



Министерство образования
Республики Беларусь

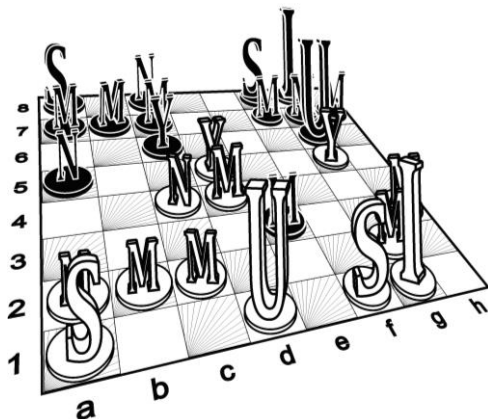
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Электрические системы»

Т.А. Шиманская-Семёнова

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ
МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА
И АНАЛИЗА РЕЖИМОВ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

Методическое пособие



Минск
БНТУ
2010

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Электрические системы»

Т.А. Шиманская-Семенова

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА РЕЖИМОВ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

Методическое пособие по выполнению курсовой работы
и изучению дисциплины «Математические модели
в энергетике» для студентов специальности
1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети»

Минск
БНТУ
2010

УДК 621.311
ББК 31.279я7
Ш 61

Рецензенты:
О.И. Александров, А.А. Волков

Шиманская-Семенова, Т.А.
Ш61 Применение матричных моделей для расчета и анализа режимов электрических сетей: методическое пособие по выполнению курсовой работы и изучению дисциплины «Математические модели в энергетике» для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» / Т.А. Шиманская-Семёнова. – Минск: БНТУ, 2010. – 158 с.

ISBN 978-985-525-231-4.

В методическом пособии излагаются теоретические основы современных методов расчета установившихся режимов электрических сетей на ЭВМ с использованием матричных моделей. Выводятся основные уравнения установившихся режимов в матричной форме, описываются точные и итерационные методы их решения, рассматриваются вопросы сходимости итерационных методов. Приведены задания различной сложности и варианты исходных данных к курсовой работе, даны практические рекомендации по ее выполнению, иллюстрируемые числовыми примерами.

Методика выполнения курсовой работы ориентирована на использование программного пакета MathCAD.

Пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» и также может быть использовано инженерами, чья деятельность связана с расчетами режимов электрических систем.

УДК 621.311
ББК 31.279я7

ISBN 978-985-525-231-4

© Шиманская-Семенова Т.А., 2010
© БНТУ, 2010

Содержание

Список условных обозначений.	5
Предисловие.	6
РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ.	7
1.1. Понятие о режимах электрических систем и их математических моделях.	7
1.2. Аналитическое представление информации о конфигурации электрической сети с помощью матриц инцидентий и матричная запись законов Кирхгофа.	11
1.2.1. Принципы нумерации элементов схемы.	11
1.2.2. Первая матрица инцидентий «узлы-ветви» и ее применение для записи 1-го закона Кирхгофа.	13
Вопросы для самопроверки	18
1.2.3. Вторая матрица инцидентий «ветви-контур» и ее применение для записи 2-го закона Кирхгофа.	19
1.2.4. Получение контурной конфигурационной модели электрической сети на основе ее узловой модели.	23
Вопросы для самопроверки.	24
1.2.5. Запись уравнений состояния сети по законам Кирхгофа.	25
1.3. Узловая модель установившегося режима электрической сети.	27
1.3.1. Вывод узловых уравнений.	27
1.3.2. Определение и характеристика матрицы узловых проводимостей.	31
Вопросы для самопроверки.	34
1.4. Контурные уравнения установившихся режимов электрических систем.	35
1.4.1. Вывод контурных уравнений.	35
1.4.2. Определение и характеристика матрицы контурных сопротивлений.	38
Вопросы для самопроверки.	42
1.5. Запись уравнений состояния сети с помощью матриц обобщенных параметров.	42
Вопросы для самопроверки.	46
1.6. Расчет режима электрической сети с использованием матрицы коэффициентов распределения.	47
Вопросы для самопроверки.	50
1.7. Решение уравнений состояния методом Гаусса.	50
1.8. Факторы, влияющие на точность решения по методу Гаусса.	51

РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ. . .	52
2.1. Математическая характеристика уравнений установившегося режима.	52
2.2. Характеристика методов решения систем уравнений установившегося режима.	53
2.3. Итерационные методы решения систем уравнений установившегося режима.	55
2.4. Критерии сходимости итерации и анализ их выполнения для узловых уравнений установившихся режимов.	58
2.4.1. Доказательство теоремы сходимости итерации.	58
2.4.2. Следствия из теоремы сходимости итерации.	61
2.4.3. Факторы, влияющие на сходимость итерации для узловых уравнений установившихся режимов.	62
2.4.4. Критерии сходимости и анализ сходимости нелинейных систем узловых уравнений установившихся режимов.	64
2.5. Решение уравнений узловых напряжений итерационными методами.	67
2.5.1. Решение уравнений узловых напряжений в форме баланса токов.	67
2.5.2. Обращенная форма уравнений узловых напряжений и их анализ.	69
2.6. Применение метода Ньютона для решения уравнений установившихся режимов.	73
2.6.1. Обоснование метода Ньютона для решения нелинейного уравнения.	73
2.6.2. Применение метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.	75
2.6.3. Решение нелинейных узловых уравнений методом Ньютона. . .	78
Вопросы для самопроверки.	81
РАЗДЕЛ 3. ЗАДАНИЯ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ.	82
РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ БАЗОВЫХ РАЗДЕЛОВ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.	87
ЛИТЕРАТУРА.	147
ПРИЛОЖЕНИЕ.	148

Список условных обозначений

$M_{n \times m}$ – первая матрица инцидентий, состоящая из n строк (по числу узлов) и m столбцов (по числу ветвей);

n – число независимых узлов в схеме;

M_{Σ}^{-1} – 1-я матрица инцидентий M , дополненная строкой связности для балансирующего узла $M_{n+1, j}$, где $j = 1, \dots, m$;

M_{α} – блок 1-й матрицы инцидентий размерностью $(n \times n)$ – для дерева сети;

M_{β} – блок 1-й матрицы инцидентий размерностью $(n \times k)$ – для хорд ($M = [M_{\alpha} \ M_{\beta}]$);

N – вторая матрица инцидентий, строки которой соответствуют независимым контурам, а столбцы – ветвям схемы;

N_{α}, N_{β} – подматрицы второй матрицы инцидентий для дерева и хорд ($N = [N_{\alpha} \ N_{\beta}]$);

$Z_{\text{в}}$ – матрица сопротивлений ветвей m -го порядка;

Z_{α}, Z_{β} – подматрицы сопротивлений ветвей дерева и хорд соответственно;

$dZ_{\text{в}}$ – диагональная матрица сопротивлений ветвей m -го порядка;

$Y_{\text{у}}$ – матрица собственных и взаимных проводимостей узлов электрической сети, квадратная, неособенная;

$I_{\text{в}}$ – вектор-столбец токов ветвей;

I_{α}, I_{β} – составляющие токов для дерева сети и хорд;

$J_{\text{у}}$ – вектор-столбец задающих токов в узлах сети;

$E_{\text{в}} = [E_i], i = 1, 2, \dots, m$ – вектор-столбец ЭДС в ветвях;

$E_{\text{к}}$ – вектор-столбец контурных ЭДС, представляющих собой алгебраические суммы ЭДС ветвей $E_{\text{в}}$ по независимым контурам;

$U_{\text{БУ}}$ – напряжение балансирующего узла;

$U_{\text{в}}$ – падение напряжения на ветвях сети;

U_{Δ} – вектор-столбец падений напряжений в узлах сети относительно балансирующего узла;

$U_{\text{у}}$ – вектор-столбец напряжений в узлах сети;

$C_{\text{р}} = M_{\alpha}^{-1}$ – матрица, обратная матрице M_{α} , – матрица коэффициентов токораспределения для дерева сети;

E – единичная матрица;

$S_{\text{у}}$ – узловые задающие мощности;

$Z_{\text{к}}$ – матрица контурных сопротивлений, которая является квадратной и неособенной;

- C – матрица коэффициентов распределения;
 $\Delta S_{\text{в}}$ – матрица потерь мощности на ветвях схемы;
 $dI_{\text{в}}$ – диагональная матрица токов ветвей;
 ΔS_{Σ} – суммарные потери мощности в сети;
 $S_{\text{нб}}$ – небалансы мощности в узлах схемы.

Предисловие

Целью дисциплины «Математическое моделирование в энергетике» является подготовка студентов в области разработки и применения современных математических моделей и методов для решения задач энергетики с использованием ЭВМ. Изучению дисциплины предшествует усвоение курсов «Высшая математика», «Теоретические основы электротехники», «Информатика», «Основы САПР», «Введение в инженерное образование», «Электрические сети и системы». В свою очередь, данная дисциплина служит основой для изучения курсов «Конструкции и режимы электрических сетей» и «Надежность электрических сетей».

В предлагаемом пособии рассматривается основной раздел курса «Математическое моделирование в энергетике», посвященный матричным моделям установившихся режимов электрических систем и методам их анализа на основе элементов теории графов, алгебры матриц, численных методов решения многомерных систем нелинейных алгебраических уравнений. Также рассматриваются вопросы применения итерационных методов для расчета установившихся утяжеленных режимов и улучшение их сходимости.

Расчет установившегося режима является наиболее часто встречающейся самостоятельной задачей в области анализа электрических систем в практике проектирования и эксплуатации, а также входит составной частью или повторяющимся рабочим оператором в методики, алгоритмы и программы расчета переходных процессов, устойчивости электрических систем, оптимизации режимов и т. п. Поэтому этой задаче уделяется большое внимание.

Цель курсовой работы – углубить знания по предмету и приобрести навыки практических расчетов режимов:

- формирование и преобразования матричных уравнений установившегося режима электрических систем;
- применение точных и итерационных методов для решения уравнений режима, наиболее эффективных при расчетах на ЭВМ;

– анализ результатов расчета нормальных и утяжеленных режимов электрических систем.

Выполнение работы ориентировано на ручные расчеты, либо на самостоятельное программирование действий с матрицами, либо на использование стандартного пакета MathCAD.

Автор выражает благодарность студентам энергетического факультета БНТУ Кабанову Павлу, Гурвичу Виталию, Млынчик Марине, и особенно Кузюковичу Александру за большую работу по подготовке рукописи к печати, а также заочному аспиранту кафедры, ведущему инженеру Оршанских электрических сетей Боброву Андрею Владимировичу за внимательное прочтение рукописи и оригинальный компьютерный рисунок на обложке.

РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Понятие о режимах электрических систем и их математических моделях

Электрическая система есть совокупность электрических станций, электрических сетей и приемников электроэнергии, соединенных между собой и связанных общностью режима в непрерывном процессе производства, преобразования, распределения и потребления электроэнергии при общем управлении этим режимом [11]. Под *режимом электрической системы* понимают ее состояние в какой-то момент времени, описываемое набором характеристик или параметров режима.

Режим определяется нагрузками электрических станций и потребителей электрической сети, а также состоянием схемы сети. Нагрузки меняются в разрезе суток, в течение недели, в рабочие и выходные дни, посезонно. Схема сети также изменяется (временно отключаются какие-то присоединения) из-за постоянного производства на линиях и подстанциях профилактических работ, текущих и капитальных ремонтов, реконструкции и т. п. Поэтому нормальных режимов электрической системы может быть множество, но их параметры лежат в диапазоне от режима максимальных нагрузок до режима минимальных нагрузок, на которые рассчитывается электрическая система при проектировании.

Изменения электрических нагрузок сети происходят в каждый момент времени в силу изменения потребляемых мощностей электроприемников, обусловленного переменным режимом работы технологических механизмов (например, тяговая нагрузка, станки, лифты и др.). Поэтому строго установившихся режимов электрических сетей и систем практически не существует. *Установившимся* называется режим, при котором среднее значение параметров за рассматриваемый период неизменно или изменяется незначительно. Остальные режимы являются переходными. Установившиеся режимы разделяют на нормальные эксплуатационные, ремонтные, утяжеленные и послеаварийные режимы.

Совокупность нагрузок потребителей и нагрузок электрических станций представляет собой **независимые характеристики режима** электрической системы. А токи, потоки мощностей по линиям сети и трансформаторам и уровни напряжений на шинах подстанций (в узлах электрической сети) зависят от величин нагрузок потребителей, нагрузок электростанций, **конфигурации и параметров схемы электрической сети** и представляют собой множество **зависимых характеристик режима**.

Более 40 лет расчеты режимов электрических сетей выполняются на ЭВМ. Для расчета сети на ЭВМ недостаточно иметь схему, связность которой воспринимается визуально. В памяти ЭВМ необходимо создать **математические модели электрической сети и ее режима**, которые однозначно представляли бы сеть, позволяли выполнять расчет ее режимов и вести их разноплановый анализ.

Для расчета режимов электрических сетей пользуются схемами замещения, описанными в [1–11], и математическими моделями. **Математическая модель режима электрической сети** представляет собой совокупность организованных определенным образом (в базы данных) числовых массивов информации о конфигурации и параметрах электрической сети, заданных характеристиках режима по узлам сети и программ обработки этой информации, реализующих уравнения связи между зависимыми и независимыми характеристиками режима на основе параметров схемы сети. Принципиально в одних методах расчета режима вначале определяют токи по ветвям, а затем падения напряжений на ветвях и напряжения в узлах сети (на шинах подстанций), потоки и потери мощности, а в других методах идут от расчета напряжений в узлах (на шинах подстанций) к определению токов, потоков и потерь мощности по ветвям (линиям сети).

Схемы замещения электрических систем представляют собой совокупность общепринятых для моделирования установившихся режимов схем замещения отдельных элементов – генераторов, трансформаторов, линий, нагрузок.

На схеме электрической системы рис. 1.1 линии представлены длинами участков L и марками проводов μ , трансформаторы – номинальными параметрами, что позволяет взять из справочников их паспортные данные. Далее может быть составлена схема замещения (рис. 1.2), параметры которой приведены к одной ступени напряжения. Эта схема может быть упрощена, если нагрузки на шинах вторичного напряжения подстанций просуммировать с потерями мощности в трансформаторах, то есть привести их к стороне высшего напряжения, как показано на рис. 1.3.

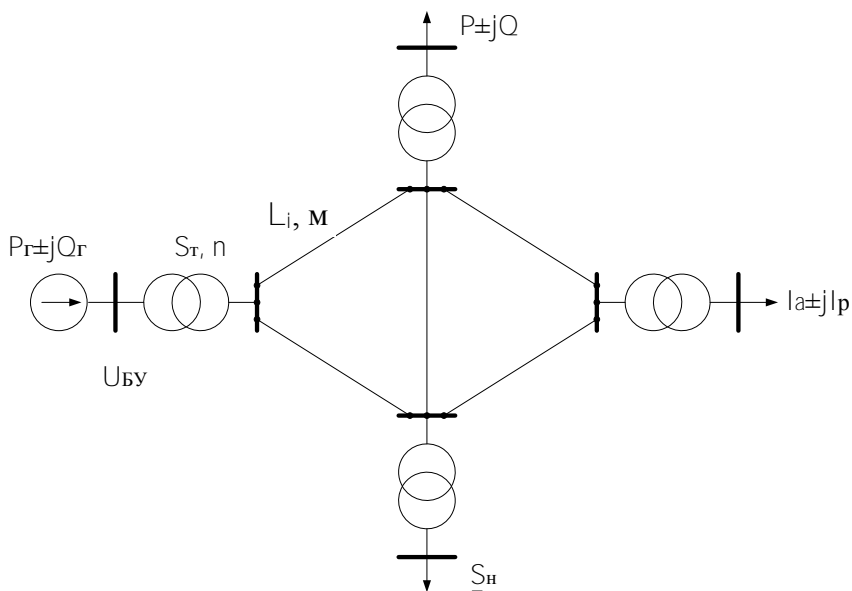


Рис. 1.1. Схема электрической системы

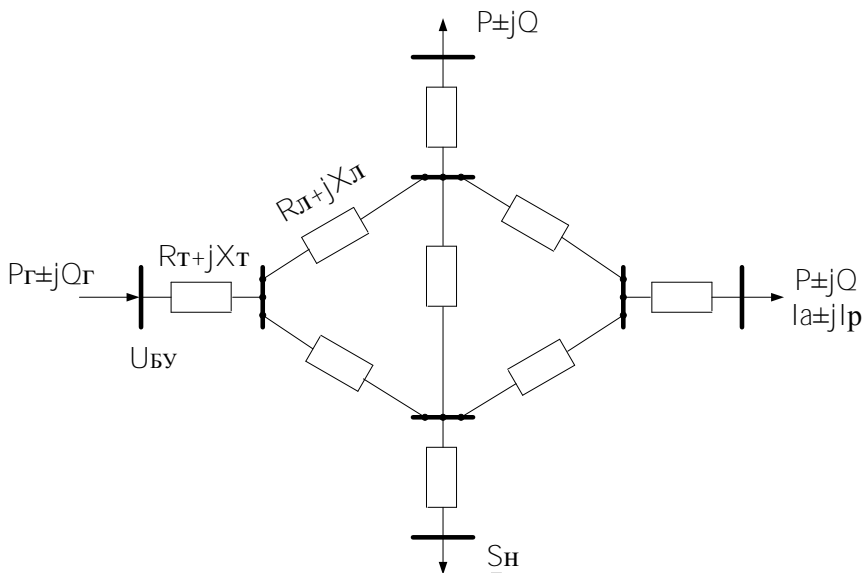


Рис. 1.2. Схема замещения электрической системы (параметры схемы приведены к одной ступени напряжения)

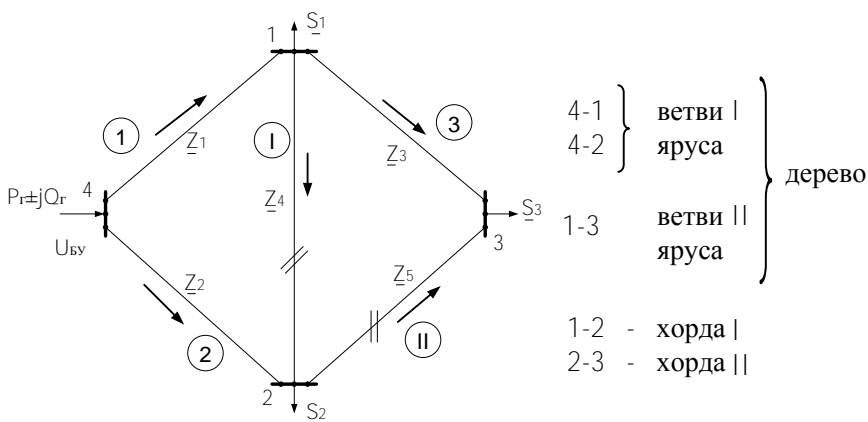


Рис. 1.3. Связанный направленный граф, соответствующий упрощенной схеме замещения с нагрузками, приведенными к стороне высшего напряжения подстанций

Технологическая постановка задачи расчета режима следующая.

Для схемы электрической сети известной конфигурации и параметров требуется определить напряжения в узлах, а также токи, потоки и потери мощности в ветвях сложноразомкнутой сети при заданном напряжении в одном из узлов сети, называемом опорным, для удобства записи уравнений совмещенным с балансирующим узлом – БУ (как правило – шины электростанции или крупной подстанции энергосистемы), и известных нагрузках в остальных узлах сети, заданных в токах или мощностях $\underline{I}_y, \underline{S}_y$.

Особенностью электрических систем и уравнений их установившихся режимов является многомерность и нелинейный характер связи заданных и искомых характеристик режима, а именно:

- число линий и подстанций сети, а следовательно – узлов и ветвей схемы замещения и количество уравнений, описывающих параметры их режимов, может составлять десятки, сотни и более;

- нелинейный (в общем случае) характер уравнений взаимосвязи заданных и искомых характеристик режима – токов, напряжений, мощностей – является принципиально важным, усложняющим расчеты режимов фактором при использовании как узловых, так и контурных и других методов описания режимов. Нелинейность уравнений усугубляет проблему сходимости итерационных процессов их решения и порождает проблему неоднозначности результатов расчета режимов.

1.2. Аналитическое представление информации о конфигурации электрической сети с помощью матриц инцидентий и матричная запись законов Кирхгофа

1.2.1. Принципы нумерации элементов схемы

Математическое описание и анализ схем замещения электрических сетей ведется с использованием теории графов. Очевидно соответствие элементарных понятий из теории графов и теории электрических цепей, а именно: однолинейной схеме замещения трехфазной симметричной сложноразомкнутой электрической сети соответствует **связанный направленный граф**, который состоит из **вершин** и **ребер**, образующих **дерево** и **хорды** схемы. Аналогичные понятия и термины из теории цепей – **узел**, **ветвь**, **разветвленная разомкнутая сеть** и ветви, замыкающие контуры или **контурные ветви**.

Обобщенное аналитическое представление связности графа (или конфигурации сети) может быть дано с помощью матриц соединений (инциденций):

- матрицы соединений ветвей в узлах M , или I матрицы инциденций, которая позволяет сформировать узловую модель конфигурации электрической сети и в наиболее общем виде записать уравнения 1-го закона Кирхгофа;

- матрицы соединения ветвей в независимые контуры N или II матрицы инциденций, которая позволяет сформировать контурную модель конфигурации электрической сети и в общем виде записать уравнения 2-го закона Кирхгофа.

