



Министерство образования  
Республики Беларусь

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

**Кафедра «Электротехника и электроника»**

# **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**

*Сборник задач с контрольными тестами  
для студентов неэлектротехнических специальностей*

Часть 3

**Минск**  
**БНТУ**  
2010

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Электротехника и электроника»

# ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

*Сборник задач с контрольными тестами  
для студентов неэлектротехнических специальностей*

В 6 частях

Часть 3

ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ,  
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Минск  
БНТУ  
2010

УДК [621.3+621.38]

ББК 31.2 я 7

Э 45

Составители:

*Ю.В. Бладыко, Т.Т. Розум, С.В. Домников, Г.В. Згаевская,  
Ю.А. Куварзин, А.В. Куцыло, В.И. Можар, Р.Р. Мороз*

Рецензенты:

*А.А. Мазуренко, Л.И. Сончик*

- Э 45 Электротехника и электроника: сборник задач с контрольными тестами для студентов неэлектротехнических специальностей: в 6 ч. / сост.: Ю.В. Бладыко [и др.]. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч. 3: Трехфазные электрические цепи, переходные процессы и периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях. – 98 с.

Настоящий сборник задач предназначен для студентов неэлектротехнических специальностей по курсам «Электротехника», «Электротехника и электроника», «Электротехника, электрические машины и аппараты».

Размещение задач соответствует последовательности изложения материала курса, которая принята кафедрой. В начале каждой части даны типовые задачи с решениями, затем помещены контрольные задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения или для решения на практических занятиях. В конце каждой темы предложены многовариантные тесты для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов.

Сборник выпускается по частям. Первая часть включает задачи по линейным и нелинейным цепям постоянного тока, вторая – задачи по однофазным линейным электрическим цепям синусоидального тока. В третьей части рассматриваются трехфазные цепи, переходные процессы и периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях, в четвертой – магнитные цепи и трансформаторы, в пятой – электрические машины и в шестой – электроника.

Применяемая в пособии терминология соответствует рекомендациям ГОСТ 19880-74 «Электротехника. Основные понятия. Термины и определения».

Обозначение единиц величин соответствует ТР 2007/003/ВУ.

Часть 1 «Электрические цепи постоянного тока» была издана в БНТУ в 2008 г., часть 2 «Однофазные линейные электрические цепи синусоидального тока» – в 2010 г.

ISBN 978-985-525-396-0 (Ч. 3)

ISBN 978-985-479-911-7

© БНТУ, 2010

# 1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

## Задачи с решениями

**Задача 1.1.** В симметричной трехфазной цепи (рис. 1.1, а) линейное напряжение  $U_L = 380$  В,  $R = 30$  Ом,  $X_L = 40$  Ом.

Определить токи, активную, реактивную и полную мощности цепи а) в нормальном режиме работы; б) при обрыве в фазе А.

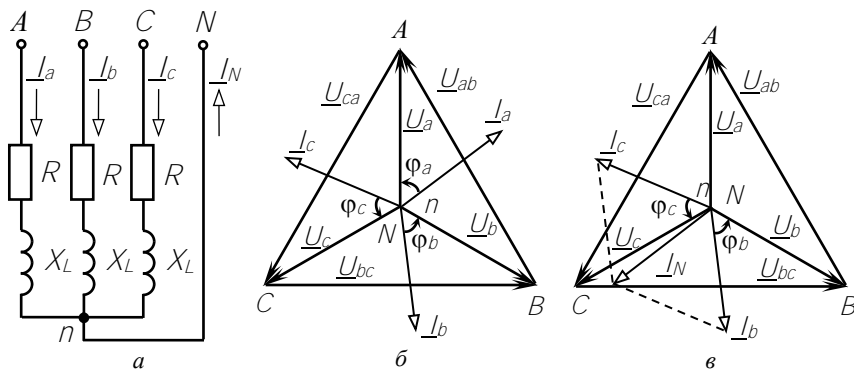


Рис. 1.1

**Решение.** а) Нормальный режим.

Фазные напряжения приемника, соединенного звездой,

$$U_a = U_b = U_c = U_0 = U_E / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

Полное сопротивление фаз приемника

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом.}$$

Токи

$$I_a = I_b = I_c = U_0 / Z = 220 / 50 = 4,4 \text{ А.}$$

Токи отстают по фазе от создающих их фазных напряжений на угол

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi = \arccos \frac{R}{Z} = \arccos \frac{3}{5} = 53^\circ$$

и образуют симметричную систему. Поэтому ток в нейтральном проводе

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0.$$

Мощности

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Е}} I_{\text{Е}} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 4,4 \cdot 0,6 = 1750 \text{ Вт};$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Е}} I_{\text{Е}} \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 4,4 \cdot 0,8 = 2340 \text{ вар};$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Е}} I_{\text{Е}} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 2900 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Векторная диаграмма для симметричного режима представлена на рис. 1.1, б.

б) Обрыв в фазе  $A$ . Так как имеется нейтральный провод, то в режимах работы фаз  $B$  и  $C$  изменений не произойдет, т. е.

$$I_b = I_c = 4,4 \text{ А}; \quad I_a = 0 \text{ А}; \quad \varphi_b = \varphi_c = \varphi = 53^\circ.$$

Мощности

$$P = P_b + P_c = 2U_0 I_0 \cos \varphi = 2 \cdot 220 \cdot 4,4 \cdot 0,6 = 1161 \text{ Вт};$$

$$Q = Q_b + Q_c = 2U_\phi I_\phi \sin \varphi = 1549 \text{ вар};$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1936 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 + \underline{I}_b + \underline{I}_c.$$

Из векторной диаграммы (рис. 1.1, в)  $I_N = 4,4 \text{ А}$ .

Задача 1.2. В четырехпроводной трехфазной цепи (рис. 1.2, а)  $R_a = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_a = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_b = 16 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 5 \text{ Ом}$ . Линейное напряжение  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ .

Определить токи и мощность цепи.

Решение. Полные сопротивления фаз приемника

$$Z_a = \sqrt{R_a^2 + X_a^2} = 10 \text{ Ом}, \quad Z_b = \sqrt{R_b^2 + X_b^2} = 20 \text{ Ом},$$

$$Z_c = R_c = 5 \text{ Ом}.$$

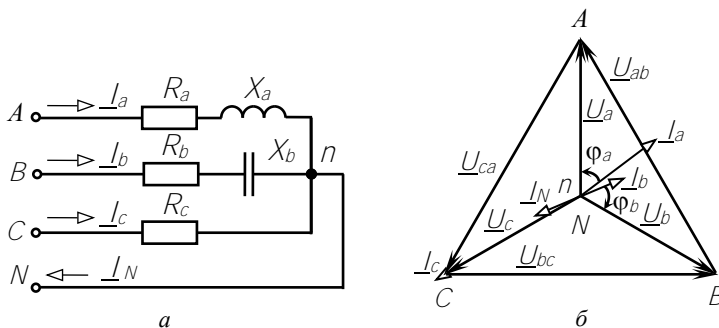


Рис. 1.2

Фазные напряжения генератора и приемника равны

$$U_A = U_B = U_C = U_a = U_b = U_c = U_\phi = U_{Л} / \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

$$\text{Токи } I_a = \frac{U_a}{Z_a} = 22 \text{ А; } I_b = \frac{U_b}{Z_b} = 11 \text{ А; } I_c = \frac{U_c}{Z_c} = 44 \text{ А.}$$

Коэффициенты мощности фаз:  $\cos\varphi_a = R_a/Z_a = 0,6$  ( $\varphi_a > 0$ , ток отстает от напряжения на угол  $\varphi_a$ ),  $\cos\varphi_b = R_b/Z_b = 0,6$  ( $\varphi_b < 0$ , ток опережает напряжение),  $\cos\varphi_c = 1$  (ток совпадает по фазе с напряжением).

Ток в нейтральном проводе  $I_N = I_a + I_b + I_c$  определяем графически на основе векторной диаграммы (рис. 1.2, б). Из нее  $I_N = 11 \text{ А}$ .

Мощности фаз

$$P_a = U_a I_a \cos\varphi_a = 2904 \text{ Вт;}$$

$$P_b = U_b I_b \cos\varphi_b = 1452 \text{ Вт; } P_c = U_c I_c \cos\varphi_c = 9680 \text{ Вт;}$$

$$Q_a = U_a I_a \sin\varphi_a = 3872 \text{ вар (характер индуктивный);}$$

$$Q_b = U_b I_b \sin\varphi_b = -1936 \text{ вар (характер емкостный); } Q_c = 0.$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = Q_a + Q_b = 3872 - 1936 = 1936 \text{ вар (характер индуктивный).}$$

Активная мощность цепи

$$P = P_a + P_b + P_c = 2904 + 1452 + 9680 = 14036 \text{ Вт.}$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{14036^2 + 1936^2} = 14130 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Расчет комплексным методом

Комплексные сопротивления фаз

$$\underline{Z}_a = R_a + jX_a = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_b = R_b - jX_b = 12 - j16 = 20e^{-j53^\circ} \text{ Ом; } \underline{Z}_c = R_c = 5 \text{ Ом.}$$

Комплексные фазные напряжения (принимая комплекс  $\underline{U}_a$  вещественной величиной):

$$\underline{U}_a = U_\phi e^{j0} = 220 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_b = U_\phi e^{-j120^\circ} = 220e^{-j120^\circ} = 220(\cos 120^\circ - j\sin 120^\circ) = -110 - j190 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_c = U_\phi e^{j120^\circ} = 220e^{j120^\circ} = 220(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = -110 + j190 \text{ В.}$$

Комплексные токи:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = 22e^{-j53^\circ} = 13,2 - j17,6 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = 11e^{-j67^\circ} = 4,29 - j10,1 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = 44e^{j120^\circ} = -22 + j38 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = -4,51 + j10,3 = 11,2e^{j114^\circ} \text{ А.}$$

Комплексные мощности фаз и цепи

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \underline{I}_a^* = 220 \cdot 22e^{j53^\circ} = 4840e^{j53^\circ} = 2904 + j3872 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$\underline{S}_b = \underline{U}_b \underline{I}_b^* = 220e^{-j120^\circ} \cdot 11e^{j67^\circ} = 2420e^{-j53^\circ} = 1452 - j1936 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$\underline{S}_c = \underline{U}_c \underline{I}_c^* = 220e^{j120^\circ} \cdot 44e^{-j120^\circ} = 9680 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$\underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = 14036 + j1936 = 14130e^{j7,8^\circ} \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Активная, реактивная и полная мощности цепи

$$P = 14036 \text{ Вт}, Q = 1936 \text{ вар (инд. характер)}, S = 14130 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Задача 1.3. В цепи рис. 1.3, а  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $R = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 8 \text{ Ом}$ .

Определить токи и мощности трехфазной цепи 1) в симметричном режиме; 2) при обрыве линейного провода фазы А; 3) при коротком замыкании фазы А.

Решение. 1) В симметричном режиме фазные напряжения питающей сети и приемника совпадают, т. е.

$$\underline{U}_A = \underline{U}_a, \quad \underline{U}_B = \underline{U}_b, \quad \underline{U}_C = \underline{U}_c,$$

$$U_a = U_b = U_c = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 127 \text{ В}.$$

В комплексной форме (полагаем  $\underline{U}_a$  вещественной положительной величиной)

$$\underline{U}_a = U_{\text{ф}} e^{j0} = 127 \text{ В};$$

$$\underline{U}_b = U_{\text{ф}} e^{-j120^\circ} = 127e^{-j120^\circ} = -63,5 - j110 \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = U_{\text{ф}} e^{j120^\circ} = 127e^{j120^\circ} = -63,5 + j110 \text{ В}.$$



Токи

$$I_a = \underline{U}_a / \underline{Z}_a = 127 / (6 + j8) = 127 / 10 e^{j53^\circ} = 12,7 e^{-j53^\circ} \text{ A};$$

$$I_b = \underline{U}_b / \underline{Z}_b = 12,7 e^{-j173^\circ} \text{ A}; \quad I_c = \underline{U}_c / \underline{Z}_c = 12,7 e^{j67^\circ} \text{ A}.$$

Мощности

$$\begin{aligned} \underline{S} = P + jQ &= \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = 3 \underline{S}_a = 3 \underline{U}_a I_a^* = 3 \cdot 127 \cdot 12,7 \dot{\text{a}}^{j53^\circ} = \\ &= 4800 \dot{\text{a}}^{j53^\circ} = 2900 + j3850 \text{ \AA} \cdot \text{\AA}. \end{aligned}$$

Активная  $P = 2900$  Вт, реактивная  $Q = 3850$  вар, полная  $S = 4800$  В·А.

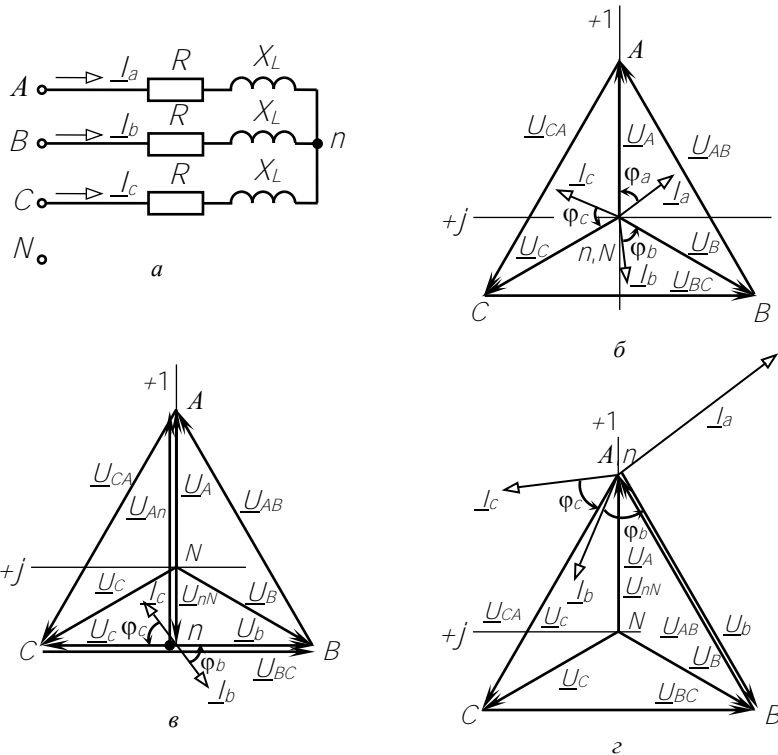


Рис. 1.3

2) Обрыв линейного провода фазы А ( $Z_a = \infty$ ).

Напряжение смещения нейтрали приемника

$$\begin{aligned}\underline{U}_{nN} &= \frac{\frac{1}{Z_a} \underline{U}_A + \frac{1}{Z_b} \underline{U}_B + \frac{1}{Z_c} \underline{U}_C}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c}} = \\ &= \frac{\frac{1}{10e^{j53^\circ}} \cdot 127e^{-j120^\circ} + \frac{1}{10e^{j53^\circ}} \cdot 127e^{j120^\circ}}{\frac{1}{10e^{j53^\circ}} + \frac{1}{10e^{j53^\circ}}} = -63,5 \text{ В.}\end{aligned}$$

Фазные напряжения и токи приемника

$$\underline{U}_a = 0; \quad \underline{U}_{An} = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 190,5 \text{ В};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = -j110 = 110e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = j110 = 110e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{Z_a} = 0; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{Z_b} = 11e^{-j143^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{Z_c} = 11e^{j37^\circ} \text{ А}.$$

Мощности

$$\underline{S}_a = 0; \quad \underline{S}_b = \underline{U}_b \cdot \underline{I}_b^* = 110e^{-j90^\circ} \cdot 11e^{j143^\circ} = 726 + j968 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$\underline{S}_c = \underline{U}_c \cdot \underline{I}_c^* = 110e^{j90^\circ} \cdot 11e^{-j37^\circ} = 1210e^{j53^\circ} = 726 + j968 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$\underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = 1452 + j1936 = 2420e^{j53^\circ} \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Активная  $P = 1452$  Вт, реактивная  $Q = 1936$  вар, полная  $S = 2420$  В\cdotА.

3) Короткое замыкание фазы  $A$  приемника ( $Z_a = 0$ ).  
 Напряжение смещения нейтрали приемника

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\frac{1}{Z_a} \underline{U}_A + \frac{1}{Z_b} \underline{U}_B + \frac{1}{Z_c} \underline{U}_C}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c}} =$$

$$= \frac{\underline{U}_A + \frac{Z_a}{Z_b} \cdot \underline{U}_B + \frac{Z_a}{Z_c} \cdot \underline{U}_C}{1 + \frac{Z_a}{Z_b} + \frac{Z_a}{Z_c}} = \underline{U}_A = 127 \hat{A}.$$

Фазные напряжения и токи приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 0 ;$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = -190,5 - j110 = 220e^{-j150^\circ} \hat{A}, \quad (\underline{U}_b = -\underline{U}_{AB});$$

$$\underline{U}_{\bar{n}} = \underline{U}_{\bar{N}} - \underline{U}_{nN} = -190,5 + j110 = 220e^{j150^\circ} \hat{A}, \quad (\underline{U}_{\bar{n}} = \underline{U}_{\bar{N}A});$$

$$\underline{I}_b = \underline{U}_b / Z_b = 22e^{-j203^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_c = \underline{U}_c / Z_c = 22e^{j97^\circ} \text{ A}.$$

На основании первого закона Кирхгофа для узла  $n$

$$\underline{I}_a = -\underline{I}_b - \underline{I}_c = 22,9 - j30,4 = 38e^{-j53^\circ} \text{ A}.$$

Мощности

$$\underline{S} = \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{U}_b^* \underline{I}_b + \underline{U}_c^* \underline{I}_c = 220e^{-j150^\circ} \cdot 22e^{j203^\circ} +$$

$$+ 220e^{j150^\circ} \cdot 22e^{-j97^\circ} = 5800 + j7700 = 9600e^{j53^\circ} \hat{A} \cdot \hat{A}.$$

Активная  $P = 5800$  Вт, реактивная  $Q = 7700$  вар, полная  $S = 9600$  В·А.

Векторные диаграммы для всех трех режимов изображены на рис. 1.3, б, 1.3, в, 1.3, г соответственно.

**Задача 1.4.** В трехфазную цепь с линейным напряжением  $U_L = 220$  В включены конденсатор емкостью  $C = 31,8$  мкФ и две лампы накаливания сопротивлением  $R = 100$  Ом каждая (рис. 1.4, а). Частота  $f = 50$  Гц.

Рассчитать напряжения и токи конденсатора и ламп, построить векторную диаграмму.

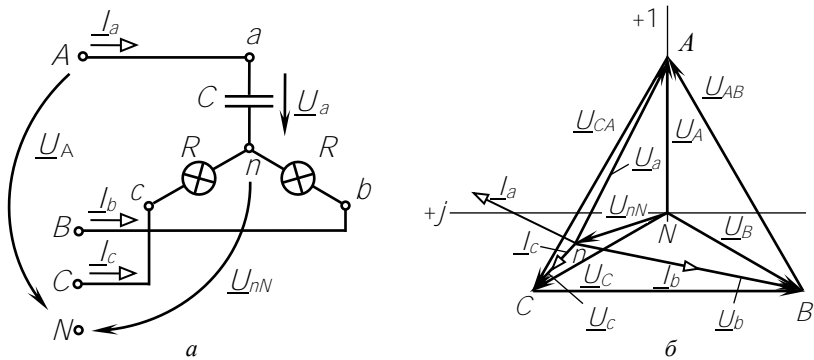


Рис. 1.4

**Решение.** Емкостное сопротивление конденсатора

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 31,8 \cdot 10^{-6}} = 100 \hat{\Omega}.$$

Комплексные проводимости фаз приемника

$$\underline{Y}_a = j \frac{1}{X_c} = j0,01 = 0,01e^{j90^\circ} \hat{\Omega}^{-1};$$

$$\underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \frac{1}{R} = 0,01 \hat{\Omega}^{-1}.$$

Фазные напряжения источника

$$U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В}.$$

Их комплексы (полагаем  $\underline{U}_A$  положительной вещественной величиной):

$$\underline{U}_A = \underline{U}_\phi e^{j0} = 127 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{\hat{A}} = \underline{U}_\phi e^{-j120^\circ} = 127e^{-j120^\circ} = -63,5 - j110 \text{ \AA};$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_\phi e^{j120^\circ} = 127e^{j120^\circ} = -63,5 + j110 \text{ \AA}.$$

Напряжение смещения нейтрали  $n$  приемника

$$\underline{U}_{nN} = \frac{Y_a \underline{U}_A + Y_b \underline{U}_B + Y_c \underline{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c} = -25 + j76,2 \text{ В}.$$

Напряжения на фазах приемника

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 152 - j76,2 = 170e^{-j26,5^\circ} \text{ \AA};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = -38,5 - j186,2 = 190e^{-j101,5^\circ} \text{ \AA};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = -38,5 + j33,8 = 51e^{j139^\circ} \text{ \AA}.$$

Токи

$$\underline{I}_a = Y_a \underline{U}_a = 1,7e^{j63,5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_b = Y_b \underline{U}_b = 1,9e^{-j101,5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_c = Y_c \underline{U}_c = 0,51e^{j139^\circ} \text{ А}.$$

Векторная диаграмма по данным расчета представлена на рис. 1.4, б.

Схема рис. 1.4, а используется для опытного определения чередования фаз трехфазной сети. За фазу  $A$  принимается любая из трех. В нее включается конденсатор, а в две другие фазы – лампы накаливания. Тогда фаза, лампа которой накаливается ярче, является опережающей фазой  $B$ , фазой  $C$  будет фаза с меньшим накалом лампы.

**Задача 1.5.** Три вольтметра используются для контроля сопротивления изоляции незаземленной трехфазной цепи (рис. 1.5, а).

Линейное напряжение  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ . Емкость каждой фазы по отношению к земле  $C = 0,319 \text{ мкФ}$ . Частота  $f = 50 \text{ Гц}$ . Сопротивление изоляции каждой фазы по отношению к земле в нормальном состоянии  $R_{\text{и}} = 2 \cdot 10^5 \text{ Ом}$ . Сопротивления вольтметров  $R_V = 50 \text{ кОм}$ .

Определить показания вольтметров а) при нормальном состоянии изоляции; б) при понижении сопротивления изоляции фазы А в 4 раза.

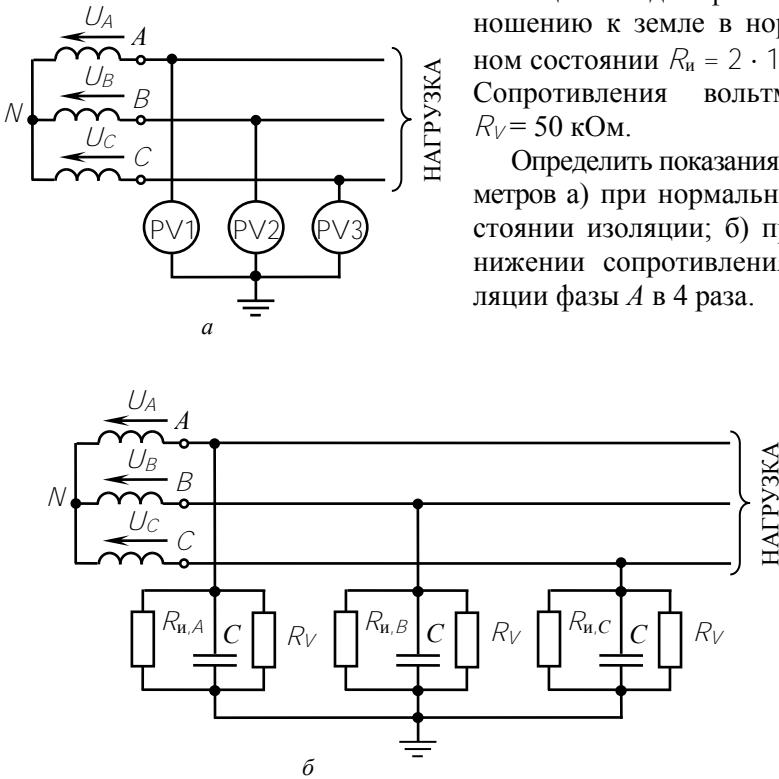


Рис. 1.5

**Решение.** а) Из схемы замещения (рис. 1.5, б) видно, что активно – емкостные сопротивления изоляции трехфазной цепи относительно земли совместно с вольтметрами образуют в нормальном состоянии ( $R_{\text{е, А}} = R_{\text{е, В}} = R_{\text{е, С}}$ ) симметричную звезду. При этом потенциалы нейтрали генератора и земли одинаковы. Поэтому в данном режиме показания вольтметров равны и соответствуют фазному напряжению цепи  $U_V = U_{\Phi} = U_{\text{Л}} / \sqrt{3} = 220 \text{ В}$ .

