + k \cdot \lambda \cdot (\rho - 1)}.$$

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ СТЕНКИ

**Цель работы:** изучение методов моделирования передачи теплоты в телах простой геометрической формы. Построение конечно-разностных математических моделей передачи теплоты в многослойных стенках с целью определения закона распределения температур.

### Общие положения

Основным условием распространения теплоты в пространстве является наличие разности температур в различных его точках. В случае передачи теплоты теплопроводностью необходимым условием является неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Основным законом передачи теплоты теплопроводностью является закон Фурье, согласно которому элементарное количество теплоты  $dQ_\tau$ , проходящей через элементарную площадь изотермической поверхности  $dF$  за элементарный промежуток времени  $d\tau$ , пропорционально температурному градиенту  $(\partial T/\partial n)$ :

$$dQ_\tau = -\lambda \cdot dF \cdot d\tau \cdot \text{grad } T = -\lambda \cdot dF \cdot d\tau \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right).$$

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  характеризует способность вещества проводить теплоту, называется коэффициентом теплопроводности и численно равен количеству теплоты, проходящей через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени при температурном градиенте, равном единице. Он измеряется в Вт/(м·К) и является теплофизической харак-

теристикой вещества. Значения коэффициентов теплопроводности для некоторых веществ представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Коэффициенты теплопроводности некоторых материалов при комнатной температуре и нормальном давлении

Материал	$\lambda$ , Вт/(м·К)	Материал	$\lambda$ , Вт/(м·К)
Серебро	458	Железобетон	1,55
Медь	384	Кирпич красный	0,77
Алюминий	204	—»— силикатный	0,81
Латунь	85	—»— изоляционный	0,14
Чугун	63	Шлаковая вата	0,07
Сталь углеродистая	45	Пенопласт ПСБ-С	0,04
Аммиак (жидкий)	0,57	Воздух	0,0245
Вода	0,55	Водород	0,175
Снег	0,47	Углекислый газ	0,015
Лед	2,25	Метан	0,003

Количество теплоты, проходящей в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности, называется плотностью теплового потока (Вт/м<sup>2</sup>):

$$\vec{q} = \frac{dQ_{\tau}}{dF \cdot d\tau} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right).$$

Так как теплота всегда распространяется от более нагретых частей тела к менее нагретым, то и вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности в сторону убывания температуры.

Количество теплоты, проходящей через произвольную изотермическую поверхность площадью  $F$  в единицу времени, называется тепловым потоком  $Q$  (Вт):

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) dF = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) F.$$

## Основные физико-математические зависимости

В практике часто встречаются стенки, состоящие из нескольких слоев различных материалов (рисунок 5.1).

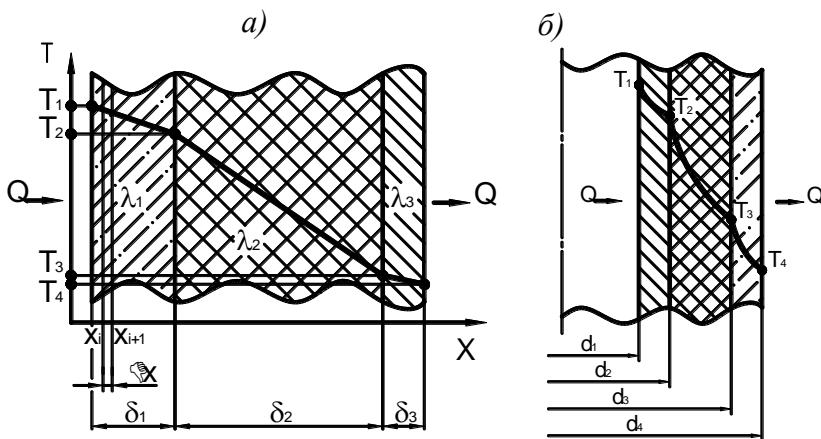


Рисунок 5.1 – Схема передачи теплоты через многослойные стенки  
*a* – плоскую; *б* – цилиндрическую

Рассмотрим стационарный процесс переноса теплоты через многослойную плоскую стенку, содержащую три плотно прилегающих друг к другу слоя, толщиной  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ . Коэффициенты теплопроводности этих слоев  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Температура наружной поверхности  $T_1$ . Тепловой поток  $Q$  направлен слева направо, следовательно,  $T_1 > T_4$ .