Для аналитического представления конфигурации в виде матриц инциденций схема замещения или ее граф должны быть предварительно пронумерованы. В общем случае нумерация элементов схемы может быть произвольная, но на стадии освоения предмета для обеспечения наглядной структуры матриц параметров сети и уравнений состояния целесообразно вести упорядоченную нумерацию элементов схем с использованием **принципа ярусности**.

В схеме электрической системы выбирают **балансирующий узел (БУ)** – шины электростанции или крупной подстанции энергосистемы, мощность которого, в отличие от других узлов сети, не фиксируется. Балансирующему узлу присваивается последний $(n + 1)$ -й номер.

Порядок нумерации схем с учетом принципа ярусности:

1. Числами натурального ряда на графе схемы последовательно нумеруются все ветви, берущие свое начало в балансирующем узле, и такие же номера присваиваются узлам (вершинам), которые являются концами этих ветвей (концом первой ветви должен быть узел 1, концом второй – узел 2 и т. д.). Эти ветви составят **первый ярус** схемы.

2. Затем, начиная с первой вершины графа, по аналогичному принципу выбираются и нумеруются ветви **второго яруса**, оттекающие от конечных вершин ветвей первого яруса, затем ветви **третьего яруса**, оттекающие от конечных вершин ветвей второго яруса, и т. п. То есть начальными вершинами ветвей последующего яруса служат концы ветвей предыдущего яруса, и рассмотрение узлов ведется в порядке возрастания их номеров – в этом суть принципа ярусности (в реальной схеме электрической сети может быть несколько сотен ветвей). Для всех ветвей за положительное прини-

мается направление от начальной вершины к конечной и номер начала ветви меньше номера конца ($N_{\text{нач}} < N_{\text{кон}}$).

Совокупность n ветвей схемы, составляющих минимальный связанный подграф (часть графа), обеспечивающий связь балансирующего узла со всеми n независимыми узлами схемы, образует так называемое **дерево сети**.

3. Когда в ходе нумерации встречается ветвь, подтекающая к ранее пронумерованному узлу (и, следовательно, запитанному по дереву сети), то эта ветвь замыкает собой **контур** и называется **хордой**. Для каждой из хорд за положительное также принимается направление от начальной вершины к конечной. Хорды условно помечаются на схеме и отдельно нумеруются (I, II, III, ..., k , где k – число контуров) в дополнение к сквозной нумерации ветвей $j = 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, m$.

4. В результате нумерации схемы формируется массив номеров (и наименований) ветвей дерева из n элементов, массив номеров (и наименований) узлов N_i – из n элементов и массив номеров (и наименований) хорд схемы – k элементов, где $k + n = m$ – полному числу ветвей схемы.

Сложившийся в процессе нумерации элементов схемы порядок следования информации внутри массивов номеров узлов и номеров ветвей далее сохраняется для всех других однородных массивов заданных параметров схемы и искомых характеристик режима по узлам и ветвям:

- наименований узлов;
- наименований ветвей $N_{\text{нач}} - N_{\text{кон}}$;
- параметров ветвей схемы (R_B, X_B, k_T, Y_C);
- заданных параметров режима по узлам сети (P_y, Q_y, J_y);
- искомых характеристик режима по узлам и ветвям $U_y, \Delta U_B, I_B, P_B, Q_B, \Delta P_B$ и т. п.

1.2.2. Первая матрица инциденций «узлы-ветви» и ее применение для записи 1-го закона Кирхгофа

Для составления первой матрицы инциденций $M_{n \times m}$ заготавливается таблица, состоящая из n строк (по числу узлов) и m столбцов (по числу ветвей), где $m = n + k$. Строки ее соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы замещения.

Номер строки матрицы соответствует номеру рассматриваемого узла i . Номер столбца j соответствует номеру рассматриваемой ветви в объединенном массиве информации о ветвях. Элемент m_{ij} матрицы, принадлежащий i -й строке и j -му столбцу, может принимать одно из трех значений: $+1$, -1 или 0 :

$m_{ij} = 1$, если узел i является начальной вершиной ветви j (ветвь j «оттекает» от узла i);

$m_{ij} = -1$, если узел i является конечной вершиной ветви j (ветвь j «подтекает» к узлу i);

$m_{ij} = 0$, если узел i не является вершиной ветви j , т. е. не связан с этой ветвью.

Правило знаков о направлениях для подтекающих и оттекающих ветвей можно принять любое, но одно для решаемой задачи. Мы придерживаемся вышеприведенного, принятого в [1].

На рис. 1.4 показан направленный граф, соответствующий схеме замещения двухконтурной электрической сети. Приведем пример составления матрицы M для этой уже пронумерованной с учетом принципа ярусности схемы.

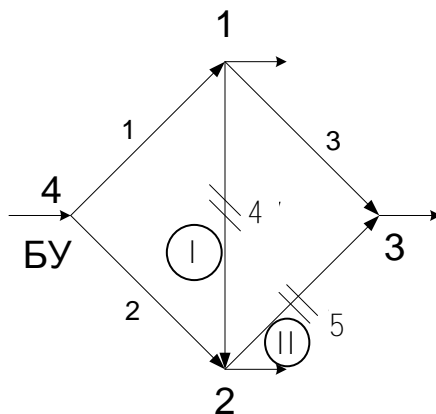


Рис. 1.4

Составим таблицу из четырех строк и пяти столбцов. Пронумеруем ее строки и столбцы соответственно номерам узлов и номерам ветвей схемы; отделим подматрицы для дерева и хорд (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Первая матрица инциденций

		M_α – дерево			M_β – хорды	
		1	2	3	4	5
Узлы \ Ветви	1	-1	0	+1	+1	0
	2	0	-1	0	-1	+1
	3	0	0	-1	0	-1
	БУ	1	1	0	0	0

Поясним заполнение **первой строки** матрицы M для 1-го узла.

Подматрица M_α . 1-й узел дерева является конечной вершиной ветви 1, $m_{\alpha 11} = -1$; ветвь 2 не связана с узлом 1, $m_{\alpha 12} = 0$; узел 1 является начальной вершиной ветви 3, $m_{\alpha 13} = +1$.

Подматрица M_β . Узел 1 является начальной вершиной хорды I (ветвь 4), $m_{\beta 11} = +1$, хорда II (ветвь 5) не связана с узлом 1, $m_{\beta 12} = 0$.

Остальные строки заполняются аналогично.

Каждая i -я строка матрицы M показывает, какие ветви j , где $j = 1, 2, \dots, m$, связаны с данным узлом i и как они направлены. Если ввести в рассмотрение вектор-столбец токов ветвей I_B , где $I_B = [I_1, I_2, I_3, \dots, I_m]^T$, то произведение i -й строки матрицы M на вектор-столбец токов ветвей I_B , полученное по правилам действий с матрицами, даст алгебраическую сумму токов, сходящихся по ветвям в i -м узле, и эта сумма должна быть равна задающему току в узле J_{y_i} , т. е. получаем выражение 1-го закона Кирхгофа для соответствующего узла i :

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} I_j + J_{y_i} = 0. \quad (1.1)$$

Если такое умножение выполнить для всех строк матрицы M , то получим запись 1-го закона Кирхгофа для схемы в целом:

$$M \cdot I_{\text{в}} + J_{\text{у}} = 0$$

или

$$M \cdot I_{\text{в}} = -J_{\text{у}}, \quad (1.2)$$

где $J_{\text{у}} = [J_1, J_2, J_3, \dots, J_n]^T$ – вектор-столбец задающих токов в n независимых узлах (БУ не является независимым узлом).

1-я матрица инциденций M , дополненная строкой инцидентности для балансирующего узла $M_{n+1,j}$, где $j = 1, \dots, m$, обозначается как M_{Σ} . Каждый j -й столбец матрицы M_{Σ} обязательно содержит +1 и -1 и указывает, какие узлы ограничивают данную j -ю ветвь. Сумма элементов любого j -го столбца матрицы M_{Σ} равна нулю.

Знаки для элементов векторов-столбцов токов ветвей $I_{\text{в}}$ и токов узлов $J_{\text{у}}$, входящих в выражения (1.1), (1.2), принимаются как и для элементов матрицы M . Следовательно, токи нагрузок, стоящие в векторе $J_{\text{у}}$, оттекают от узлов и имеют знак «+», токи генераторов подтекают к узлам и имеют знак «-»:

$$J_{\text{у}} = \begin{bmatrix} J_{\text{н}} \\ -J_{\text{г}} \end{bmatrix}.$$

При принятой отдельной нумерации ветвей дерева и хорд, описанной в 1.2.1, матрица M формируется как блочная с блоком M_{α} размерностью $(n \times n)$ – для дерева сети и блоком M_{β} размерностью $(n \times k)$ для хорд. Соответственно векторы параметров ветвей и параметров режима ветвей будут содержать составляющие для дерева сети с индексом α ($Z_{\alpha}, I_{\alpha}, S_{\alpha}$) и для хорд – с индексом β ($Z_{\beta}, I_{\beta}, S_{\beta}$):

$$M = [M_{\alpha} \quad M_{\beta}], \quad dZ_{\text{в}} = \begin{bmatrix} dZ_{\alpha} & 0 \\ 0 & dZ_{\beta} \end{bmatrix}, \quad I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

С учетом блочной структуры матриц выражение 1-го закона Кирхгофа (1.2) примет вид

$$\begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix} = -J_y.$$

Выполнив умножение, получим

$$M_\alpha \cdot I_\alpha + M_\beta \cdot I_\beta = -J_y. \quad (1.4)$$

Для схемы типа дерева – разомкнутой сети, контуры и хорды отсутствуют, $M_\beta = 0$, $I_\beta = 0$. Тогда выражение (1.4) примет вид

$$M_\alpha \cdot I_\alpha = -J_y. \quad (1.5)$$

Подматрица M_α квадратная, невырожденная, сумма ее строк не обращается в ноль, поскольку для БУ строка отсутствует. Следовательно, уравнение (1.5) может быть решено относительно токов в ветвях дерева I_α :

$$I_\alpha = M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y). \quad (1.6)$$

Обратную матрицу M_α^{-1} можно найти прямым обращением матрицы M_α для дерева сети (приложение), но можно определить путем элементарных преобразований матрицы M_α . К элементарным преобразованиям относятся:

- перестановка строк;
- умножение всех элементов строк на число, не равное нулю;
- прибавление к строке другой строки, умноженной на некоторое число.

Схематически процесс нахождения обратной матрицы можно изобразить так:

$$M_\alpha \cdot E \rightarrow \text{элементарные преобразования} \rightarrow E \cdot C_p,$$

где E – единичная матрица.

Здесь матрица C_p – обратная для матрицы M_α ($C_p = M_\alpha^{-1}$) и представляет собой матрицу коэффициентов токораспределения для дерева сети; согласно (1.6) ее элемент C_{pjj} показывает, какая доля от тока j -го узла J_j будет протекать по i -й ветви дерева схемы.

В частном случае разомкнутой сети типа дерева по уравнению (1.6) с помощью матрицы C_p при известных задающих токах узлов J_y может быть найдено токораспределение в ветвях – матрица I_α :

$$I_\alpha = C_p \cdot (-J_y). \quad (1.7)$$

В разомкнутом режиме по схемам типа дерева работает целый класс электрических сетей – распределительные сети с номинальными напряжениями 0,4; 6–10; 35 кВ, которые выполнены (сооружены) как замкнутые сети с резервированием, но работают в разомкнутом режиме. Поэтому быстрые и эффективные способы решения на ЭВМ задачи (1.6), (1.7) практически актуальны и были разработаны и программно реализованы в 1970-х годах в работах кафедр «Электрические сети и системы» Киевского политехнического института, Белорусского политехнического института и явились основой программных комплексов анализа и оптимизации режимов разомкнутых сетей, поиска оптимальных мест размыкания городской кабельной сети по критерию минимума потерь мощности и энергии и пр.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются матрицы M , M_α , M_Σ ?
2. Чему равна сумма элементов столбца матрицы M_Σ и почему?
3. Чему равна сумма всех строк матрицы M_Σ , взятая по столбцу?
4. В каком случае система уравнений (1.2) имеет решение?
5. Каков физический смысл элемента строки C_{ij} матрицы коэффициентов токораспределения C_p ?
6. Чему равна сумма элементов столбца матрицы C_p ?

7. Чему равны диагональные элементы матрицы M_α при упорядоченной нумерации узлов и ветвей, основанной на принципе ярусности?

8. Как найти обратную матрицу?

9. Что значит рассчитать режим электрической системы?

10. Приведите состав исходной информации о режиме электрической системы и состав выходной информации о режиме.

1.2.3. Вторая матрица инциденций «ветви–контуры» и её применение для записи 2-го закона Кирхгофа

Для обобщенного аналитического представления конфигурации расчетной схемы замещения электрической сети, или в терминах теории графов – связности направленного графа, соответствующего схеме замещения сети, при записи 2-го закона Кирхгофа служит матрица соединений ветвей в независимые контуры N – вторая матрица инциденций «контур–ветви».

Матрицу N можно представить в виде таблицы, строки которой соответствуют независимым контурам, а столбцы – ветвям схемы. Соответственно матрица N имеет k строк и m столбцов; ее элементы могут принимать значения $n_{ij} = \pm 1; 0$.

$$N = (n_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$n_{ij} = 1$, если ветвь j входит в состав контура i и их направления совпадают;

$n_{ij} = -1$, если ветвь j входит в состав контура i , но их направления противоположны;

$$n_{ij} = 0, \text{ если ветвь } j \text{ не входит в контур } i.$$

Каждая строка матрицы N показывает, какие ветви образуют соответствующий независимый контур. Каждый столбец матрицы показывает, в состав каких независимых контуров входит данная ветвь и как соотносится направление ветви с направлением обхода конкретного контура. При упорядоченной нумерации схемы с учетом принципа ярусности ветви дерева и хорды получают условное положительное направление от начала к концу, то есть от узла с номером N_n к узлу с номером N_k , где $N_n < N_k$. Направление обхода i -го контура соответствует направлению i -й хорды, замыкающей этот контур.

На рис. 1.5 показан направленный граф, соответствующий схеме замещения трехконтурной электрической сети. Приведем пример

составления матрицы N для этой уже пронумерованной с учетом принципа яркости схемы.

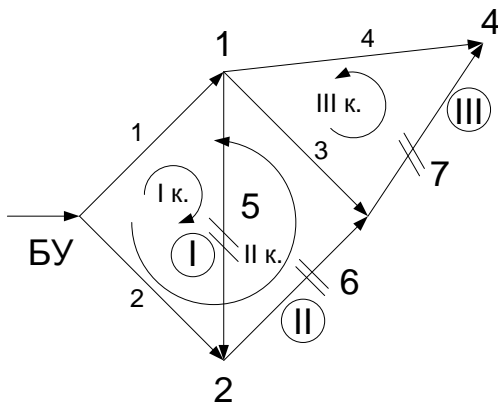


Рис. 1.5. Связанный направленный граф трехконтурной схемы сети

Составим таблицу из трех строк и семи столбцов соответственно трем контурам и семи ветвям схемы. Пронумеруем ее строки и столбцы соответственно номерам контуров и номерам ветвей схемы; отделим подматрицы N_α , N_β для дерева и хорд (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Вторая матрица инциденций

		N_α				N_β		
		1	2	3	4	5	6	7
Контур	Ветви					I	II	III
	I	1	-1	0	0	1	0	0
	II	-1	1	-1	0	0	1	0
	III	0	0	1	-1	0	0	1

Поясним заполнение **первой строки** матрицы N для 1-го контура.

Подматрица N_α . 1-я ветвь дерева входит в состав I контура, и ее направление совпадает с направлением 1-й хорды: $n_{\alpha 11} = 1$; 2-я ветвь дерева также входит в состав I контура, но ее направление противо-

положно: $n_{\alpha 12} = -1$. Остальные ветви дерева не входят в первый контур, поэтому первую строку подматрицы N_α завершаем нулями.

Подматрица N_β . | контур замыкается | хордой. Ее направление 1–2 «от узла с меньшим номером к узлу с большим номером». Оно же определяет направление обхода по контуру, поэтому элемент $n_{\beta 11} = 1$. Остальные хорды (по принципу нумерации) не входят в | контур, то есть $n_{\beta 1k} = 0$ при $k \neq 1$.

Вторая строка матрицы N для || контура образуется ветвями дерева 1, 2, 3-й и || хордой. Причем с учетом направления || хорды (ветвь 6 между узлами 2–3) элементы:

$$n_{\alpha 21} = -1; n_{\alpha 22} = 1; n_{\alpha 23} = -1; n_{\alpha 24} = 0; n_{\beta 21} = 0; n_{\beta 22} = 1; n_{\beta 23} \equiv n_{27} = 0.$$

Третья строка матрицы N соответствует ||| контуру и образуется ветвями дерева 3-й и 4-й и ||| хордой (7-я ветвь между узлами 3–4).

Строка $N_{\alpha 3j}$:

$$n_{\alpha 31} = 0; n_{\alpha 32} = 0; n_{\alpha 33} = 1; n_{\alpha 34} = -1; n_{\beta 31} = 0; n_{\beta 32} = 0; n_{\beta 33} = 1.$$

Получили блочную матрицу

$$N = \begin{bmatrix} N_\alpha & N_\beta \end{bmatrix},$$

где N_β – единичная матрица.

Отметим, что приведенная матрица N составлена для базисной системы независимых контуров, которая отвечает трем известным условиям:

- каждая хорда входит только в один контур;
- направление обхода по контуру соответствует направлению хорды;
- номер хорды соответствует номеру контура.

Матрица N позволяет записать для электрической сети в целом систему взаимно независимых уравнений по 2-му закону Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений по ветвям замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС или в данном случае равна нулю:

$$N \cdot U_B = 0, \quad (1.8)$$

где $U_B = [U_{Bj}]$, $j=1, 2, \dots, m$ – вектор-столбец падений напряжений на ветвях схемы.

По закону Ома в матричной форме для всех участков сети в целом можно записать вектор-столбец падений напряжения на ветвях (рис. 1.6)

$$U_B = dZ_B \cdot I_B - E_B, \quad (1.9)$$

где dZ_B – диагональная матрица сопротивлений ветвей m -го порядка;

$E_B = [E_j]$, $j=1, 2, \dots, m$, – вектор-столбец ЭДС в ветвях;

$I_B = [I_j]$, $j=1, 2, \dots, m$, – вектор-столбец токов в ветвях.

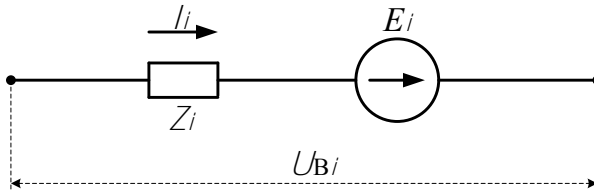


Рис. 1.6

Подставляя (1.9) в (1.8), получаем матричную форму 2-го закона Кирхгофа:

$$N \cdot (dZ_B \cdot I_B - E_B) = 0$$

или

$$N \cdot dZ_B \cdot I_B = E_K. \quad (1.10)$$

Здесь $E_K = N \cdot E_B$ – вектор-столбец контурных ЭДС, представляющих собой алгебраическую сумму ЭДС ветвей, входящих в каждый независимый контур.

1.2.4. Получение контурной конфигурационной модели электрической сети на основе ее узловых модели

После того как для схемы (вручную или на ЭВМ с помощью машинного алгоритма) составлена блочная I матрица инцидентий $M = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \end{bmatrix}$, в которой отделены дерево и хорды схемы, процесс получения блочной II матрицы соединений $N = \begin{bmatrix} N_\alpha & N_\beta \end{bmatrix}$ можно формализовать и алгоритмизировать. Покажем это.

В выражении (1.8) U_B – падение напряжения на ветвях – можно записать как

$$U_B = M^T \cdot U_\Delta \text{ или } U_B = M_\Sigma^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{BY} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$U_\Delta = U_y - n \cdot U_{BY},$$

где U_y – вектор-столбец напряжений в узлах сети n -го порядка;

n – единичный вектор-столбец n -го порядка.

Подставляя (1.11) в (1.8), из 2-го закона Кирхгофа получим

$$N \cdot M^T \cdot U_\Delta = 0.$$

Если произведение трех величин равно нулю, то равен нулю один из сомножителей или произведение двух других.

Поскольку $U_\Delta \neq 0$, следовательно,

$$N \cdot M^T = 0. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) выражает общее топологическое свойство связанного направленного графа. Она подробно пояснена в [2].