б) Изменение сопротивления изоляции любой из фаз приводит к возникновению напряжения между нейтралью генератора (точка  $N$ ) и землей:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \left[ \left( \frac{1}{R_{e,A}} + \frac{1}{R_V} + j\omega C \right) + e^{j240^\circ} \left( \frac{1}{R_{e,B}} + \frac{1}{R_V} + j\omega C \right) + e^{j120^\circ} \left( \frac{1}{R_{e,C}} + \frac{1}{R_V} + j\omega C \right) \right]}{\frac{1}{R_{e,A}} + \frac{1}{R_V} + j\omega N + \frac{1}{R_{e,B}} + \frac{1}{R_V} + j\omega C + \frac{1}{R_{e,C}} + \frac{1}{R_V} + j\omega C} = 40 \text{ \AA}.$$

(при  $\underline{U}_A = 220 \text{ В}$  и  $R_{и} = 5 \cdot 10^4 \text{ Ом}$ ).

Показания вольтметров соответствуют модулям комплексных напряжений между фазами цепи и землей

$$\underline{U}_{V1} = \underline{U}_A - \underline{U}_N = 180 \text{ В}, \quad U_{V1} = 180 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{V2} = \underline{U}_B - \underline{U}_N = e^{j240^\circ} \underline{U}_A - \underline{U}_N = -150 - j190 = 242e^{-j128^\circ} \text{ В},$$

$$U_{V2} = 242 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_C - \underline{U}_N = e^{j120^\circ} \underline{U}_A - \underline{U}_N = -150 + j190 = 242e^{j128^\circ} \text{ В},$$

$$U_{V3} = 242 \text{ В}.$$

Таким образом, снижение сопротивления изоляции какой – либо фазы по отношению к земле приводит к уменьшению показания вольтметра, подключенного между этой фазой и землей, и к увеличению показаний двух других вольтметров, что и позволяет контролировать сопротивление изоляции незаземленных цепей.

Задача 1.6. В цепи рис. 1.6, а  $U_{л} = 380 \text{ В}$ ,  $R_b = X_C = 100 \text{ Ом}$ , сопротивление переменного резистора  $R_a$  изменяется от нуля до  $500 \text{ Ом}$ .

Построить диаграмму  $I_a(R_a)$  и  $U_a(R_a)$ .

**Решение.** Расчет цепи производим методом эквивалентного генератора. ЭДС эквивалентного генератора равна напряжению холостого хода фазы  $a$ :

$$E_y = \underline{U}_{a(x)} = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN(\bar{o})} =$$

$$= \underline{U}_A - \frac{\underline{U}_A \left( \frac{1}{R_a} + e^{j240^\circ} \cdot \frac{1}{R_b} + e^{j120^\circ} \cdot j \frac{1}{X_N} \right)}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + j \frac{1}{X_N}} = 520 \text{ В},$$

(при  $\underline{U}_A = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$  и  $R_a = \infty$ ).

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора равно входному сопротивлению цепи относительно точек  $a$  и  $n$  при замкнутом генераторе и разомкнутой ветви с резистором  $R_a$  (рис. 1.6, б):

$$\underline{Z}_g = \underline{Z}_{bx} = \frac{R_b(-jX_c)}{R_b - jX_c} = \frac{100(-j100)}{100 - j100} = \frac{-j100(1+j)}{(1-j)(1+j)} = 50 - j50 \text{ Ом}.$$

Искомые ток и напряжение фазы  $a$ :

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + R_a} = \frac{520}{50 - j50 + R_a}, \quad \underline{U}_a = R_a \underline{I}_a.$$

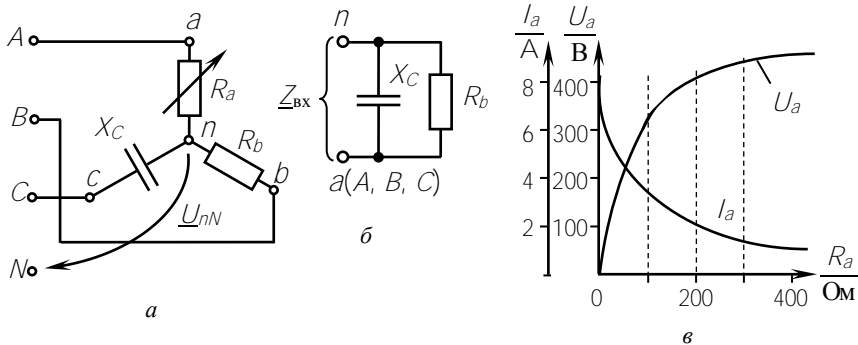


Рис. 1.6

Расчет тока  $\underline{I}_a$  при различных значениях  $R_a$  приведен в табл. 1.1. Диаграммы  $\underline{I}_a(R_a)$  и  $\underline{U}_a(R_a)$  построены на рис. 1.6, в.



Т а б л и ц а 1.1

$R_a, \text{ Ом}$	0	50	100	200	500
$\underline{I}_a, \text{ А}$	$7,35e^{j45^\circ}$	$4,65e^{j26,6^\circ}$	$3,29e^{j18,4^\circ}$	$2,04e^{j11,3^\circ}$	$0,94e^{j5,8^\circ}$
$I_a, \text{ А}$	7,35	4,65	3,29	2,04	0,94
$U_a, \text{ В}$	0	232	329	408	472

**Задача 1.7.** В цепи рис. 1.7  $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ ,  $R = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 8 \text{ Ом}$ .

Определить линейные токи и активную мощность цепи

- при нормальном режиме работы;
- при обрыве в фазе  $ab$ ;
- при обрыве линейного провода А.

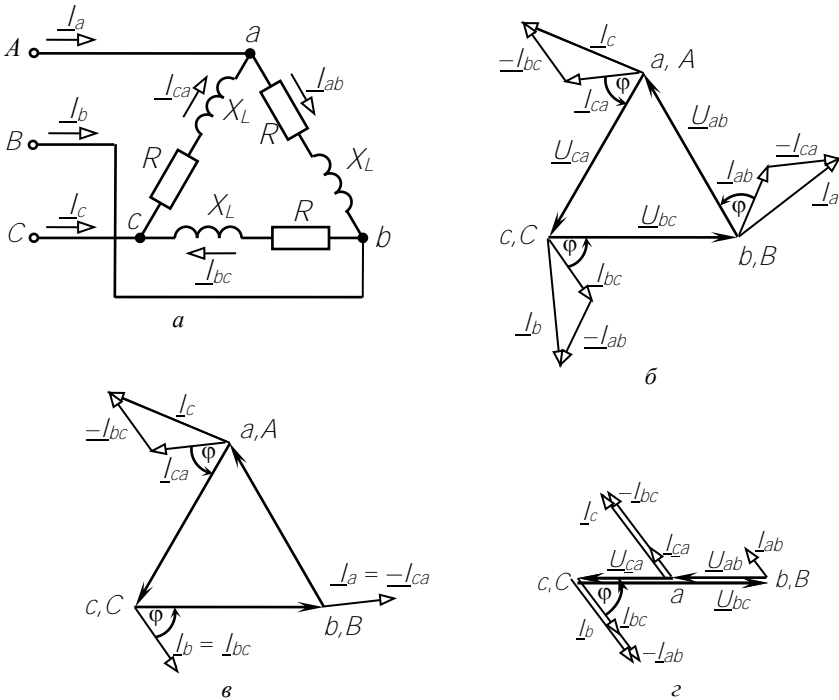


Рис. 1.7

Решение. а) Фазные токи нагрузки

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z_{\phi}} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{220}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 22 \text{ А.}$$

Фазные токи отстают по фазе от соответствующих напряжений на угол  $\varphi = \arctg X_L / R = 53,2^\circ$  (рис. 1.7, б).

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа (рис. 1.7, а):

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

При симметричной нагрузке (векторная диаграмма рис. 1.7, б)

$$I_a = I_b = I_c = \sqrt{3} \cdot I_0 = 38 \text{ А.}$$

Активная мощность

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi = 3 R I_0^2 = 8,72 \text{ кВт.}$$

б) при обрыве в фазе  $ab$  (векторная диаграмма рис. 1.7, в)

$$I_{ab} = 0; \quad \underline{I}_a = -\underline{I}_{ca}, \quad I_a = I_{ca} = 22 \text{ А};$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_{bc}, \quad I_b = I_{bc} = 22 \text{ А};$$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}, \quad I_c = \sqrt{3} I_0 = 38 \text{ А.}$$

Активная мощность

$$P = R I_{bc}^2 + R I_{ca}^2 = 2 R I_{\phi}^2 = 5,81 \text{ кВт.}$$

в) при обрыве линейного провода  $A$  напряжения и токи фаз  $ab$  и  $ca$  уменьшаются вдвое:

$$U_{ab} = U_{ca} = \frac{U_{bc}}{2} = 110 \text{ В};$$

$$I_{ab} = I_{ca} = \frac{I_{bc}}{2} = \frac{U_{\text{Л}}}{2\sqrt{R^2 + X_L^2}} = 11 \text{ А.}$$

Для нахождения линейных токов строим векторную диаграмму (рис. 1.7, з) на основании следующих уравнений:

$$\underline{I}_{bc} = -\underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_a = 0; \quad \underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

Из диаграммы

$$I_b = I_c = I_{bc} + I_{ab} = 22 + 11 = 33 \text{ А.}$$

Активная мощность

$$P = RI_{ab}^2 + RI_{bc}^2 + RI_{ca}^2 = 4,36 \text{ кВт.}$$

Задача 1.8. Приемник, каждая из фаз которого обладает сопротивлением  $Z$ , включен треугольником на линейное напряжение сети  $U_L$ .

Как изменятся ток и мощность приемника при переключении его звездой?

**Решение.** При соединении треугольником ток и мощность приемника

$$I_{\Delta} = \sqrt{3} I_{\Phi\Delta} = \sqrt{3} \frac{U_L}{Z}; \quad P_{\Delta} = \sqrt{3} U_L I_{\Delta} \cos\varphi.$$

При звезде

$$I_{\text{ЛY}} = I_{\Phi\text{Y}} = \frac{U_{\Phi}}{Z} = \frac{U_L}{\sqrt{3}Z}; \quad P_{\text{Y}} = \sqrt{3} U_L I_{\text{ЛY}} \cos\varphi.$$

Отношения 
$$\frac{I_{\Delta}}{I_{\text{ЛY}}} = \frac{\sqrt{3} \frac{U_L}{Z}}{\frac{U_L}{\sqrt{3}Z}} = 3; \quad \frac{P_{\Delta}}{P_{\text{Y}}} = \frac{I_{\Delta}}{I_{\text{ЛY}}} = 3; \quad \frac{I_{\Phi\Delta}}{I_{\Phi\text{Y}}} = \sqrt{3}.$$

Таким образом, линейные токи и мощность приемника уменьшатся в три раза, а фазные токи – в  $\sqrt{3}$  раз.

Задача 1.9. В цепи рис. 1.8, а  $U_L = 380 \text{ В}$ ,  $R_1 = X_C = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 80 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 60 \text{ Ом}$ .

Определить линейные токи, активную и реактивную мощности цепи.

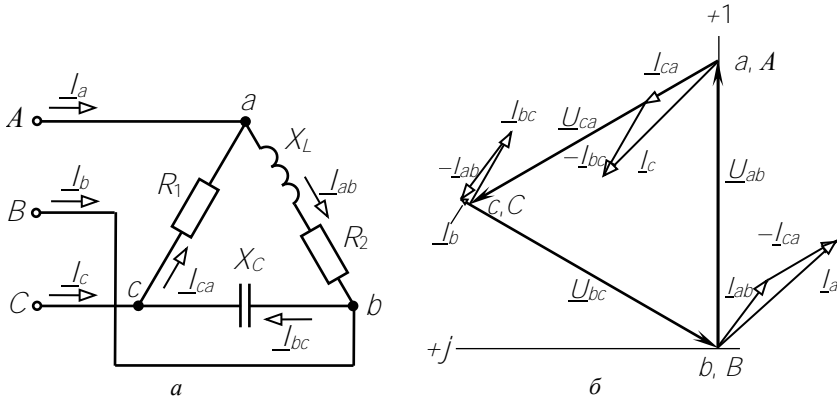


Рис. 1.8

Решение. При решении задачи используем комплексный метод. Принимаем  $\underline{U}_{ab} = 380$  В, т. е. совмещаем вектор данного линейного напряжения с осью действительных величин комплексной плоскости (рис. 1.8, б). Тогда

$$\underline{U}_{bc} = 380\dot{a}^{-j120^\circ} \text{ \AA}; \quad \underline{U}_{ca} = 380\dot{a}^{-j240^\circ} = 380\dot{a}^{j120^\circ} \text{ \AA}.$$

Определяем фазные токи

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2 + jX_L} = \frac{380}{80 + j60} = \frac{380}{100e^{j37^\circ}} = 3,8e^{-j37^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{\underline{U}_{bc}}{-jX_c} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{-j100} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{100^{-j90^\circ}} = 3,8e^{-j30^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{U}_{ca}}{R_1} = \frac{380e^{j120^\circ}}{100} = 3,8e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Заметим, что  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\phi = 100$  Ом и модули токов равны

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 3,8 \text{ \AA}.$$

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = 3,8\dot{a}^{-j37^\circ} - 3,8\dot{a}^{j120^\circ} = 4,94 - j5,57 = 7,45\dot{a}^{-j48,5^\circ} \text{ A};$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = 3,8e^{-j30^\circ} - 3,8e^{-j37^\circ} = 0,25 + j0,38 = 0,45e^{j57^\circ} \text{ A};$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = 3,8e^{j120^\circ} - 3,8e^{-j30^\circ} = -5,19 + j5,19 = 7,3e^{j135^\circ} \text{ A}.$$

Векторная диаграмма напряжений и токов представлена на рис. 1.8, б. Активная и реактивная мощности цепи

$$\underline{S} = \underline{S}_{ab} + \underline{S}_{bc} + \underline{S}_{ca} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = 2,6 - j0,58 \text{ e}\hat{\text{A}} \cdot \hat{\text{A}};$$

$$P = 2,6 \text{ кВт}, \quad Q = -0,58 \text{ квар (емкостная)}.$$

**Задача 1.10.** Симметричный приемник, соединенный треугольником и имеющий сопротивление фазы  $\underline{Z}_\phi = 15 + j18 \text{ Ом}$ , подключен к генератору с симметричной системой напряжений ( $U_{\text{ЛГ}} = 380 \text{ В}$ ) с помощью ЛЭП, провода которой имеют сопротивление  $\underline{Z}_\pi = 1 + j2 \text{ Ом}$  (рис. 1.9, а).

Определить линейные и фазные токи цепи, а также фазное напряжение нагрузки. Построить векторную диаграмму.

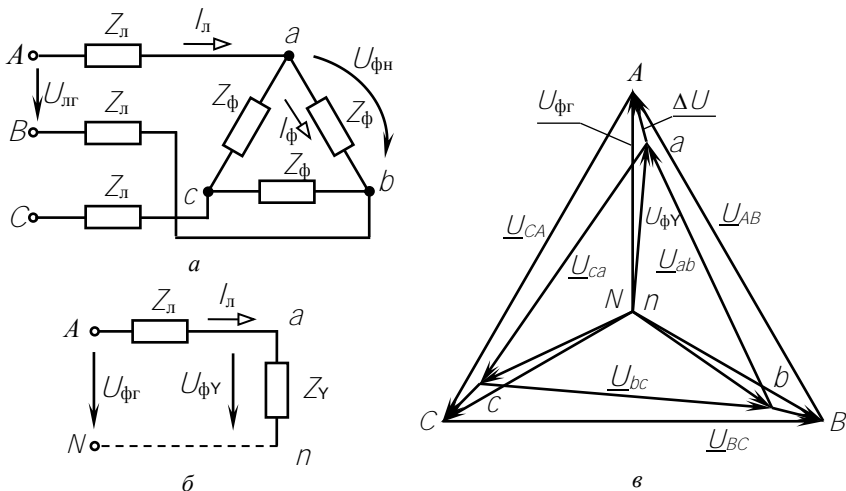


Рис. 1.9

Решение. Задача упрощается после преобразования треугольника сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду с сопротивлением

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{15 + j18}{3} = 5 + j6 = 7,8 \angle^{50^\circ} \text{ Ом.}$$

Так как трехфазная цепь симметрична, то расчет ведем для одной фазы (рис. 1.9, б) с общим сопротивлением

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_Y = 1 + j2 + 5 + j6 = 6 + j8 = 10 \angle^{53^\circ} \text{ Ом.}$$

Линейный ток цепи

$$I_L = \frac{U_{\text{фг}}}{Z} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А,}$$

где  $U_{\text{фг}} = \frac{U_{\text{ЛГ}}}{\sqrt{3}}$  – фазное напряжение генератора;  $Z$  – модуль полного сопротивления одной преобразованной фазы.

При соединении симметричной нагрузки треугольником фазный ток меньше линейного в  $\sqrt{3}$

$$I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{22}{\sqrt{3}} = 12,7 \text{ А.}$$

Фазное напряжение нагрузки находим двумя способами:

$$\text{а) } U_{\text{фн}} = Z_\phi I_\phi = \sqrt{15^2 + 18^2} \cdot 12,7 = 297 \text{ В,}$$

$$\text{б) } U_{\text{фн}} = \sqrt{3} Z_Y I_L = \sqrt{3} \cdot 7,8 \cdot 22 = 297 \text{ В,}$$

где  $U_{\text{фг}} = Z_Y I_L = 172 \text{ В}$  – фазное напряжение эквивалентной звезды нагрузки.

Падение напряжения в каждой фазе ЛЭП

$$\Delta U = Z_L I_L = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot 22 = 49,2 \text{ В.}$$

Потеря линейных напряжений

$$\Delta U_{\text{Л}} = U_{\text{ЛГ}} - U_{\text{ЛН}} = 380 - 297 = 83 \text{ В.}$$

Векторная диаграмма напряжений построена на рис. 1.9, в.

Задача 1.11. Два трехфазных активно-индуктивных симметричных приемника, подключенных параллельно к сети напряжением  $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ , потребляют мощности  $P_1 = 10 \text{ кВт}$  и  $P_2 = 7,5 \text{ кВт}$  при коэффициентах мощности  $\cos\varphi_1 = 0,82$  и  $\cos\varphi_2 = 0,5$ .

Определить ток в общей цепи и коэффициент мощности всей цепи.

**Решение.** Реактивные мощности приемников

$$Q_1 = P_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ квар};$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = 7,5 \cdot 1,73 = 13 \text{ квар.}$$

Активная  $P$ , реактивная  $Q$  и полная  $S$  мощности всей цепи

$$P = P_1 + P_2 = 17,5 \text{ кВт}; \quad Q = Q_1 + Q_2 = 20 \text{ квар};$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}} I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{17,5^2 + 20^2} = 26,6 \text{ êА} \cdot \text{À.}$$

Ток в общей цепи

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{Л}}} = \frac{26,6 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220} = 70 \text{ À.}$$

Коэффициент мощности всей цепи

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{17,5}{26,6} = 0,66.$$

Задача 1.12. От сети трехфазного тока с  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$  и  $f = 50 \text{ Гц}$  питается симметричная активно – индуктивная нагрузка, мощность которой  $P = 100 \text{ кВт}$  и  $\cos\varphi_{\text{н}} = 0,6$ .

Определить величину емкости конденсаторов, соединенных звездой, необходимых для повышения  $\cos\varphi$  до 0,9 (рис. 1.10, а).

Как изменится емкость при включении конденсаторов треугольником для получения необходимого  $\cos\varphi$ ?

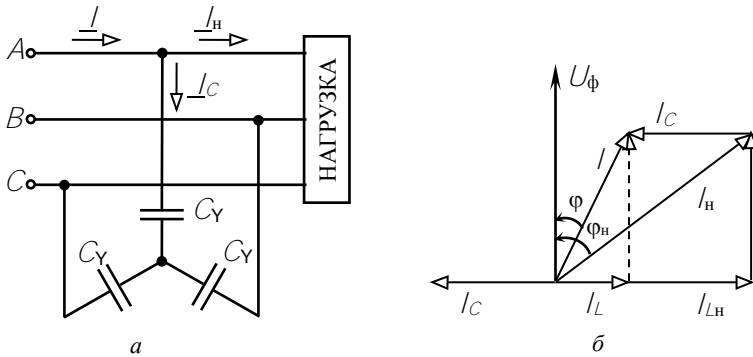


Рис. 1.10

Решение. Ток нагрузки

$$I_H = \frac{P}{\sqrt{3}U_{Л}\cos\varphi_H} = \frac{100 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,6} = 254 \text{ А.}$$

Ток, потребляемый из сети после подключения конденсаторов,

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U_{Л}\cos\varphi} = \frac{100 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,9} = 169 \text{ А.}$$

Из векторной диаграммы рис. 1.10, б следует, что ток батареи конденсаторов

$$\begin{aligned} I_C &= U_{\phi} \omega C_Y = I_{L1} - I_L = I_H \sin\varphi_1 - I_H \sin\varphi = \\ &= 254 \cdot 0,8 - 169 \cdot 0,44 = 128,5 \text{ А.} \end{aligned}$$

Емкость одной фазы

$$C_Y = \frac{I_C}{\omega U_{\phi}} = \frac{128,5}{314 \cdot 220} = 1860 \text{ мкФ.}$$



Емкость может быть также рассчитана по формуле

$$C_Y = \frac{P_0}{\omega U_0^2} (\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\varphi) = \frac{P/3}{\omega (U_E/\sqrt{3})^2} (\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\varphi) =$$

$$= \frac{100 \cdot 10^3/3}{314 \cdot 220^2} (1,33 - 0,49) = 1860 \text{ мкФ}.$$

При подключении конденсаторов треугольником  $U_\Phi = U_{Л}$ , т. е. напряжение конденсаторов возрастает в  $\sqrt{3}$  раз:

$$C_\Delta = \frac{P_\Phi}{\omega U_\Phi^2} (\operatorname{tg}\varphi_H - \operatorname{tg}\varphi) = \frac{C_Y}{3} = 620 \text{ мкФ}.$$

Значит, целесообразной схемой соединения конденсаторов является треугольник.

**Задача 1.13.** В трехфазной цепи рис. 1.11  $U_{Л} = 380 \text{ В}$ ,  $R_a = 44 \text{ Ом}$ ;  $R_b = 22 \text{ Ом}$ ;  $R_c = 14,7 \text{ Ом}$ ;  $R = 26 \text{ Ом}$ ;  $X = 26 \text{ Ом}$ .

Определить показания всех амперметров.