Задача стационарная, поэтому тепловой поток  $Q$ , проходящий через многослойную стенку, одинаков для каждого слоя.

Изотермические поверхности в многослойной плоской стенке будут повторять собой форму самой стенки, иметь постоянную площадь  $F$  и располагаться перпендикулярно оси  $X$  (рисунок 5.1, *a*).

При построении математической модели рекомендуется каждый слой разбить на несколько подслоев и перейти от

частной производной ( $\partial T/\partial n$ ) к конечным разностям ( $\Delta T/\Delta X$ ). Тогда уравнение теплопроводности для  $i$ -го подслоя будет иметь вид

$$Q = \lambda_j \frac{T_{i-1} - T_i}{X_i - X_{i-1}} F.$$

При моделировании теплопередачи в многослойной цилиндрической стенке необходимо учитывать изменение площади теплопередачи  $F_i$  при увеличении диаметра цилиндра. Площадь поверхности  $i$ -го изотермического цилиндра можно определить как

$$F_i = \pi \cdot d_i \cdot l,$$

где  $d_i$  – диаметр  $i$ -го цилиндра;  
 $l$  – высота цилиндра.

Уравнение теплопроводности для  $i$ -го слоя цилиндрической стенки

$$Q = \lambda_j \frac{T_{i-1} - T_i}{(d_i - d_{i-1})/2} F_i.$$

### **Методика разработки модели**

Математическая модель теплопередачи в многослойных стенках может быть реализована на любом алгоритмическом языке программирования или в приложениях Windows для решения инженерных задач.

Исходные данные берутся из таблиц 5.2 и 5.3 согласно варианту.

Таблица 5.2 – Исходные данные для моделирования теплопроводности в плоской стенке

Вариант	$Q$ , Вт	$T_1$ , К	$F$ , м <sup>2</sup>	$\delta_1$ , м	$\frac{\lambda_1, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$	$\delta_2$ , м	$\frac{\lambda_2, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$	$\delta_3$ , м	$\frac{\lambda_3, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$
1	300	500	1,0	0,02	350	0,30	0,50	0,02	2,0
2	1000	700	2,5	0,002	50	0,05	0,05	0,001	1,0
3	250	950	1,5	0,10	0,77	0,50	0,14	0,1	0,81
4	740	1200	0,30	0,003	45	0,025	0,07	0,002	5,8
5	100	350	5,0	0,005	45	0,25	0,05	0,001	120
6	3600	725	4,5	0,1	380	0,25	0,65	0,20	1,2
7	1000	500	0,25	0,25	25	0,12	50	0,50	12,5
8	250	350	0,15	0,018	350	0,045	1,2	0,027	50
9	350	950	0,45	0,02	63	0,12	0,15	0,02	200
10	40	300	4,8	0,20	1,5	0,50	0,15	0,12	0,81

Таблица 5.3 – Исходные данные для моделирования теплопроводности в плоской стенке