Подставим матрицы N и M в виде их блоков в выражение (1.12):

$$\begin{bmatrix} N_\alpha & N_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\alpha^T \\ M_\beta^T \end{bmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

Заметим, что M_α и N_β – квадратные и обратимые матрицы. Перемножив, получим

$$N_\alpha \cdot M_\alpha^T + N_\beta \cdot M_\beta^T = 0.$$

При формировании базисной системы независимых контуров подматрица N_β есть единичная матрица, т. е. $N_\beta = E$, и при умножении E опускается. Получаем

$$N_\alpha \cdot M_\alpha^T + M_\beta^T = 0.$$

Отсюда выразим подматрицу N_α , умножая оба слагаемых на $(M_\alpha^T)^{-1}$ справа:

$$N_\alpha = -M_\beta^T \cdot (M_\alpha^T)^{-1},$$

а

$$N_\alpha^T = -M_\alpha^{-1} \cdot M_\beta. \quad (1.14)$$

Таким образом, при выделении базисной системы независимых контуров, когда $N_\beta = E$, подматрицу N_α можно получить выполнением стандартных операций над блоками первой матрицы инцидентий M_α, M_β .

На использовании второй матрицы инцидентий N основан полный метод расчета и анализа электрического режима – метод контурных уравнений, который будет рассмотрен ниже.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы структура и размер второй матрицы соединений?
2. При каких условиях N_β – единичная матрица?
3. Как формулируется основное свойство связанного направленного графа?

4. Дайте характеристику и укажите область применения второй матрицы инцидентий N .

5. Почему для нахождения напряжений узлов сети относительно базисного U_{Δ} из выражений $U_B = M^T \cdot U_{\Delta}$ достаточно обратить матрицу M_{α}^T ?

6. Какая связь существует между подматрицами первой и второй матриц инцидентий и как она формулируется?

7. Обоснуйте достаточность информации, содержащейся в подматрицах M_{α}^{-1} , M_{β} для формирования подматрицы N_{α} .

1.2.5. Запись уравнений состояния сети по законам Кирхгофа

Уравнения состояния электрической сети по законам Кирхгофа (1.2), (1.10) связаны общим вектором искомых переменных—токов ветвей I_B и образуют систему из m уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} M \cdot I_B = -J_y \\ N \cdot dZ_B \cdot I_B = N \cdot E_B \end{cases}$$

или, введя составные (блочные) матрицы, получаем

$$\begin{bmatrix} M \\ N \cdot dZ_B \end{bmatrix} \cdot I_B = \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix}.$$

Матрицы соединений M , N и диагональную матрицу сопротивлений ветвей dZ_B можно представить в виде блоков для дерева и хорд схемы, как в выражении (1.3):

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha} & M_{\beta} \\ N_{\alpha} \cdot dZ_{\alpha} & N_{\beta} \cdot dZ_{\beta} \end{bmatrix} \cdot I_B = \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Приняв обозначения

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha} & M_{\beta} \\ N_{\alpha} \cdot dZ_{\alpha} & N_{\beta} \cdot dZ_{\beta} \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_{\beta} \end{bmatrix} = F,$$

запишем (1.15) как

$$A \cdot I_{\beta} = F. \quad (1.16)$$

Здесь A – квадратная составная матрица коэффициентов системы уравнений состояний сети по законам Кирхгофа порядка m – содержит информацию об узловой и контурной моделях конфигурации сети в виде матриц M и N и о параметрах сети Z_{α} , Z_{β} ;

F – вектор-столбец правых частей системы уравнений, содержит J_y – задающие токи узлов и E_{β} – ЭДС ветвей – независимые заданные характеристики режима;

I_{β} – вектор-столбец неизвестных системы уравнений – токи ветвей схемы $I_{\beta}^T = [I_{\alpha} \ I_{\beta}]^T$ – искомые характеристики режима.

Уравнения (1.15), (1.16) решаются относительно токов ветвей I_{β} :

$$I_{\beta} = A^{-1} \cdot F.$$

По найденному токораспределению I_{β} и известному напряжению в балансирующем узле $U_{\text{бу}}$ могут быть найдены падения напряжения на ветвях U_{β} и напряжения остальных узлов сети U_{Δ} , U_y . Таким образом, задача расчета режима в линейной постановке удовлетворительно решается по уравнениям Кирхгофа, однако для промышленных программ этот подход не применяется, так как порядок системы уравнений (1.16) и обращаемой матрицы A велик – равен числу ветвей схемы m . Для разработки промышленных программ расчета режимов применяются методы, приводящие к системам уравнений состояния с матрицами меньшей размерности – узловые методы или контурные методы расчета установившихся режимов электрических систем.

1.3. Узловая модель установившегося режима электрической сети

1.3.1. Вывод узловых уравнений

Эти уравнения выводятся из уравнений баланса токов в узлах по 1-му закону Кирхгофа (1.2). Для электрической сети в матричной форме записи

$$M \cdot I_{\text{в}} = -J_{\text{у}}, \quad (1.17)$$

где $J_{\text{у}}$ – вектор-столбец задающих токов узлов n -го порядка;

$I_{\text{в}}$ – вектор-столбец искомых токов ветвей порядка m .

В общем случае из этого уравнения нельзя найти токораспределение $I_{\text{в}}$, так как число уравнений равно числу узлов n , а число неизвестных равно числу ветвей m . Выразим токи ветвей через падения напряжения на ветвях $\Delta U_{\text{в}}$:

$$I_{\text{в}} = dZ_{\text{в}}^{-1} \cdot (U_{\text{в}} + E_{\text{в}}). \quad (1.18)$$

В свою очередь, падения напряжения на ветвях $U_{\text{в}}$ с использованием | матрицы соединений M , M^T можно выразить через напряжения узлов электрической сети $U_{\text{у}}$ или $U_{\Delta\text{у}}$, то есть через вектор-столбец меньшей размерности, чем число ветвей:

$$(U_{\text{в}} + E_{\text{в}})_{[m \times 1]} = M_{[m \times n]}^T \cdot U_{\Delta\text{у}}_{[n \times 1]} \quad (1.19)$$

или

$$(U_{\text{в}} + E_{\text{в}})_{[m \times 1]} = M_{\Sigma}^T_{[m(n+1)]} \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{у}} \\ U_{\text{БУ}} \end{bmatrix}_{[(n+1) \times 1]} \quad (1.19 \text{ a})$$

Здесь M^T – транспонированная | матрица инциденций;

$U_{\Delta y}$ – вектор-столбец падений напряжений в узлах сети относительно базисного узла;

U_y – вектор-столбец напряжений узлов электрической сети n -го порядка:

$$U_y = n \cdot U_{\text{Бу}} + U_{\Delta y};$$

$\begin{bmatrix} U_y \\ U_{\text{Бу}} \end{bmatrix}$ – составной вектор $(n + 1)$ -го порядка, содержащий вектор

U_y n -го порядка и напряжение в балансирующем $(n + 1)$ узле $U_{\text{Бу}}$.

Подставив в уравнение (1.17) токи ветвей из (1.18) и падения напряжения на ветвях сети из (1.19), получим

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot U_{\Delta y} = -J_y. \quad (1.20)$$

Обозначим произведение трех матриц M , dZ_B^{-1} , M^T через Y_y :

$$Y_y = M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T,$$

где Y_y – квадратная неособенная матрица n -го порядка. Её называют матрицей собственных и взаимных проводимостей узлов электрической сети, это важнейшая матрица параметров в анализе электрических сетей.

С учетом подстановки Y_y формула (1.20) примет следующий вид:

$$Y_y \cdot U_{\Delta} = -J_y. \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) представляет собой систему узловых уравнений установившегося режима электрической сети при задании нагрузок в токах.

Если выразить $U_{\text{Бу}}$ по (1.19) через абсолютные значения напряжений узлов U_y и подставить в (1.17), то получим

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_\Sigma^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{BY} \end{bmatrix} = -J_y. \quad (1.22)$$

Произведение $M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_\Sigma^T$ представляет собой матрицу Y_y , дополненную столбцом проводимостей ветвей между i -м и балансирующим узлами $y_{\bar{0}}$:

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_\Sigma^T = \begin{bmatrix} Y_y & y_{\bar{0}} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

С учетом (1.23) левая часть системы узловых уравнений (1.22) примет вид

$$\begin{bmatrix} Y_y & y_{\bar{0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_y \cdot U_y + y_{\bar{0}} \cdot U_{BY} \end{bmatrix}.$$

Перенеся произведение известных величин $y_{\bar{0}} \cdot U_{BY}$ в правую часть (1.22), получим систему узловых уравнений относительно напряжений узлов электрической сети U_y :

$$Y_y \cdot U_y = -J_y - y_{\bar{0}} \cdot U_{BY}. \quad (1.24)$$

Обе системы узловых уравнений (1.21) и (1.24) имеют матрицы коэффициентов Y_y – матрицы узловых собственных и взаимных проводимостей. Поскольку матрица узловых проводимостей Y_y для совокупности независимых узлов схемы невырожденная, то системы уравнений (1.21) и (1.24) могут быть решены (путем обращения этой матрицы или другим способом) относительно векторов независимых переменных U_Δ или U_y :

$$U_{\Delta y} = Y_y^{-1} \cdot (-J_y), \quad (1.25)$$

$$U_y = Y_y^{-1} \cdot (-J_y - y_{\bar{0}} \cdot U_{BY}). \quad (1.26)$$

Нагрузки в узлах сети часто представляют через узловые задающие мощности S_{yi} :

$$J_{yi} = \frac{S_{yi}}{\hat{U}_{yi}}, \quad (1.27)$$

где \hat{U}_{yi} – сопряженный комплекс напряжения в i -м узле.

Тогда

$$Y_y \cdot U_\Delta = \left[-\frac{S_{yi}}{\hat{U}_{yi}} \right] \quad (1.28)$$

или

$$Y_y \cdot U_\Delta = \left[-\frac{S_{yi}}{\hat{U}_{\Delta i} + U_{\text{БВ}}} \right], \quad (1.29)$$

$$Y_y \cdot U_y = \left[-\frac{S_{yi}}{\hat{U}_{yi}} - y_{\text{в}} \cdot U_{\text{БВ}} \right].$$

Из уравнений (1.28), (1.29) вытекает важное заключение:

– задача расчета установившегося режима электрической системы по природе своей нелинейная, поскольку напряжения узлов сети зависят от падений напряжений на ветвях, следовательно, от токов узлов и ветвей, а узловые токи по (1.27) зависят от искомым узловых напряжений; кроме того, если освободиться от знаменателя в правой части (1.29), то левая часть становится уравнением второй степени относительно неизвестных узловых напряжений U_y .

Системы нелинейных уравнений (1.28), (1.29) могут разрешаться относительно искомым напряжений узлов аналогично (1.25) с организацией внешнего итерационного процесса коррекции задающих токов $J_y^{(k)}$ по узловым мощностям S_y и рассчитанным напряжениям $U_{yi}^{(k)}$ (1.27).

Если напряжения узлов рассчитаны с желаемой точностью (по выражениям (1.25), (1.26) или какими-либо другими методами), то остальные параметры режима – токи ветвей I_b , потоки и потери мощности S_{ij} , ΔS_{ij} – определяются однозначно и точно.

1.3.2. *Определение и характеристика матрицы узловых проводимостей*

Матрица коэффициентов системы уравнений узловых напряжений Y_y квадратная, неособенная, симметричная, n -го порядка, для схем переменного тока имеет комплексные элементы или распадается на две вещественные матрицы $Y = Y' - jY''$. Для реальных схем электрических сетей матрица слабозаполненная. Из n^2 ее элементов только примерно $4n$ элементов являются ненулевыми (в случае когда число ветвей схемы $m \leq 1,5n$). При разработке алгоритмов и промышленных программ используют методы компактного хранения этой симметричной слабозаполненной матрицы, исключая действия с нулевыми элементами. Это снижает требуемый объем памяти ЭВМ и повышает быстродействие программ, что остается актуальным и до настоящего времени, несмотря на большие ресурсы и быстродействие современных ЭВМ.

Получим матрицу узловых проводимостей для конкретной схемы электрической сети (см. рис. 1.4).

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_\alpha & M_\beta \end{array} \\ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \end{array} \quad ,$$

$M_{b_y, j}$

$$\begin{aligned}
Y_{y\Sigma} = M_{\Sigma} \cdot dY_{\text{в}} \cdot M_{\Sigma}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times m} \times \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \end{bmatrix}_{m \times m} \times M_{\Sigma}^T_{(m \times (n+1))} = \\
&= \begin{bmatrix} -y_1 & 0 & y_3 & y_4 & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & -y_4 & y_5 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 & -y_5 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times m} \times M_{\Sigma}^T_{m \times (n+1)} = \quad (1.30) \\
&= \begin{bmatrix} y_1 + y_3 + y_4 & -y_4 & -y_3 & -y_1 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 & -y_2 \\ -y_3 & -y_5 & y_3 + y_5 & 0 \\ -y_1 & -y_2 & 0 & y_1 + y_4 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}
\end{aligned}$$

Как видим, матрица узловых проводимостей Y_{Σ} – квадратная, симметричная. Ее порядок равен числу узлов схемы $(n + 1)$. Ее побочные (недиагональные) элементы $y_{ij} = y_{ji}$. Каждый диагональный элемент матрицы узловых проводимостей представляет собой сумму побочных элементов строки (или столбца), взятую с противоположным знаком.

Матрица узловых проводимостей для схемы электрической сети, включающая балансирующий узел, обязательно вырожденная в силу способа ее получения, и это подтверждается простейшим анализом выражения (1.30) – сумма элементов строк или столбцов $Y_{y\Sigma}$ равна 0. Поэтому когда в схеме назначается балансирующий узел, для которого не составляется узловое уравнение (то есть удаляется столбец и строка из матрицы $Y_{y\Sigma}$), то матрица Y обязательно оказывается невырожденной:

$$\det Y_{\Sigma} = 0; \quad \det Y \neq 0.$$

При удалении строки, соответствующей балансирующему узлу, порядок матрицы Y понижается на единицу. Для большинства строк матрицы имеет место выражение:

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^n Y_{ij},$$

и только для узлов, имеющих связь с балансирующим, имеет место соотношение

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^n Y_{ij} + Y_6 > \sum_{j=1}^n Y_{ij},$$

то есть диагональный элемент оказывается больше суммы побочных элементов. Это обстоятельство имеет формальное решающее значение для сходимости итерационных процессов решения узловых уравнений. Здесь i, j – номера узлов, ограничивающих ветви с проводимостями Y_{ij} , и соответственно индексы строк и столбцов матрицы. Расчет режима сети, как инженерная задача, формулируется как определение напряжений узлов сети при известных конфигурации и параметрах сети, нагрузках узловых точек и напряжении минимум в одном из узлов сети, называемом базисным или балансирующим.

Матрица узловых проводимостей содержит полную информацию о конфигурации и параметрах электрической сети и может быть составлена непосредственно по схеме сети¹, (минуя процедуру перемножения матриц) на основе визуального представления схемы и ее нумерации. Она также может быть составлена программным путем с использованием списков номеров узлов N и наименований ветвей $N_{\text{нач}}$ и $N_{\text{кон}}$.

В общем случае для схемы переменного тока проводимости ветвей носят комплексный характер и матрица Y_y имеет комплексные элементы:

$$\dot{y}_{ij} = \frac{1}{\dot{z}_{ij}} = \frac{1}{r + jX} = \frac{r - jX}{r^2 + X^2} = \frac{r}{r^2 + X^2} - j \frac{X}{r^2 + X^2} = Y' - jY''.$$

Для схемы n -го порядка в общем случае матрица узловых проводимостей запишется как

¹ Опираясь на изначальное представление информации о конфигурации в виде списков номеров узлов N и наименований ветвей $N_{\text{нач}} - N_{\text{кон}}$.

$$Y_y = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} & \dots & -Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{n1} & -Y_{n2} & -Y_{n3} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n Y_{1j} + Y_{1\delta} & -Y_{12} & -Y_{13} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & \sum_{j=1}^n Y_{2j} + Y_{2\delta} & -Y_{23} & \dots & -Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{n1} & \dots & \dots & \sum_{j=1}^n Y_{nj} + Y_{n\delta} & -Y_{in} \\ -Y_{n1} & \dots & \dots & \dots & \sum_{j=1}^n Y_{nj} + Y_{n\delta} \end{bmatrix}$$

Вопросы для самопроверки

1. На основе каких законов электротехники выводятся узловые уравнения установившихся режимов?
2. Что выражают левая и правая части уравнений узловых напряжений и система узловых уравнений в целом?
3. Какая связь между переменными U_{Δ} и U_y ?
4. Чем отличаются системы узловых уравнений, составленные относительно напряжений U_{Δ} и U_y ?
5. Как связаны переменные U_{Δ} и U_b ?
6. Как определяются проводимости ветвей схемы замещения электрической сети?
7. Как определяются элементы матрицы узловых проводимостей?
8. Каково соотношение между диагональными и побочными элементами матрицы Y_y ?

9. Как соотносятся знаки элементов матрицы Y_y ?

10. Сформулируйте основные свойства матрицы узловых проводимостей.

11. *Задание:* Составить матрицу узловых проводимостей Y_y непосредственно по схеме сети, минуя процедуру умножения по (1.30), опираясь на представление о физической сущности элементов и свойствах матрицы Y_y . Предварительно самостоятельно составить схему из 4–6 узлов с 1–3 контурами.

1.4. Контурные уравнения установившихся режимов электрических систем

1.4.1. Вывод контурных уравнений

Контурные уравнения выводятся на основе 2-го закона Кирхгофа для всей сети

$$N \cdot U_B = 0, \quad (1.31)$$

где U_B – вектор-столбец падений напряжений по ветвям сети, выражаемых по закону Ома для сети в целом как

$$U_B = dZ_B \cdot I_B - E_B. \quad (1.32)$$

Подставляя выражение для U_B из (1.32) в (1.31), получим развернутую запись 2-го закона Кирхгофа для сети в целом:

$$N \cdot dZ_B \cdot I_B - N \cdot E_B = 0. \quad (1.33)$$

Из одного этого выражения, как известно, нельзя найти токи ветвей I_B , так как в выражении (1.33) имеем k уравнений (по числу контуров – строк матрицы N), а неизвестных в векторе I_B – m (по числу ветвей), и $m \gg k$.

Для преодоления этого несоответствия используют подстановку $I_B = [I_\alpha \ I_\beta]^T$ и токи в дереве сети I_α выражают через задающие

токи узлов и токи в хордах или контурные токи I_β , – тем самым понижают число неизвестных в выражении (1.33) с m до k .

Токи в дереве сети I_α получим из выражения 1-го закона Кирхгофа:

$$M_\alpha \cdot I_\alpha + M_\beta \cdot I_\beta = -J_y,$$

$$I_\alpha = M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y) - M_\alpha^{-1} \cdot M_\beta \cdot I_\beta. \quad (1.34)$$

Подставим сюда соотношение (1.14), ранее полученное из основного свойства направленного графа:

$$N_\alpha^T = -M_\alpha^{-1} \cdot M_\beta.$$

Таким образом, выражение (1.34) для токов дерева сети упрощается:

$$I_\alpha = M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y) + N_\alpha^T \cdot I_\beta. \quad (1.35)$$

Отсюда следует, что для нахождения токов в дереве сети I_α достаточно определить токи в хордах I_β , то есть решить систему уравнений k -го порядка, где k – число независимых контуров, которое, как известно, $k < n < m$. Таким образом удалось существенно понизить порядок решаемой системы уравнений для расчета токораспределения в сети при использовании ее контурной модели.

Выражение (1.35) отражает принцип наложения при расчете токов. Составляющая $M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y)$ дает нам токораспределение в дереве данной сети без учета токов хорд, а вторая составляющая $N_\alpha^T \cdot I_\beta$ учитывает влияние токов хорд на токи в дереве сети при замыкании хорд. Тогда полное токораспределение в схеме соответственно определится как

$$I_\alpha = \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + \begin{bmatrix} N_\alpha^T \\ N_\beta^T \end{bmatrix} \cdot I_\beta. \quad (1.36)$$

Примем во внимание, что

$$N_{\beta} = E, \quad M_{\alpha}^{-1} = C_0, \quad N \cdot E_{\beta} = E_{\kappa}, \quad (1.37)$$

где E_{κ} – вектор-столбец контурных ЭДС, представляющих собой алгебраические суммы ЭДС ветвей E_{β} по независимым контурам.