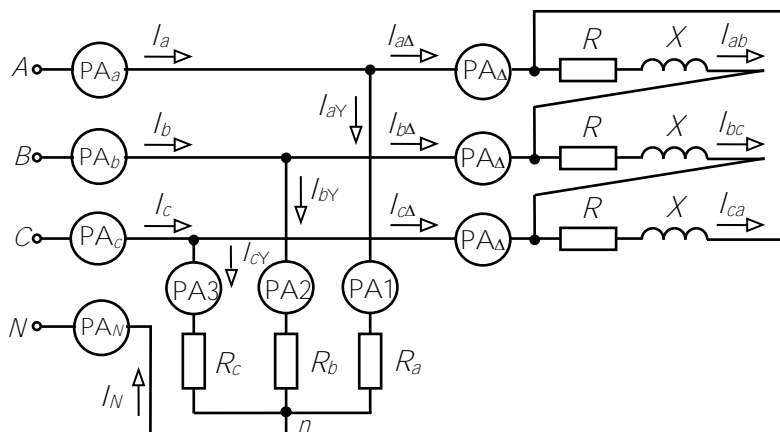


Рис. 1.11

Решение. Токи приемников, соединенных звездой (показания амперметров А1, А2, А3):

$$I_{aY} = \frac{U_{\text{E}}}{\sqrt{3}R_a} = \frac{220}{44} = 5 \text{ A}; \quad I_{bY} = \frac{U_{\text{E}}}{\sqrt{3}R_b} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A};$$

$$I_{cY} = \frac{U_{\text{E}}}{\sqrt{3}R_c} = \frac{220}{14,7} = 15 \text{ A}.$$

Фазные токи симметричного приемника, соединенного треугольником,

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\Phi} = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{380}{\sqrt{26^2 + 26^2}} = 10,4 \text{ A}.$$

Линейные токи этого приемника (показания амперметров А<sub>Δ</sub>)

$$I_{a\Delta} = I_{b\Delta} = I_{c\Delta} = I_{\text{E}} = \sqrt{3}I_{\Phi} = \sqrt{3} \cdot 10,4 = 18 \text{ A}.$$

Токи на общих участках цепи  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  определяются по первому закону Кирхгофа геометрической суммой линейных токов приемников и могут быть найдены графически с помощью векторной диаграммы (рис. 1.12).

Задача может быть решена аналитически комплексным методом. Совмещаем вектор  $\underline{U}_a$  с осью действительных величин комплексной плоскости (рис. 1.12). Тогда комплексные фазные и линейные напряжения

$$\underline{U}_a = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_b = 220\text{a}^{-j120^\circ} \text{ A}; \quad \underline{U}_c = 220\text{e}^{j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{ab} = 380\text{a}^{j30^\circ} \text{ A}; \quad \underline{U}_{bc} = 380\text{e}^{-j90^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{ca} = 380\text{e}^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Токи несимметричного приемника

$$I_{aY} = \frac{\underline{U}_a}{R_a} = \frac{220}{44} = 5 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{bY} = \frac{\underline{U}_b}{R_b} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = -5 - j8,67 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{cY} = \frac{\underline{U}_c}{R_c} = \frac{220e^{j120^\circ}}{14,7} = 15e^{j120^\circ} = -7,5 + j13 \text{ A}.$$

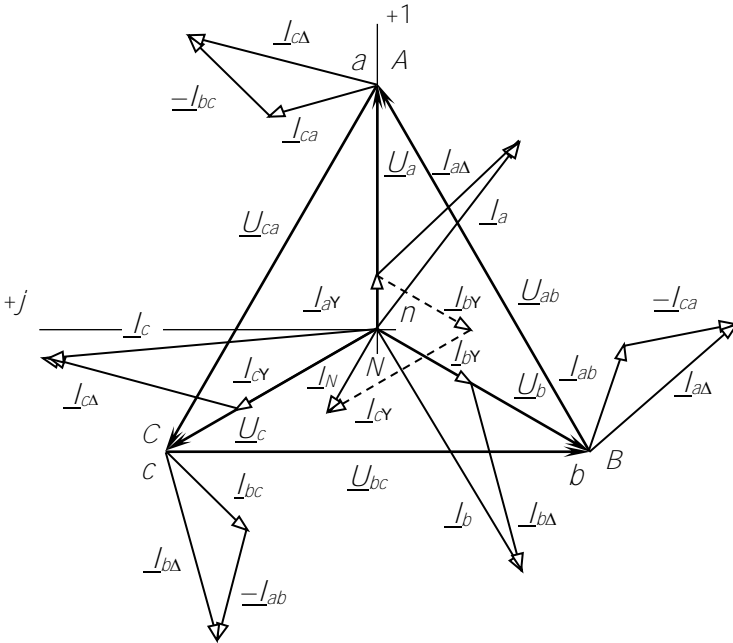


Рис. 1.12

Ток нейтрального провода

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{aY} + \underline{I}_{bY} + \underline{I}_{cY} = -7,5 + j4,33 = 8,66e^{j150^\circ} \text{ A}.$$

Комплексные фазные и линейные токи симметричного приемника

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{380e^{j30^\circ}}{26 + j26} = 10,4e^{-j15^\circ} = 10 - j2,7 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{26 + j26} = 10,4e^{-j135^\circ} = -7,35 - j7,35 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{26 + j26} = 10,4e^{j105^\circ} = -2,7 + j10 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{a\Delta} = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 12,7 - j12,7 = 18e^{-j45^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{b\Delta} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -17,35 - j4,65 = 18e^{-j165^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{c\Delta} = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 4,65 + j17,35 = 18e^{j75^\circ} \text{ A}.$$

Комплексные токи на общих участках цепи

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{aY} + \underline{I}_{a\Delta} = 17,7 - j12,7 = 21,8e^{-j35^\circ 40'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_{bY} + \underline{I}_{b\Delta} = -22,35 - j13,32 = 26e^{-j149^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_{cY} + \underline{I}_{c\Delta} = -2,85 + j30,35 = 30,5e^{j95^\circ 20'} \text{ A}.$$

**Задача 1.14.** В цепи рис. 1.13, а  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $\underline{Z} = 80 + j60 \text{ Ом}$ .

Определить показания ваттметров  $P_{W1}$ ,  $P_{W2}$  и мощность  $P$ , потребляемую приемником.

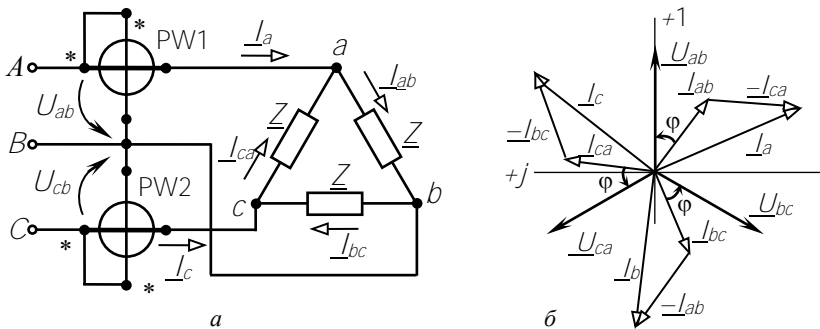


Рис. 1.13

**Решение.** Решаем задачу комплексным методом.

Вектор линейного напряжения  $\underline{U}_{ab}$  совмещаем с осью действительных величин комплексной плоскости (рис. 1.13, б). Тогда комплексы линейных напряжений:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = 220 \tilde{\text{A}}; \quad \underline{U}_{BN} = \underline{U}_{bn} = 220\tilde{\text{a}}^{-j120^\circ} \tilde{\text{A}};$$

$$\underline{U}_{NA} = \underline{U}_{na} = 220\tilde{\text{a}}^{j120^\circ} \tilde{\text{A}}.$$

Определяем комплексные фазные и линейные токи:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{220}{80 + j60} = 2,2e^{-j37^\circ} = 1,76 - j1,32 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{80 + j60} = 2,2e^{-j157^\circ} = -2,02 - j0,86 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{na} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = \frac{220\tilde{\text{a}}^{j120^\circ}}{80 + j60} = 2,2\tilde{\text{a}}^{j83^\circ} = 0,268 + j2,16 \tilde{\text{A}};$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 1,492 - j3,5 = 3,8e^{-j67^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -3,78 + j0,46 = 3,8\tilde{\text{a}}^{j173^\circ} \tilde{\text{A}};$$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 2,288 + j3,02 = 3,8\tilde{\text{a}}^{j53^\circ} \tilde{\text{A}}.$$

**Показания ваттметров**

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_{ab} \underline{I}_a^* \right] = \operatorname{Re} \left[ 220 \cdot 3,8e^{j67^\circ} \right] = 220 \cdot 3,8 \cos 67^\circ = 326 \tilde{\text{A}}\tilde{\text{a}};$$

$$\begin{aligned} P_{W2} &= \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_{nb} \underline{I}_n^* \right] = \operatorname{Re} \left[ -220e^{-j120^\circ} \cdot 3,8e^{-j53^\circ} \right] = \\ &= 220 \cdot 3,8 \cos 7^\circ = 830 \tilde{\text{A}}\tilde{\text{a}}. \end{aligned}$$

Мощность, потребляемая приемником,

$$P = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 3,8 \cos 37^\circ = 1156 \text{ Вт}$$

или 
$$P = P_{W1} + P_{W2} = 326 + 830 = 1156 \text{ Вт.}$$

На рис. 1.13, б построена векторная диаграмма напряжений и токов.

Задача 1.15. В цепи рис. 1.14, а  $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ ,  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $X = 15 \text{ Ом}$ .

Определить показание ваттметра и реактивную мощность трехфазной цепи.

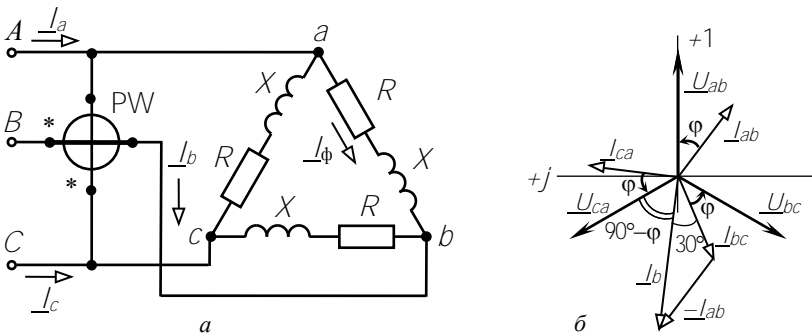


Рис. 1.14

**Решение.** Показание ваттметра

$$P_W = U_{ca} I_b \cos(\vec{U}_{ca} \vec{I}_b) = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(\vec{U}_{ca} \vec{I}_b),$$

где 
$$I_{\text{Л}} = \sqrt{3} I_{\Phi} = \sqrt{3} \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \sqrt{3} \frac{220}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 15,2 \text{ А};$$

угол между векторами  $\vec{U}_{ca}$  и  $\vec{I}_b$  определяем с помощью векторной диаграммы рис. 1.14, б:

$$(\vec{U}_{ca} \vec{I}_b) = 120^\circ - 30^\circ - \varphi = 90^\circ - \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{15}{20} = 37^\circ,$$

$$P_W = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(90^\circ - \varphi) = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi = 220 \cdot 15,2 \cdot 0,6 = 2000 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = \sqrt{3}U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi = \sqrt{3}P_W = \sqrt{3} \cdot 2000 = 3,46 \text{ квар.}$$

Эта задача может быть решена комплексным методом. Комплексы линейных напряжений

$$\underline{U}_{ab} = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{ca} = 220e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Рассчитываем фазные токи  $\underline{I}_{ab}$ ,  $\underline{I}_{bc}$  и линейный ток  $\underline{I}_b$ :

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{220}{20 + j15} = 8,8e^{-j37^\circ} = 7 - j5,27 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{20 + j15} = 8,8e^{-j157^\circ} = -8,1 - j3,42 \text{ А};$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -15,1 + j1,85 = 15,2e^{j173^\circ} \text{ А.}$$

Показание ваттметра

$$\begin{aligned} P_W &= \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_{na} \underline{I}_b^* \right] = \operatorname{Re} \left[ 220e^{j120^\circ} \cdot 15,2e^{-j173^\circ} \right] = \\ &= 220 \cdot 15,2 \cdot \cos(-53^\circ) = 2000 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Реактивная мощность всей цепи

$$Q = \sqrt{3}P_W = 3,46 \text{ квар.}$$

### Контрольные задачи

**Задача 1.16.** Записать комплексные выражения фазных и линейных ЭДС симметричного трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой. Начальную фазу ЭДС  $\underline{E}_A$  принять равной нулю.

**Задача 1.17.** Обмотки трехфазного генератора соединены звездой. Начальная фаза линейного напряжения  $\underline{U}_{BC}$  принята равной нулю.

Чему равна начальная фаза фазного напряжения  $\underline{U}_B$ ?

Задача 1.18. В трехфазную сеть с линейным напряжением 220 В включен симметричный приемник, сопротивления каждой фазы которого  $R = 2 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 9,8 \text{ Ом}$ .

Определить линейный ток и активную мощность, потребляемую приемником, при соединении его фаз а) звездой; б) треугольником. Построить векторные диаграммы.

Задача 1.19. Шесть резисторов одинакового сопротивления включают в трехфазную сеть по приведенным на рис. 1.15 схемам.

Определить отношение активных мощностей для указанных схем. Принять мощность схемы рис. 1.15, а за 1.

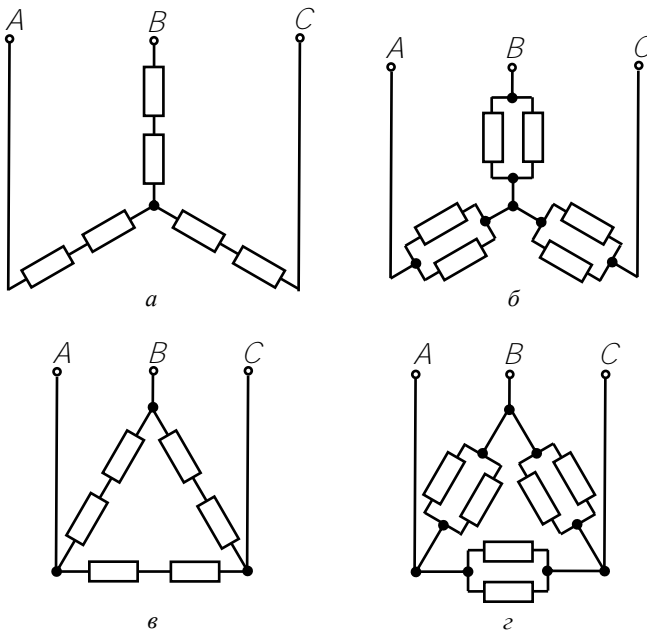


Рис. 1.15

Задача 1.20. В фазы А и В четырехпроводной цепи включены резисторы  $R = 10 \text{ Ом}$ , в фазу С – конденсатор сопротивлением  $X_C = 20 \text{ Ом}$ , линейное напряжение цепи  $U_L = 220 \text{ В}$ .

Определить ток в нейтральном проводе и активную мощность трехфазной цепи. Построить векторную диаграмму.



Задача 1.21. В фазу А четырехпроводной цепи включена индуктивная катушка ( $R_a = 0$ ), в фазу В – резистор, в фазу С – конденсатор. Сопротивления фаз равны по 100 Ом,  $U_{\text{Л}} = 380$  В.

Определить ток в нейтральном проводе, активную и реактивную мощности трехфазной цепи. Построить векторную диаграмму.

Задача 1.22. Линейные токи симметричного трехфазного приемника, соединенного звездой без нейтрального провода, равны 10 А.

Как изменятся токи а) при коротком замыкании; б) при обрыве в фазе А?

Задача 1.23. В цепи рис. 1.16  $R = X_C = X_L = 10$  Ом,  $U_{\text{Л}} = 173$  В.

Определить токи, активную, реактивную и полную мощности цепи.

Задача 1.24. В цепи рис. 1.17  $U_{\text{Л}} = 220$  В,  $R_1 = 22$  Ом,  $R_2 = R_3 = 11$  Ом.

Определить линейные токи и мощности цепи. Построить векторную диаграмму.

Задача 1.25. В цепи рис. 1.18  $U_{\text{Л}} = 220$  В,  $R = X_L = 100$  Ом.

Определить линейные токи и построить векторную диаграмму.

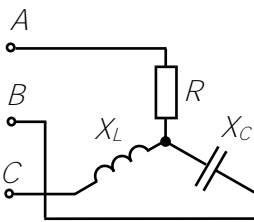


Рис. 1.16

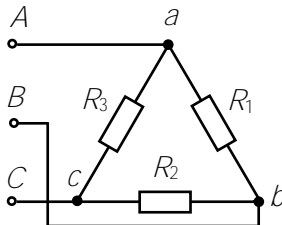


Рис. 1.17

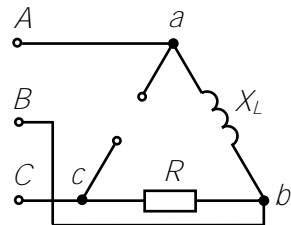


Рис. 1.18

Задача 1.26. В цепи рис. 1.19  $U_{\text{Л}} = 220$  В,  $R = X_C = 100$  Ом.

Определить линейные токи и построить векторную диаграмму.

Задача 1.27. В цепи рис. 1.20 определить линейные токи, если все фазные токи  $I_{\phi} = 1$  А.

Задача 1.28. В цепи рис. 1.19  $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ ,  $R = X_C = 100 \text{ Ом}$ .

Определить линейные токи

- при обрыве в фазе  $ca$ ;
- при обрыве линейного провода  $Cc$ .

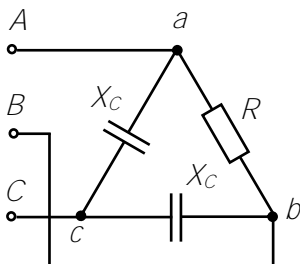


Рис. 1.19

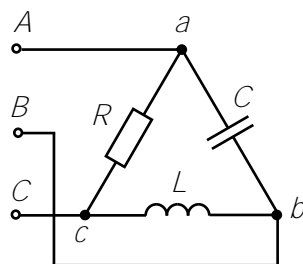


Рис. 1.20

Задача 1.29. Симметричный активно – индуктивный трехфазный приемник потребляет мощность  $P = 20 \text{ кВт}$  при  $\cos \varphi = 0,5$ . Линейное напряжение сети  $220 \text{ В}$ , частота  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Рассчитать емкость конденсаторов одной фазы, необходимых для повышения коэффициента мощности цепи до  $0,92$  при соединении их а) звездой; б) треугольником.

Задача 1.30. Симметричный трехфазный приемник  $\underline{Z}_{\phi} = 5 + j7 \hat{\Omega}$ , соединенный звездой, подключен к генератору линией, сопротивление фазы которой  $\underline{Z}_{\text{Л}} = 1 + j1 \text{ Ом}$ .

Каково должно быть линейное напряжение генератора, чтобы линейное напряжение приемника  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ ?

Задача 1.31. Трехфазный приемник соединен линией с генератором, линейное напряжение которого  $380 \text{ В}$ . Фазы приемника сопротивлением  $\underline{Z}_{\phi} = 210 + j165 \text{ Ом}$  соединены в треугольник. Сопротивление каждого из линейных проводов линии  $\underline{Z}_{\text{Л}} = 10 + j5 \text{ Ом}$ .

Определить напряжение на нагрузке.

Задача 1.32. В цепи рис. 1.21 линейное напряжение  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ ,  $X_C = 110 \text{ Ом}$ .

Определить показания ваттметров, активную, реактивную и полную мощности цепи.

Задача 1.33. В цепи рис. 1.22  $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ ,  $\underline{Z} = 10 + j7,8 \text{ Ом}$ .

Определить показание ваттметра, активную и реактивную мощности цепи.

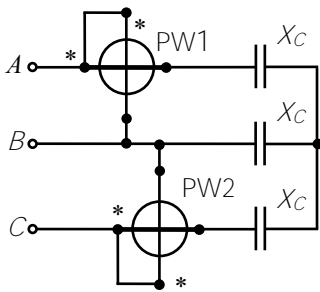


Рис. 1.21

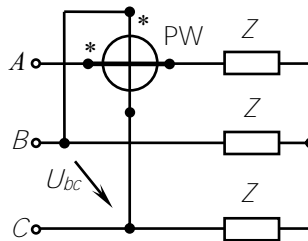


Рис. 1.22

Задача 1.34. Измерение активной мощности, потребляемой от сети трехфазным симметричным приемником, проводилось двумя ваттметрами. Показания ваттметров  $P_{W1} = 2 \text{ кВт}$ ,  $P_{W2} = 4 \text{ кВт}$ .

Начертить электрическую схему цепи и определить коэффициент мощности приемника.

### Ответы к контрольным задачам

1.16.  $\underline{E}_A = E$ ;  $\underline{E}_B = Ee^{-j120^\circ}$ ;  $\underline{E}_C = Ee^{j120^\circ}$ ;

$\underline{E}_{AB} = Ee^{j30^\circ}$ ;  $\underline{E}_{BC} = Ee^{-j90^\circ}$ ;  $\underline{E}_{CA} = Ee^{j150^\circ}$ .

1.17.  $\psi_B = -30^\circ$ .

1.18. а)  $I_{\text{Л}} = 12,7 \text{ А}$ ,  $P = 968 \text{ Вт}$ ; б)  $I_{\text{Л}} = 38 \text{ А}$ ,  $P = 2904 \text{ Вт}$ .

1.19. 1 : 4 : 3 : 12.

1.20. 14,2 А; 3,2 кВт.

- 1.21. 6 A; 484 Вт; 0.
- 1.22. а)  $I_A = 30$  A,  $I_B = I_C = 17,3$  A; б)  $I_A = 0$  A,  $I_B = I_C = 8,67$  A.
- 1.23.  $\underline{I}_A = -17,3$  A;  $\underline{I}_B = 33,5e^{-j75^\circ}$  A;  $\underline{I}_C = 33,5e^{j75^\circ}$  A;  
 $P = 300$  Вт;  $Q = 0$ ;  $S = 300$  В·А.
- 1.24.  $I_A = I_B = 26,4$  A;  $I_C = 34,6$  A;  $P = 11$  кВт.
- 1.25.  $I_A = I_C = 2,2$  A;  $I_B = 1,14$  A.
- 1.26.  $I_A = 4,25$  A;  $I_B = 1,14$  A;  $I_C = 3,81$  A.
- 1.27.  $I_A = 0,52$  A;  $I_B = 1$  A;  $I_C = 0,52$  A.
- 1.28. а)  $I_A = I_C = 2,2$  A;  $I_B = 1,14$  A;  
 б)  $I_A = I_B = 2,46$  A;  $I_C = 0$ .
- 1.29.  $C_Y = 1720,2$  мкФ;  $C_\Delta = 573,4$  мкФ.
- 1.30. 442,56 В.
- 1.31. 338,8 В.
- 1.32.  $P_{W1} = 380$  Вт;  $P_{W2} = -380$  Вт;  
 $P = 0$ ;  $Q = 1320$  вар;  $S = 1320$  В·А.
- 1.33.  $P_W = 1354,46$  Вт;  $P = 3000$  Вт;  $Q = 2340$  вар.
- 1.34.  $\cos\varphi = 0,866$ .

## Тесты для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов

### Тест 1.1

#### Вариант 1

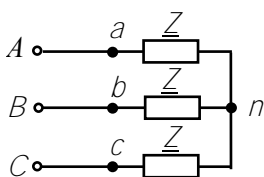
1. Записать в комплексной форме фазные и линейные напряжения трехфазной сети напряжением  $380 / 220$  В. Начальную фазу линейного напряжения  $U_{AB}$  принять равной нулю ( $\psi_{U_{AB}} = 0$ ).

2. Три несимметричных однофазных приемника ( $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$ ) с номинальными напряжениями  $U_{ном} = 220$  В необходимо подключить к трехфазной сети  $380 / 220$  В.

Определить необходимую схему соединений приемника.

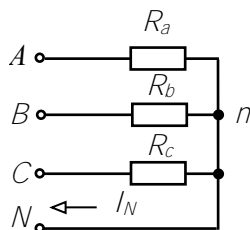
3. Фазные токи симметричной цепи  $I_\phi = 2,2$  А, сопротивления фаз  $Z = 100 e^{j60^\circ}$  Ом.

Определить фазное  $U_\phi$ , линейное  $U_\Delta$  напряжения, линейный ток  $I_\Delta$ , активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности цепи.