Вариант	$Q$ , Вт	$T$ , К	$l$ , м	$d_1$ , м	$\frac{\lambda_1, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$	$d_2$ , м	$\frac{\lambda_2, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$	$d_3$ , м	$\frac{\lambda_3, \text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$	$d_3$ , м
1	1500	350	0,25	0,012	380	0,044	60	0,050	1,5	0,054
2	1000	475	1,75	0,018	200	0,056	0,15	0,074	45	0,082
3	600	690	2,0	0,24	1,55	0,36	0,04	0,48	0,70	0,62
4	3600	820	1,25	0,036	65	0,048	0,2	0,060	300	0,065
5	850	1350	0,75	0,42	45	0,50	0,07	0,75	60	0,78
6	3500	750	5,0	0,048	375	0,054	45	0,060	0,055	0,075
7	1800	675	2,0	0,65	0,81	0,85	63	1,0	0,04	1,10
8	2750	450	1,33	0,080	175	0,12	45	0,15	1,80	0,18
9	1200	870	0,85	0,36	50	0,44	0,05	0,50	350	0,52
10	1600	910	1,0	0,024	0,25	0,036	45	0,040	0,07	0,42

Математическое описание модели преобразуется в математическую модель. При необходимости используются численные методы.

Составляется алгоритм реализации модели и программа расчета, которая должна содержать блок ввода исходных дан-

ных, расчетный блок и блок вывода результатов моделирования. Результаты представляются в виде таблиц и графиков.

После составления программы модели проводится тестирование и отладка.

### Анализ результатов моделирования

Полученные результаты моделирования анализируются по значениям температуры в точках перехода от одного материала к другому и характеру поведения кривых изменения температуры по толщине стенки.

Контрольные значения температур на границах слоев определяются по следующим зависимостям:

для плоской стенки

$$T_2 = T_1 - \frac{Q \cdot \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right)}{F};$$
$$T_3 = T_1 - \frac{Q \cdot \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right)}{F};$$
$$T_4 = T_1 - \frac{Q \cdot \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right)}{F};$$

для цилиндрической стенки

$$T_2 = T_1 - \frac{Q}{2\pi l} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1};$$
$$T_3 = T_1 - \frac{Q}{2\pi l} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} \right);$$
$$T_4 = T_1 - \frac{Q}{2\pi l} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right).$$



## ЛИТЕРАТУРА

1. Железко, Б.Е. Термодинамика, теплопередача и двигатели внутреннего сгорания / Б.Е. Железко, В.М. Адамов, Р.И. Есьман, под ред. Б.Е. Железко. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – 271 с.
2. Колчин, А.И. Расчет автомобильных и тракторных двигателей: учебное пособие для вузов / А.И. Колчин, В.П. Демидов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2002. – 496 с.
3. Кудинов, В.А. Техническая термодинамика: учебное пособие для вузов / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 2000. – 261 с.
4. Механика материалов: учебное пособие для вузов / Н.С. Траймак [и др.]; под ред. Ю.В. Василевич, Л.Е. Реут. – Минск: Технопринт, 2002. – 193 с.
5. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев: Наукова думка, 1988. – 734 с.
6. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для технических специальностей вузов / В.П. Тарасик. – Минск: Дизайн ПРО, 1997. – 640 с.
7. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен / ред.-сост. К.С. Колесников, А.И. Леонтьев, ред. К.В. Фролов. – М.: Машиностроение. – Раздел 1: Инженерные методы расчетов. – 1999. – Т. 1–2. – 600 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ....	4
<i>Лабораторная работа № 1</i>	
КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА ДВИГАТЕЛЯ.....	5
<i>Лабораторная работа № 2</i>	
КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГАЗОРАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ДВИГАТЕЛЯ.....	10
<i>Лабораторная работа № 3</i>	
ПРОФИЛИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК РАВНОЙ ПРОЧНОСТИ .....	21
<i>Лабораторная работа № 4</i>	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ .....	28
<i>Лабораторная работа № 5</i>	
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ СТЕНКИ.....	34
Литература.....	40

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторные работы для студентов  
специальности 1-37 01 01 «Двигатели внутреннего сгорания»

С о с т а в и т е л и :

БАРМИН Виталий Александрович  
ПРЕДКО Андрей Владимирович

Редакторы Л.Н. Шалаева, Т.А. Подолякова  
Компьютерная верстка С.В. Бондаренко

---

Подписано в печать 29.06.2010.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 1,91. Тираж 100. Заказ 1204.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.