В выражение 2-го закона Кирхгофа (1.33) подставим токи ветвей I_{β} из (1.36) и E_{κ} из (1.37). Получим

$$N \cdot dZ_{\beta} \cdot \left(\begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + \begin{bmatrix} N_{\alpha}^T \\ N_{\beta}^T \end{bmatrix} \cdot I_{\beta} \right) = E_{\kappa}. \quad (1.38)$$

Раскроем скобки

$$N \cdot dZ_{\beta} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + N \cdot dZ_{\beta} \cdot N^T \cdot I_{\beta} = E_{\kappa}. \quad (1.39)$$

Произведение матриц

$$N \cdot dZ_{\beta} \cdot N^T = Z_{\kappa} \quad (1.40)$$

называют матрицей контурных сопротивлений, которая является квадратной и неособенной. Подставим Z_{κ} в (1.39):

$$N \cdot dZ_{\beta} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + Z_{\kappa} \cdot I_{\beta} = E_{\kappa}. \quad (1.41)$$

Уравнение (1.41) связывает независимые режимные характеристики (J_y , $E_{\kappa} = N \cdot E_{\beta}$), параметры и конфигурацию сети (Z_{β} , N , M_{α}) с зависимыми характеристиками режима I_{β} (токи хорд) и может быть решено относительно токов хорд I_{β} :

$$I_{\beta} = Z_K^{-1} \cdot \left(E_K + N \cdot dZ_B \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot J_y \right). \quad (1.42)$$

Тогда токи в дереве сети I_{α} определяются по (1.35) и задача нахождения токораспределения в линейной постановке, то есть при задании нагрузок узлов в токах J_y , решена полностью. Напряжения в узлах определяются по известному напряжению в балансирующем

$$\text{узле } U_{\text{Бу}} \text{ и найденным токам ветвей } I_B = \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix};$$

$$U_{\alpha} = Z_{\alpha} \cdot I_{\alpha}, \quad U_{\Delta y} = (M_{\alpha}^T)^{-1} \cdot U_{\alpha},$$

$$U_y = n \cdot U_{\text{Бу}} + U_{\Delta}.$$

1.4.2. Определение и характеристика матрицы контурных сопротивлений

Матрица контурных сопротивлений (1.40) также имеет вполне регулярную структуру, как и матрица узловых проводимостей. Матрица контурных сопротивлений имеет порядок, равный числу независимых контуров. Ее диагональные элементы Z_{ii} представляют собой алгебраические суммы сопротивлений ветвей, входящих в данный i -й контур, а недиагональные Z_{ij} – алгебраическую сумму сопротивлений ветвей, общих для контуров i и j .

При использовании принципа ярусности формируется система контуров, в которой каждая хорда входит только в один контур и направление обхода по контуру совпадает с направлением тока в хорде. При этом N_{β} – единичная матрица.

Для схемы рис. 1.5 и матрицы N табл. 1.2 матрица контурных сопротивлений имеет вид

$$Z_K = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_V) & (z_1 + z_2) & 0 \\ (z_1 + z_2) & (z_1 + z_2 + z_3 + z_{VI}) & z_3 \\ 0 & z_3 & (z_4 + z_3 + z_{VII}) \end{bmatrix}.$$

Соотношение между ее диагональными и побочными элементами

$$|z_{ii}| > z_{ij},$$

то есть диагональный элемент больше любого побочного.

Для так называемой канонической системы контуров матрица имеет вид

$$Z_k = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_v) & z_v & 0 \\ z_v & (z_3 + z_v + z_{v1}) & z_3 \\ 0 & z_3 & (z_3 + z_4 + z_{v11}) \end{bmatrix},$$

то есть всегда обеспечивается преобладание диагонального элемента z_{ii} над суммой недиагональных элементов $\sum z_{ij}$:

$$z_{ii} > \sum z_{ij}, \quad z_{ii} = \sum z_{ij} + z_{\beta i}.$$

Различие в составе контуров и матриц Z_k отражено в составе диагональных элементах z_{ii} .

Как указывалось выше, система уравнений (1.41) может решаться путем обращения матрицы Z_k по выражению (1.42) или любым другим способом решения системы линейных уравнений, а именно: группой методов исключения неизвестных (метод Гаусса) или итерационными методами решения систем линейных уравнений, то есть методом простой или ускоренной итерации. Особенности системы контурных уравнений установившихся режимов по сравнению с системой узловых уравнений является более низкий порядок решаемой системы, так как $k \ll n$ — число контуров в схеме значительно меньше числа узлов в сети.

Но при решении линейных контурных уравнений итерационным методом начальные приближения неизвестных (токов хорд) не определены, отсутствуют данные для более или менее точного задания токов хорд. По сравнению с системой контурных уравнений, для системы узловых уравнений при их решении итерационным методом

относительно напряжения в узлах выбор начальных приближений облегчен: $U_{\text{нач}} \approx U_{\text{БВ}}$ или $U_{\text{нач}} \approx U_{\text{ном}}$.

В целом задача расчета режима реальной электрической сети с большим числом элементов остается многомерной. Контурные уравнения также нелинейны при задании нагрузок в мощностях, поскольку токи $I_{\text{в}}$ зависят от задающих токов узлов $J_{\text{у}}$, а они зависят от узловых напряжений $U_{\text{у}}$, которые меняются при изменении токораспределения $I_{\text{в}}$.

Блок-схема алгоритма расчета режима на основе контурных уравнений при задании нагрузок в мощностях приведена на рис. 1.7. В ней решение системы контурных уравнений выполняется путем обращения матрицы контурных сопротивлений. Возможно также решение методом исключения неизвестных Гаусса, методом итерации. При этом необходим подбор коэффициента демпфирования ($0 < k_{\text{д}} < 1$), поскольку итерационный процесс расчета токов хорд ($I_{\beta}^{(k)} = I_{\beta}^{(k-1)} + (I_{\beta}^{(k)} - I_{\beta}^{(k-1)}) \cdot k_{\text{д}}$) носит, как правило, колебательный характер.

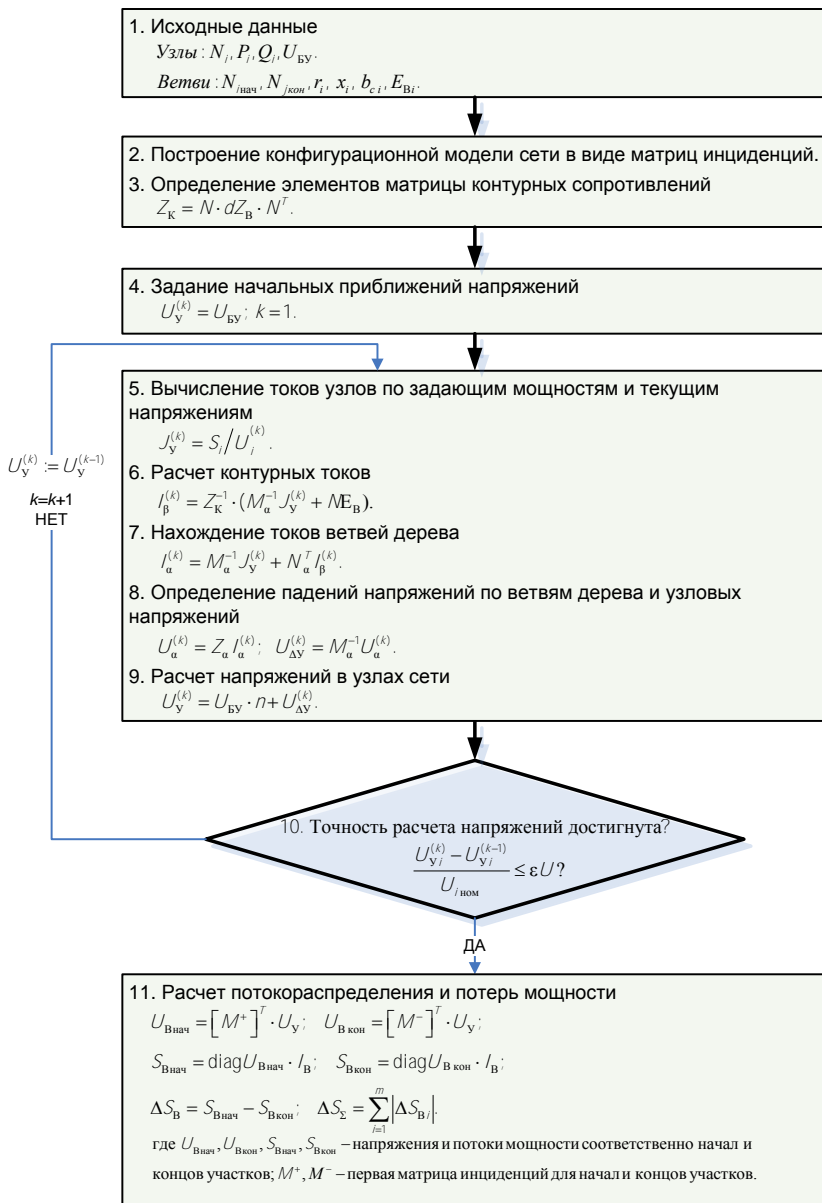


Рис. 1.7. Блок-схема алгоритма расчета режима на основе контурных уравнений при задании нагрузок в мощностях

Вопросы для самопроверки

1. Что выражают контурные уравнения?
2. На какие подматрицы разделяются матрицы параметров электрической сети, параметров режима и матрицы инцидентий?
3. В чем суть принципа наложения, применяемого при записи токов в дереве сети?
4. Как определить (записать) алгебраическую сумму падений напряжений по ветвям дерева сети?
5. Каковы свойства канонической системы независимых контуров?
6. Изложите порядок расчета режима по методу контурных уравнений при задании нагрузок в токах.
7. Объясните, как меняется порядок расчета режима по методу контурных уравнений при задании нагрузок в мощностях.
8. Дайте характеристику обеим матрицам контурных сопротивлений.
9. Как влияет выбор балансирующего узла на состав элементов и свойства матрицы контурных сопротивлений?
10. *Задание.* Составить матрицу контурных сопротивлений непосредственно по схеме сети, минуя процедуру умножения (1.40), для самостоятельно составленной схемы с двумя-тремя контурами и пятью-семью узлами.
11. Составьте алгоритмы расчета режима при задании нагрузок в токах и при задании нагрузок в мощностях.

1.5. Запись уравнений состояния сети с помощью матриц обобщенных параметров

Обратимся к уравнениям состояния сети (1.39), (1.41) по законам Кирхгофа.

Представим обратную матрицу коэффициентов системы A^{-1} в виде блочной матрицы с размерностью блоков по числу узлов n и числу контуров k схемы замещения:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Тогда

$$I_y = A^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_b \end{bmatrix} = C \cdot (-J_y) + D \cdot N \cdot E_b =$$

$$= C \cdot (-J_y) + Y_B \cdot E_B. \quad (1.43)$$

Здесь $Y_B = D \cdot N$ – квадратная матрица, называемая матрицей входных и взаимных проводимостей ветвей схемы. Её элементы y_{ij} определяют величину и фазу тока в i -й ветви от действия ЭДС j -й ветви и называются взаимными проводимостями ветвей, а элементы y_{ii} определяют величину и фазу тока в i -й ветви от действия ЭДС E_i этой же ветви и называются собственными или входными проводимостями ветвей.

При отсутствии ЭДС ветвей ($E_B = 0$) выражение (1.43) упрощается:

$$I_B = C \cdot (-J_y), \quad (1.44)$$

откуда наглядно виден смысл матрицы C и ее элементов.

C – матрица порядка $m \times n$, называемая матрицей коэффициентов распределения задающих токов узлов по ветвям сети. Её произвольный элемент C_{ij} представляет собой долю тока j -го узла, протекающего по i -й ветви:

$$I_{Bi} = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot (-J_j).$$

Матрицы C , D и Y_B вычисляются путем обращения матрицы A с помощью разбиения на блоки и, следовательно, представляют собой линейные комбинации блоков матрицы A , представленных в (1.38). При этом C и Y_B могут быть выражены как на основе узловой модели сети:

$$\left. \begin{aligned} C &= \left[\begin{array}{cc} Z_\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & Z_\beta^{-1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} M_\alpha^T \\ M_\beta^T \end{array} \right] \times Y_y^{-1} = dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot Y_y^{-1}, \\ Y_B &= dZ_B^{-1} - dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot Y_y^{-1} \cdot M \cdot dZ_y^{-1}, \end{aligned} \right\} (1.45)$$

где Y_y^{-1} – обратная матрица собственных и взаимных узловых проводимостей,
так и на основе контурной модели

$$C = \left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} C_\alpha \\ C_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1}, \\ Y_B &= \begin{bmatrix} Y_\alpha \\ Y_\beta \end{bmatrix} = N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N, \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где Z_K^{-1} – обратная матрица контурных сопротивлений.

Получение выражений (1.45) и (1.46) приведено в [2], оно громоздко и здесь не приводится.

Выражения (1.45), (1.46) показывают, что процедура нахождения матрицы C достаточно громоздкая, но вычисленная один раз эта матрица позволяет вести многократные расчёты режима по выражениям (1.40), (1.43) вручную или на ЭВМ с высоким быстродействием². После нахождения токов ветвей остальные параметры режима рассчитываются по известным формулам.

Правильность выражений (1.45), (1.46) и результатов конкретных вычислений матрицы C по этим выражениям можно проверить по выражению

$$M \cdot C = E. \quad (1.47)$$

Выражение (1.47) можно получить, если в 1-й закон Кирхгофа подставить вектор токов ветвей из (1.40) $M \cdot C \cdot J_y = J_y$, следовательно, $M \cdot C = E$.

Логика выражения (1.45) наглядно видна, если в выражение (1.44) подставить C из (1.45):

² Как видно, в (1.46) обращаемая матрица контурных сопротивлений имеет меньший порядок, чем матрица узловых проводимостей в (1.45), и, возможно, вычислительная процедура по (1.46) проще.

$$I_B = dZ_B^{-1} \cdot \underbrace{\left(M^T \cdot \underbrace{(Y_y^{-1} \cdot (-J_y))}_{U_A} \right)}_{U_B} \underbrace{\phantom{dZ_B^{-1} \cdot}}_{I_B}$$

Аналогично можно показать логику выражения для матрицы C на основе контурной модели сети:

$$C \cdot J_y = \left(\begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1} \right) \cdot J_y.$$

Раскроем скобки в правой части:

$$C \cdot J_y = \underbrace{\begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{I_\alpha} \cdot J_y - \underbrace{N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1}}_{\Delta U_\alpha'} \cdot J_y$$

$$\underbrace{\phantom{N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1}}}_{\sum \Delta U_\alpha'}$$

$$\underbrace{}_{-I_\beta}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_\alpha' \\ -I_\beta \end{bmatrix}}_{I_B} \quad (1.48)$$

Здесь $\Delta U_\alpha'$ – вектор-столбец падений напряжений в ветвях дерева, вызванных составляющими токов I_α' ;

$\sum \Delta U_\alpha'$ – вектор-столбец алгебраических сумм падений напряжений по ветвям дерева, входящим в контур, обусловленных задающими токами узлов;

I_α' – вектор-столбец составляющих токов в дереве сети, обусловленных задающими токами при отсутствии хорд.

I_α'' – вектор-столбец составляющих токов в дереве сети, вызванных замыканием хорд.

$$I_{\alpha} = I'_{\alpha} - I''_{\alpha}, \quad (1.49)$$

$$I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} I'_{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I''_{\alpha} \\ -I_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Выражения (1.48)–(1.50) иллюстрируют алгоритм варианта контурных уравнений, разработанного научной школой профессоров Киевского политехнического института В.Г. Холмского и Ю.В. Щербини в 1960-70 годы и реализованного в комплексе эффективных быстроедействующих программ. В литературе метод известен под названием метода разрезания контуров (явного разделения схемы на дерево и хорды и нахождения токораспределения по принципу наложения).

Вопросы для самопроверки

1. Запишите уравнение состояния сети по законам Кирхгофа.
2. Запишите решение уравнения состояния сети через матрицы обобщённых параметров.
3. Каков физический смысл элемента матрицы коэффициентов распределения?
4. Как посредством моделирования режимов сети (на ЭВМ или на физической модели) определить элементы матрицы коэффициентов распределения?
5. Как определить потокораспределение мощностей без учета потерь в сети с помощью матрицы коэффициентов распределения?
6. Как обратить матрицу с использованием разбиения на блоки и в чем эффект этого способа обращения?

1.6. Расчет режима электрической сети с использованием матрицы коэффициентов распределения

Матрица коэффициентов распределения C позволяет найти токораспределение в схеме при известных задающих токах узлов:

$$I_{\text{в}} = C \cdot (-J_{\text{y}}). \quad (1.51)$$

Тогда остальные параметры режима определяются по очевидным формулам:

$$\Delta U_{\text{в}} = dZ_{\text{в}} \cdot I_{\text{в}}, \quad (1.52)$$

где $\Delta U_{\text{в}}$ – матрица падений напряжения на ветвях схемы

$$\Delta U_{\text{в}} = [\Delta U_{\alpha} \quad \Delta U_{\beta}]^T,$$

$dZ_{\text{в}}$ – диагональная матрица сопротивлений ветвей;

$$U_{\Delta} = (M_{\alpha})^{-1} \cdot \Delta U_{\alpha},$$

где ΔU_{α} – матрица падений напряжения на ветвях дерева схемы;

U_{Δ} – матрица падений напряжения в узлах сети относительно балансирующего узла;

$$U_{\text{y}} = U_{\Delta} + n \cdot U_{\text{БУ}}. \quad (1.53)$$

Средние значения потоков мощности P и Q в ветвях без учета потерь

$$P_{\text{в}} = I'_{\text{в}} \cdot U_{\text{НОМ}'}, \quad Q_{\text{в}} = I''_{\text{в}} \cdot U_{\text{НОМ}'}, \quad (1.54)$$

где $I'_{\text{в}}$, $I''_{\text{в}}$ – активная и реактивная составляющие токов ветвей, получают по выражению (1.51) в комплексной форме.

Потери и потоки мощности в ветвях

$$\Delta P_{\text{в}} = dl_{\text{в}} \cdot M^T \cdot U_{\text{y}} = dl_{\text{в}} \cdot [U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}] = P_{\text{кон}} - P_{\text{нач}}, \quad (1.55)$$

где $\Delta P_{\text{в}}$ – матрица потерь мощности на ветвях схемы;

$dl_{\text{в}}$ – диагональная матрица токов ветвей;

$$\Delta P_{\Sigma} = m^T \cdot \Delta P_{\text{в}}, \quad (1.56)$$

где ΔP_{Σ} – суммарные потери мощности в сети.

$$P_{\text{бу}} = m^T \cdot P_{\text{зад}} + \Delta P_{\Sigma}, \quad (1.57)$$

где $P_{\text{бу}}$ – мощность балансирующего узла.

Расчётные токи в узлах сети можно определить как

$$J_p = M \cdot I_v, \quad (1.58)$$

тогда расчётные мощности узлов определяются по выражению

$$P_p = dU_y \cdot J_p. \quad (1.59)$$

Небалансы мощности в узлах схемы можно рассчитать как

$$P_{\text{нб}} = P_p - P_{\text{зад}}, \quad (1.60)$$

Формулы (1.51)–(1.57) дают алгоритм расчета режима при задании нагрузок в токах. При задании нагрузок в мощностях организуется внешний итерационный процесс коррекции задающих токов узлов по заданным мощностям $P_{\text{зад}}$ и рассчитанным напряжениям ($U_y^{(k)}$):

$$J^{(k)} = \left(dU_y^{(k)} \right)^{-1} \cdot P_{\text{зад}}.$$

где k – номер итерации.

Затем производится расчет токов ветвей и напряжений узлов по формулам (1.51)–(1.53) и проверяется баланс в узлах по 1-му закону Кирхгофа (1.60). По формулам (1.58)–(1.60) определяются расчетные токи и мощности в узлах. По выражению (1.60) определяется небаланс мощностей в узлах схемы, значение которого сравнивается с допустимой относительной погрешностью ε_p :

$$\frac{\left| P_{\text{зад}i} - P_{pi}^{(k)} \right|}{P_{\text{зад}i}} \cdot 100\% \leq \varepsilon_p, \%,$$

где k – номер итерации;

i – номер узла.

Если баланс мощностей в узлах выполняется с заданной точностью ε_s , то в завершение расчета по выражениям (1.54)–(1.57) определяются результирующие характеристики режима и расчет заканчи-

вается. В противном случае производится еще одна итерация, и так до тех пор, пока не будет достигнут баланс с заданной точностью.

С помощью матрицы C за одну итерацию можно приближенно найти потокораспределение мощностей

$$P_{\text{в}} = C \cdot P_{\text{у}}$$

и потери мощности

$$\Delta P_{\text{в}} = dR_{\text{в}} \cdot \frac{P_{\text{в}}^2}{U_{\text{нв}}^2}.$$

Суммарные потери мощности ΔP_{Σ} определяются по выражению (1.56).

При этом пренебрегают влиянием различия напряжений в узлах сети на потокораспределение.

На базе матрицы коэффициентов распределения C можно построить быстродействующий алгоритм оптимизации режима электроэнергетической системы по критерию минимума суммарного расхода топлива в энергосистеме на покрытие суточного графика нагрузок потребителей (с учетом расхода на пуск и остановы агрегатов) при условии минимума суммарных потерь мощности в сети $\Delta P_{\Sigma} \rightarrow \min$ при вариации узловых генерирующих мощностей $P_{\text{зад}}$. Этот алгоритм является составной частью решения таких практических задач:

- как учет сетевого фактора при оптимизации нагрузок электростанций, то есть учет изменения потерь в сети при перераспределении между электростанциями суммарной активной нагрузки потребителей;

- определение мощности имеющихся и дополнительных компенсирующих устройств по условию минимума потерь мощности в сети ($\Delta P_{\Sigma} \rightarrow \min$) и при учете ограничений по напряжениям узлов ($U_{\min} \leq U_{\text{у}} \leq U_{\max}$).

Вопросы для самопроверки

1. Поясните физический смысл элементов матрицы C .
2. Почему сумма элементов столбца матрицы C равна 1?

3. Как организовать итерационный процесс расчёта режима по методу коэффициентов распределения в случае задания нагрузок в мощностях?

4. Как рассчитать потери мощности при использовании метода коэффициентов распределения при задании нагрузок в токах? в мощностях?