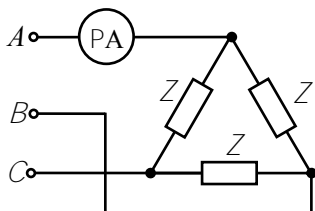


4. Дано:  $U_\Delta = 380$  В,  $R_a = R_b = 200$  Ом,  $R_c = 400$  Ом.

Определить ток в нейтральном проводе  $I_N$  (воспользоваться векторной диаграммой).



5.



Сопротивление фазы симметричного приемника  $Z = 100$  Ом. Показание амперметра –  $6,6$  А.

Определить линейное напряжение цепи.

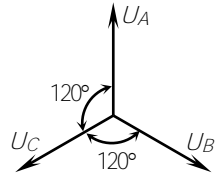
### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

## Вариант 2

1. В трехфазной сети фазные напряжения  $U_A = U_B = U_C = 100$  В. Частота  $f = 50$  Гц, начальная фаза напряжения  $U_B$  равна нулю.

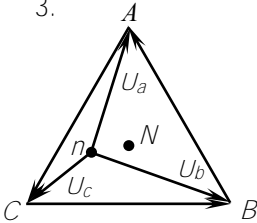
Записать уравнения мгновенных значений линейных напряжений  $U_{AB}$  и  $U_{BC}$ .



2. Трехфазный двигатель с номинальным напряжением обмоток 220 В необходимо подключить к трехфазной сети 220 / 127 В.

Определить необходимую схему соединений обмоток двигателя.

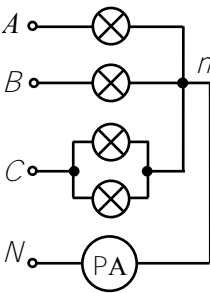
3.



Как соединена трехфазная нагрузка, векторная диаграмма которой представлена на рисунке?

Чему равна сумма линейных токов  $i_A$ ,  $i_B$ ,  $i_C$ ?

4.



В трехфазную цепь ( $U_{л} = 380$  В) включены 4 одинаковые лампы накаливания ( $P_{ном} = 40$  Вт,  $U_{ном} = 220$  В).

Определить показание амперметра.

Изменится ли показание амперметра, если фазы A и C поменять местами?

5. Трехфазный симметричный приемник соединен в треугольник. Сопротивления фаз  $Z = 380 e^{j60^\circ}$  Ом, фазный ток  $I_\phi = 1$  А.

Определить фазное  $U_\phi$  и линейное  $U_{л}$  напряжения, линейный ток  $I_{л}$ , активную и реактивную мощности приемника.

### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

### Вариант 3

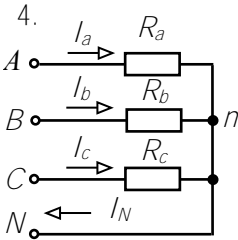
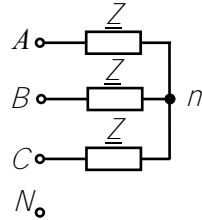
1. Записать в комплексной форме фазные и линейные напряжения трёхфазной сети, если фазное напряжение сети  $U_{\phi} = 380$  В. Начальную фазу напряжения  $U_A$  принять равной  $60^\circ$  ( $\Psi_{U_A} = 60^\circ$ ).

Построить векторную диаграмму напряжений на комплексной плоскости.

2. Определить схему включения трёхфазного симметричного приёмника, у которого  $U_{\text{ном}} = 220$  В, к сети напряжением  $380 / 220$  В.

3. Линейное напряжение трёхфазного источника  $U_{\text{л}} = 380$  В, сопротивления фаз приёмника  $Z = 22e^{-j30^\circ}$  Ом.

Определить фазный и линейный токи, активную и реактивную мощности цепи, напряжение между точками  $n$  и  $N$ .

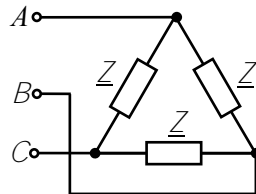


Ток фазы  $A$   $I_a = 6$  А, ток в нейтральном проводе  $I_N = 2$  А. Нагрузка всех фаз активная, причём  $R_b = R_c$ .

Определить токи  $I_b, I_c$ .

5. Линейное напряжение трёхфазной сети  $U_{\text{л}} = 380$  В. Сопротивления фаз приёмника  $Z = 100\dot{a}^{j45^\circ} \dot{i}$ .

Определить фазные, линейные токи, активную, реактивную и полную мощности цепи.



### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

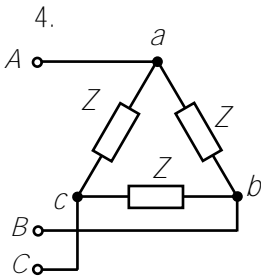
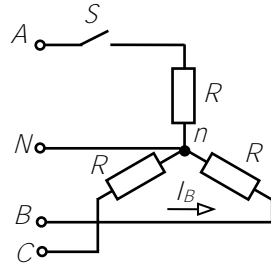
## Вариант 4

1. Записать выражения для мгновенных значений фазных напряжений трёхфазной сети  $U_A, U_B, U_C$ , если мгновенное значение линейного напряжения  $u_{AB} = 180\sin\omega t$  В.

2. Лампы накаливания с номинальным напряжением 127 В включены в трёхфазную сеть с линейным напряжением 220 В.

Определить схему соединения ламп.

3. Определить ток в нейтральном проводе при а) разомкнутом; б) замкнутом выключателе  $S$ , если  $I_B = 1$  А.

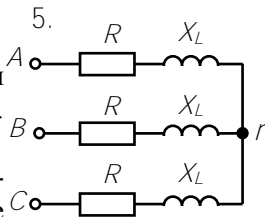


Дано:  $U_{\text{л}} = 380$  В. Линейный ток  $I_{\text{л}} = 17,3$  А.  
Коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi = 0,8$ .

Определить активное и реактивное сопротивление фазы.

5. Активная мощность, потребляемая приёмником  $P = 5,4$  кВт. Линейное напряжение сети  $U_{\text{л}} = 380$  В.

Определить реактивную мощность цепи, если ток в фазе А.



Активная мощность трёхфазным приёмником

Линейное напряжение приёмника  $I_{\phi} = 10$

### Ответы

1.	2.	3. а) 3. б)	4.	5.
----	----	----------------	----	----



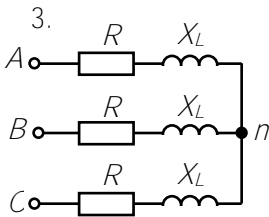
## Вариант 5

1. Записать фазные и линейные напряжения трехфазного генератора в комплексной форме, если линейное напряжение генератора  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ . Начальную фазу  $\underline{U}_A$  принять  $\psi_{U_A} = 90^\circ$ .

Построить векторную диаграмму напряжений на комплексной плоскости.

2. Трехфазный симметричный приемник необходимо подключить к трехфазной сети 660 / 380 В.

Определить схему соединений приемника, если номинальные напряжения каждой фазы приемника  $U_{\text{ном}} = 380 \text{ В}$ .



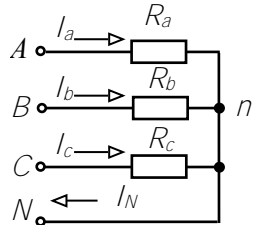
Линейное напряжение трехфазного источника  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ , сопротивления фаз  $R = 8,67 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 5 \text{ Ом}$ .

Определить фазный и линейный токи, активную и реактивную мощности трехфазной цепи.

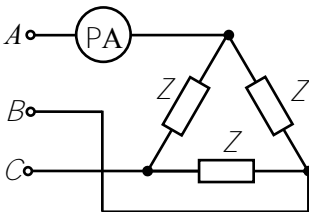
4. Дано:  $I_a = 15 \text{ А}$ ;  $I_b = I_c = 5 \text{ А}$ .

Определить ток в нейтральном проводе  $I_N$ .

Как изменятся токи  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $I_N$  при обрыве фазы A?



5.



Симметричная нагрузка  $Z = 10 \text{ Ом}$  включена по схеме треугольника. Линейное напряжение сети  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ . Определить показание амперметра.

### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

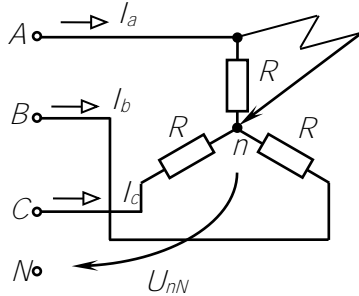
## Тест 1.2

### Вариант 1

1. Как изменятся фазные и линейные напряжения, токи симметричного приемника при переключении его со схемы треугольника на схему звезды? Питание осуществляется от одной и той же трехфазной сети. Ответы представить в виде кратностей:  $U_{\phi\Delta} / U_{\phi Y}$ ;  $U_{л\Delta} / U_{л Y}$ ;  $I_{\phi\Delta} / I_{\phi Y}$ ;  $I_{л\Delta} / I_{л Y}$ .

2. Линейные токи симметричного трехфазного приемника, соединенного звездой, равны 5 А.

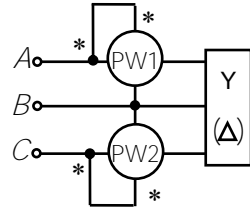
Как изменятся токи ( $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ) при коротком замыкании фазы  $A$ ? Чему при этом равно напряжение смещения нейтрали  $U_{nN}$ , если  $U_n$  питающей сети 380 В?



3. Симметричный трехфазный приемник включен по схеме треугольника к сети  $U_n = 220$  В. Сопротивления каждой фазы приемника  $R = 50$  Ом,  $X_L = 86,7$  Ом.

Начертить схему замещения цепи, рассчитать фазные  $I_\phi$  и линейные  $I_n$  токи, активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности цепи.

4. Какую мощность можно определить по показаниям ваттметров и чему она равна, если нагрузка симметричная, а показания ваттметров  $P_{W1} = 400$  Вт,  $P_{W2} = 500$  Вт.



5. Трехфазный симметричный приемник мощностью  $P = 9,8$  кВт при  $\cos \varphi = 0,8$  подключен к сети  $U_n = 220$  В,  $f = 50$  Гц.

Рассчитать емкость конденсаторов, необходимых для повышения коэффициента мощности цепи  $\cos \varphi'$  до 0,97 при соединении конденсаторов а) треугольником; б) звездой.

### Ответы

1.	2.	3.	4.	5. а) 5. б)
----	----	----	----	----------------

## Вариант 2

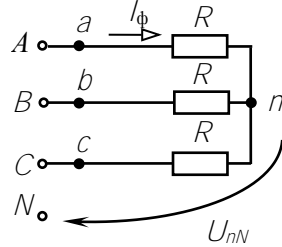
1. Как изменится мощность  $P$  симметричного приёмника при переключении его со схемы треугольника на схему звезды? Питание осуществляется от одной и той же сети.

Ответ представить в виде кратности  $P_{\Delta}/P_Y$ .

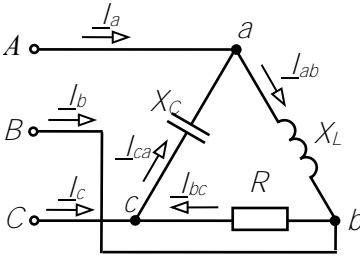
2. Дано:  $I_{\phi} = 2,2$  А,  $R = 100$  Ом.

Определить: 1)  $U_{\phi}$ ,  $U_{л}$ ,  $I_{л}$ ,  $P_{цепи}$ ;

2) Как изменятся токи  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  при обрыве в фазе  $A$ . Чему при этом равно  $U_{nN}$ ?



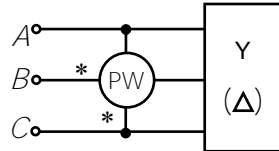
3.



В цепи  $R = X_C = X_L = 22$  Ом,  
 $U_{л} = 220$  В.

Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности цепи.

4. Какую мощность можно определить по показанию ваттметра и чему она равна, если нагрузка симметричная, а  $P_W = 173$  Вт?



5. Симметричный трёхфазный приёмник потребляет активную мощность  $P = 45,3$  кВт при  $\cos\varphi = 0,707$  ( $\varphi > 0$ ).

Рассчитать: а) реактивную мощность конденсаторов  $Q_C$ , необходимую для полной компенсации реактивной мощности  $Q_L$  приёмника; б) ёмкость конденсаторов, соединённых треугольником, если напряжение питающей сети  $U_{л} = 380$  В,  $f = 50$  Гц.

### Ответы

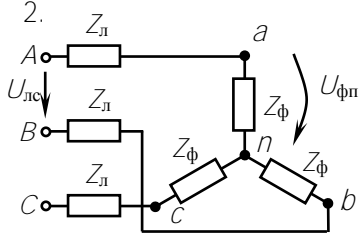
1.	2.	3.	4.	5. а) 5. б)
----	----	----	----	----------------

### Вариант 3

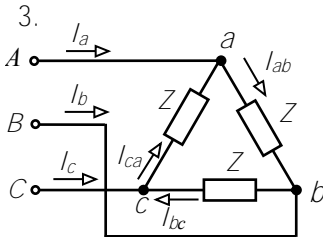
1. Трёхфазный симметричный приёмник подключён к сети по схеме звезды. Как изменятся линейный ток, активная и реактивная мощности приёмника при подключении его к той же сети треугольником?

Ответы представить кратностями:  $I_{\dot{\epsilon}_Y}/I_{\dot{\epsilon}_\Delta}$ ;  $P_Y/P_\Delta$ ;  $Q_Y/Q_\Delta$ .

2. Симметричный приёмник, соединённый звездой и имеющий сопротивление фазы  $Z_\phi = 31 + j22 \text{ Ом}$ , подключён к сети  $U_{\text{лс}} = 400 \text{ В}$  с помощью линии электропередачи сопротивлением  $Z_{\text{л}} = 1 + j2 \text{ Ом}$ .



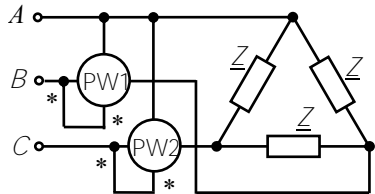
Определить фазное напряжение приёмника  $U_{\text{фп}}$ .



3. Фазные токи симметричного трёхфазного приёмника, соединённого треугольником, равны  $I_\phi = 17,3 \text{ А}$ .

Как изменятся фазные ( $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$ ,  $I_{ca}$ ) и линейные ( $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ) токи при обрыве фазы  $ab$ ?

4. Дано:  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $I_{\text{л}} = 17,3 \text{ А}$ ,  $P_{\text{л1}} = 0$ ,  $P_{\text{л2}} = 3,3 \text{ кВт}$ .



Определить комплексное сопротивление фазы приёмника  $Z$ .

5. Предприятие потребляет активную мощность  $P_{\text{пр}} = 50000 \text{ кВт}$  при  $\cos\phi_{\text{пр}} = 0,8$ .

Рассчитать реактивную мощность конденсаторов, необходимую для повышения  $\cos\phi$  до 0,965 (активную мощность конденсаторов считать равной нулю).

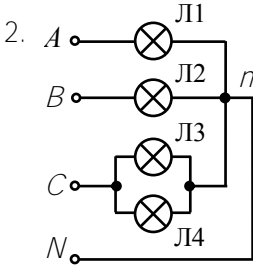
**Ответы:**

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

## Вариант 4

1. Три одинаковых резистора, соединенных в звезду, потребляют мощность 60 Вт.

Какую мощность они будут потреблять при переключении в треугольник?



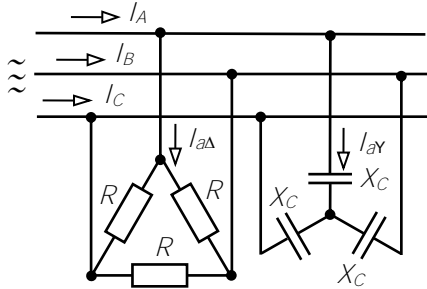
Уменьшится или увеличится накал одинаковых ламп (Л1...Л4) при обрыве нейтрального провода?

3. Дано:  $U_{л} = 220$  В,  
 $R = X_C = 10$  Ом.

Определить:

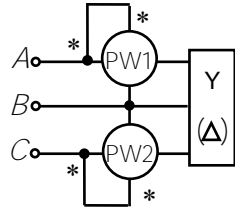
1) линейные токи каждого приемника  $I_{a\Delta}$ ,  $I_{aY}$ , и токи общих участков сети  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ ;

2) активную и реактивную мощности сети.



4. Сумма показаний ваттметров равна 950 Вт. Нагрузка симметричная. Линейное напряжение 220 В, линейный ток 5 А.

Определить показания каждого ваттметра.



5. На сколько процентов можно увеличить активную мощность при передаче энергии в линии, если при том же напряжении и токе повысить  $\cos \varphi$  с 0,72 до 0,9?

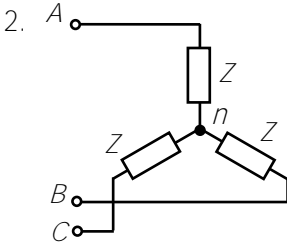
### Ответы

1.	2. Л1 – Л2 – Л3, Л4 –	3.	4.	5.
----	-----------------------------	----	----	----

## Вариант 5

1. Три одинаковые катушки включены в трёхфазную сеть с линейным напряжением  $U_L = 380$  В. Активное сопротивление катушки  $R = 16$  Ом, индуктивное  $X_L = 12$  Ом.

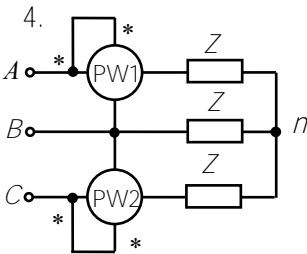
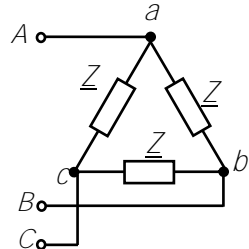
Определить активную, реактивную и полную мощности, потребляемые катушками при их соединении а) треугольником; б) звездой.



Дано: Токи в фазах приемника  $I_\phi = 2$  А.  
Как изменятся токи при обрыве фазы А?

3. Линейное напряжение трёхфазной цепи  $U_L = 220$  В. Сопротивление фазы приемника  $Z = 12 + j12$  Ом.

Определить токи в фазах приемника а) в нормальном режиме; б) при обрыве линейного провода А.



Определить характер нагрузки и сопротивления фаз симметричного приемника, если линейное напряжение сети  $U_L = 380$  В, ток в линии  $I_L = 4,4$  А. Показания ваттметров одинаковы.

5. Для повышения коэффициента мощности трёхфазной установки из двух двигателей подключена батарея конденсаторов.

Определить реактивную мощность компенсирующего устройства для повышения  $\cos\phi$  до 0,95, если потребляемые двигателями мощности  $P_1 = 5,5$  кВт,  $P_2 = 11,75$  кВт и коэффициенты мощности  $\cos\phi_1 = 0,84$ ,  $\cos\phi_2 = 0,88$ .

### Ответы

1. а)	2.	3. а)	4.	5.
1. б)		3. б)		

## 2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### Задачи с решениями

**Задача 2.1.** Катушка, сопротивление которой  $R = 5$  Ом и индуктивность  $L = 0,5$  Гн, подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 30$  В (рис. 2.1, а).

Найти закон изменения тока  $i(t)$  и ЭДС самоиндукции  $e_L(t)$ , постоянную времени  $\tau$ . Построить диаграммы  $i(t)$ ,  $e_L(t)$  при переходном режиме.

Определить значение тока катушки в момент времени  $t_1 = 0,1$  с после замыкания ключа и скорость нарастания тока в начальный момент.

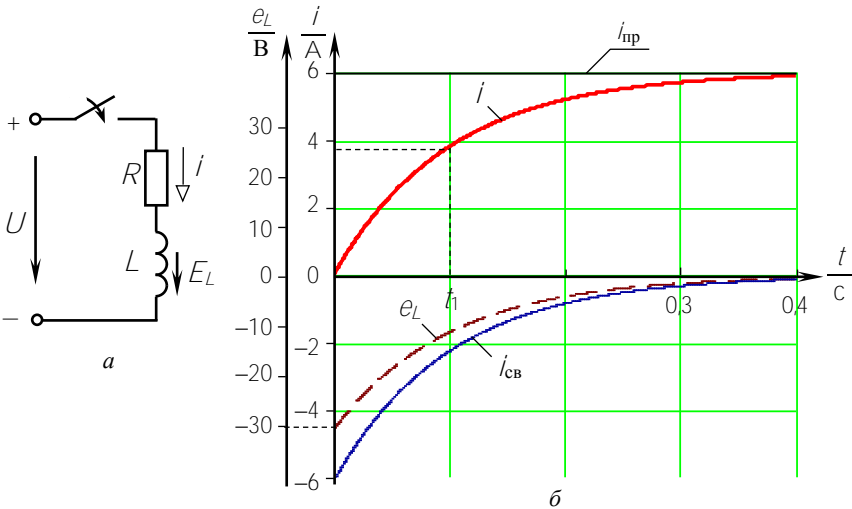


Рис. 2.1

**Решение.** По второму закону Кирхгофа уравнение электрического состояния цепи в послекоммутационном режиме

$$U = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Решение уравнения находим как сумму принужденной и свободной составляющих

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Принужденную составляющую определяем из расчета цепи в установившемся режиме, т. е. при  $t = \infty$

$$i_{\text{пр}} = U/R = 6 \text{ А}.$$

Свободную составляющую – из общего решения однородного уравнения

$$0 = Ri_{\text{н\grave{a}}} + L \frac{di_{\text{н\grave{a}}}}{dt}; \quad i_{\text{н\grave{a}}} = A\dot{a}^{\rho t},$$

где  $\rho = -\frac{R}{L}$  – показатель затухания (корень характеристического уравнения  $0 = R + L\rho$ );  $\tau = -\frac{1}{\rho} = \frac{L}{R} = 0,1 \text{ с}$  – постоянная времени цепи.

Постоянную интегрирования  $A$  находим из начальных условий с помощью первого закона коммутации, при  $t = 0$

$$i(0) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$0 = 6 + A, \quad A = -6.$$

Таким образом, ток катушки изменяется по закону

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 6 \left(1 - e^{-t/0,1}\right) \text{ А}.$$

ЭДС самоиндукции, индуцированная в катушке,

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L e^{-t/\tau} = -30 e^{-t/0,1} \text{ В}.$$

Диаграммы  $i(t)$  и  $e_L(t)$  построены на рис. 2.1, б.

Значение тока в момент времени  $t_1 = 0,1 \text{ с}$

$$i_{0,1} = 6 \left(1 - e^{-1}\right) = 3,8 \text{ А}.$$



Скорость нарастания тока в начальный момент

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U}{L} = 60 \text{ А/с.}$$

Задача 2.2. В цепи рис. 2.1,  $a$  (использовать параметры задачи 2.1) определить время, за которое ток в катушке достигнет 95 % своего установившегося значения.

Какова энергия магнитного поля катушки в этот момент времени?

Решение. Выражение для тока цепи в переходном режиме

$$i = 6(1 - e^{-t/0,1}) \text{ А.}$$

Из этого выражения определяем время  $t_1$ , за которое ток достигнет 95 % установившегося значения:

$$0,95 \cdot 6 = 6(1 - e^{-t_1/0,1}) \text{ А,}$$

откуда

$$e^{-t_1/0,1} = 0,05,$$

$$-t_1/0,1 = \ln 0,05 = \ln 5 - \ln 100 = 1,6 - 4,6 = -3,$$

$$t_1 = 0,3 \text{ с.}$$

Энергия магнитного поля в этот момент времени

$$W \Big|_{t_1=0,3 \text{ с}} = \frac{L I_{0,3}^2}{2} = \frac{0,5 \cdot (5,7)^2}{2} = 8,12 \text{ Дж.}$$

Задача 2.3. Электромагнит постоянного тока имеет сопротивление  $R = 11 \text{ Ом}$  и индуктивность  $L = 0,44 \text{ Гн}$ . Напряжение источника  $U = 220 \text{ В}$ .