5. Укажите достоинства и недостатки метода коэффициентов распределения по сравнению с методом узловых напряжений.

6. Приведите примеры задач, которые можно эффективно решать с использованием матрицы коэффициентов распределения C .

1.7. Решение уравнений состояния методом Гаусса

К числу наиболее характерных вычислительных схем этого метода относятся алгоритмы с обратным ходом и без обратного хода.

Алгоритм метода Гаусса с обратным ходом. По этому алгоритму решение системы n линейных алгебраических уравнений вида

$$A \cdot x = b$$

состоит из двух этапов. *На первом этапе* (прямой ход) исходная система за n однотипных шагов преобразуется таким образом, что матрица коэффициентов преобразованной системы становится верхней треугольной, то есть все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. *На втором этапе* (обратный ход) последовательно определяются значения неизвестных от x_n до x_1 .

Алгоритм метода Гаусса без обратного хода. По этому алгоритму решение системы n линейных алгебраических уравнений осуществляется за один этап, в результате которого матрица коэффициентов A за n однотипных шагов приводится к единичной, то есть система уравнений разрешается относительно искомым неизвестных, которые равны соответствующим элементам полученного в результате преобразований столбца в правой части системы.

На первом шаге вычисления выполняются точно так же, как и в алгоритме метода Гаусса с обратным ходом. Получаемая в результате этого преобразования система уравнений $A^{(1)} \cdot x = b^{(1)}$ характе-

ризуется тем, что первый элемент первого столбца матрицы равен единице, а остальные элементы столбца равны нулю.

На втором шаге, как и в предыдущем алгоритме, в качестве ведущего элемента выбирается диагональный элемент второго столбца матрицы $A^{(1)}$, то есть $a_{22}^{(1)}$. Отличие состоит в том, что дополнительно преобразуется также и первая строка матрицы $A^{(1)}$, причем таким образом, чтобы элемент $a_{12}^{(1)}$ обратился в нуль.

Выполнение операций произвольного (k -го) шага соответствует такому преобразованию k -го столбца, чтобы его диагональный элемент ($a_{kk}^{(k)}$) стал равен единице, а недиагональные элементы – нулю. В результате выполнения последнего шага ($k = n$), на котором пересчитываются элементы последнего столбца матрицы $A^{(n-1)}$ и все элементы столбца $b^{(n-1)}$, получаем матрицу $A^{(n)} = 1$, и, следовательно, $x = b^{(n)}$.

Практическое применение метода Гаусса рассмотрено в разделе IV.

1.8. Факторы, влияющие на точность решения по методу Гаусса

К причинам возникновения недопустимо большой погрешности при применении метода Гаусса относятся следующие:

- округление результатов вычислений;
- неточность исходных данных.

Округление результатов вычислений. Выполнение вычислений по методу Гаусса требует, чтобы ведущий элемент $a_{kk}^{(k)}$ был отличен от нуля. Значения ведущих элементов не могут быть оценены без вычислений, соответствующих последовательному пересчету элементов матрицы A в процессе решения. Может оказаться, что на некотором шаге ведущий элемент становится равным нулю при точных вычислениях или же близким к нулю при округлении результатов вычислений. В первом случае получить решение невозможно, а во втором в связи с исчезновением значащих цифр в ведущем элементе погрешности дальнейших вычислений может быть весьма велика.

Неточность исходных данных. При решении инженерных задач исходные данные всегда известны с некоторой погрешностью, определяемой конечной точностью измерения или вычисления параметров

системы и ее режима. Как правило, для конкретных технических задач относительная погрешность результатов, получаемых при решении систем линейных алгебраических уравнений, соизмерима с погрешностями исходных данных. Однако могут быть случаи, когда погрешность исходных данных, то есть значений элементов матриц A и b , приводит к чрезмерно большой погрешности решения. Причина этого состоит в так называемой *плохой обусловленности* матрицы коэффициентов системы уравнений, приближенным показателем которой является малая величина определителя матрицы A .

РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Математическая характеристика уравнений установившегося режима

Особенности уравнений установившихся режимов электрических систем следующие:

- многомерность систем уравнений;
- слабая обусловленность в расчетах многих схем матрицы узловых собственных и взаимных проводимостей и матрицы контурных сопротивлений, то есть близость к нулю определителей этих матриц $\det Y_y$, $\det Z_k$;
- нелинейность уравнений, вызванная нелинейным характером связи параметров режима.

Обусловленность матрицы характеризует величину определителя матрицы. Для слабо обусловленной матрицы A определитель близок к нулю, то есть $\det A \approx 0$.

Для матрицы Y_Σ , как известно, $\det Y_\Sigma = 0$, то есть имеем вырожденную матрицу для полной схемы сети, включая балансирующий узел. Эта матрица перестает быть вырожденной, когда какой-либо узел сети, в соответствии с физическим смыслом задачи расчета режима, принимается за балансирующий и соответствующая строка удаляется из матрицы Y_Σ . Тогда получаем, что $\det Y \neq 0$.

Практическое значение характеристики обусловленности матрицы узловых проводимостей состоит в том, что в плохо обусловлен-

ной матрице $Y \det Y \approx 0$ и малым изменениям в элементах исходной матрицы Y соответствуют большие изменения в элементах обратной матрицы Y^{-1} и, следовательно, малые отклонения заданных режимных параметров вызовут большие изменения искомым характеристик режима (падения напряжения на ветвях и потоки мощности в ветвях), то есть наблюдается *текучесть* параметров режима. Покажем это для узловых уравнений:

$$Y \cdot U_{\Delta} = J_y, \quad U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot J_y,$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{\det Y} [A_{ij}],$$

где A_{ij} – союзная (или присоединенная) матрица к Y , составленная из алгебраических дополнений к элементам исходной матрицы Y .

2.2. Характеристика методов решения систем уравнений установившегося режима

Методы решения систем уравнений делятся на точные и итерационные. Точные методы имеют конечные алгоритмы. К точным относятся методы решения систем уравнений путем обращения матриц их коэффициентов, различные методы группы исключения неизвестных (схема единственного деления, метод исключения с выбором главного элемента, схема Жордана и др.), в общем случае называемые методом Гаусса. Согласно методу Гаусса при прямом ходе производится исключение неизвестных и матрица системы приводится к треугольному виду. При обратном ходе последовательно вычисляются неизвестные.

Применение метода Гаусса к решению систем уравнений установившихся режимов со слабо заполненными матрицами имеет ту особенность, что в процессе исключения неизвестных свойство слабой заполненности матрицы теряется, то есть вновь появляется большое число ненулевых элементов. Это не только требует дополнительного объема памяти, но и снижает быстродействие программы. Проблема отчасти решается за счет выбора **оптимальной стратегии исключения неизвестных**, приводящей к минимальному количеству вновь появляющихся ненулевых элементов. Для этого на каждом шаге исключения за ведущий (исключаемый) принимается тот элемент,

который имеет минимальное число связей, то есть минимальное число ненулевых элементов в строке.

Эта проблема особенно актуальна для узловых уравнений, имеющих слабо заполненную матрицу большой размерности. Минимальное число элементов в строке матрицы узловых проводимостей равно 2 – одна собственная проводимость Y_{ii} и одна взаимная Y_{ij} . При линейных комбинациях со строками в процессе исключения неизвестных в первую очередь исключают узлы, имеющие минимальное число связей, – одну связь и два элемента в строке матрицы Y – так называемые висячие вершины графа. Далее исключают узлы, имеющие по две связи, и т. д. Исключение элементов из системы узловых уравнений с матрицей узловых проводимостей соответствует исключению узлов в схеме по методу преобразования сети. При этом, как известно, нагрузка исключаемого узла разносится в прилежащие узлы, а проводимости (сопротивления) связей преобразуются по формулам метода Гаусса. В общем случае n -лучевая звезда преобразуется в n -угольник. Такой алгоритм исключения реализован в широко распространенной программе МУСТАНГ, разработанной в 1980-90-х годах в объединенном диспетчерском управлении (ОДУ) энергосистемами Северо-Запада ЕЭС СССР (г. Рига) совместно с ведущим НИИ в электроэнергетике – Сибирским энергетическим институтом Сибирского отделения АН СССР (СЭИ СО АН СССР). Следует заметить также, что программы решения узловых или контурных уравнений по методу исключения неизвестных значительно сложнее, чем по методу итерации, в чем можно легко убедиться в процессе применения этих методов.

2.3. Итерационные методы решения систем уравнений установившегося режима

В итерационных методах (или методах последовательного приближения) решение X_* системы уравнений

$$A \cdot X = B \quad (2.1)$$

получают как предел сходящейся последовательности значений $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}\}$:

$$X_* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}. \quad (2.2)$$

Если эта последовательность значений сходится, то разность между двумя соседними приближениями при достаточном числе итераций становится меньше заданной точности расчета ε_x :

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_x. \quad (2.3)$$

Здесь условие (2.3) – признак сходимости итерационного процесса.

Для применения итерационных методов необходимо:

- выбрать вектор начального приближения $X^{(0)}$;

$$X^{(0)} = [X_1^{(0)} \quad X_2^{(0)} \quad \dots \quad X_n^{(0)}]^T;$$

- построить рекуррентное соотношение вида

$$X = \varphi(X), \quad (2.4)$$

где φ – оператор рекуррентного соотношения (который для сходимости должен быть оператором сжатия);

- организовать циклические вычисления

$$X^{(k)} = \varphi(X^{(k-1)}). \quad (2.5)$$

Особенности и достоинства итерационных методов зависят от способа подготовки системы к итерации, то есть от алгоритма итерационного процесса (2.4), (2.5).

Построим рекуррентное соотношение для системы уравнений (2.1). Для этого разрешим уравнения системы (2.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

относительно диагональных неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - 0 \cdot x_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n, \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} \cdot x_n, \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} \cdot x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot x_2 - \frac{a_{n3}}{a_{nn}} \cdot x_3 - \dots - 0 \cdot x_n \end{cases} \quad (2.6)$$

или в общем виде

$$X = \beta + \alpha \cdot X, \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) представляет собой систему уравнений, подготовленную к итерации, или развернутую запись рекуррентного соотношения (2.5), когда Φ – линейный оператор.

Здесь X , α , β очевидны из (2.6), (2.7).

Итерационный вычислительный процесс по схеме (2.6), (2.7) вида $X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)})$ ведет к решению (2.2), если выполняются условия теоремы сходимости итерации:

Для сходимости итерационного процесса решения линейной системы уравнений $A \cdot X = B$, подготовленной к итерации в виде $X = \beta + \alpha \cdot X$, необходимо и достаточно, чтобы наибольшее по модулю собственное значение (число) матрицы системы, подготовленной к итерации $\lambda_{\alpha, \max}$, было бы по модулю меньше 1:

$$|\lambda_{\alpha, \max}| < 1.$$

Это условие труднопроверяемое в силу сложности самой задачи нахождения λ – собственных значений матрицы α ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$), которые являются корнями характеристического полинома матрицы α , получаемыми после раскрытия характеристического определителя

$$D(\lambda) = 0,$$

$$\text{где } D(\lambda) = \det[\alpha - \lambda \cdot E] = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{11} & & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & 0 - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{22} & & & \alpha_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 0 - \lambda \\ \alpha_{nn} & \alpha_{nn} & & \end{bmatrix} =$$

$$= C_0 \cdot \lambda^n + C_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot \lambda + C_n;$$

C – коэффициенты характеристического полинома, получаемые при раскрытии характеристического определителя.

Поэтому используют более доступную числовую характеристику сходимости для таких регулярных матриц, как матрицы уравнений установившегося режима Y_v и $Z_{\text{конт}}$ – канонические нормы матрицы m_i / или k -норма. Причем известно (доказано) [2], что любая каноническая норма больше любого собственного значения матрицы: $\|\alpha_m\| > |\lambda_{\alpha, \max}|$, $\|\alpha_l\| > |\lambda_{\alpha, \max}|$, $\|\alpha_k\| > |\lambda_{\alpha, \max}|$.

Тогда теорема о достаточных условиях сходимости формулируется так:

Для сходимости итерационного процесса решения линейной системы $A \cdot X = B$ в виде $X^{(k)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k-1)}$ достаточно, чтобы какая-либо каноническая норма матрицы α была по модулю меньше 1:

$$\|\alpha_l\| < 1, \quad \|\alpha_m\| < 1, \quad \|\alpha_k\| < 1, \quad (2.8)$$

$$\text{где } \|\alpha_l\| = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|; \quad \|\alpha_m\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|; \quad \|\alpha_k\| = \sqrt{\sum_{i,j,n} |\alpha_{ij}|^2}.$$

2.4. Критерии сходимости итерации и анализ их выполнения для узловых уравнений установившихся режимов

2.4.1. Доказательство теоремы сходимости итерации

Итерационные процессы – это численные методы решения уравнений, и их эффективность зависит от числовых характеристик матриц коэффициентов системы уравнений. Обе числовые характеристики, упоминавшиеся в теореме о сходимости итераций, формулируют условия сходимости для матрицы α системы, подготовленной к итерации, в виде (2.6), (2.7):

$$X = \beta + \alpha \cdot X = \beta + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot X. \quad (2.9)$$

Для доказательства теоремы сходимости зададимся начальным приближением $X^{(0)}$ и запишем следующие четыре приближения (для выявления общих закономерностей):

$$X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)}, \quad X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)}, \quad X^{(3)} = \beta + \alpha X^{(2)}, \quad X^{(4)} = \beta + \alpha X^{(3)}.$$

Подставив $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ в выражение для $X^{(4)}$, получаем

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= \beta + \alpha(\beta + \alpha(\beta + \alpha(\beta + \alpha X^{(0)}))) = \beta + \alpha(\beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha^3 X^{(0)}) = \\ &= \beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha^3\beta + \alpha^4 X^{(0)}. \end{aligned}$$

В общем виде

$$X^{(k)} = (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{(k-1)})\beta + \alpha^k X^{(0)}.$$

Найдем предел $X^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$. Как известно, предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{(k-1)}) \beta \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha^k X^{(0)} \right). \quad (2.10)$$

В уравнении (2.10) выражение в скобке представляет собой сумму членов матричного степенного ряда с основанием α . Этот ряд сходится, и его сумма имеет предел, если выполняются следующие условия сходимости:

- необходимое и достаточное условие сходимости

$$|\lambda_{\alpha \max}| < 1; \quad (2.11)$$

- достаточное условие сходимости

$$\|\alpha\| \leq 1. \quad (2.12)$$

Тогда эта сумма определится по аналогии с суммой членов геометрической прогрессии с основанием $|q| < 1$.

Для геометрической прогрессии с числовым основанием q

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \cong \frac{1}{1 - q}.$$

Для степенного матричного ряда с основанием α

$$(E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}) \cong (E - \alpha)^{-1}. \quad (2.13)$$

Предел второго слагаемого $\alpha^k X^{(0)}$ в выражении (2.10) при $k \rightarrow \infty$ равен нулю, так как $|\lambda_{\alpha \max}| < 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k X^{(0)} = 0. \quad (2.14)$$

Подставив (2.13) и (2.14) в (2.10), получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = (E - \alpha)^{-1} \cdot \beta + 0.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на $(E - \alpha)$ и, учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X_*$, получаем

$$(E - \alpha)X_* = (E - \alpha)(E - \alpha)^{-1}\beta;$$

$$X_* - \alpha \cdot X_* = \beta,$$

следовательно,

$$X_* = \beta + \alpha \cdot X_*. \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) X_* соответствует неподвижной точке последовательности или точному решению системы уравнений, то есть пределу $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$, когда дальнейшего изменения значения X в ходе итерационного процесса не происходит.

2.4.2. Следствия из теоремы сходимости итерации

Достаточное условие сходимости итерации (2.12) позволяет получить важные следствия о соотношении диагонального и суммы побочных элементов матрицы, которое должно иметь место для сходимости итерационного процесса решения уравнений применительно к узловым уравнениям установившегося режима.

Матрица α системы узловых уравнений, подготовленной к итерации (см. выражение (2.9)), имеет вид

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{y_{12}}{y_{11}} & \dots & \frac{y_{1n}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{22}} & 0 & \dots & \frac{y_{2n}}{y_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{n1}}{y_{nn}} & \frac{y_{n2}}{y_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

а достаточное условие сходимости по норме (2.8) преобразуется в

$$|y_{ii}| \geq \sum_{j=1}^n |y_{ij}| \quad (2.17)$$

и должно выполняться для всех узлов сети $i = 1, 2, \dots, n$.

Неравенство (2.17) выражает достаточное условие сходимости итерации для системы узловых уравнений: для всех узлов сети собственная проводимость узла y_{ii} должна быть больше суммы модулей взаимных проводимостей $\sum_{j=1}^n |y_{ij}|$. Это условие *не выполняется*.

Однако для тех узлов сложной схемы, которые связаны с балансирующим узлом, диагональный элемент матрицы Y , то есть собственная проводимость узла y_{ii} , равен

$$y_{ii} = \sum Y_{ij} + y_{\sigma}, \quad (2.18)$$

благодаря чему для строк матрицы, которые имеют связь с балансирующим узлом:

$$y_{ii} > \sum Y_{ij}, \quad (2.19)$$

причем именно на величину проводимости линии y_{σ} , которая связывает i -й узел с балансирующим.

Благодаря выполнению соотношений (2.18), (2.19) для узлов, связанных с балансирующим, выполняется **необходимое и достаточное условие сходимости итерации** (2.11), связанное с собственными значениями $|\lambda_{\alpha, \max}|$, хотя достаточное условие сходимости по норме (2.12) и не выполняется.

2.4.3. Факторы, влияющие на сходимость итерации для узловых уравнений установившихся режимов

Выделим схемные факторы, обусловленные конфигурацией и параметрами схемы, и режимные факторы, обусловленные нагрузками и искомыми параметрами рассматриваемого режима.

Схемный фактор, влияющий на сходимость итерационного процесса, проявляется для схем переменного тока, содержащих устрой-

ства продольной емкостной компенсации и поперечные емкости линий сети на землю, представленные проводимостями y_c (рис. 2.1), имеющими противоположные по отношению к индуктивным сопротивлениям (x_L) и проводимостям ($y_L = 1/x_L$) ветвей знаки (как реактивные сопротивления):

$$y_{ii_p} = \sum y_{ij_p} = \sum (jY_{ij_L} - jY_{ij_C}) \text{ при } r, y_{ija} = 0.$$

Реактивная часть и модуль диагонального элемента $|y_{ii}|_p$ уменьшаются, следовательно,

$$|y_{ii}| < \sum |y_{ij}|. \quad (2.20)$$

Наличие поперечной емкостной ветви на землю способствует размаху колебаний напряжений в данном узле в итерационном процессе (если итерационный процесс для математической модели режима рассматривать как соответствующий переходный процесс, возникающий при отклонении напряжений на $U_{\Delta}^{(0)}$ в электрической сети). Тогда можно сказать, что итерационный процесс происходит пошаговым методом, где шаг соответствует одной итерации.

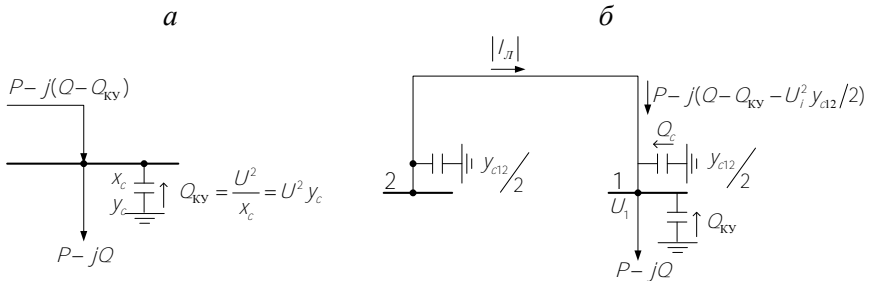


Рис. 2.1

Емкости на землю имеются у всех воздушных и кабельных линий (ВЛ и КЛ). Они участвуют в балансе реактивной мощности в системе и в целом улучшают установившиеся режимы электрической сети. Но созданные данными емкостными проводимостями мощности Q_c зависят от квадрата напряжения $Q_c = Y_c U^2$ и по анало-

гии с шунтовыми конденсаторными батареями (ШКБ) способствуют размаху колебаний напряжения на линии в ходе итерационного процесса. Соответственно и при определении диагонального элемента матрицы, емкостная проводимость на землю способствует изменению обычного соотношения величин (2.20). Для линейных систем узловых уравнений наличие емкостей – это тот основной *схемный* фактор, который ухудшает сходимость. Но этому фактору противостоит наличие ветвей, связывающих балансирующий узел со схемой и имеющих проводимости Y_{δ} . Это реальные линии и трансформаторы, и если их сопротивления невелики, а проводимости большие (то есть с запасом обеспечивают выдачу необходимой мощности от балансирующего узла в схему), то в целом сходимость обеспечивается, поскольку получается, что $\lambda_{\text{u.max}} < 1$ и установившиеся режимы успешно рассчитываются. Получается, что даже в линейной постановке задачи расчета режима факт и скорость сходимости зависят от параметров искомого режима.

В реальных сетях электрических систем нагрузки задаются в мощностях. При этом соответствующие уравнения (узловые, контурные и др.) нелинейны и возникают *режимные* факторы, влияющие на сходимость. Они тем весомее, чем ближе искомый режим к предельно допустимому по условиям устойчивости параллельной работы синхронных машин (генераторов электростанций) и устойчивости работы асинхронных машин (двигатели нагрузки) в электрической системе.

2.4.4. Критерии сходимости и анализ сходимости нелинейных систем узловых уравнений установившихся режимов

Нелинейные уравнения баланса токов в узлах

$$Y \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} S_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

могут быть представлены в виде неявной вектор-функции небаланса $F(U)$, которая обращается в нуль при подстановке в левую часть точного решения системы – вектора напряжений узлов U_{Δ}, U_y .

В общем виде эти уравнения запишутся как

$$F(U) = 0, \quad (2.22)$$

Обобщенная математическая запись системы нелинейных уравнений

$$F(X) = 0, \quad (2.23)$$

$$\text{где } F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_n(X) \end{bmatrix}, \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Нелинейная система (2.23) готовится к итерации в виде рекуррентного уравнения

$$X = \varphi(X), \quad (2.24)$$

где φ – оператор рекуррентного соотношения (или оператор нелинейного отображения), получаемый из (2.22), (2.23).

Критерии сходимости при решении системы *нелинейных уравнений* записываются для матрицы, составленной из *частных производных* от оператора нелинейных отображений φ по искомым переменным X и называемой матрицей Якоби J :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Матрица частных производных J для случая линейных систем уравнений соответствует матрице α системы (2.16), подготовленной к итерации. Поэтому критерии сходимости сформулированы аналогично теореме сходимости итераций для линейных систем уравнений: также можно использовать достаточные условия (по норме

матрицы Якоби) и необходимые и достаточные условия (по наибольшему собственным значениям матрицы Якоби $\lambda_{J_{\max}}$).

Теорема: для сходимости итерационного процесса решения нелинейной системы $F(X) = 0$ с помощью рекуррентного соотношения $X = \varphi(X)$ необходимо и достаточно, чтобы на всей траектории итерационного процесса от начального приближения $X^{(0)}$ до решения X_* наибольшее по модулю собственное значение матрицы частных производных (матрицы Якоби $J = \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial X_j} \right]_{X^k}$) по искомым характеристикам режима было меньше единицы: $\lambda_{J_{\max}} < 1$.

Это условие и есть необходимое и достаточное.

Условие по норме матрицы Якоби

$$\left\| \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial X_j} \right]_{X^k} \right\| < 1 \text{ — достаточное условие сходимости.}$$

Для проверки (анализа) влияния нелинейности уравнений на сходимость итерационного процесса запишем рекуррентное соотношение типа (2.24) в виде $U = \varphi(U)$:

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1(U) = -\frac{P_{1н}}{Y_{11}U_1} + 0 \cdot U_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_3 + \dots + \frac{Y_{1n}}{Y_{11}} \cdot U_n + \frac{Y_{1б}}{Y_{11}} \cdot U_{бу}; \\ U_2 = \varphi_2(U) = \frac{P_{2ген}}{Y_{22}U_2} + \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_3 + \dots + \frac{Y_{2n}}{Y_{22}} \cdot U_n + \frac{Y_{2б}}{Y_{22}} \cdot U_{бу}; \\ \dots \\ U_n = \varphi_n(U) = -\frac{P_n}{Y_{nn}U_n} + \frac{Y_{n1}}{Y_{nn}} \cdot U_1 + \frac{Y_{n2}}{Y_{nn}} \cdot U_2 + \dots + 0 \cdot U_n + \frac{Y_{нб}}{Y_{nn}} \cdot U_{бу}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Возьмем частные производные от (2.26) и подставим их в матрицу Якоби (2.24) применительно к системе узловых уравнений в форме балансов токов:

$$\begin{aligned}
 J = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(U_1)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_1)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_1)}{\partial U_n} \\ \frac{\partial(U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_2)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_2)}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(U_n)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_n)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_n)}{\partial U_n} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{P_{1н}}{y_{11} \cdot U_1^2} & y_{12} & \dots & \frac{y_{1n}}{y_{11}} \\ y_{21} & \frac{-P_{2ген}}{y_{22} \cdot U_2^2} & \dots & \frac{y_{2n}}{y_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{m1}}{y_{nn}} & \frac{y_{m1}}{y_{nn}} & \dots & \frac{P_{пн}}{y_{nn} \cdot U_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Сопоставляя матрицу Якоби, для которой анализируется сходимость нелинейной системы уравнений, с матрицей α (линейной системы, подготовленной к итерации), замечаем, что отличие состоит в диагональном элементе: у матрицы α диагональный элемент $\alpha_{ii} = 0$, а у матрицы Якоби диагональный элемент

$$\frac{\partial \varphi_i(U)}{\partial U_i} = \frac{\pm P_{i(н,г)}}{y_{ii} U_i^2}. \quad (2.28)$$

Анализ выражений (2.27), (2.28) показывает, что для слабо нагруженных режимов с малыми нагрузками P_i и большими собственными проводимостями y_{ii} (малым сопротивлением подходящих линий и высоким значением напряжения U_i) влияние нелинейности на сходимость мало, так как диагональный элемент близок к нулю.

Напротив, при расчете тяжелых режимов P_i велико, U_i мало (снижено по отношению к U_6), влияние нелинейности на сходимость существенно, поэтому сходимость тяжелых режимов (режи-

мов, близких к предельным по условиям статической устойчивости электрической системы) медленная, а иногда она не наблюдается.

Расходимость итерационного процесса (при правильно закодированных исходных данных) служит, при упрощенном анализе, признаком нарушения статической устойчивости рассчитываемого режима. Это заключение является существенным результатом применения ЭВМ и численных итерационных методов решения уравнений установившегося режима. Оно используется для упрощенной оценки статической устойчивости в современной проектной и эксплуатационной практике.

2.5. Решение уравнений узловых напряжений итерационными методами

2.5.1. Решение уравнений узловых напряжений в форме баланса токов

Матричное уравнение

$$Y_y \cdot U_{\Delta} = -J_y,$$

где $J_{yi} = \frac{P_i}{(U_{\Delta i} + U_{BY})}$,

представим в алгебраической форме и разрешим каждое уравнение системы относительно диагональных элементов $(U_{\Delta 1}, U_{\Delta 2}, \dots, U_{\Delta n})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\Delta 1} = +0 \cdot U_{\Delta 1} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + \frac{Y_{1n}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_1}{(U_{\Delta 1} + U_{BY}) \cdot Y_{11}}, \\ U_{\Delta 2} = +\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1} + 0 \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + \frac{Y_{2n}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_2}{(U_{\Delta 2} + U_{BY}) \cdot Y_{22}}, \\ \dots \\ U_{\Delta n} = +\frac{Y_{n1}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 1} + \frac{Y_{n2}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{n3}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + 0 \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_n}{(U_{\Delta n} + U_{BY}) \cdot Y_{nn}}. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Для итерационного решения необходимо выбрать начальное приближение падений напряжений $U_{\Delta}^{(0)}$ и подставить в правую часть

системы (2.29). Получим $U_{\Delta}^{(1)}$, затем подставим его в правую часть, получим $U_{\Delta}^{(2)}$ и т. д. Процесс может вестись по методу простой или ускоренной итерации.

По методу ускоренной итерации для нахождения k -го переменного в i -й итерации используются переменные $U_{\Delta 1}^{(i)}, U_{\Delta 2}^{(i)}, \dots, U_{\Delta k-1}^{(i)}$, вычисленные на этой же i -й итерации, и переменные $k+1, k+2, \dots, n$, вычисленные на предыдущей $(i-1)$ -й итерации:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\Delta 1}^{(i)} = \frac{-P_1}{(U_{\Delta 1}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{11}} + 0 \cdot U_{\Delta 1}^{(i-1)} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + \dots + \frac{Y_{1n}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)}, \\ U_{\Delta 2}^{(i)} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + \frac{-P_2}{(U_{\Delta 2}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{22}} + 0 \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + \dots + \frac{Y_{2n}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)}, \\ \dots \\ U_{\Delta n}^{(i)} = \frac{Y_{n1}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + \frac{Y_{n2}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + \frac{Y_{n3}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + \dots + \frac{-P_n}{(U_{\Delta n}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{nn}} + 0 \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)}. \end{array} \right.$$

Аналогично организуется итерационный процесс расчета напряжений узлов U_y на базе уравнений (1.24), записанных для напряжений узлов.

Решение нелинейных узловых уравнений можно записать, используя обратную матрицу Y^{-1} :

$$U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot J_y; \quad (2.30)$$

$$U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot \left(\frac{S_i}{U_i} \right);$$

$$U_{\Delta} = U - n \cdot U_{\text{БВ}}.$$

Используя эти уравнения, получим

$$U = n \cdot U_{\text{БУ}} + Y^{-1} \cdot \left[\frac{-S_{\text{н}}}{\hat{U}_i} \right] = n \cdot U_{\text{БУ}} - Y^{-1} \cdot \left[\frac{S_{\text{н}}}{\hat{U}_i} \right]. \quad (2.31)$$

Выражение (2.31) имеет большое прикладное значение в области расчетов установившихся режимов. Оно называется обращенной формой уравнений узловых напряжений (поскольку используется обратная матрица $Y^{-1} = Z$) и представляет собой самостоятельный метод расчета режимов.

2.5.2. Обращенная форма уравнений узловых напряжений и их анализ

Обратную матрицу Y^{-1} в выражениях (2.30), (2.31) обозначают через Z и называют матрицей собственных и взаимных сопротивлений

$$Y^{-1} = Z.$$

Тогда

$$U = n \cdot U_{\text{БУ}} - Z \cdot \left[\frac{S_{\text{н}}}{\hat{U}_i} \right]$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = U_{\text{БУ}} - Z_{11} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{12} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{13} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{1n} \frac{S_n}{\hat{U}_n}, \\ U_2 = U_{\text{БУ}} - Z_{21} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{22} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{23} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{2n} \frac{S_n}{\hat{U}_n}, \\ \dots \\ U_n = U_{\text{БУ}} - Z_{n1} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{n2} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{n3} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{nn} \frac{S_n}{\hat{U}_n}. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

или в общем виде

$$\begin{cases} U_i = U_{BY} - \sum_{j=1}^n Z_{ij} \frac{S_j}{\hat{U}_j}, \\ i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.33)$$

Чтобы использовать схему расчета (2.31)–(2.33) с матрицей Z надо предварительно обратить матрицу узловых проводимостей. После этого процесс получения решения (нахождение U_1, U_2, \dots, U_n) происходит гораздо быстрее, чем итерационное решение системы исходных нелинейных уравнений (2.21) с матрицей Y (этот факт может иметь и физическое толкование).

Алгоритм итерационного решения нелинейных обращенных уравнений следующий.

Задаемся начальными приближениями напряжений U_i^0 , например $U_i = U_{ном}$, и подставляем их в знаменатель в правую часть (2.32). Выполняем необходимые вычисления согласно (2.32), в результате находим вектор $\vec{U}_1^{(1)}, \vec{U}_2^{(1)}, \dots, \vec{U}_n^{(1)}$ первого приближения (здесь Z, U и S в общем случае имеют комплексный характер). Во втором приближении в знаменатель (2.32) подставляются значения напряжений $U_i^{(1)}$ первой итерации, находится $U_i^{(2)}$, после чего выполняется третья итерация и т. д. Итерационный процесс заканчивается, когда разность напряжений между двумя соседними приближениями становится меньше заданной точности расчета:

$$\frac{1}{U_{ном}} \left\| [U]^K - [U]^{K-1} \right\|_m \leq \frac{\varepsilon_U}{U}, \quad \%$$

Итерационный процесс определения напряжений по обращенным уравнениям может быть ускорен, если на k -й итерации для расчета i -го неизвестного принимать $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{i-1}^{(k)}$ из этой же k -й итерации, а остальные неизвестные U_{i+1} брать из $(k-1)$ итерации, то есть

$$U_i^{(k)} = f((U_1, U_2, \dots, U_{i-1})^k, (U_i, U_{i+1}, \dots, U_n)^{k-1}).$$

Физический смысл элементов матрицы собственных и взаимных сопротивлений Z можно уяснить, если рассмотреть частные режимы работы сети, в которых нагрузки узлов от 1-го до n -го последовательно задаются единичными токами $I_j=1$ при холостом ходе в остальных узлах сети ($I_1=1, I_2=I_3=\dots=I_n=0$).

Систему уравнений (2.33) можно представить в виде

$$\begin{cases} U_i = U_{\text{БУ}} - \sum_{j=1}^n Z_{ij} \frac{S_j}{U_j} = U_{\text{БУ}} - U_{\Delta i(1)} - U_{\Delta i(2)} - \dots - U_{\Delta i(j)} - \dots - U_{\Delta i(n)}, \\ i=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.34)$$

Из выражения (2.34) следует, что элементы матрицы узловых сопротивлений Z_{ij} представляют собой коэффициенты частичных падений напряжения $U_{\Delta i(j)}$ или коэффициенты влияния тока нагрузки в j -м узле $\frac{S_j}{U_j}$ на напряжение в i -м узле.

Действительно, если взять сложную схему сети, представляющую собой связанный направленный граф, то есть одно дерево со своими хордами, то очевидно, что в этой схеме ток нагрузки каждого узла влияет на напряжение во всех узлах. Естественно, что матрица узловых проводимостей Y и обратная к ней Z зависят только от пассивных параметров сети, то есть от топологии схемы и сопротивлений или проводимостей ветвей. Эта матрица остается неизменной при изменении нагрузок в узлах.

В первом частном режиме

$$I_1=1, I_2=I_3=\dots=I_n=0.$$

Тогда

$$\begin{cases} U_1 = U_{\text{БУ}} - z_{11} \cdot I_1 - \sum z_{1j} \cdot I_j, & \text{где } I_j = 0; \\ U_2 = U_{\text{БУ}} - z_{21} \cdot I_1 - \dots; \\ U_3 = U_{\text{БУ}} - z_{31} \cdot I_1 - \dots; \\ \vdots \\ U_n = U_{\text{БУ}} - z_{n1} \cdot I_1 - \dots \end{cases}$$

Рассчитав такой режим по любой программе расчета установившихся режимов, можно сразу получить весь столбец матрицы Z_n (1-й столбец – при $I_1 = 1$, 2-й столбец Z_2 – при расчете второго частного режима при $I_2 = 1$ и т. д.). То есть получается, что элементы матрицы узловых сопротивлений можно найти с помощью программ расчета установившихся режимов по результатам расчетов на ЭВМ n -частных режимов с единичными токами в узлах поочередно.

Процедура нахождения Z путем прямого обращения Y или вышеописанным путем громоздкая, но вычисленная один раз матрица Y^{-1} обеспечивает быстрое действие расчетов режимов, и поэтому ее применение эффективно в задачах, где надо считать много режимов одной сети с различными нагрузками (задачи оптимизации режима и т. п.).

После того как напряжения в узлах сети найдены, остальные параметры режима рассчитываются безытерационным путем описанным в п. 1.6.

2.6. Применение метода Ньютона для решения уравнений установившихся режимов

2.6.1. Обоснование метода Ньютона для решения нелинейного уравнения

Метод Ньютона является универсальным. Он применим для нахождения корней нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, когда известно начальное приближение $X^{(0)}$, достаточно близкое к решению X^* .

Пусть задано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0$$

и известно начальное приближение $x^{(0)}$. Нелинейную функцию $f(x)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности начального приближения, то есть при $x = x^{(0)}$:

$$f(x)_{x=x^{(0)}} = f(x^{(0)}) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^{(0)}} \cdot \Delta x + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^{(0)}} \cdot \Delta x^2 + \dots = 0.$$

$x_* - x^{(0)} = \Delta x$ мало по условию, так как известно близкое начальное приближение, поэтому Δx^2 пренебрегаем:

$$0 = f(x^{(0)}) + f'(x) \Big|_{x=x^{(0)}} \cdot (x^{(0)} - x_*).$$

Откуда

$$\Delta x^{(0)} = \frac{-f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}.$$

Следующее приближение

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$$

или для k -го приближения

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k-1)}, \quad (2.35)$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}. \quad (2.36)$$

Для получения решения следует организовать итерационный процесс по выражениям (2.35), (2.36).

Итерационный процесс заканчивается, когда достигается заданная точность расчета ε_x :

$$|\Delta x^{(k)}| < \varepsilon_x.$$

Процессу нахождения корней нелинейного уравнения с одним неизвестным по методу Ньютона может быть дана геометрическая интерпретация (рис. 2.2).

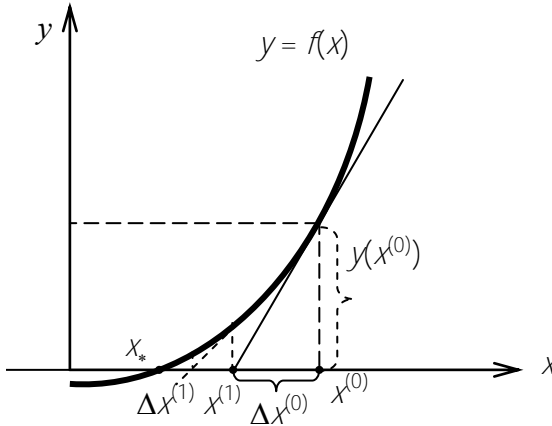


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Поскольку в приведенном геометрическом построении используются касательные и сами первые производные связаны с касательными, проведенными к кривой в точках последовательных приближений, то метод Ньютона в таком виде называется методом касательных.

2.6.2 Применение метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений

Пусть имеем систему нелинейных уравнений

$$F(X) = 0, \tag{2.37}$$

где

$$F(X) = \begin{cases} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_n(X) \end{cases}; \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (2.38)$$

и пусть известно начальное приближение $X^{(0)}$, достаточно близкое к решению X_* :

$$X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}].$$

Разлагаем нелинейную функцию $F(X)$ в ряд Тейлора в окрестности выбранного начального приближения $X^{(0)}$ ограничиваясь линейными членами разложения:

$$F(X)|_{X=X^{(0)}} = F(X^{(0)}) + \left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right]_{X^{(0)}} \cdot [\Delta X^{(0)}]. \quad (2.39)$$

Здесь также пренебрегли членами разложения второго и более порядка малости, поскольку $\Delta X = (X^{(0)} - X_*)$ мало по условию.

$F(X^{(0)})$ – значение вектора-функции небаланса (2.38), вычисленное в точке начального приближения;

$$\left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right] = J - \text{матрица Якоби} - \text{матрица частных производных}$$

от составляющих вектора-функции небаланса правых частей уравнений (2.38) ($f_i(x_{i,j})$) по искомым переменным $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, вычисленная в точке начального (текущего) приближения:

$$\left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right]_{X=X^{(0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X^{(0)}} \quad (2.40)$$

Из (2.39) можно выразить $\Delta X^{(0)}$ – поправку к вектору решения на нулевом приближении, используя обратную матрицу Якоби:

$$\Delta X^{(0)} = - \left[\frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right]_{X=X^{(0)}}^{-1} \cdot F(X^{(0)}), \quad (2.41)$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(0)}$$

где $X^{(1)}$ – вектор-столбец неизвестных первого приближения уравнений;

$F(X^{(0)})$ – вектор-столбец небалансов правых частей уравнений при подстановке в (2.37) начального приближения $X^{(0)}$.

На каждой итерации нужно вычислить матрицу Якоби (2.40) и решить с ней линеаризованную систему (2.41). Поэтому каждая итерация – громоздкая, но если сходимость обеспечена, то итераций немного, и уже первое приближение дает хороший по точности результат. Для решения такой системы существует модификация метода Ньютона, называемая *методом секущих*. По методу секущих матрица Якоби и обратная к ней J^{-1} сохраняются неизменными, а для уточнения поправки $\Delta X^{(k)}$ корректируется вектор-функция небалансов $F(X^{(k)})$.

Условие сходимости метода Ньютона формулируется следующим образом: итерационный метод Ньютона сходится и очередное k -е приближение может быть найдено, если на всей траектории итерационного процесса от начального приближения $X^{(0)}$ до решения $X^{(k)}$ определитель матрицы Якоби не обращается в нуль (поскольку тогда матрица Якоби не может быть обращена и нельзя найти оче-

редное приближение). Поэтому понятие, что начальное приближение задано достаточно точно, означает, что оно лежит внутри воображаемой криволинейной поверхности, ограниченной точками, где определитель матрицы Якоби $\det J \neq 0$. Если проводить аналогию для нелинейных уравнений с одним неизвестным, то это означает, что от начального приближения $X^{(0)}$ до решения X^* не должно попадаться такое $X^{(k)}$, при котором производная $f'(X^{(k)}) = 0$.

Для увеличения скорости сходимости и надежности расчета установившегося режима при разработке промышленных программ были апробированы различные модификации метода Ньютона. Упрощенный расчет можно производить с неизменной матрицей Якоби, определяемой только при начальном приближении. В этом случае получим так называемый метод секущих или метод хорд (в отличие от классического метода Ньютона называемого методом касательных). Для более надежной сходимости учитывают старшие нелинейные члены в разложении Тейлора или используют методы «по параметру».