Рассчитать сопротивление реостата  $R_p$ , шунтирующего обмотку электромагнита (рис. 2.2), при котором напряжение на обмотке в момент отключения электромагнита не превысит утроенного значения напряжения источника.

Решение. Установившееся значение тока электромагнита, включенного под напряжение,

$$I = U/R = 20 \text{ А.}$$

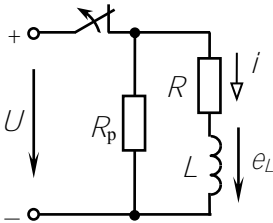


Рис. 2.2

Электрическое состояние цепи при отключенном источнике напряжения характеризуется уравнением

$$0 = (R + R_p) i + L \frac{di}{dt},$$

решение которого

$$i = A \hat{a}^{-\frac{R+R_p}{L} t}.$$

Так как ток в индуктивности не изменяется скачком, то в момент размыкания ключа ( $t = 0$ )

$$i_{t=0} = 20 = A e^0, \quad \text{значит, } A = 20,$$

и ток в переходном режиме

$$i = 20 \hat{a}^{-\frac{R+R_p}{L} t} \text{ А.}$$

Напряжение на обмотке электромагнита

$$u_{y1} = R_p i = 20 R_p \hat{a}^{-\frac{R+R_p}{L} t} \hat{A}.$$

Сопротивление  $R_p$  рассчитываем так, чтобы в момент отключения ( $t = 0$ )  $u_{\text{эм}} \leq 3U$ :

$$3U \geq 20 R_p e^0, \quad R_p \leq \frac{660}{20} = 33 \text{ Ом.}$$

**Задача 2.4.** Обмотка электромагнита имеет сопротивление  $R = 2$  Ом и индуктивность  $L = 0,5$  Гн. Установившийся ток обмотки  $I_y = 5$  А. Ток срабатывания электромагнита  $I_c = 3,5$  А.

Рассчитать сопротивление резистора  $R_{\text{д}}$ , включаемого последовательно с обмоткой, и напряжение сети  $U$ , чтобы электромагнит срабатывал через промежуток времени  $t_c = 0,1$  с после его подключения к источнику.

Решение. Ток цепи в любой момент времени определяется выражением

$$i = I_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad I_0 = \frac{U}{R + R_a}, \quad \tau = \frac{L}{R + R_a}.$$

В момент срабатывания электромагнита

$$I_{\bar{n}} = I_0 \left(1 - e^{-t_{\bar{n}}/\tau}\right); \quad 3,5 = 5 \left(1 - e^{-\frac{0,1(2+R_a)}{0,5}}\right),$$

откуда

$$e^{-0,2(2+R_a)} = 0,3; \quad -0,4 - 0,2R_a = \ln 0,3 = -1,2; \quad R_a = 4 \text{ Ом}.$$

Напряжение сети

$$U = (R + R_a) I_y = 30 \text{ В}.$$

**Задача 2.5.** Для измерения напряжения на зажимах катушки с  $R = 22 \text{ Ом}$  и  $L = 2 \text{ Гн}$  включен вольтметр по схеме рис. 2.3. Сопротивление вольтметра  $R_V = 10 \text{ кОм}$ , предел измерения  $250 \text{ В}$ .

Можно ли отключить катушку от сети напряжением  $U = 220 \text{ В}$ , не отсоединяя вольтметр?

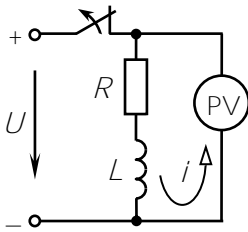


Рис. 2.3

Решение. Ток послекоммутационной цепи изменяется по закону

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ А};$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} \approx 0,0002 \text{ с}.$$

Напряжение на вольтметре в момент отключения катушки, при  $t = 0$ :

$$U_V = R_V i_0 = 10000 \cdot 10 = 100 \text{ кВ},$$

т. е. в 400 раз превышает допустимое для вольтметра значение, что приведет к повреждению изоляции прибора. Поэтому перед отключением катушки следует отсоединить вольтметр.

**Задача 2.6.** Найти закон изменения тока  $i$  и напряжения  $u_C$  в цепи рис. 2.4, *a* после замыкания ключа, если  $U = 220$  В,  $R = 10$  Ом,  $C = 100$  мкФ.

Определить постоянную времени  $\tau$  и время заряда конденсатора до напряжения 50 В.

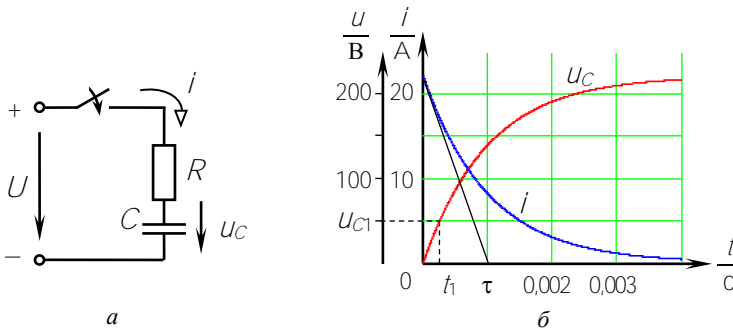


Рис. 2.4

**Решение.** После коммутации уравнение электрического состояния цепи

$$U = Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Решением его является сумма принужденной и свободной составляющих

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

Принужденную составляющую находим из расчета цепи в установившемся режиме, т. е. при  $t = \infty$

$$u_{C\text{пр}} = U = 220 \text{ В},$$

свободную составляющую – из общего решения однородного уравнения

$$0 = RC \frac{du_{C\text{н\grave{a}}}}{dt} + u_{C\text{н\grave{a}}}; \quad u_{C\text{н\grave{a}}} = \hat{A} \hat{a}^{\rho t},$$

где  $\rho = -\frac{1}{RC}$  – показатель затухания (корень характеристического уравнения  $0 = RC\rho + 1$ ).

Напряжение конденсатора в переходном режиме

$$u_C = U + \hat{A} \hat{a}^{-t/RC}.$$

Постоянную интегрирования  $\hat{A}$  находим из начальных условий с помощью второго закона коммутации, при  $t = 0$ :

$$u_{C(0)} = 0 = U + \hat{A}, \quad \text{откуда } \hat{A} = -U.$$

Тогда напряжение на конденсаторе

$$u_C = U(1 - \hat{a}^{-t/RC}) = 220(1 - \hat{a}^{-t/0,001}) \hat{A},$$

ток цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} \hat{a}^{-t/RC} = 22 \hat{a}^{-t/0,001} \hat{A}.$$

Постоянная времени

$$\tau = -\frac{1}{\rho} = RC = 10^{-3} \text{ с.}$$

Диаграммы  $u_C(t)$  и  $i(t)$  построены на рис. 2.4, б.

Для определения времени, за которое конденсатор зарядится до напряжения 50 В, воспользуемся общим выражением  $u_C$ :

$$50 = 220(1 - \hat{a}^{-t_1/0,001}),$$

откуда

$$\hat{a}^{-1000t_1} = 0,775; \quad -1000t_1 = \ln 0,775;$$

$$t_1 = \frac{\ln 7,75 - \ln 10}{-1000} = \frac{2,04 - 2,3}{-1000} = 26 \cdot 10^{-5} \text{ н.}$$

**Задача 2.7.** Конденсатор емкостью  $C = 500$  мкФ, заряженный до напряжения источника  $U$ , разряжается на резистор сопротивлением  $R$  (рис. 2.5, а). При этом за время  $t_1 = 0,035$  с напряжение на зажимах конденсатора снижается в два раза.

Определить сопротивление  $R$  и постоянную времени  $\tau$  переходного процесса. Построить диаграммы  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

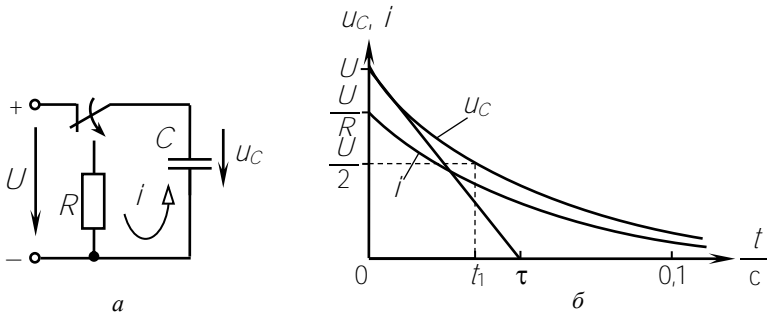


Рис.2.5

**Решение.** По второму закону Кирхгофа для послекоммутационной цепи

$$0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Это уравнение имеет решение

$$u_C = u_{C\text{н\acute{a}}} = \hat{A} \hat{a}^{\rho t}, \quad \text{где } \rho = -\frac{1}{RC}.$$

Так как напряжение на емкости не изменяется скачком согласно второму закону коммутации, то в момент переключения рубильника, при  $t = 0$ ,  $u_C = U = \hat{A} \hat{a}^0$ , значит,  $\hat{A} = U$ , и напряжение при разряде конденсатора

$$u_C = U \hat{a}^{-t/RC}.$$

Рассматривая это уравнение для момента времени  $t_1$ , определяем сопротивление резистора  $R$ :

$$\frac{U}{2} = U \hat{a}^{-\frac{0,035 \cdot 10^6}{R \cdot 500}}, \quad 0,5 = \hat{a}^{-\frac{70}{R}},$$

$$R = -\frac{70}{\ln 5 - \ln 10} = -\frac{70}{1,6 - 2,3} = 100 \hat{\Omega}.$$

Постоянная времени  $\tau = RC = 0,05$  с.

Диаграммы изменения напряжения  $u_C$  и тока при разряде конденсатора (рис. 2.5, б) строим по уравнениям:

$$u_C = U \hat{a}^{-t/0,05} \hat{\text{A}};$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} \hat{a}^{-t/0,05} \hat{\text{A}}.$$

**Задача 2.8.** Цепь, состоящая из двух параллельных ветвей ( $R_1 = R_2 = 10$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 200$  мкФ), включается на постоянное напряжение  $U = 24$  В (рис. 2.6, а).

Найти закон изменения переходных токов в ветвях и неразветвленной части, построить диаграммы  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i(t)$ .

Как следует изменить емкость  $C$  конденсатора, чтобы ток в неразветвленной части цепи имел постоянное значение? Определить значение этого тока.

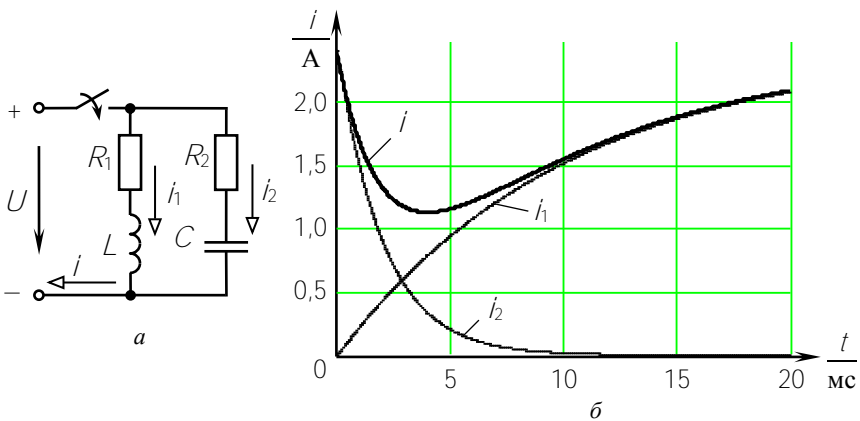


Рис. 2.6

Решение. Токи переходного режима в параллельных ветвях схемы определяются уравнениями:

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \left( 1 - \hat{a}^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) = 2,4 \left( 1 - \hat{a}^{-100t} \right) \text{ \AA}; \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1} = 0,01 \text{ \textmu s};$$

$$i_2 = \frac{U}{R_2} \hat{a}^{-\frac{t}{\tau_2}} = 2,4 \hat{a}^{-500t} \text{ \AA}; \quad \tau_2 = R_2 C = 0,002 \text{ \textmu s}.$$

Общий ток цепи находим по первому закону Кирхгофа

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} \right) = 2,4 \left( 1 - e^{-100t} + e^{-500t} \right) \text{ A}.$$

Как видно из последнего выражения, общий ток не будет зависеть от времени при условии:

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \text{д. \AA.} \quad \frac{L}{R} = RC,$$

откуда 
$$C = \frac{L}{R^2} = 1000 \text{ мкФ}.$$

При этом ток  $i = 2,4 \text{ A}$ .

**Задача 2.9.** Определить начальные и установившиеся значения токов  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ , напряжений  $u_C$  и  $u_L$  при замыкании ключа (рис. 2.7), если  $U = 220 \text{ В}$ ,  $R = 22 \text{ Ом}$ ;  $L = 100 \text{ мГн}$ ,  $C = 50 \text{ мкФ}$ . Напряжение на конденсаторе до замыкания ключа равнялось нулю.

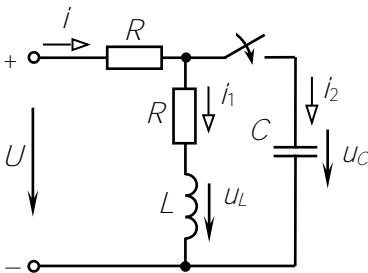


Рис. 2.7

Решение. До коммутации токи и напряжения имели следующие значения:

$$i = i_1 = U/2R = 5 \text{ \AA};$$

$$i_2 = 0;$$

$$u_L = u_C = 0.$$



Запишем уравнения законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений послекоммутационной цепи:

$$i = i_1 + i_2, \quad (2.1)$$

$$U = Ri + u_C, \quad (2.2)$$

$$Ri_1 + u_L = u_C. \quad (2.3)$$

Так как ток в индуктивности и напряжение на емкости не изменяются скачком, то в момент коммутации

$$t = 0: \quad i_{(0)} = 5 \text{ А}, \quad u_{C(0)} = 0,$$

согласно (2.2) 
$$i_{(0)} = \frac{U - u_{C(0)}}{R} = 10 \text{ А},$$

тогда из (2.1) 
$$i_2(0) = i_{(0)} - i_1(0) = 5 \text{ А},$$

из (2.3) 
$$u_L(0) = u_C(0) - Ri_1(0) = -110 \text{ В}.$$

В установившемся режиме послекоммутационной цепи

$$t = \infty: \quad i = i_1 = U/2R = 5 \text{ А}; \quad i_2 = 0;$$

$$u_L = 0; \quad u_C = Ri_1 = 110 \text{ В}.$$

Ответы приведены в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2 . 1

Режим Величина	До коммутации	$t = 0$	$t = \infty$
$i, \text{ А}$	5	10	5
$i_1, \text{ А}$	5	5	5
$i_2, \text{ А}$	0	5	0
$u_C, \text{ В}$	0	0	110
$u_L, \text{ В}$	0	-110	0

Задача 2.10. Катушка с индуктивностью  $L = 0,127$  Гн и сопротивлением  $R = 6,35$  Ом включается на синусоидальное напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(\omega t + \psi)$  В, где  $\psi = 30^\circ$ . Частота напряжения 50 Гц.

Определить закон изменения тока в цепи, а также значение тока через два периода после включения.

Рассчитать начальную фазу напряжения сети, при которой будет отсутствовать переходный процесс.

**Решение.** Для определения тока катушки в установившемся режиме находим

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,127 = 40 \text{ Ом}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 40,5 \text{ Ом};$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{6,35}{40,5}; \quad \varphi = 81^\circ; \quad \psi_i = \psi - \varphi = 30 - 81 = -51^\circ.$$

Ток установившегося режима

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 7,68 \sin(\omega t - 51^\circ) \text{ А.}$$

Свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = A e^{-t/\tau}, \quad \text{где } \tau = \frac{L}{R} = 0,02 \text{ с.}$$

Действительный ток

$$i = i_{i_0} + i_{i_a} = 7,68 \sin(\omega t - 51^\circ) + A \hat{a}^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  находим из начальных условий, при  $t = 0$ :  $i(0) = 0 = 7,68 \sin(-51^\circ) + A$ ,

откуда 
$$A = -7,68 \sin(-51^\circ) = 5,97.$$

Уравнение тока катушки

$$i = 7,68 \sin(\omega t - 51^\circ) + 5,97 \hat{a}^{-t/0,02} \text{ А.}$$

Диаграммы изменения тока  $i$  и составляющих  $i_{пр}$ ,  $i_{св}$  приведены на рис. 2.8.

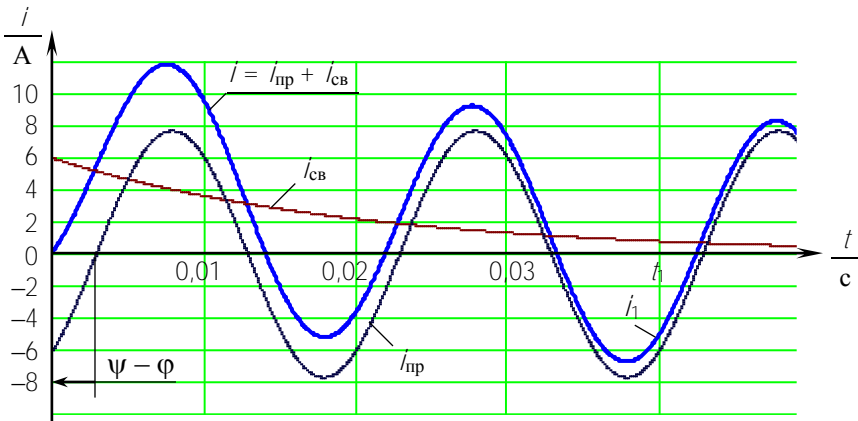


Рис. 2.8

Значение тока через два периода после включения

$$(\omega t_1 = 4\pi; \quad t_1 = 4\pi/314 = 0,04 \text{ с}):$$

$$i_1 = 7,68\sin(720^\circ - 51^\circ) + 5,97e^{-0,04/0,02} = -5,17 \text{ А.}$$

Переходный процесс будет отсутствовать, если

$$i_{св} = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} = 0,$$

т. е. при  $\psi - \varphi = 0$ , значит  $\psi = \varphi = 81^\circ$ .

Задача 2.11. Найти закон изменения тока  $i(t)$  и напряжения  $u_C(t)$  на конденсаторе, если последовательно соединенные резистор и конденсатор ( $R = 2 \text{ Ом}$ ,  $C = 50 \text{ мкФ}$ ) включаются на синусоидальное напряжение  $u = 141\sin(314t + \psi) \text{ В}$ , где  $\psi = 45^\circ$ .

При каком значении  $\psi$  начальное значение тока будет максимальным?

Решение. Ток и напряжение конденсатора в установившемся режиме

$$i_{i0} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 2,21 \sin(314t + 133^\circ 20') \text{ \AA},$$

где  $\varphi = \text{arctg} -\frac{1/\omega C}{R} = \text{arctg} -\frac{63,7}{2} = -88^\circ 20'$ ;

$$u_{C_{i0}} = \frac{U_m}{Z} \cdot X_C \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 140 \sin(314t + 43^\circ 20') \text{ \AA}.$$

Свободная составляющая напряжения

$$u_{C_{n\dot{a}}} = \dot{A} \dot{a}^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = RC = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ с.}$$

Общее выражение для напряжения

$$u_C = u_{C_{i0}} + u_{C_{n\dot{a}}} = 140 \sin(314t + 43^\circ 20') + \dot{A} \dot{a}^{-t/\tau} \text{ \AA}.$$

Используя второй закон коммутации, находим постоянную интегрирования  $A$ ,

$$t=0: u_C(0) = 0 = 140 \sin 43^\circ 20' + \dot{A}; \quad \dot{A} = -96.$$

Окончательное выражение для напряжения

$$u_C = \frac{U_m}{Z} \cdot X_C \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z} \cdot X_C \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \dot{a}^{-t/\tau},$$

$$u_C = 140 \sin(314t + 43^\circ 20') - 96 \dot{a}^{-10^4 t} \text{ \AA}.$$

Ток конденсатора

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_m}{R} \left[ \cos \varphi \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin \varphi \cdot \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \dot{a}^{-t/\tau} \right],$$

$$i = 2,21 \sin(314t + 133^\circ 20') + 48 \dot{a}^{-10^4 t} \text{ \AA}.$$

В момент включения цепи, как следует из общего выражения тока,

$$i_{(0)} = \frac{U_m}{R} \sin \psi.$$

Значит, наибольшее значение  $i_{\max} = \frac{U_m}{R} = 70,5 \text{ А}$  будет при

$\psi = \frac{\pi}{2}$ . Действительно, в момент включения цепи емкость как бы

закорочена ( $U_{C(0)} = 0$ ) и все внешнее напряжение приложено к сопротивлению  $R$ .

### Контрольные задачи

Задача 2.12. Определить длительность переходного процесса в цепи рис. 2.1,  $a$  ( $R = 5 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,5 \text{ Гн}$ ) при замыкании ключа, если считать, что переходный процесс заканчивается по прошествии времени  $t = 4\tau$ .

Задача 2.13. В цепи рис. 2.1,  $a$  рассчитать сопротивление резистора  $R$  из условия, что за время  $t = 0,1 \text{ с}$  после подключения цепи к источнику постоянного напряжения ток катушки достигнет значения  $i = 2,6 \text{ А}$ . Индуктивность катушки  $L = 0,5 \text{ Гн}$ . Ток установившегося режима  $3 \text{ А}$ .

Определить значение напряжения  $u_L$  в момент  $t = 0,1 \text{ с}$ .

Задача 2.14. Катушка, индуктивность которой  $L = 2 \text{ Гн}$  и сопротивление  $R = 5 \text{ Ом}$ , замыкается накоротко в момент, когда ток катушки равен  $10 \text{ А}$ .

Определить напряжение на катушке и скорость убывания тока в момент замыкания. Какова скорость убывания тока, когда  $i = 5 \text{ А}$ ?

Задача 2.15. К зажимам обмотки возбуждения машины постоянного тока подключен вольтметр, сопротивление которого  $3000 \text{ Ом}$ . Индуктивность обмотки  $L = 15 \text{ Гн}$ , активное сопротивление  $20 \text{ Ом}$ .

Во сколько раз повысится напряжение на вольтметре в момент отключения цепи (рис. 2.3) от источника постоянного напряжения  $U = 100 \text{ В}$ ?

Рассчитать энергию, выделившуюся в вольтметре после размыкания.

Задача 2.16. Определить начальное значение ЭДС самоиндукции  $e_L$ , возникающей в катушке при размыкании ключа (рис. 2.9).

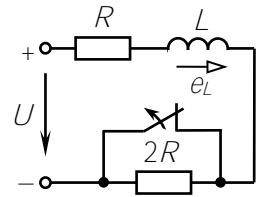


Рис. 2.9

Задача 2.17. Определить длительность переходного процесса, возникающего при разряде конденсатора емкостью  $C = 500$  мкФ через резистор  $R = 100$  Ом. Считать, что

переходный процесс заканчивается по прошествии времени  $t = 4\tau$ .

Задача 2.18. В цепи рис. 2.4, а определить емкость  $C$  конденсатора из условия, что за время  $t_1 = 0,01$  с после включения цепи к источнику постоянного напряжения  $U = 230$  В напряжение на конденсаторе при его заряде через резистор  $R = 100$  Ом достигает значения  $u_{C1} = 200$  В.

Рассчитать значение тока  $i_1$  в момент времени  $t_1 = 0,01$  с.

Задача 2.19. Конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ, заряженный до напряжения  $U_{C0} = 220$  В, разряжается на резистор  $R$  (рис. 2.5, а).

Определить сопротивление резистора  $R$ , если за время  $t = 3,5 \cdot 10^{-3}$  с энергия электрического поля конденсатора уменьшилась вдвое по сравнению с первоначальной.

Задача 2.20. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i_1$ ,  $i_2$  и напряжения  $u_C$  при замыкании ключа в цепи рис. 2.10, если  $U = 220$  В,  $R = 11$  Ом,  $R_1 = 44$  Ом,  $C = 100$  мкФ.

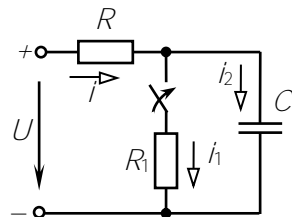


Рис. 2.10

Задача 2.21. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i_1$ ,  $i_2$  и напряжений  $u_C$ ,  $u_L$  при замыкании ключа в цепи рис. 2.6, а, если  $U = 110$  В,  $R_1 = 11$  Ом,  $R_2 = 22$  Ом.

Задача 2.22. Катушка, индуктивность которой  $L = 160$  мГн и активное сопротивление  $R = 8,8$  Ом, включается к источнику синусоидального напряжения

$$u = 310 \sin(314t + \psi) \text{ В.}$$

Определить начальную фазу напряжения  $\psi$ , при которой свободная составляющая тока в начальный момент имеет максимальное значение. Рассчитать при этом наибольшее значение тока переходного режима  $i_{\max}$  и соответствующее ему время  $t_1$ .

Задача 2.23. В задаче 2.11 определить начальную фазу синусоидального напряжения  $\psi$ , при которой будет отсутствовать переходный процесс, т. е. напряжение конденсатора сразу после включения будет изменяться по синусоидальному закону.

### Ответы к контрольным задачам

2.12. 0,4 с.

2.13.  $R = 10 \text{ Ом}$ ;  $u_L = 4 \text{ В}$ .

2.14.  $u_L = 50 \text{ В}$ ;  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -25 \text{ А/с}$ ;  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{i=5 \text{ А}} = -12,5 \text{ А/с}$ .

2.15. 150 раз;  $W = 186 \text{ Дж}$ .

2.16.  $2U$ .

2.17. 0,2 с.

2.18.  $C = 50 \text{ мкФ}$ ;  $i = 0,308 \text{ А}$ .

2.19. 100 Ом.

2.20.  $t = 0$ :  $i = 0$ ;  $i_1 = 5 \text{ А}$ ;  $i_2 = -5 \text{ А}$ ;  $u_C = 220 \text{ В}$ ;

$t = \infty$ :  $i = i_1 = 4 \text{ А}$ ;  $i_2 = 0$ ;  $u_C = 176 \text{ В}$ .

2.21.  $t = 0$ :  $i = i_2 = 5 \text{ А}$ ;  $i_1 = 0$ ;  $u_C = 0$ ;  $u_L = 110 \text{ В}$ ;

$t = \infty$ :  $i = i_1 = 10 \text{ А}$ ;  $i_2 = 0$ ;  $u_C = 110 \text{ В}$ ;  $u_L = 0$ .

2.22.  $\psi = 170^\circ$ ;  $i_{\max} = 9,6 \text{ А}$ ;  $t_1 = 0,01 \text{ с}$ .

2.23.  $\psi = 1^\circ 40' \pm 180^\circ$ .

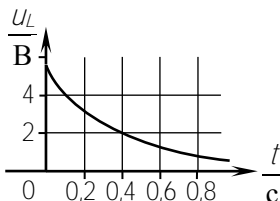
## Тест для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов

### Тест 2.1

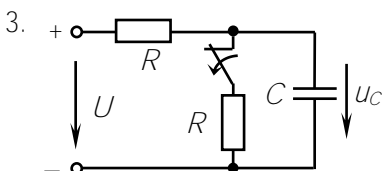
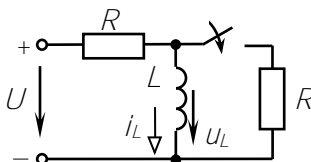
#### Вариант 1

1. Определить постоянную времени переходного процесса при включении индуктивной катушки к источнику постоянного напряжения, используя диаграмму  $u_L(t)$ .

Рассчитать активное сопротивление катушки  $R$ , если  $L = 1,6$  Гн.



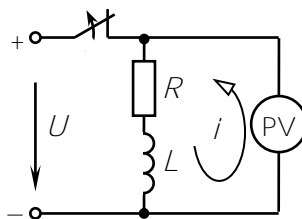
2. Определить начальное и установившееся значения тока  $i_L$  при замыкании ключа, если  $U = 30$  В,  $R = 15$  Ом.



Рассчитать начальное и установившееся значения напряжения  $u_C$  при размыкании ключа, если  $U = 10$  В,  $R = 5$  Ом.

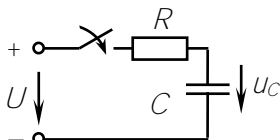
4. Для измерения напряжения на зажимах обмотки электрического аппарата с  $R = 22$  Ом и  $L = 2$  Гн включён вольтметр. Сопротивление вольтметра  $R_V = 100$  кОм, предел измерения 250 В.

Рассчитать напряжение на вольтметре в момент отключения обмотки. Можно ли отключать обмотку от сети  $U = 220$  В, не отсоединяя вольтметр?



5. Определить ёмкость  $C$  конденсатора из условия, что за время  $t_1 = 0,01$  с после замыкания ключа напряжение на конденсаторе достигнет значения  $u_{C1} = 200$  В, если  $U = 230$  В,  $R = 100$  Ом.

Рассчитать значение тока  $i_1$  в момент времени  $t_1 = 0,01$  с.



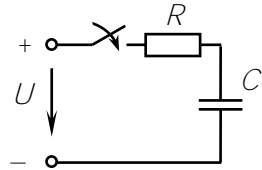
#### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

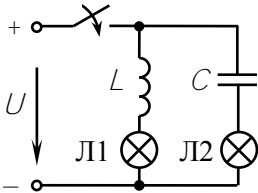


## Вариант 2

1. Определить длительность переходного процесса в цепи при замыкании выключателя, если  $R = 5 \text{ кОм}$ ,  $C = 4 \text{ мкФ}$ . Считайте, что переходный процесс практически завершается через время  $t = 4\tau$ .



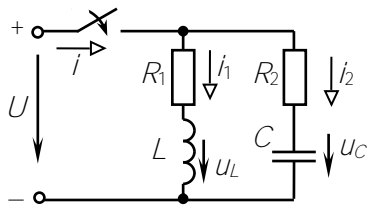
2. Какая из ламп накаливания (Л1 или Л2) в момент замыкания выключателя не будет светиться, а какая будет иметь наибольшую яркость?



3. Незаряженный конденсатор и реостат сопротивлением  $R = 76 \text{ Ом}$  соединены последовательно.

Какое значение будет иметь ток в момент включения цепи на напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 380 \sin(\omega t + \pi/4) \text{ В}$ ?

4. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  и напряжений  $u_L$ ,  $u_C$  при замыкании выключателя, если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 25 \text{ Ом}$ . Напряжение на конденсаторе до замыкания выключателя было равно нулю.



5. Обмотка реле постоянного тока ( $R = 15 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,4 \text{ Гн}$ ) включается в сеть постоянного напряжения  $U$  последовательно с резистором  $R_0$ . По прошествии времени  $t_1 = 4,4 \text{ мс}$  ток достигнет значения  $i_1 = 0,12 \text{ А}$ . В установившемся режиме  $i_{\text{уст}} = 0,6 \text{ А}$ .

Определить  $R_0$  и  $U$ .

### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

### Вариант 3

1. Реостат соединён последовательно с конденсатором ёмкостью  $C = 2 \text{ мкФ}$ .

Рассчитать сопротивление реостата  $R$ , чтобы переходный процесс при включении цепи имел практическую длительность  $t = 5\tau = 10 \text{ с}$ .

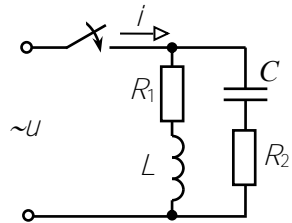
2. Катушка и реостат сопротивлением  $R = 22 \text{ Ом}$  соединены параллельно.

Какое значение будет иметь суммарный ток этих ветвей в момент включения цепи под напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 220 \cos \omega t \text{ В}$ ?

3. Определить значение общего тока  $i$  в момент включения цепи под напряжение

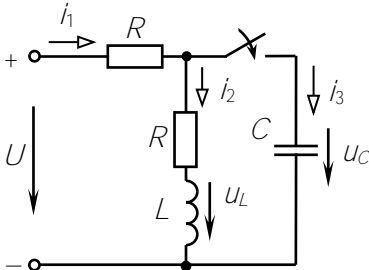
$$u = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(\omega t + \pi/6) \text{ В},$$

если  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 31,1 \text{ Ом}$ .

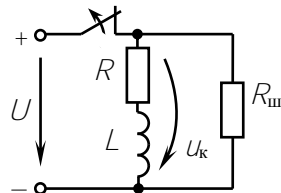


4. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i_1, i_2, i_3$ , напряжений  $u_L, u_C$  при замыкании ключа, если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ .

До замыкания ключа  $u_C = 0$ .



5. Рассчитать сопротивление шунтирующего резистора  $R_{ш}$ , чтобы в момент отключения катушки электромагнитного аппарата ( $R = 4 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ Гн}$ ) от источника напряжения  $U$  напряжение катушки  $u_k$  не превышало  $2U$ .



#### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

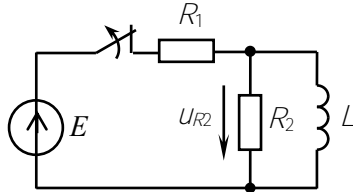
## Вариант 4

1. Последовательная цепь из элементов  $R$ ,  $C$  подключается к источнику постоянной ЭДС. Зависимость напряжения  $u_R(t)$  задана таблицей.

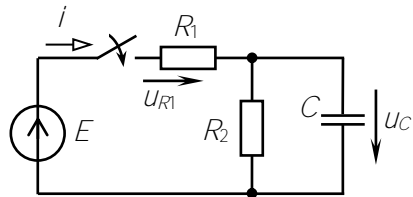
$t, \text{с}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$u_R, \text{В}$	200	155,8	121,3	94,5	73,6	57,3

Определить ёмкость  $C$ , если сопротивление  $R = 1000 \text{ Ом}$ .

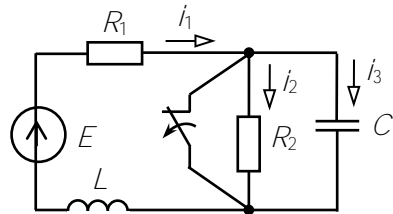
2. Рассчитать напряжение на сопротивлении  $R_2$  в момент размыкания ключа, если  $E = 300 \text{ В}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ .



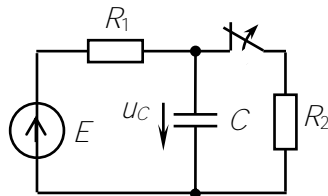
3. Рассчитать напряжение на сопротивлении  $R_1$  в момент замыкания ключа, если  $E = 150 \text{ В}$ .



4. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ , напряжения  $u_C$ , если  $E = 200 \text{ В}$ ,  $R_1 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ .



5. Определить закон изменения напряжения  $u_C(t)$ , если  $E = 150 \text{ В}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 200 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ .

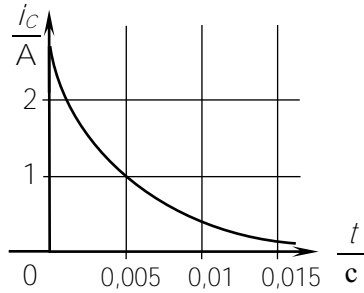


### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

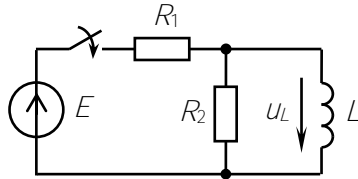
## Вариант 5

1. По диаграмме тока конденсатора  $i_C(t)$  определить постоянную времени  $\tau$  при включении конденсатора через резистор  $R$  к источнику постоянного напряжения.

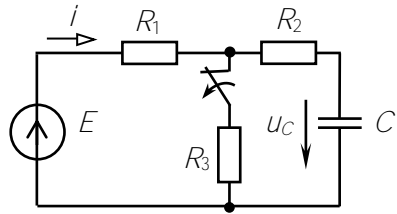


Расчётом проверить значение  $\tau$ , если  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $C = 250 \text{ мкФ}$ .

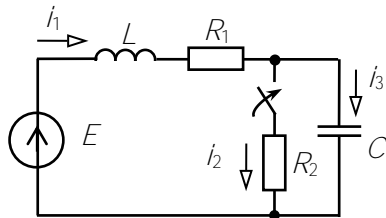
2. Определить напряжение на индуктивности  $u_L$  в момент замыкания ключа, если  $E = 300 \text{ В}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ .



3. Определить напряжение  $u_C$  и ток  $i$  в момент размыкания ключа, если  $E = 300 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 100 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ .



4. Определить начальные и установившиеся значения токов  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ , напряжений  $u_C$ ,  $u_L$ , если  $E = 300 \text{ В}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ .



5. Найти закон изменения напряжения  $u_C(t)$  при размыкании ключа в задаче № 3.

### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

### 3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### Задачи с решениями

**Задача 3.1.** ЭДС периодически изменяется по трапециoidalному закону (рис. 3.1, а).

Записать ряд Фурье и построить по нему кривую мгновенных значений ЭДС (при разложении в ряд ограничиться тремя членами ряда).

Определить коэффициенты, характеризующие форму кривой.

**Решение.** Заданная функция симметрична относительно начала координат и оси абсцисс, поэтому ряд Фурье не будет содержать постоянной и косинусных составляющих, а также четных гармоник [8]

$$\dot{a} = \frac{4\dot{A}_m}{\alpha\pi} \left( \sin\alpha \cdot \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots \right).$$

При  $\alpha = \pi/4$  и  $E_m = 100$  В (рис. 3.1, а)

$$e = 115 \sin \omega t + 12,8 \sin 3\omega t - 4,6 \sin 5\omega t \text{ В.}$$

По полученному уравнению на рис. 3.1, б построены кривые отдельных гармоник и результирующая кривая. Отличие последней от исходной трапеции обуславливается ограничением числа членов ряда Фурье.

Коэффициент амплитуды  $k_a = \frac{\dot{A}_m}{\dot{A}} \approx \frac{100}{81,9} = 1,22$ , где

$$E = \sqrt{\frac{E_{m1}^2}{2} + \frac{E_{m3}^2}{2} + \frac{E_{m5}^2}{2} + \dots} \approx \sqrt{\frac{115^2}{2} + \frac{12,8^2}{2} + \frac{4,6^2}{2}} = 81,9 \text{ В -}$$

действующее значение несинусоидальной ЭДС.

Коэффициент формы

$$k_0 = \frac{\dot{A}}{\dot{A}_{\text{н.д.и.д.}}} = \frac{81,9}{75} = 1,09,$$

где  $\hat{A}_{\text{н.д.н.а.}} = \hat{A}_m \frac{\pi - \alpha}{\pi} = 75 \hat{A}$  – среднее по модулю значение ЭДС.

Коэффициент искажения  $k_e = \frac{\hat{A}_1}{\hat{A}} = \frac{81,3}{81,9} = 0,993$ ,

где  $E_1 = \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{115}{\sqrt{2}} = 81,3 \text{ В}$  – действующее значение первой гармоники ЭДС.

Коэффициент гармоник

$$k_a = \frac{\sqrt{\frac{\hat{A}_{m3}^2}{2} + \frac{\hat{A}_{m5}^2}{2} + \dots}}{\hat{A}_1} \approx \frac{\sqrt{\frac{12,3^2}{2} + \frac{4,6^2}{2}}}{81,3} = 0,118.$$

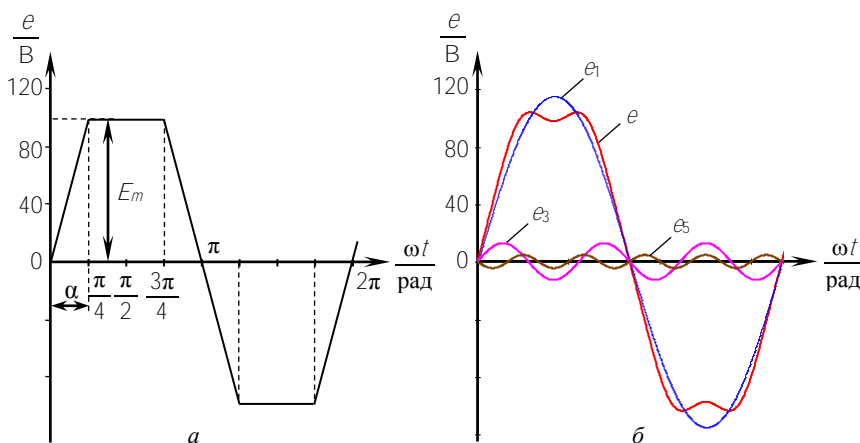


Рис. 3.1

**Задача 3.2.** Напряжение генератора имеет пилообразную форму (рис. 3.2) с амплитудой  $U_m = 100 \text{ В}$ .

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного вольтметров, подключенных к генератору.

**Решение.** Уравнение напряжения генератора на участке от  $t = 0$  до  $t = T$  есть уравнение прямой линии:

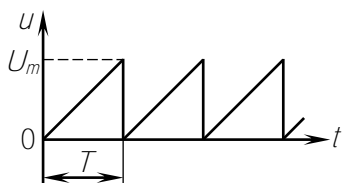


Рис. 3.2

$$u = kt = \frac{U_m}{T} t.$$

Магнитоэлектрический вольтметр показывает среднее за период значение измеряемого напряжения

$$U_{\text{н\ddot{o}}} = \frac{1}{\mathcal{O}} \int_0^T u dt = \frac{U_m}{\mathcal{O}^2} \int_0^T t \cdot dt = \frac{U_m}{2\mathcal{O}^2} \cdot t^2 \Big|_0^T = \frac{U_m}{2} = 50 \text{ \AA}.$$

Электромагнитный вольтметр показывает действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{O}} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{\mathcal{O}^3} \int_0^T t^2 dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{3}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} = 57,7 \text{ \AA}.$$

**Задача 3.3.** Источник синусоидального напряжения  $U = 220 \text{ В}$  питает резистор  $R = 100 \text{ Ом}$  через однополупериодный выпрямитель (сопротивление выпрямителя в проводящем состоянии равно нулю, в непроводящем – бесконечности) (рис. 3.3, а).

1) Определить показания электродинамических приборов.

2) Разложив кривую выпрямленного напряжения (рис. 3.3, б) в ряд Фурье, рассчитать действующие значения тока и напряжения по их гармоническому составу.

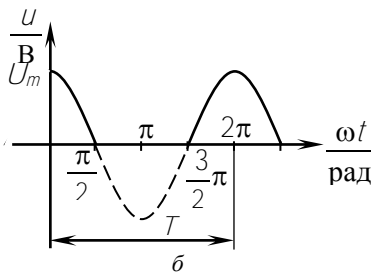
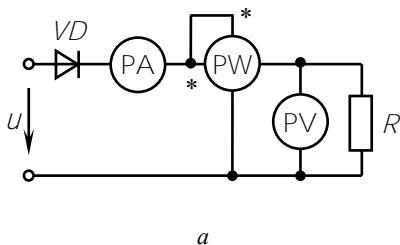


Рис. 3.3

**Решение.** 1) Для кривой рис. 3.3, б действующее значение напряжения, на которое реагирует электродинамический вольтметр, равно

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T/2} \int_0^{T/4} u^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/4} U_m^2 \cos^2 \omega t dt} =$$

$$= \frac{U_m}{2} = \frac{\sqrt{2}U}{2} = 155,5 \text{ \AA}.$$

В цепи с резистором форма кривой тока повторяет форму кривой напряжения. Электродинамический амперметр показывает действующее значение тока  $I = \frac{U}{R} = \frac{155,5}{100} = 1,555 \text{ А}.$

Активная мощность (показание ваттметра)

$$P = RI_0^2 + RI_1^2 + RI_2^2 + RI_4^2 + \dots = RI^2 = UI = 242 \text{ Вт}.$$

2) Кривая выпрямленного напряжения (рис. 3.3, б) симметрична относительно оси ординат и поэтому ряд Фурье не содержит синусных составляющих [8]

$$u = \frac{2U_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right),$$

$$u = 99 + 155 \cos \omega t + 66 \cos 2\omega t - 13,2 \cos 4\omega t + \dots \text{ В}.$$

Гармонический состав тока резистора аналогичен напряжению

$$i = \frac{U}{R} = 0,99 + 1,55 \cos \omega t + 0,66 \cos 2\omega t - 0,132 \cos 4\omega t + \dots \text{ А}.$$

Действующие значения напряжения и тока

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots} \approx \sqrt{99^2 + \frac{155^2}{2} + \frac{66^2}{2} + \frac{13,2^2}{2}} = 155 \text{ В},$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + \dots} \approx 1,55 \text{ \AA}.$$



Незначительное отличие действующих значений напряжения и тока от аналогичных значений, полученных интегрированием, обуславливается ограничением числа членов ряда Фурье.

**Задача 3.4.** Начертить диаграмму изменения тока через катушку индуктивности  $L = 10$  мГн, если напряжение на ней периодически изменяется в соответствии с рис. 3.4, а.

**Решение.** Зависимость мгновенных значений напряжения и тока идеальной ( $R = 0$ ) катушки индуктивности описывается дифференциальным уравнением

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (3.1)$$

За время  $0 < t < T/2$  напряжение на катушке  $u > 0$  и  $u = \text{const} = U_m$ . Это соответствует линейному возрастанию

$\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$  тока от  $-I_m$  до  $+I_m$ .

Проинтегрировав (3.1) по времени в пределах от 0 до  $T/2$ , получим

$$\int_0^{T/2} u dt = L \int_0^{T/2} di.$$

Так как при этом  $u = U_m$ ,

$$\text{то } U_m \frac{\Delta t}{2} = L(i_{T/2} - i_0).$$

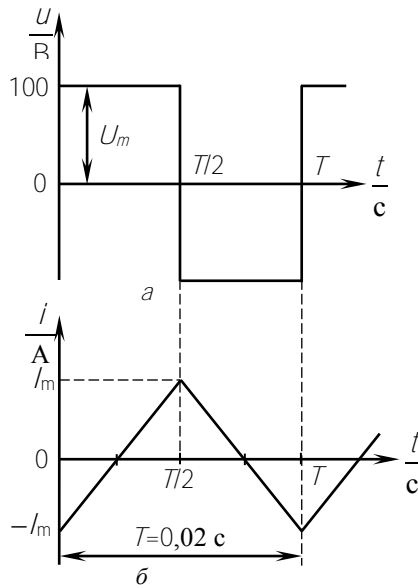


Рис. 3.4

Поскольку заданное напряжение не содержит постоянной составляющей, то она не может присутствовать и в кривой тока. В связи с этим

$$i_{T/2} - i_0 = I_m - (-I_m) = 2I_m.$$

Таким образом,

$$U_m \frac{T}{2} = L \cdot 2 I_m \quad \text{и} \quad I_m = \frac{T U_m}{4 L} = \frac{0,02 \cdot 100}{4 \cdot 0,01} = 50 \text{ А.}$$

Диаграмма  $i(t)$  построена на рис. 3.4, б.

**Задача 3.5.** В цепи рис. 3.5  $R = 60 \text{ Ом}$ ,  $C = 40 \text{ мкФ}$ ,  $u = 50 + 100 \sin 314 t + 40 \sin(942 t - 45^\circ) \text{ В}$ .

Записать уравнения мгновенных значений тока и напряжений на элементах цепи.

**Решение.** Используя принцип наложения, определяем уравнение тока цепи как сумму отдельных гармоник, вызываемых соответствующими гармониками напряжения источника

$$i = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{m3} \sin(3\omega t - 45^\circ - \varphi_3) \text{ А.}$$

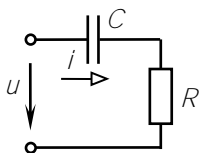


Рис. 3.5

Отсутствие в уравнении тока постоянной составляющей объясняется наличием в последовательной цепи конденсатора, представляющего для постоянного тока бесконечно большое сопротивление.