Методы «по параметру» необходимо использовать в расчете установившегося режима в тех случаях, когда плохо сходится метод Ньютона. Ряд модификаций метода «по параметру» определяется следующей итерационной формулой:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - t \cdot \left[\frac{\partial f_j}{\partial X_j} (X^{(i)}) \right]^{-1} \cdot F(X^{(i)}),$$

где $X^{(i)}$, $X^{(i+1)}$ – векторы переменных на i -м и $(i + 1)$ -м шагах итерационного процесса;

t – параметр, причем $t \leq 1$;

$\left[\frac{\partial f_j}{\partial X_j} (X^{(i)}) \right]^{-1}$ – матрица, обратная к матрице Якоби, вычисленной при $X = X^{(i)}$;

$F(X^{(i)})$ – вектор-столбец небалансов мощности в узлах при $X = X^{(i)}$.

При $t = 1$ итерационный процесс совпадает с методом Ньютона. Процесс соответствует умножению поправок ΔX , определяемых при решении системы линейных уравнений на шаге в методе Ньютона,

на параметр t . В этом смысле метод «по параметру» можно рассматривать как «ускоренный» метод Ньютона.

Величина этого параметра может быть принята как каноническая норма матрицы частных производных 2-го порядка, называемой матрицей Гессе ($t \approx 0,5$) (приближенный расчет 2-й производной при разложении в ряд Тейлора, которой мы пренебрегли).

В современных программах расчета режима метод Ньютона (в форме метода по параметру) используется авторитетными разработчиками [11]. Этот прием необходимо применять, когда итерационный процесс носит колебательный характер (то есть когда режим лежит вблизи предела статической устойчивости и наблюдается текучесть режима, что соответствует нахождению точки режима на плоской вершине синусоиды).

2.6.3. Решение нелинейных узловых уравнений методом Ньютона

Основное преимущество метода – быстрая сходимость, однако он более трудоемок и требует большого объема вычислений на каждой итерации.

Для реализации решения узловых уравнений методом Ньютона уравнения (2.37) запишем на примере четырехузловой схемы с нагрузками в узлах и генерацией в балансирующем узле в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11}U_1 - y_{12}U_2 - y_{13}U_3 - y_{14}U_4 - y_{16}U_{\text{БУ}} = \frac{P_1}{U_1}, \\ -y_{21}U_1 + y_{22}U_2 - y_{23}U_3 - y_{24}U_4 - y_{26}U_{\text{БУ}} = \frac{P_2}{U_2}, \\ -y_{31}U_1 - y_{32}U_2 + y_{33}U_3 - y_{34}U_4 - y_{36}U_{\text{БУ}} = \frac{P_3}{U_3}, \\ -y_{41}U_1 - y_{42}U_2 - y_{43}U_3 + y_{44}U_4 - y_{46}U_{\text{БУ}} = \frac{P_4}{U_4}. \end{array} \right.$$

Используем неявную вектор-функцию $F(U) = 0$. Физический смысл ее элементов – небалансы токов в узлах сети, которые обра-

падают в ноль после нахождения и подстановки точных значений напряжений U_y .

$$F(U) = \begin{cases} \left(-\frac{P_1}{U_1} + y_{11}U_1 \right) - y_{12}U_2 - y_{13}U_3 - y_{14}U_4 - y_{16}U_{\text{БУ}} = 0, \\ -y_{21}U_1 + \left(-\frac{P_2}{U_2} + y_{22}U_2 \right) - y_{23}U_3 - y_{24}U_4 - y_{26}U_{\text{БУ}} = 0, \\ -y_{31}U_1 - y_{32}U_2 + \left(-\frac{P_3}{U_3} + y_{33}U_3 \right) - y_{34}U_4 - y_{36}U_{\text{БУ}} = 0, \\ -y_{41}U_1 - y_{42}U_2 - y_{43}U_3 + \left(-\frac{P_4}{U_4} + y_{44}U_4 \right) - y_{46}U_{\text{БУ}} = 0. \end{cases}$$

Составляем матрицу Якоби:

$$\left[\frac{\partial F_i(U)}{\partial U_j} \right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{P_1}{U_1^2} + y_{11} \right) & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{21} & \left(\frac{P_2}{U_2^2} + y_{22} \right) & -y_{23} & -y_{24} \\ -y_{31} & -y_{32} & \left(\frac{P_3}{U_3^2} + y_{33} \right) & -y_{34} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} & \left(\frac{P_4}{U_4^2} + y_{44} \right) \end{bmatrix}$$

Ее элементы вычисляются путем подстановки напряжений текущей итерации $U_i^{(k)}$, $U_j^{(k)}$. Знаки элементов матрицы y_{ii} , y_{ij} соответствуют исходным узловым уравнениям.

Тогда итерационная формула запишется в виде

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \Delta U^{(k+1)},$$

$$\text{где } \Delta U^{(k+1)} = \left[\frac{\partial F}{\partial U_j} \right]_{U^{(k)}}^{-1} \cdot [F(U^{(k), k+1})].$$

Точность проверяется следующим образом:

$$\|F(U^{(k+1)})\| \leq \varepsilon.$$

После определения узловых напряжений выполняется расчет остальных параметров режима электрической сети.

1. Определяются падения напряжений в узлах относительно напряжения в балансирующем узле:

$$U_{\Delta} = U_y - n \cdot U_{\text{БУ}}.$$

2. Определяются падения напряжения на ветвях схемы:

$$U_{\text{в}} = M_{\Sigma}^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{\text{БУ}} \end{bmatrix}.$$

3. Определяются токи ветвей:

$$I_{\text{в}} = dY_{\text{в}} \cdot U_{\text{в}}.$$

4. Определяются потери мощности в ветвях:

$$\Delta P_{\text{в}} = dI_{\text{в}} \cdot U_{\text{в}}.$$

5. Определяются суммарные потери мощности в сети:

$$\Delta P_{\Sigma} = m^T \cdot \Delta P_{\text{в}}.$$

6. Определяются расчетные токи узлов:

$$J_p = M \cdot I_v.$$

7. Определяются расчетные мощности в узлах:

$$P_p = dU_y \cdot J_p,$$

где dU_y – диагональная матрица напряжений в узлах.

8. Для каждого узла определяется небаланс по мощности:

$$P_{\text{нб}} = P_p - P_i,$$

и в процентах

$$P_{\text{нб}\%} = \frac{P_{pi} - P_{\text{зад}i}}{P_{\text{зад}i}} \cdot 100\% ,$$

где P_p – рассчитанная мощность,

$P_{\text{зад}i}$ – заданная мощность.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сходство и различие методов простой и ускоренной итерации?
2. Объясните принцип решения системы нелинейных уравнений узловых напряжений методом простой и методом ускоренной итерации.
3. Как формулируются условия сходимости итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений? систем нелинейных уравнений?
4. Обоснуйте формулу для итерационного расчета корней нелинейного уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона.
5. Почему условием применимости метода Ньютона является наличие хорошего начального приближения?
6. В чем отличие метода касательных от метода секущих при решении системы уравнений методом Ньютона?
7. Что влияет на сходимость итерационного процесса?
8. Как формулируется (и как объясняется) условие сходимости метода Ньютона?

РАЗДЕЛ 3. ЗАДАНИЯ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

3.1. Тема работы

Применение матричных моделей для расчета и анализа установившихся режимов электрических сетей.

3.2. Исходные данные к курсовой работе

Схема и параметры электрической сети, нагрузки узловых точек (определяются по методике, изложенной в табл. 3.1).

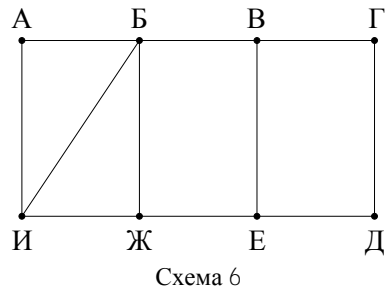
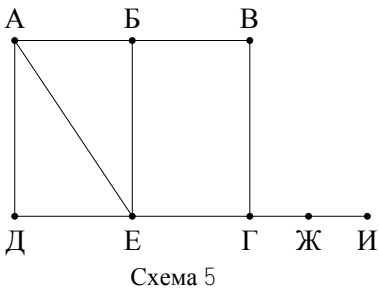
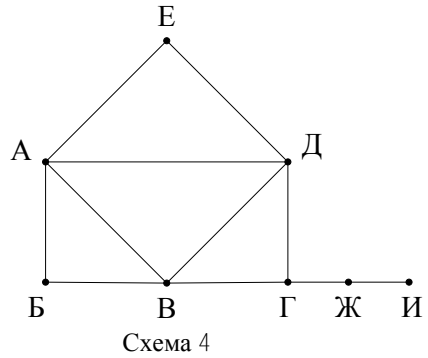
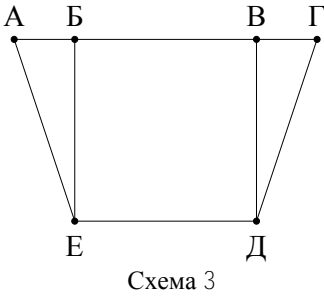
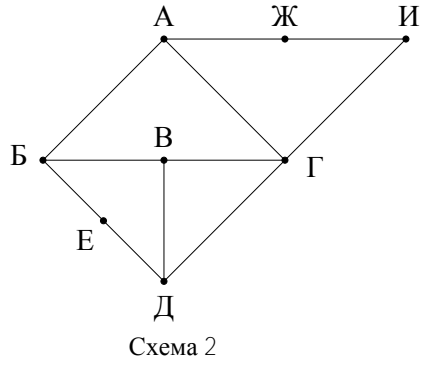
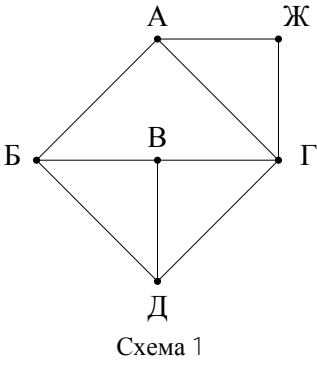
Таблица 3.1

Исходные данные для вариантов задания

Фамилия	Имя	Отчество
Петров	Николай	Иванович
X=6	Y=7	Z=8

Номер варианта (соответствует порядко-вому номеру студента в списке группы)	Номер схемы	Расположение балансирующего узла	Расположение нагрузки генерирующих источников	Исходные данные для выполнения курсовой работы		
1	1	A	Местоположение нагрузок выбирается путем последовательного прибавления к букве, обозначающей БУ, соответственно 2, 4 и 5. Например, если БУ - "Г", то нагрузки будут расположены в точках Г+2 = Е, Г+4 = Б, Г+5 = В. Местоположение генераций выбирается аналогичным способом, путем прибавления трех букв к БУ, в данном случае Г+3 = А	Базовая длина участка в конкретном варианте, км		
2		Б		L_0	5*X	
3		В		Базовая мощность узла в конкретном варианте, МВт	P_0	3*Y
4		Г		$\text{tg}\varphi_0 = Q_0/P_0$	0,62 - 0,75	
5		Д		Напряжение балансирующего узла (БУ), кВ	$U_{бу}$	(1+1/Z)*U ном
6	2	Е		Номинальное напряжение, кВ	$U_{ном}$	110
7		А		Удельное индуктивное сопротивление, Ом/км	X_0	0,40
8		Б		Длина участка, км	L	1,4*L₀
9		В		Длина j-го участка	L_j	L₀*(1,4-0,1*j)
10		Г		Длина последнего участка	L_n	0,6*L₀
11	3	Д		Нагрузки узловых точек, МВт	P_i	P₀*(1+0,04*Yⁱ)
12		Е				
13		А				
14		Б				
15		В				
16	4	Г				
17		Д				
18		Е				
19		А				
20		Б				
21	5	В				
22		Г				
23		Д				
24		Е				
25		Ж				
26	6	Б				
27		В				
28		Г				
29		Д				
30		Е				

3.3. Схемы сети



Базовое задание на курсовую работу (п. 3.4) предусматривает проведение расчетов для **сети постоянного тока (8 баллов)** и **может быть дополнено** развивающими тематикой работы элементами исследовательского характера (на выбор):

1. Расчет режима для однородной сети переменного тока с одинаковыми сечениями проводов на участках $Z_0 = r_0 + jX_0 = 0,2 + j0,4$, Ом/км, и одинаковыми коэффициентами мощности нагрузок в узлах сети.

2. Расчет режима для неоднородной сети переменного тока (выбрать сечения проводов на участках сети по экономической плотности тока [11] из диапазона сечений $F = 70 \dots 300 \text{ мм}^2$, используя рассчитанные ранее токи ветвей I_{β} , приняв $j_s = 1 \text{ А/мм}^2$; провести анализ влияния неоднородности сети на потокораспределение, показатели качества электроэнергии ($U_{\Delta/\text{max}}$) и на экономичность режима (ΔP_{Σ})).

3. Решить уравнения узловых напряжений в форме баланса токов для однородной сети переменного тока по методу итерации (с ускорением итерационного процесса введением ускоряющего коэффициента $1 < k_y < 2$ по формуле

$$U_{\text{улучш}}^{(k)} = U^{(k-1)} + (U^{(k)} - U^{(k-1)}) \cdot k_y$$

после установления монотонного характера итерационного процесса). Оценить наибольшее отклонение параметров режима U_{Δ} и его экономичность по величине потерь ΔP_{Σ} .

4. Рассчитать итерационным методом режим однородной сети переменного тока на основе контурных уравнений при задании нагрузок в мощностях. Для этого выделить внешний итерационный процесс коррекции задающих токов по заданным мощностям и рассчитанным напряжениям и внутренний итерационный процесс (ИП) нахождения токов хорд; подобрать коэффициент ускорения – демпфирования ИП расчета токов хорд, обеспечивающий его сходимость $0,2 < k_d < 0,7$, $I_{\beta \text{ уск}}^{(k)} = I_{\beta}^{(k-1)} + (I_{\beta}^{(k)} - I_{\beta}^{(k-1)}) \cdot k_d$ [4]).

5. Разработать программное обеспечение для расчета режима сети переменного тока при моделировании нагрузок типовыми статическими характеристиками (СХ) по напряжению $P = f(U)$, $Q = f(U)$;

рассчитать режим и оценить влияние учета статических характеристик на показатель качества электроэнергии ($U_{\Delta i_{\max}}$) и на экономичность режима (ΔP_{Σ}) при расчете утяжеленного режима $k_y \leq 100\%$.

6. Получить матрицу коэффициентов распределения C путем расчета n частных режимов работы сети с единичными токами в узлах по вашей программе расчетов установившихся режимов. Разработать методику, согласовать с руководителем, выполнить расчет матрицы $[C]$ и установившегося режима и проанализировать полученные результаты.

7. Получить матрицу собственных и взаимных сопротивлений электрической сети Z на основе расчета n частных режимов с единичными токами в узлах [4]. Разработать методику, согласовать с руководителем, выполнить расчет матрицы Z и установившегося режима и проанализировать полученные результаты.

8. Разработать методику и программу расчета режимов и высших гармонических составляющих $E_{vi} = k_v U_{\text{ном}}$.

3.4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень подлежащих разработке вопросов)

Введение

1. Формирование схемы и нагрузок сети согласно варианту исходных данных. Формирование уравнений установившегося режима электрической сети.

1.1. Составление схемы замещения электрической сети, определение её параметров и нагрузок в узлах.

1.2. Составление элементарных матриц параметров режима сети.

1.3. Расчет матрицы узловых проводимостей и матрицы контурных сопротивлений.

1.4. Запись уравнений узловых напряжений при задании нагрузок в токах.

1.5. Запись контурных уравнений.

2. Расчет режима электрической сети при задании нагрузок в токах.

2.1. Расчет режима электрической сети по узловым уравнениям с использованием метода исключения неизвестных Гаусса.

2.2. Расчет режима электрической сети на основе контурных уравнений.

2.3. Сопоставление результатов расчета режима.

3. Расчет режима электрической сети по нелинейным узловым уравнениям при задании нагрузок в мощностях с использованием итерационных методов.

3.1. Решение нелинейных узловых уравнений в форме баланса токов методом ускоренной итерации.

3.2. Решение нелинейных узловых уравнений в форме баланса токов методом Ньютона.

3.3. Решение нелинейных узловых уравнений в обращенной форме методом простой или ускоренной итерации.

4. Расчет утяжеленного режима с применением матриц обобщенных параметров электрической сети.

5. Анализ результатов расчета режимов. Анализ сходимости итерационных методов.

Заключение.

Базовое задание может быть дополнено развивающими тематикой работы элементами исключающего характера (по выбору студента).

3.5. Перечень графического материала (в виде компьютерных рисунков на формате А4)

1. Исходная расчетная схема электрической сети с указанием участков и нагрузок в узлах сети. Нумерация элементов схемы и ее топологический анализ. Матрицы инцидентий.
2. Графики сходимости итераций.
3. Схемы сети с результатами расчета нормального и утяжеленного режимов по различным методам.

РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ БАЗОВЫХ РАЗДЕЛОВ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Пример расчетов выполнен студентами кафедры «Электрические системы».

Составление схемы замещения электрической сети, определение ее параметров и нагрузок в узлах

Составляем граф схемы замещения электрической сети (рисунок 1) и нумеруем его в соответствии с принципом яркости.

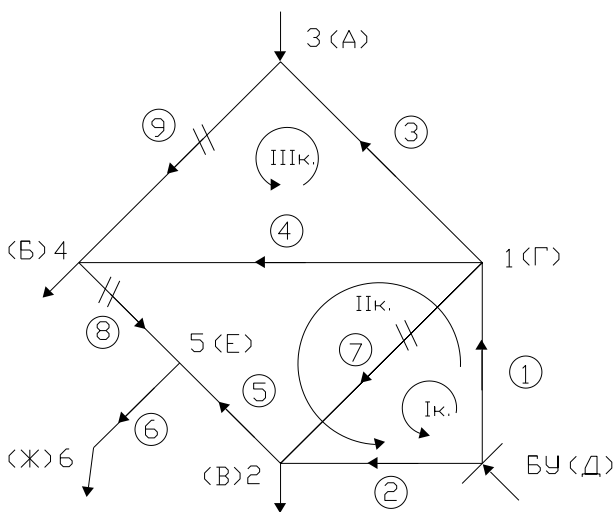


Рисунок 1 – Граф схемы замещения электрической сети

Балансирующий узел по условию: Д.
Нагрузки: $D + 2 = Ж$, $D + 4 = Б$, $D + 5 = В$.
Генерирующий источник: $D + 3 = А$.
 X – число букв в фамилии;
 Y – число букв в имени;
 Z – число букв в отчестве студента.
Допустим, что $X = 9$, $Y = 9$, $Z = 8$.
Базовая длина участка

$$L = 5 \cdot X = 5 \cdot 9 = 45 \text{ км.}$$

Базовая мощность

$$P_0 = 3 \cdot Y = 3 \cdot 9 = 27 \text{ МВт.}$$

Напряжение в балансирующем узле

$$U_{\text{БУ}} = U_{\text{ном}} \left(1 + \frac{1}{Z}\right) = 110 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = 123,75 \text{ кВ.}$$

$$U_{\text{ном}} = 110 \text{ кВ.}$$

Пронумеруем схему в соответствии с принципом ярусности. Получаем: шесть узлов, шесть ветвей дерева, три хорды.

Длины первого и последнего участков соответственно

$$l_1 = 1,4 \cdot L = 1,4 \cdot 45 = 63 \text{ км}; \quad l_9 = 0,6 \cdot L = 0,6 \cdot 45 = 27 \text{ км.}$$

Длины всех остальных участков

$$l = L = 45 \text{ км.}$$

Зная удельное сопротивление ветвей $\chi_0 = 0,4 \text{ Ом/км}$ и длины всех участков сети, найдём их сопротивления по формуле

$$Z_i = x_0 \cdot l_i;$$

$$Z_1 = x_0 \cdot l_1 = 0,4 \cdot 63 = 25,2 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z_7 = Z_8 = x_0 \cdot l = 0,4 \cdot 45 = 18 \text{ Ом};$$

$$Z_9 = x_0 \cdot l_9 = 0,4 \cdot 27 = 10,8 \text{ Ом}.$$

Вычисляем мощности в заданных узлах по формуле

$$P_i = P_0 \cdot (1 + 0,05 \cdot i),$$

где i – номер узла.