Амплитуды первой и третьей гармоник тока

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \frac{U_{m1}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{100}{\sqrt{60^2 + (1/314 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2}} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А};$$

$$I_{m3} = \frac{U_{m3}}{Z_3} = \frac{U_{m3}}{\sqrt{R^2 + (1/3\omega C)^2}} = \frac{40}{\sqrt{60^2 + (1/942 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2}} = \frac{40}{65,6} = 0,61 \text{ А.}$$

Углы сдвига фаз между гармониками напряжения и тока

$$\varphi_1 = \arctg \frac{-1/\omega C}{R} = -53^\circ; \quad \varphi_3 = \arctg \frac{-1/3\omega C}{R} = -24^\circ.$$

Таким образом, уравнение мгновенного значения тока

$$i = 1\sin(314t + 53^\circ) + 0,61\sin(942t - 21^\circ) \text{ А.}$$

Гармонический состав напряжения и тока резистора совпадает:

$$u_R = Ri = 60\sin(314t + 53^\circ) + 36,6\sin(942t - 21^\circ) \text{ В.}$$

Напряжение на конденсаторе кроме первой и третьей гармоник содержит постоянную составляющую, равную постоянной составляющей источника питания,

$$u_C = U_0 + \frac{1}{\omega C} I_{m1}\sin(\omega t - \varphi_1 - 90^\circ) + \frac{1}{3\omega C} I_{m3}\sin(3\omega t - 45^\circ - \varphi_3 - 90^\circ);$$

$$u_C = 50 + 80\sin(314t - 37^\circ) + 16,2\sin(942t - 111^\circ) \text{ В.}$$

**Задача 3.6.** К зажимам цепи (рис. 3.6) подключен источник периодического несинусоидального напряжения

$$u = 141\sin\omega t + 70,7\sin 3\omega t + 35,3\sin 5\omega t \text{ В,}$$

где основная частота  $\omega = 314 \text{ 1/с}$ .

Активное сопротивление и индуктивность цепи соответственно равны  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 31,8 \text{ мГн}$ .

Рассчитать значения емкости  $C$ , соответствующие наступлению резонанса на частотах  $\omega$ ,  $3\omega$  и  $5\omega$ .

Определить действующие значения гармоник тока для этих трех значений емкости. Построить диаграммы действующих значений гармоник тока и действующего значения несинусоидального тока в функции емкости  $C$ .

**Решение.** 1. Из условия резонанса напряжений на  $k$ -й гармонике  $k\omega L = 1/k\omega C$  находим численные значения емкости  $C$ , соответствующие наступлению резонанса на частотах трех гармоник напряжения:

для первой гармоники ( $k = 1$ )

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{314^2 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3}} = 319 \text{ мкФ};$$

для третьей гармоники ( $k = 3$ )

$$C_3 = \frac{1}{k^2 \omega^2 L} = \frac{1}{3^2 \cdot 314^2 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3}} = 35,44 \text{ мкФ};$$

для пятой гармоники ( $k = 5$ )

$$C_5 = \frac{1}{k^2 \omega^2 L} = \frac{1}{5^2 \cdot 314^2 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3}} = 12,76 \text{ мкФ}.$$

2. Определяем действующие значения гармоник тока для емкости  $C_1 = 319 \text{ мкФ}$ :

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C_1)^2}} = \frac{U_1}{R} = \frac{141/\sqrt{2}}{10} = 10 \text{ А}.$$

(На первой гармонике имеет место резонанс напряжений. Поэтому  $\omega L = 1/\omega C_1$ ).

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - 1/3\omega C_1)^2}} = \frac{70,7/\sqrt{2}}{27,8} = 1,8 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{U_5}{Z_5} = \frac{U_5}{\sqrt{R^2 + (5\omega L - 1/5\omega C_1)^2}} = \frac{35,3/\sqrt{2}}{50} = 0,5 \text{ А}.$$

3. Действующие значения гармоник тока для емкости  $C_3 = 35,44 \text{ мкФ}$  определяем аналогично:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C_3)^2}} = 1,24 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - 1/3\omega C_3)^2}} = \frac{U_3}{R} = 5 \text{ А}.$$

(При емкости  $C_3 = 35,44 \text{ мкФ}$  имеет место резонанс напряжений и  $3\omega L = 1/3\omega C_3$ ).

$$I_5 = \frac{U_5}{Z_5} = \frac{U_5}{\sqrt{R^2 + (5\omega L - 1/5\omega C_5)^2}} = 0,74 \text{ А.}$$

4. Действующие значения гармоник тока для емкости  $C_5 = 12,76 \text{ мкФ}$ :

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C_5)^2}} = 0,417 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - 1/3\omega C_5)^2}} = 0,93 \text{ А;}$$

$$I_5 = \frac{U_5}{Z_5} = \frac{U_5}{\sqrt{R^2 + (5\omega L - 1/5\omega C_5)^2}} = 2,5 \text{ А.}$$

(При емкости  $C_5 = 12,76 \text{ мкФ}$  имеет место резонанс напряжений на пятой гармонике).

Для построения диаграммы действующих значений гармоник тока и действующего значения несинусоидального тока в функции емкости задаемся значениями емкостей и находим соответствующие им гармоники тока и действующее значение несинусоидального тока

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}.$$

Результаты расчета сводим в табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

$C_i$ мкФ	6,38	12,76	17,72	35,44	106,32	212,64	319	425,3
$I_1$ , А	0,204	0,417	0,59	1,24	4,46	8,77	10	9,34
$I_3$ , А	0,364	0,93	1,58	5	2,23	1,85	1,8	1,71
$I_5$ , А	0,49	2,5	1,44	0,74	0,53	0,51	0,5	0,5
$I$ , А	0,64	2,68	2,22	5,2	5,01	8,98	10,16	9,5

Диаграммы  $i_1(C)$ ,  $i_3(C)$ ,  $i_5(C)$  и  $I(C)$  приведены на рис. 3.6.

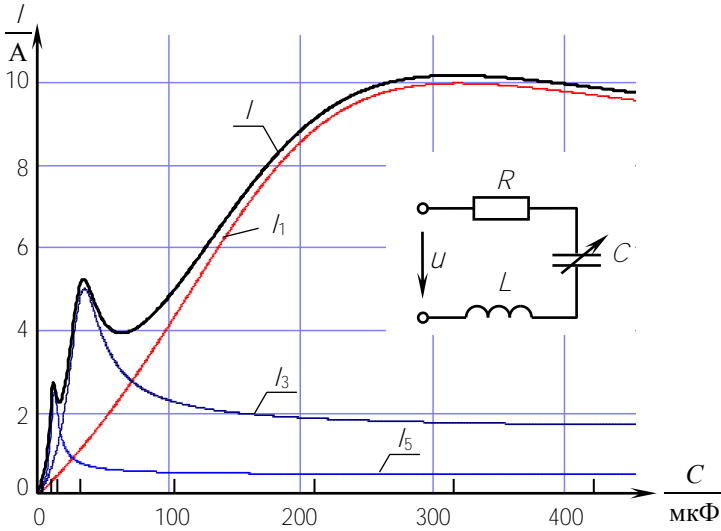


Рис. 3.6

**Задача 3.7.** В цепи рис. 3.7  $u = 12 + 141 \sin(\omega t + 30^\circ) + 70,7 \sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ \AA}$ ,  $R = 2 \text{ Ом}$ , на основной частоте  $X_L = 2 \text{ Ом}$  и  $X_C = 18 \text{ Ом}$ .

Записать уравнения мгновенных значений токов всех участков цепи. Определить показания электромагнитных амперметров и активную мощность цепи.

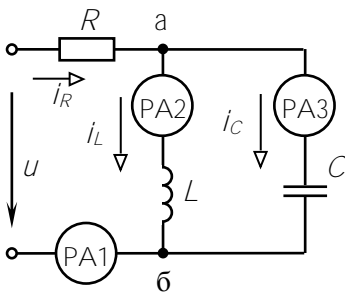


Рис. 3.7

**Решение.** Применяя принцип наложения, ведем расчет токов ветвей для постоянной составляющей и каждой из гармоник в отдельности.

а) Постоянная составляющая тока имеет место только в резисторе и катушке индуктивности, так как через конденсатор постоянный ток не течет:

$$I_{R0} = I_{L0} = \frac{U_0}{R} = \frac{12}{2} = 6 \text{ А.}$$

б) Расчет первых гармоник токов ветвей.

Полные сопротивления участка аб и всей цепи для первой гармоники:

$$Z_{аб1} = \frac{1}{Y_{аб1}} = \frac{1}{1/X_L - 1/X_C} = \frac{X_L \cdot X_C}{X_C - X_L} = X_{аб1} = 2,25 \text{ Ом}$$

(индуктивный характер),

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_{аб1}^2} = \sqrt{2^2 + 2,25^2} = 3 \text{ Ом.}$$

Амплитуды первых гармоник токов ветвей

$$I_{Rm1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \frac{141}{3} = 47 \text{ А};$$

$$I_{Lm1} = \frac{U_{aa1m1}}{X_L} = \frac{Z_{aa1} \cdot I_{Rm1}}{X_L} = \frac{2,25 \cdot 47}{2} = 53 \text{ А};$$

$$I_{Cm1} = \frac{U_{ab1m1}}{X_C} = \frac{2,25 \cdot 47}{18} = 5,9 \text{ А.}$$

Первая гармоника тока резистора отстает по фазе от первой гармоники напряжения источника на угол

$$\varphi_{R1} = \arctg \frac{X_{аб1}}{R} = \arctg \frac{2,25}{2} = 48^\circ.$$

Уравнение первой гармоники тока резистора

$$i_{R1} = 47 \sin(\omega t + 30^\circ - 48^\circ) = 47 \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ А.}$$

Так как сопротивление участка аб для первой гармоники имеет чисто индуктивный характер, то первая гармоника напряжения этого участка опережает гармонику тока  $i_{R1}$  на угол  $90^\circ$ :

$$u_{aa1} = X_{aa1} \cdot I_{Rm1} \sin(\omega t - 18^\circ + 90^\circ) = 105,7 \sin(\omega t + 72^\circ) \text{ В},$$

и уравнения первых гармоник токов имеют вид

$$i_{L1} = 53\sin(\omega t + 72^\circ - 90^\circ) = 53\sin(\omega t - 18^\circ) \text{ А};$$

$$i_{C1} = 5,9\sin(\omega t + 72^\circ + 90^\circ) = 5,9\sin(\omega t + 162^\circ) \text{ А.}$$

в) Расчет третьих гармоник токов ветвей.

Сопротивление участка аб для третьей гармоники

$$Z_{аб3} = X_{аб3} = \frac{(X_C/3) \cdot 3X_L}{(X_C/3) - 3X_L} = \frac{6 \cdot 6}{6 - 6} = \infty \text{ (резонанс токов).}$$

По этой причине третьи гармоники тока и напряжения резистора равны нулю и все напряжение источника третьей гармоники оказывается приложенным к участку аб.

Амплитуды третьих гармоник тока

$$I_{Lm3} = \frac{U_{m3}}{3X_L} = \frac{70,7}{3 \cdot 2} = 11,8 \text{ А};$$

$$I_{Cm3} = \frac{U_{m3}}{X_C/3} = \frac{70,7}{18/3} = 11,8 \text{ А.}$$

Ток катушки индуктивности отстает по фазе от напряжения на угол  $90^\circ$ , а ток конденсатора опережает напряжение на угол  $90^\circ$ :

$$i_{L3} = 11,8\sin(3\omega t - 45^\circ - 90^\circ) = 11,8\sin(3\omega t - 135^\circ) \text{ А};$$

$$i_{C3} = 11,8\sin(3\omega t - 45^\circ + 90^\circ) = 11,8\sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ А.}$$

Таким образом, уравнения мгновенных значений токов ветвей

$$i_R = I_{R0} + i_{R1} = 6 + 47\sin(\omega t - 18^\circ) \text{ А};$$

$$i_L = I_{L0} + i_{L1} + i_{L3} = 6 + 53\sin(\omega t - 18^\circ) + 11,8\sin(3\omega t - 135^\circ) \text{ А};$$

$$i_C = i_{C1} + i_{C3} = 5,9\sin(\omega t + 162^\circ) + 11,8\sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ А.}$$



Электромагнитные амперметры измеряют действующие значения токов

$$I_R = \sqrt{I_{R0}^2 + \frac{I_{Rm1}^2}{2}} = \sqrt{6^2 + \frac{47^2}{2}} = 33,7 \text{ А};$$

$$I_L = \sqrt{I_{L0}^2 + \frac{I_{Lm1}^2}{2} + \frac{I_{Lm3}^2}{2}} = \sqrt{6^2 + \frac{53^2}{2} + \frac{11,8^2}{2}} = 38,8 \text{ А};$$

$$I_C = \sqrt{\frac{I_{Cm1}^2}{2} + \frac{I_{Cm3}^2}{2}} = \sqrt{\frac{5,9^2}{2} + \frac{11,8^2}{2}} = 9,35 \text{ А}.$$

Активная мощность цепи

$$P = U_0 I_{R0} + U_1 I_{R1} \cos \varphi_{R1} = 12 \cdot 6 + \frac{141}{\sqrt{2}} \cdot \frac{47}{\sqrt{2}} \cdot \cos 48^\circ = 2270 \text{ Вт}$$

или

$$P = RI_{R0}^2 + RI_{R1}^2 = RI_R^2 = 2 \cdot 33,7^2 = 2270 \text{ Вт}.$$

**Задача 3.8.** В цепи рис. 3.8  $R = 3 \text{ Ом}$ , на основной частоте  $X_L = 4 \text{ Ом}$  и  $X_C = 8 \text{ Ом}$ ,  $i_L = 12 + 14,14 \sin \omega t + 2,83 \sin 3\omega t$ .

Записать уравнения мгновенных значений токов  $i$ ,  $i_C$  и напряжений  $u$ . Определить действующие значения токов и напряжений на входе цепи, а также активную мощность цепи.

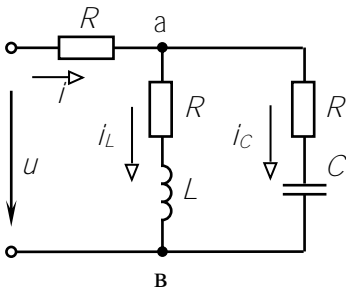


Рис. 3.8

**Решение.** Применяя принцип наложения, ведем расчет для постоянных составляющих и каждой из гармоник в отдельности с использованием комплексного метода.

а) Постоянные составляющие токов  $i$ ,  $i_L$  и напряжения  $u$

$$I_0 = I_{L0} = 12 \text{ А};$$

$$U_0 = (R + R) I_0 = (3 + 3) \cdot 12 = 72 \text{ В}.$$

б) Расчет первых гармоник.

Комплексная амплитуда напряжения первой гармоники участка ав

$$\underline{U}_{\text{аам}1} = (R + jX_L) \underline{I}_{L1} = (3 + j4) \cdot 14,14 = 5\dot{a}^{53,1^\circ} \cdot 14,14 = 70,7\dot{a}^{53,1^\circ} \text{ \AA}.$$

Комплексные амплитуды первых гармоник токов

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{\text{ав}1}}{R - jX_C} = \frac{70,7e^{j53,1^\circ}}{3 - j8} - \frac{70,7e^{j53,1^\circ}}{8,54e^{-j69,5^\circ}} = 8,275e^{j122,6^\circ} \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m1} &= \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{C1} = 14,14 + 8,275\dot{a}^{122,6^\circ} = \\ &= 9,67 + j6,97 = 11,9\dot{a}^{35,8^\circ} \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Комплексная амплитуда напряжения первой гармоники на входе цепи

$$\begin{aligned} \underline{U}_{m1} &= \underline{U}_{\text{аам}1} + R\underline{I}_{m1} = (42,4 + j56,6) + 3(9,67 + j6,97) = \\ &= 71,4 + j77,5 = 105,5\dot{a}^{47,35^\circ} \text{ \AA}. \end{aligned}$$

в) Расчет третьих гармоник производим аналогично:

$$\underline{U}_{\text{ав}3} = (R + j3X_L) \underline{I}_{L3} = (3 + j12) \cdot 2,83 = 35e^{j76^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_{\text{аам}3}}{R - j\frac{X_C}{3}} = 8,72\dot{a}^{117,6^\circ} \text{ \AA};$$

$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{L3} + \underline{I}_{C3} = 2,83 + 8,72e^{j117,6^\circ} = 7,82e^{j99^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{U}_{m3} = \underline{U}_{\text{ав}3} + R\underline{I}_{m3} = 57,2e^{j85,2^\circ} \text{ В}.$$

Уравнения токов  $i_C$ ,  $i$  и напряжения  $u$

$$i_C = 8,275 \sin(\omega t + 122,6^\circ) + 8,72 \sin(3\omega t + 117,6^\circ) \text{ A};$$

$$i = 12 + 11,9 \sin(\omega t + 35,8^\circ) + 7,82 \sin(3\omega t + 99^\circ) \text{ А};$$

$$u = 72 + 105,5 \sin(\omega t + 47,35^\circ) + 57,2 \sin(3\omega t + 85,2^\circ) \text{ В}$$

Действующие значения токов и напряжения на входе цепи

$$I_L = \sqrt{I_{L0}^2 + \frac{I_{Lm1}^2}{2} + \frac{I_{Lm3}^2}{2}} = 15,76 \text{ А};$$

$$I_C = \sqrt{\frac{I_{Cm1}^2}{2} + \frac{I_{Cm3}^2}{2}} = 8,5 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2}} = 15,67 \text{ А};$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m3}^2}{2}} = 111 \text{ В}.$$

Активная мощность цепи

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 =$$

$$= 72 \cdot 12 + \frac{105,5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{11,9}{\sqrt{2}} \cdot \cos 11,55^\circ + \frac{57,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7,82}{\sqrt{2}} \cdot \cos 13,8^\circ = 1695 \text{ Вт}$$

или 
$$P = RI^2 + RI_L^2 + RI_C^2 = 1695 \text{ Вт}.$$

**Задача 3.9.** Для уменьшения пульсации напряжения нагрузки, подключенной к двухполупериодному выпрямителю, применен Г-образный LC-фильтр (рис. 3.9). Напряжение на входе фильтра приближенно задано уравнением  $u = 150 - 100 \cos 628t \text{ В}$ . Параметры фильтра:  $L = 2 \text{ Гн}$ ;  $C = 5 \text{ мкФ}$ . Сопротивление нагрузки  $R = 10 \text{ кОм}$ .

Записать уравнение мгновенного значения напряжения нагрузки.

Определить коэффициенты пульсации напряжений питания и нагрузки.

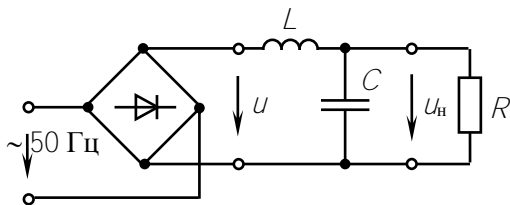


Рис. 3.9

Решение. Поскольку индуктивная катушка не оказывает сопротивления постоянному току, постоянная составляющая напряжения нагрузки равна постоянной составляющей напряжения на входе фильтра  $U_0 = 150$  В.

Комплексная амплитуда переменной составляющей напряжения нагрузки

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nm} &= \frac{-jX_C R}{R - jX_C} \cdot \underline{I}_m = \frac{-j \frac{R}{\omega C}}{R - j \frac{1}{\omega C}} \left( \frac{\underline{U}_m}{j\omega L - \frac{jR/\omega C}{R - j1/\omega C}} \right) = \\ &= \frac{-j \frac{10^4 \cdot 10^6}{628 \cdot 5}}{10^4 - j \frac{10^6}{628 \cdot 5}} \cdot \left( \frac{100 \text{ \AA}^{-j90^\circ}}{j628 \cdot 2 - \frac{j10^4 \cdot 10^6 / 628 \cdot 5}{10^4 - j10^6 / 628 \cdot 5}} \right) = 33,9 \text{ \AA}^{j92,4^\circ} \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Уравнение мгновенного значения напряжения нагрузки

$$u_n = U_0 + U_{nm} \sin(628t + 92,4^\circ) = 150 + 33,9 \sin(628t + 92,4^\circ) \text{ В.}$$

Коэффициенты пульсации напряжений питания и нагрузки

$$\rho = \frac{U_m}{U_0} = \frac{100}{150} = 0,667; \quad \rho_i = \frac{U_{im}}{U_0} = \frac{33,9}{150} = 0,226.$$

**Задача 3.10.** Для выделения в нагрузке  $R = 100$  Ом третьей гармоники напряжения применен  $LC$ -фильтр (рис. 3.10), где  $L = 2,25$  мГн;  $C = 500$  пкФ. Напряжение источника задано уравнением  $u = 28,3 \sin \omega t + 7,07 \sin 3\omega t - 2,83 \sin 5\omega t$  \AA. Частота основной гармоники  $f = 50$  кГц.

Записать уравнение мгновенного значения напряжения нагрузки.

Определить отношение действующего значения напряжения третьей гармоники к действующему значению напряжения нагрузки.

Решение. Комплексная амплитуда первой гармоники напряжения нагрузки

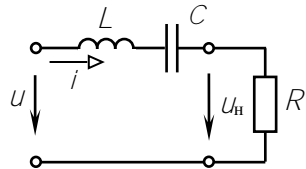


Рис. 3.10

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Hm1} &= R \frac{\underline{U}_{m1}}{R + j\omega L - j/\omega C} = \\ &= \frac{100 \cdot 28,3}{100 + j2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3} - j/2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 0,5e^{j89^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Поскольку фильтр настроен на резонанс для третьей гармоники ( $3\omega L = 1/3\omega C$ ), третьей гармоники напряжений нагрузки и источника оказываются равными:

$$\underline{U}_{Hm3} = R \frac{\underline{U}_{m3}}{R + j3\omega L - j/3\omega C} = \underline{U}_{m3} = 7,07 \text{ В.}$$

Напряжение пятой гармоники

$$\begin{aligned} \underline{U}_{im5} &= R \frac{\underline{U}_{m5}}{R + j5\omega L - j/5\omega C} = 100 \cdot \frac{2,83}{100 + j3532 - j1274} = \\ &= 0,125\hat{a}^{-j87,5^\circ} \hat{A}. \end{aligned}$$

Уравнение мгновенного значения напряжения нагрузки

$$u_i = 0,5 \sin(\omega t + 89^\circ) + 7,07 \sin 3\omega t - 0,125 \sin(5\omega t - 87,5^\circ) \hat{A}$$

Действующее значение напряжения нагрузки третьей гармоники

$$U_{H3} = \frac{U_{Hm3}}{\sqrt{2}} = \frac{7,07}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

Действующее значение напряжения нагрузки

$$U_{\text{н}} = \sqrt{\left(\frac{U_{\text{нм1}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{\text{нм3}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{\text{нм5}}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5,025 \text{ В.}$$

Искомое отношение напряжений близко к единице

$$\frac{U_{\text{н3}}}{U_{\text{н}}} = \frac{5}{5,025} = 0,996.$$

**Задача 3.11.** На входе цепи (рис. 3.11) действует несинусоидальное напряжение  $u = 30\sin\omega t + 15\sin 3\omega t$  В. Для исключения в нагрузке  $R_{\text{н}}$  третьей гармоники напряжения применен заградительный фильтр.

Рассчитать емкость фильтра  $C_{\text{ф}}$ , если  $L_{\text{ф}} = 100$  мГн, а основная частота  $f = 5$  кГц.

Определить коэффициенты искажения для напряжения питания и напряжения нагрузки.

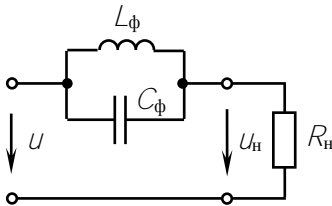


Рис. 3.11

**Решение.** Для исключения третьей гармоники напряжения в нагрузке необходимо, чтобы сопротивление цепи току третьей гармоники было равным бесконечности. Это возможно при резонансе в контуре  $L_{\text{ф}}, C_{\text{ф}}$  на третьей гармонике, когда

$$b_{L3} - b_{C3} = 0 \text{ или } \frac{1}{3\omega L_{\text{ф}}} = 3\omega C_{\text{ф}}.$$

Отсюда

$$C_{\text{ф}} = \frac{1}{9\omega^2 L_{\text{ф}}} = \frac{1}{9 \cdot 2^2 \cdot 3,14^2 \cdot 5000^2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}} = 1,13 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

Коэффициент искажения равен отношению действующего значения первой (основной) гармоники к действующему значению несинусоидальной величины. Таким образом, коэффициент искажения для напряжения питания

$$k_e = \frac{U_1}{U} = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2}} = \frac{\frac{30}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2}} = 0,89.$$

Коэффициент искажения для напряжения нагрузки  $k_{\text{ин}} = 1$ , так как использование фильтра обеспечило синусоидальный закон изменения напряжения на нагрузке.

Задача 3.12. Напряжение и ток пассивного двухполюсника (рис. 3.12, а) заданы уравнениями

$$u = 100 + 141 \sin \omega t + 36 \sin 3\omega t \text{ В};$$

$$i = 14,1 \sin(\omega t + \pi/2) \text{ А}.$$

Начертить эквивалентную схему двухполюсника и определить ее параметры, если  $\omega = 314$  рад/с (использовать одинаковые конденсаторы).

**Решение.** Так как в токе отсутствует постоянная составляющая, то схема должна содержать разделительную емкость. Ток не содержит третьей гармоники. Следовательно, схема должна содержать участок, состоящий из параллельно соединенных индуктивности и емкости, настроенных в резонанс на третьей гармонике. Кроме того, двухполюсник не содержит резистивных элементов, так как ток чисто реактивный (сдвиг по фазе между первыми гармониками напряжения и тока  $\varphi = \pi/2$ ).

Схема двухполюсника приведена на рис. 3.12, б.

Для определения параметров эквивалентной схемы двухполюсника найдем его входное сопротивление для первой гармоники

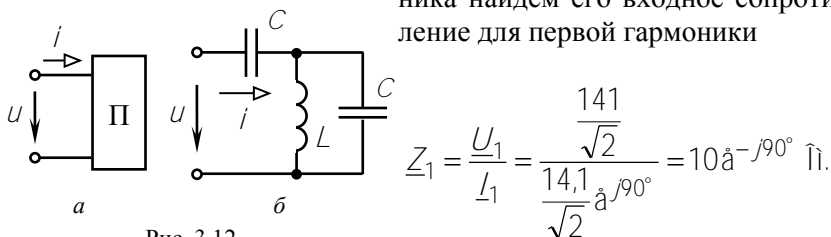


Рис. 3.12

С другой стороны,

$$Z_1 = -j \frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C}}.$$

Из условия резонанса токов на третьей гармонике

$$\frac{1}{3\omega L} = 3\omega C.$$

Решая совместно эти уравнения, находим, что  $C = 289$  мкФ,

$$L = \frac{1}{9\omega^2 C} = \frac{1}{9 \cdot 314^2 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ мГн}.$$

### Контрольные задачи

**Задача 3.13.** Форма напряжения генераторов приведена на рис. 3.13, а, б, в, г.

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного вольтметров, подключенных к генераторам.

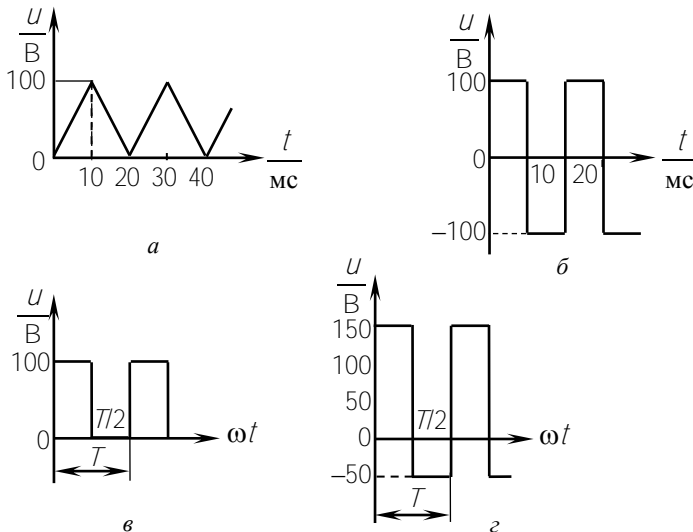


Рис. 3.13



Задача 3.14. Амплитуда и форма напряжения генератора соответствуют рис. 3.13, а.

Используя разложение кривой напряжения в ряд Фурье [8] (ограничиться тремя членами ряда), определить активную мощность катушки индуктивности ( $L = 0,1$  Гн,  $R = 100$  Ом), подключенной к генератору.

Задача 3.15. Решить задачу 3.14, если амплитуда и форма напряжения генератора соответствует рис. 3.13 в.

Задача 3.16. К катушке индуктивности ( $L = 20$  мГн,  $R = 10$  Ом) приложено напряжение  $u = 12 + 80\sin 314t + 30\sin(942t + 30^\circ)$  В.  
Записать уравнение мгновенного значения тока катушки.

Задача 3.17. Определить активную и полную мощность цепи, описанной в задаче 3.16.

Задача 3.18. В катушке индуктивности ( $L = 0,1$  Гн,  $R = 50$  Ом) протекает ток  $i = 10 + 60\sin 314t + 20\sin(942t + 30^\circ)$  А.

Определить показания электромагнитного вольтметра, подключенного к катушке.

Задача 3.19. В цепи рис. 3.6  $u = 24 + 141\sin \omega t + 56,6\sin(3\omega t + 30^\circ)$  В,  $R = 4$  Ом, на основной частоте  $X_L = 4$  Ом и  $X_C = 36$  Ом

Рассчитать действующие значения напряжений на каждом из элементов.

Задача 3.20. Определить активную мощность цепи, описанной в задаче 3.19.

Задача 3.21. К цепи, состоящей из параллельно соединенных резистора  $R = 40$  Ом и конденсатора  $C = 10$  мкФ, приложено напряжение  $u = 242\sin 314t + 70,7\sin 942t$  В.

Записать уравнение мгновенного значения тока в неразветвленной части цепи.

Задача 3.22. В цепи рис. 3.12, б  $C=10$  мкФ,  $L=0,1$  Гн.

Рассчитать частоту первой гармоники, при которой входное сопротивление цепи равно бесконечности.

Задача 3.23. В цепи рис. 3.12, б  $C=100$  мкФ,  $L=20$  мГн. Рассчитать частоту первой гармоники, при которой входное сопротивление цепи для пятой гармоники равно нулю.

Задача 3.24. В цепи, описанной в задаче 3.9, нагрузкой является катушка индуктивности ( $L=0,5$  Гн,  $R=2$  кОм).

Определить коэффициенты пульсации напряжений источника и нагрузки.

Задача 3.25. На входе цепи

$$u=10+30\sin 1000t \text{ В}; \quad i=6\sin(1000t+30^\circ) \text{ А.}$$

Начертить простейшую эквивалентную схему замещения цепи и определить параметры ее элементов.

Задача 3.26. На входе цепи

$$u=10+120\sin(\omega t+30^\circ)+10\sin(3\omega t+45^\circ) \text{ В};$$
$$i=5+30\sin(\omega t-30^\circ) \text{ А}; \quad \omega=1000 \text{ с}^{-1}.$$

Начертить эквивалентную схему замещения цепи и определить параметры ее элементов.

### **Ответы к контрольным задачам**

3.13 Показания магнитоэлектрических вольтметров

а)  $U_{cp}=50$  В; б)  $U_{cp}=0$ ; в)  $U_{cp}=50$  В; г)  $U_{cp}=50$  В.

Показания электромагнитных вольтметров

а)  $U=57,8$  В; б)  $U=100$  В; в)  $U=70,7$  В; г)  $U=112$  В.

3.14 Ряд Фурье [8]  $u = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t \right) =$

$$= 127,4\sin 314t + 42,5\sin 942t + 25,5\sin 1570t \text{ \AA}.$$

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = 74 + 4,8 + 0,2 = 79 \text{ Вт}.$$

3.15 Кривой напряжения 3.13,  $e$  соответствует ряд Фурье [8]

$$u = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t \right) =$$

$$= 50 + 31,8\sin 314t + 10,6\sin 942t \text{ \AA}.$$

$$P = P_0 + P_1 + P_3 = 25 + 4,7 + 0,3 = 30 \text{ Вт}.$$

3.16  $i = 1,2 + 6,77\sin(314t - 32^\circ) + 1,41\sin(942t - 32^\circ) \text{ \AA}.$

3.17  $P = 262 \text{ Вт}; S = 310 \text{ В}\cdot\text{А}.$

3.18  $U = 2967 \text{ В}.$

3.19  $U_R = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{R1}^2 + U_{R3}^2} = \sqrt{0^2 + 12,4^2 + 40^2} = 41,88 \text{ \AA};$

$$U_L = \sqrt{U_{L0}^2 + U_{L1}^2 + U_{L3}^2} = \sqrt{0^2 + 12,4^2 + 120^2} = 120,6 \text{ \AA};$$

$$U_C = \sqrt{U_{C0}^2 + U_{C1}^2 + U_{C3}^2} = \sqrt{24^2 + 111,6^2 + 120^2} = 165,6 \text{ \AA}.$$

3.20  $P = 438 \text{ Вт}.$

3.21  $i = 6,1\sin(314t + 7^\circ) + 1,89\sin(942t + 21^\circ) \text{ \AA}.$

3.22  $f = 113 \text{ Гц}.$

3.23  $f = 15,9 \text{ Гц}.$

3.24  $\rho = 0,667; \rho_H = 0,229.$

3.25  $R = 4,33 \text{ Ом}; C = 400 \text{ мкФ}.$

3.26  $R = 2 \text{ Ом}; L = 3,08 \text{ мГн}; C = 36 \text{ мкФ}.$

## Тест для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов

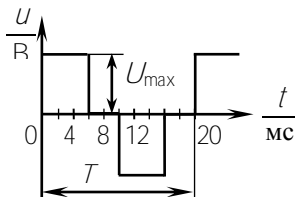
### Тест 3.1

#### Вариант 1

1. Периодически изменяющееся напряжение имеет амплитуду  $U_{\max} = 100$  В.

Определить: а) среднее по модулю  $U_{\text{ср.мод.}}$  и действующее  $U$  значения;

б) коэффициенты формы  $k_f = U / U_{\text{ср.мод.}}$  и амплитуды  $k_a = U_{\max} / U$ .



2. Напряжение источника изменяется по закону  $u = 120 + 282 \sin \omega t$  В.

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного вольтметров на зажимах источника, а также коэффициент искажения  $k_n = U_1 / U$ .

3. Напряжение и ток цепи изменяются по закону

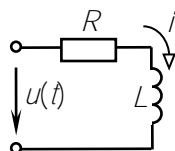
$$u = \sqrt{2} \cdot 30 \sin(\omega t + 25^\circ) + \sqrt{2} \cdot 40 \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ В,}$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 12 \sin(\omega t - 40^\circ) + \sqrt{2} \cdot 9 \sin(3\omega t - 10^\circ) \text{ А.}$$

Определить активную  $P$  и полную  $S$  мощности цепи, коэффициент мощности  $\lambda = P / UI$ .

4. Дано:  $u(t) = 36 + \sqrt{2} \cdot 80 \sin \omega t$  В,  
 $R = 6$  Ом,  $X_L = 8$  Ом.

Записать уравнение мгновенного значения тока цепи  $i(t)$ . Рассчитать действующее значение тока и активную мощность цепи.

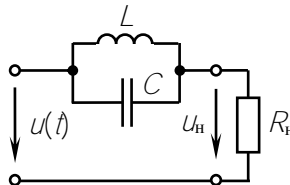


5. На входе цепи действует несинусоидальное напряжение

$$u = 141 \sin \omega t + 70,7 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Для устранения в нагрузке  $R_n$  третьей гармоники применён заградительный фильтр ( $1 / 3\omega L = 3\omega C$ ).

Определить коэффициенты искажения для напряжения питания и напряжения нагрузки.

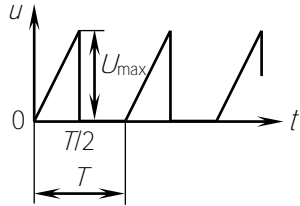


#### Ответы

1. а)	2.	3.	4.	5.
1. б)				

## Вариант 2

1. Определить среднее по модулю  $U_{\text{ср.мод.}}$  и действующее  $U$  значения, а также коэффициенты формы  $k_{\text{ф}} = U / U_{\text{ср.мод.}}$  и амплитуды  $k_{\text{а}} = U_{\text{max}} / U$  периодически изменяющегося напряжения  $u(t)$ , если  $U_{\text{max}} = 100 \text{ В}$ .



2. Напряжение источника изменяется

по закону  $u = \sqrt{2} \cdot 80 \sin(\omega t + 15^\circ) + \sqrt{2} \cdot 60 \sin(3\omega t - 20^\circ) \text{ В}$ .

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного вольтметров на зажимах источника, коэффициент искажения  $k_{\text{и}} = U_1 / U$ .

3. Напряжение и ток цепи изменяются по закону

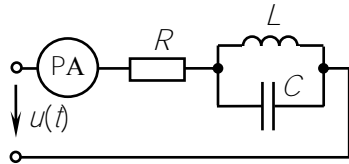
$$u = \sqrt{2} \cdot 80 \sin(\omega t + 15^\circ) + \sqrt{2} \cdot 60 \sin(3\omega t - 20^\circ) \text{ В,}$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 4 \sin(\omega t + 75^\circ) + \sqrt{2} \cdot 3 \sin(3\omega t + 40^\circ) \text{ А.}$$

Определить активную, реактивную, полную мощности цепи, а также мощность искажения  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ .

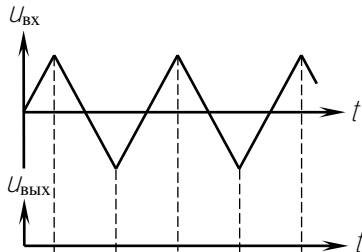
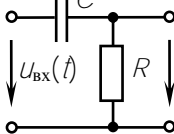
4. Дано:  $u = 60 + \sqrt{2} \cdot 50 \sin \omega t \text{ В}$ ,  
 $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $1 / \omega L = \omega C$ .

Определить показание электродинамического амперметра.



5. Напряжение на входе дифференцирующей  $RC$ -цепи ( $R \ll X_C$ ) задано на диаграмме.

Начертить  $u_{\text{вых}}(t)$ .

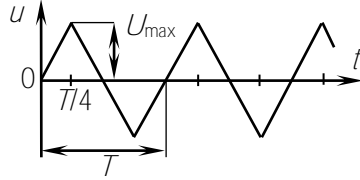


### Ответы

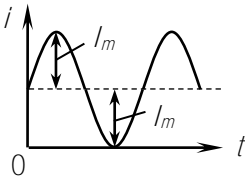
1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

### Вариант 3

1. Определить среднее по модулю  $U_{\text{ср.мод.}}$ , действующее  $U$  значения, коэффициенты формы  $k_{\text{ф}} = U / U_{\text{ср.мод.}}$  и амплитуды  $k_{\text{а}} = U_{\text{max}} / U$  периодически изменяющегося напряжения  $u(t)$ , если  $U_{\text{max}} = 100$  В.



2. По диаграмме периодического тока цепи  $i(t)$  записать аналитическое выражение тока в виде ряда Фурье.



Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного амперметров, рассчитать коэффициент искажения тока  $k_{\text{и}} = I_1 / I$ , если  $I_m = 10$  А.

3. Напряжение и ток цепи изменяются по закону

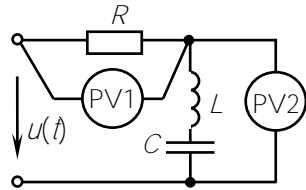
$$u = 50 + \sqrt{2} \cdot 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + \sqrt{2} \cdot 20 \sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ В,}$$

$$i = 2 + \sqrt{2} \cdot 5 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А.}$$

Определить активную, реактивную, полную мощности цепи, а также мощность искажения  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ .

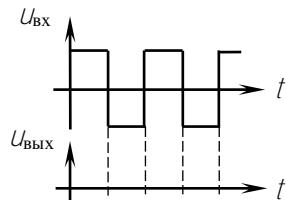
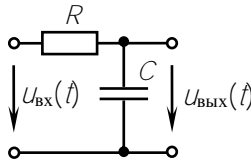
4. Дано:  $u = 150 + \sqrt{2} \cdot 50 \sin(\omega t + 45^\circ)$  В,  $\omega L = 1 / \omega C$ .

Определить показания электродинамических вольтметров.



5. Напряжение на входе интегрирующей RC-цепи ( $X_C \ll R$ ) дано на диаграмме.

Начертить  $u_{\text{вых}}(t)$ .

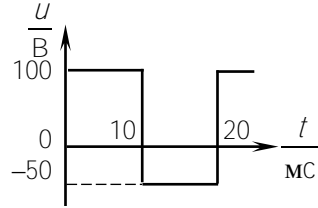


### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

## Вариант 4

1. Найти а) среднее за период  $U_0$ ; б) среднее по модулю  $U_{\text{ср.мод}}$ ; в) действующее  $U$  значения периодического несинусоидального напряжения.



2. Источник питания состоит из последовательно включенных аккумулятора напряжением 24 В и обмотки трансформатора, амплитуда синусоидального напряжения которого равна 20 В.

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного вольтметров, подключённых к данному источнику.

3. Напряжение и ток цепи изменяются по закону

$$u = 100 + \sqrt{2} \cdot 100 \sin(\omega t + 60^\circ) + \sqrt{2} \cdot 30 \sin(3\omega t - 10^\circ) \text{ В,}$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 2 \sin \omega t + \sqrt{2} \sin(3\omega t + 50^\circ) \text{ А.}$$

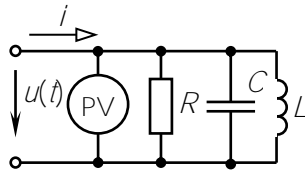
Определить активную, реактивную, полную мощности цепи, а также мощность искажения  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ .

4. Закон изменения тока

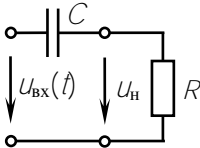
$$i = 1 + 1,41 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ А, } R = 100 \text{ Ом.}$$

Контур  $L, C$  настроен в резонанс.

Определить показание электромагнитного вольтметра.



- 5.



На входе цепи действует несинусоидальное напряжение  $u_{\text{вх}} = 50 + 141 \sin \omega t$  В. Для устранения на нагрузке постоянной составляющей применён конденсатор.

Определить коэффициенты искажения для напряжения питания и напряжения на нагрузке.

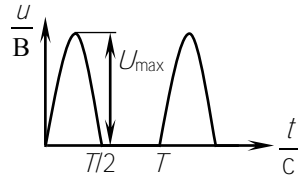
### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----

## Вариант 5

1. Определить среднее за период  $U_{cp}$  и действующее  $U$  напряжения однополупериодного выпрямителя, если  $U_{max} = 100$  В.

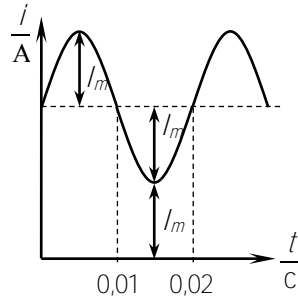
Рассчитать коэффициенты формы  $k_{\Phi} = U / U_{cp}$  и амплитуды  $k_a = U_{max} / U$ .



2. Записать уравнение мгновенного значения тока  $i(t)$  в виде ряда Фурье,  $I_m = 5$  А.

Определить показания магнитоэлектрического и электромагнитного амперметров.

Рассчитать коэффициент искажения тока  $k_{и} = I_1 / I$ .

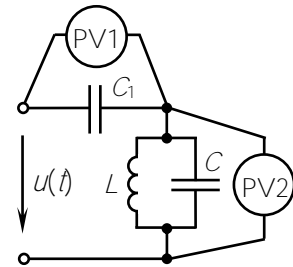


3. Полная мощность цепи несинусоидального тока  $S = 100$  В·А, коэффициент мощности  $\lambda = 0,5$ , активная мощность первой гармоники  $P_1 = 40$  Вт.

Определить активную мощность высших гармоник.

4. Дано:  $u = 100 + \sqrt{2} \cdot 50 \sin \omega t$  В,  
 $1 / \omega L = \omega C$ .

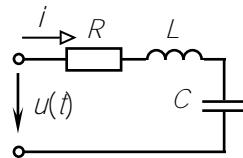
Определить показания электродинамических вольтметров.



5. В цепи протекает ток

$$i = 1 \sin 200t + 0,3 \sin 600t \text{ А.}$$

Записать уравнение мгновенного значения напряжения на зажимах цепи  $u(t)$ , если на частоте основной (первой) гармоники  $R_1 = 30$  Ом,  $X_{L1} = 20$  Ом,  $X_{C1} = 60$  Ом.



### Ответы

1.	2.	3.	4.	5.
----	----	----	----	----



## ЛИТЕРАТУРА

1. Электротехника и электроника: в 2 кн. / под ред. проф. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1996. – Кн. 1. – 480 с.
2. Борисов, Ю.М. Электротехника / Ю.М. Борисов, Д.Н. Липатов, Ю.Н. Зорин. – М.: Высшая школа, 1985. – 537 с.
3. Касаткин, А.С. Электротехника / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – М.: Высшая школа, 2002. – 542 с.
4. Иванов, И.И. Электротехника / И.И. Иванов, В.С. Равдоник. – М.: Высшая школа, 1984, 2003, 2005. – 496 с.
5. Рекус, Г.Г. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Г.Г. Рекус, В.Н. Чесноков. – М.: Высшая школа, 2001. – 416 с.
6. Электротехника и электроника: сборник задач с контрольными тестами для студентов неэлектротехнических специальностей: в 6 ч. / сост.: Ю.В. Бладыко [и др.]. – Минск: БНТУ, 2008. – Ч. 1: Электрические цепи постоянного тока. – 64 с.
7. Электротехника и электроника: сборник задач с контрольными тестами для студентов неэлектротехнических специальностей: в 6 ч. / сост.: Ю.В. Бладыко [и др.]. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч. 2: Однофазные линейные электрические цепи синусоидального тока. – 98 с.
8. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники / Л.А. Бессонов – М.: Высшая школа, 1994. – Ч. 1: Электрические цепи. – 560 с.
9. Сборник задач по электротехнике и основам электроники / под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1987. – 288 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.....	3
Задачи с решениями.....	3
Контрольные задачи .....	30
Ответы к контрольным задачам .....	34
Тесты для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов .....	36
Тест 1.1 .....	36
Тест 1.2 .....	41
2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ .....	46
Задачи с решениями.....	46
Контрольные задачи .....	60
Ответы к контрольным задачам .....	62
Тест для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов .....	63
Тест 2.1 .....	63
3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ .....	68
Задачи с решениями.....	68
Контрольные задачи .....	87
Ответы к контрольным задачам .....	89
Тест для компьютерного или аудиторного контроля знаний студентов .....	91
Тест 3.1 .....	91
ЛИТЕРАТУРА .....	96

Учебное издание

## ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Сборник задач с контрольными тестами  
для студентов неэлектротехнических специальностей

В 6 частях

Ча с т ь 3

### ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ, ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

С о с т а в и т е л и :

БЛАДЫКО Юрий Витальевич  
РОЗУМ Таисия Терентьевна  
ДОМНИКОВ Сергей Васильевич и др.

Технический редактор О.В. Дубовик  
Компьютерная верстка Т.А. Мархель, И.Н. Михневич

---

Подписано в печать 01.11.2010.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 5,70. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 200. Заказ 469.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.