Нагрузка задана в узлах 2, 4, 6. В узле 3 – генерирующая станция.

$$P_2 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 2) = 29,7 \text{ МВт}; P_3 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) = 31,05 \text{ МВт};$$

$$P_4 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 4) = 32,4 \text{ МВт}; P_6 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 6) = 35,1 \text{ МВт}.$$

***Составление элементарных матриц параметров сети,
режима сети и матриц соединений***

Матрицу параметров режима $[P_i]$ (МВт) составим по уже известным мощностям в узлах сети:

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{ МВт}.$$

По формуле $J_i = \frac{P_i}{U_i}$ найдем задающие токи. В первом приближении $U_i = U_{\text{ном}} = 110 \text{ кВ}$.

$$J_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,27 \\ 0,282 \\ -0,295 \\ 0 \\ -0,319 \end{bmatrix}, \text{кА}.$$

Составляем диагональную матрицу сопротивлений ветвей dZ_{-B} .
 Затем находим обратную ей матрицу dY_B , которую будем называть матрицей проводимостей ветвей:

$$dZ_{-B} = \begin{bmatrix} 25,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,8 \end{bmatrix}, \text{Ом.}$$

$$dY_B = dZ_{-B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 \end{bmatrix}, \text{См}.$$

Составим первую матрицу инцидентий M – матрицу соединений ветвей в узлах. В ней строки соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы. Матрица M формируется как блочная с блоком M_α размерностью $(n \times n)$ – для дерева сети, и блоком M_β размерностью $(n \times k)$ для хорд:

$$M = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу M_Σ , которая помимо подматриц M_α и M_β будет содержать дополнительную строку для балансирующего узла:

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \\ M_{\text{бу}j} \end{bmatrix};$$

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы M_Σ выделим матрицу M_α (для дерева сети) и M_β (для хорд сети):

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Объединение матриц M_α и M_β даст нам матрицу M – первую матрицу инцидентий:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее составим матрицу соединения ветвей в независимые контуры N или вторую матрицу инцидентий, которая позволяет сформировать контурную модель электрической сети. Матрица N также будет составной. Её элементами будут подматрицы N_α – матрица соединений для ветвей дерева – и N_β – матрица соединений для хорд схемы.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выделим из матрицы N подматрицы N_α и N_β :

$$N_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Последний нулевой столбец подматрицы N_α соответствует 6-й ветви дерева, не входящей ни в один контур.

Определение элементов матрицы узловых проводимостей и матрицы контурных сопротивлений

По известным dZ_B и M вычислим матрицу Y_y – матрицу узловых проводимостей без учета балансирующего узла:

$$Y_y = M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 \end{bmatrix}, \text{ См,}$$

а также матрицу Y_Σ – матрицу узловых проводимостей с учетом балансирующего узла:

$$Y_\Sigma = M_\Sigma \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_\Sigma^T = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 & -0,04 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 & -0,056 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 & 0 \\ -0,04 & -0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,095 \end{bmatrix}, \text{ См.}$$

Как видно, матрицы узловых проводимостей Y , Y_Σ квадратные, симметричные. Их диагональные элементы Y_{ii} представляют собой суммы побочных элементов строки (или столбца) Y_{ij} , взятые с противоположным знаком. Эти суммы называются собственными проводимостями узлов. Побочные элементы Y_{ij} представляют собой проводимости ветвей между узлами i и j и называются взаимными проводимостями узлов; если между узлами i и j непосредственная связь отсутствует, то $Y_{ij} = 0$, именно поэтому матрица узловых проводимостей – слабозаполненная.

Матрица узловых проводимостей Y_Σ для схемы электрической сети, включая балансирующий узел, является вырожденной, так как сумма элементов строк или столбцов Y_Σ равна нулю. С такой матрицей коэффициентов система уравнений не решается.

Для решения контурных уравнений нам понадобится матрица контурных сопротивлений. Матрицу контурных сопротивлений Z_k можно получить имея матрицы N , dZ_b и N^T :

$$Z_k = N \cdot dZ_b \cdot N^T = \begin{bmatrix} 61,2 & 43,2 & 0 \\ 43,2 & 97,2 & -18 \\ 0 & -18 & 46,8 \end{bmatrix}, \text{ Ом.}$$

Матрица контурных сопротивлений Z_k имеет вполне регулярную структуру. Матрица контурных сопротивлений имеет порядок, равный числу независимых контуров ($n \times n$, где n – число независимых контуров). Ее диагональные элементы Z_{ii} представляют собой алгебраическую сумму сопротивлений ветвей, входящих в данный i -й контур, а побочные элементы Z_{ij} – сопротивление общей цепочки ветвей для i -го и j -го контуров.

Расчет режима электрической сети по линейным узловым и контурным уравнениям при задании нагрузок в токах

Узловое уравнение в матричной форме имеет вид $Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = -\vec{J}$.

При помощи этого уравнения можно найти напряжения в узлах схемы. Для этого из узлового уравнения найдем матрицу-столбец падений напряжения в узлах схемы относительно балансирующего узла \vec{U}_Δ (элементы матрицы \vec{U}_Δ для нагрузочных узлов будут иметь в основном отрицательное значение), а затем для получения матрицы-столбца узловых напряжений U_y сложим матрицы-столбцы падений напряжения и напряжения в балансирующем узле $U_{By} = 123,75$ кВ:

$$U_\Delta = Y_y^{-1} \cdot J_y = \begin{bmatrix} -5,473 \\ -6,915 \\ -5,250 \\ -8,165 \\ -10,412 \\ -16,155 \end{bmatrix}, \text{ кВ}, n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad U_y = U_\Delta + U_{By} \cdot n = \begin{bmatrix} 118,277 \\ 116,835 \\ 118,50 \\ 115,585 \\ 113,338 \\ 107,595 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Из полученных значений узловых напряжений видно, что напряжение значительно падает в тех узлах, которые имеют большую нагрузку и малое число связей с соседними узлами (наглядный пример – это узел 6, который имеет самую большую нагрузку и питается лишь одной линией электропередачи). Генерирующий узел (узел 3) имеет повышенное напряжение по отношению к прилегающим узлам. Это объясняется тем, что в генерирующем узле мощность не потребляется из сети, а, наоборот, поступает в сеть и падения напряжения в ветвях имеют противоположный знак.

При помощи матрицы падений напряжений в узлах схемы и матрицы M^T можно найти падения напряжений уже на ветвях схемы:

$$\Delta U_{\text{в}} = M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 5,473 \\ 6,915 \\ -0,223 \\ 2,691 \\ 3,497 \\ 5,744 \\ 1,442 \\ 2,247 \\ 2,915 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Зная падения напряжений на ветвях схемы, можно легко найти токи в ветвях. Для этого умножим обратную диагональную матрицу $dZ_{\text{в}}^{-1}$ на падения напряжений в ветвях:

$$I_{\text{в}} = dZ_{\text{в}}^{-1} \cdot \Delta U_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,384 \\ -0,012 \\ 0,15 \\ 0,194 \\ 0,319 \\ 0,08 \\ 0,125 \\ 0,27 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

С целью проверки правильности полученных результатов проверим выполнение 1-го закона Кирхгофа $M \cdot I_B = -J_y$. Для этого перемножим матрицы M и I_B :

$$J_{y\text{расч}} = M \cdot I_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,27 \\ 0,282 \\ -0,295 \\ 0 \\ -0,319 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Матрица задающих токов

$$J_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,27 \\ 0,282 \\ -0,295 \\ 0 \\ -0,319 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Как видно, значения полностью идентичные. Следовательно, ранее проведенные расчеты верны.

Расчет режима электрической сети на основе контурных уравнений

Контурное уравнение в матричной форме имеет вид

$$N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y + Z_K \cdot \vec{I}_K = \vec{E}_y. \quad (*)$$

В нашей схеме в ветвях нет ЭДС, поэтому $\vec{E}_K = 0$.

$$Z_K \cdot \vec{I}_K = -N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y,$$

$$Z_K = N \cdot dZ_B \cdot N^T.$$

Так как обратная матрица M_{α}^{-1} имеет размерность $(n \times n)$, а произведение $N \cdot dZ_{\text{B}}$ имеет размерность $(k \times m)$, то перемножить их не можем. Однако можно дополнить матрицу M_{α}^{-1} нулевыми элементами (обозначим ее $M_{\alpha 0}$), которые не повлияют на результат умножения, но дадут нам возможность перемножить матрицы:

$$M_{\alpha}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор-столбец контурных токов находится из уравнения (*) как

$$\vec{I}_{\text{K}} = Z_{\text{K}}^{-1} \cdot \left(-N \cdot dZ_{\text{B}} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{J}_{\text{y}} \right),$$

$$I_{\text{K}} = Z_{\text{K}}^{-1} \cdot (-N \cdot dZ_{\text{B}} \cdot M_{\alpha 0} \cdot J_{\text{y}}) = \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,125 \\ 0,27 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

Ток в хорде схемы равен контурному току, протекающему в контуре, содержащем данную хорду. Обозначим токи в хордах как I_{β} .

$$I_{\beta} = I_{\text{K}} = \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,125 \\ 0,27 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

Зная токи в хордах схемы и задающие токи в узлах, найдем токи в ветвях дерева схемы I_{α} , опираясь на принцип наложения:

$$I_{\alpha} = M_{\alpha}^{-1} \cdot J_y + N_{\alpha}^T \cdot I_{\beta} = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,384 \\ -0,012 \\ 0,15 \\ 0,194 \\ 0,319 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

Полная матрица токов в ветвях схемы будет иметь вид $I_B = \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix}$;

$$I_B = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,384 \\ -0,012 \\ 0,15 \\ 0,194 \\ 0,319 \\ 0,08 \\ 0,125 \\ 0,27 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

Имея полную матрицу токов в ветвях, найдем падения напряжения в ветвях

$$\Delta U_B = dZ_B \cdot I_B = \begin{bmatrix} 5,473 \\ 6,915 \\ -0,223 \\ 2,691 \\ 3,497 \\ 5,744 \\ 1,442 \\ 2,247 \\ 2,915 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Для вычисления напряжений в узлах схемы U_y необходимо найти падения напряжения в узлах схемы относительно балансирующего, а затем для получения самих узловых напряжений взять сумму матриц напряжений в балансирующем узле и падений напряжений в узлах схемы, причем элементы матрицы падений напряжения в узлах отрицательны.

Для нахождения падений напряжения в узлах относительно балансирующего возьмем значения падений напряжения в ветвях дерева ΔU_a из матрицы ΔU_b . Для получения падений напряжения в узлах $U_{\Delta y}$, умножим матрицу $[M_a^T]^{-1}$ на ΔU_a :

$$U_{\Delta y} = (M_a^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5,473 \\ 6,915 \\ -0,223 \\ 2,691 \\ 3,497 \\ 5,744 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,473 \\ -6,915 \\ -5,25 \\ -8,165 \\ -10,412 \\ -16,155 \end{bmatrix}, \text{ кВ},$$

$$U_y = U_{\Delta y} + U_{Бу} \cdot n = \begin{bmatrix} 118,277 \\ 116,835 \\ 118,50 \\ 115,585 \\ 113,338 \\ 107,595 \end{bmatrix}, \text{ кВ}.$$

Так как для нахождения задающих токов в узлах по заданным мощностям берем номинальное напряжение, а это напряжение в узлах не соответствует действительным напряжениям, то необходимо проверить точность произведенных расчетов. Для этого определим небаланс мощностей P в узлах.

Найдем расчетный ток в узлах схемы как алгебраическую сумму токов, сходящихся по ветвям:

$$J_{\text{расч}} = M \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,27 \\ 0,282 \\ -0,295 \\ 0 \\ -0,319 \end{bmatrix}, \text{ кА.}$$

По току в узлах схемы и узловым напряжениям определим расчетные мощности в узлах схемы $P_{\text{расч}}$:

$$P_{\text{расч}} = \text{diag}(U_{\text{у}}) \cdot J_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -31,545 \\ 33,449 \\ -34,045 \\ 0 \\ -34,333 \end{bmatrix}, \text{ МВт}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Вычисляем небаланс в МВт и %:

$$P_{\text{нб}} = P - P_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,845 \\ -2,399 \\ 1,645 \\ 0 \\ -0,767 \end{bmatrix}, \text{ МВт}, \quad P_{\text{нб}\%} = \frac{P_{\text{нб}}}{P} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -6,214 \\ -7,727 \\ -5,078 \\ 0 \\ 2,187 \end{bmatrix}, \%$$

Небаланс мощности во всех узлах превышает допустимое значение в 1 %. Для увеличения точности расчета режима уточним задающие токи в узлах сети, вместо номинального напряжения $U_{\text{ном}}$ в формуле для вычисления задающих токов используем значения напряжений в узлах, полученные при расчете первого приближения.

Так как оба метода (метод контурных уравнений и метод узловых уравнений) дают идентичные результаты, то рассчитаем режим сети во втором приближении лишь методом узловых уравнений:

$$U_y = \begin{bmatrix} 118,277 \\ 116,835 \\ 118,50 \\ 115,585 \\ 113,338 \\ 107,595 \end{bmatrix}, \text{кВ}, J_y = \frac{P}{U_y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,254 \\ 0,262 \\ -0,28 \\ 0 \\ -0,326 \end{bmatrix}, \text{кА}, U_\Delta = Y_y^{-1} \cdot J_y = \begin{bmatrix} -5,505 \\ -6,845 \\ -5,414 \\ -8,189 \\ -10,453 \\ -16,325 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Находим напряжения в узлах схемы:

$$U_y = U_\Delta + U_{\text{Бу}} \cdot n = \begin{bmatrix} 118,245 \\ 116,905 \\ 118,336 \\ 115,561 \\ 113,297 \\ 107,425 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Падения напряжения в ветвях схемы:

$$\Delta U_{\text{в}} = M^T \cdot U_\Delta = \begin{bmatrix} 5,505 \\ 6,845 \\ -0,091 \\ 2,684 \\ 3,608 \\ 5,872 \\ 1,339 \\ 2,264 \\ 2,775 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Токи в ветвях схемы:

$$I_{\text{в}} = dZ_{\text{в}}^{-1} \cdot \Delta U_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 0,218 \\ 0,38 \\ 0 \\ 0,149 \\ 0,2 \\ 0,326 \\ 0,074 \\ 0,126 \\ 0,257 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Снова найдем расчетные токи и расчетные мощности в узлах на второй итерации, а также небаланс узловых мощностей:

$$J_{\text{расч}}^{(2)} = M \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,254 \\ 0,262 \\ -0,28 \\ 0 \\ -0,326 \end{bmatrix}, \text{кА,}$$

$$P_{\text{расч}}^{(2)} = \text{diag}(U_{\text{y}}) \cdot J_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,718 \\ 31,007 \\ -32,393 \\ 0 \\ -35,045 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{МВт}.$$

Небаланс мощности в МВт и %:

$$P_{\text{нб}}^{(2)} = P - P_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,018 \\ 0,043 \\ -0,007 \\ 0 \\ -0,055 \end{bmatrix}, \text{ МВт, } P_{\text{нб}\%}^{(2)} = \frac{P_{\text{нб}}^{(2)}}{P} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,06 \\ 0,138 \\ 0,022 \\ 0 \\ 0,158 \end{bmatrix}, \%$$

Основные параметры режима – напряжения узлов U_y и токи I_{β} – определены; небаланс мощности составляет менее 1 %. В пределах данной задачи нас это вполне удовлетворяет. Следовательно, расчет режима сети по методам контурных и узловых уравнений окончен.

Как видно из расчетов, методы контурных и узловых уравнений дают идентичные результаты. Однако метод узловых уравнений представляется более быстрым и удобным в использовании по сравнению с методом контурных уравнений.

Расчет режима электрической сети по линейным узловым уравнениям с использованием метода Гаусса

Узловые уравнения в матричной форме записываются в виде

$$Y_y \cdot U_{\Delta} = J_y.$$

Матрица узловых проводимостей

$$Y_y = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 \end{bmatrix}, \text{ См.}$$

Вектор столбец задающих токов

$$J_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,27 \\ 0,282 \\ -0,295 \\ 0 \\ -0,319 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Вектор-столбец падений напряжения в узлах сети относительно балансирующего узла U_{Δ} найдем методом исключения неизвестных Гаусса (приведение матрицы к треугольному виду).

Для этого расширим матрицу узловых проводимостей Y_y столбцом свободных членов – задающих токов J_y :

$$Y_{yJ} = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 & -0,27 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 & 0,282 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 & -0,295 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 & -0,319 \end{bmatrix}.$$

Транспонируем матрицу для упрощения дальнейших преобразований – приведения матрицы к треугольному виду:

$$Y_{yJ}^T = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 \\ 0 & -0,27 & 0,282 & -0,295 & 0 & -0,319 \end{bmatrix}.$$

Для получения нулевых элементов во всей первой строке, кроме диагонального элемента, умножим первый столбец на некоторый коэффициент a , который будет равен отношению $a = \frac{Y_{yJ}^T(1,2)}{Y_{yJ}^T(1,1)}$, а затем из этого столбца вычтем второй столбец. Полученный столбец запишем на место второго столбца матрицы Y_{yJ}^T . Аналогичную операцию проделаем с третьим и четвертым столбцами.

Находим коэффициент $a = -0,269$.

Первый столбец оставим без изменений:

$$Y_1 = (Y_{yJ}^T)^{<1>}$$

Вычтем второй столбец из первого столбца, умноженного на коэффициент a :

$$Y_2 = a(Y_{yJ}^T)^{<1>} - (Y_{yJ}^T)^{<2>}$$

Вычтем третий столбец из первого столбца, умноженного на коэффициент a :

$$Y_3 = a(Y_{yJ}^T)^{<1>} - (Y_{yJ}^T)^{<3>}$$

Вычтем четвертый столбец из первого столбца, умноженного на коэффициент a :

$$Y_4 = a(Y_{yJ}^T)^{<1>} - (Y_{yJ}^T)^{<4>}$$

Пятый и шестой столбцы оставим без изменений:

$$Y_5 = (Y_{yJ}^T)^{<5>}, Y_6 = (Y_{yJ}^T)^{<6>}$$

В результате этих операций получим матрицу

$$Y_{yJ}^T = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4 \ Y_5 \ Y_6] = \begin{bmatrix} 0,206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & -0,152 & 0,015 & 0,015 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & -0,133 & 0,108 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & 0,108 & -0,189 & -0,056 & 0 \\ 0 & 0,056 & 0 & 0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 \\ 0 & 0,27 & -0,282 & 0,295 & 0 & -0,319 \end{bmatrix}.$$

Теперь получим нулевые элементы правее диагонального во второй строке.

Первые два столбца оставим без изменений:

$$Y_1 = (Y_{yJ}^T)^{\langle 1 \rangle}, \quad Y_2 = (Y_{yJ}^T)^{\langle 2 \rangle}.$$

Найдем коэффициент для третьего и четвертого столбцов:

$$b = \frac{Y_{yJ}^T(2,3)}{Y_{yJ}^T(2,2)} = -0,099.$$

Вычтем третий столбец из второго столбца, умноженного на коэффициент b :

$$Y_3 = b(Y_{yJ}^T)^{\langle 2 \rangle} - (Y_{yJ}^T)^{\langle 3 \rangle}.$$

Вычтем четвертый столбец из второго столбца, умноженного на коэффициент b :

$$Y_4 = b(Y_{yJ}^T)^{\langle 2 \rangle} - (Y_{yJ}^T)^{\langle 4 \rangle}.$$

Найдем коэффициент c для пятого столбца и вычтем пятый столбец из второго столбца, умноженного на коэффициент c . Шестой столбец оставим без изменений:

$$c = \frac{Y_{yJ}^T(2,5)}{Y_{yJ}^T(2,2)} = 0,366, \quad Y_5 = c(Y_{yJ}^T)^{<2>} - (Y_{yJ}^T)^{<5>}, \quad Y_6 = (Y_{yJ}^T)^{<6>}$$

В результате получим матрицу

$$Y_{yJ}^T = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 \quad Y_5 \quad Y_6] = \begin{bmatrix} 0,206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & -0,152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & 0,132 & -0,109 & 0,005 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & -0,109 & 0,187 & 0,061 & 0 \\ 0 & 0,056 & -0,005 & -0,061 & -0,146 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0,056 \\ 0 & 0,27 & 0,256 & -0,321 & 0,099 & -0,319 \end{bmatrix}$$

Путем дальнейших преобразований получим нижнюю треугольную матрицу:

$$Y_{yJ}^T = \begin{bmatrix} 0,206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & -0,152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & 0,132 & 0 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,015 & -0,109 & -0,097 & 0 & 0 \\ 0 & 0,056 & -0,005 & 0,066 & -0,102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,056 & -0,025 \\ 0 & 0,27 & 0,256 & 0,11 & 0,162 & 0,408 \end{bmatrix}$$

Транспонируем матрицу Y_{yJ}^T :

$$Y_{yJ} = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,152 & 0,015 & 0,015 & 0,056 & 0 & 0,27 \\ 0 & 0 & 0,132 & -0,109 & -0,005 & 0 & 0,256 \\ 0 & 0 & 0 & -0,097 & 0,066 & 0 & 0,11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,102 & 0,056 & 0,162 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,025 & 0,408 \end{bmatrix}$$

Вычисляем падения напряжения в узлах $U_{\Delta i}$ относительно балансирующего узла:

$$U_{\Delta 6} = \frac{Y_{yJ(6,7)}}{Y_{yJ(6,6)}} = -16,155, \text{ кВ};$$

$$U_{\Delta 5} = \frac{Y_{yJ(5,7)} - Y_{yJ(5,6)} \cdot U_{\Delta 6}}{Y_{yJ(5,5)}} = -10,412, \text{ кВ};$$

$$U_{\Delta 4} = \frac{Y_{yJ(4,7)} - Y_{yJ(4,6)} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yJ(4,5)} \cdot U_{\Delta 5}}{Y_{yJ(4,4)}} = -8,165, \text{ кВ};$$

$$U_{\Delta 3} = \frac{Y_{yJ(3,7)} - Y_{yJ(3,6)} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yJ(3,5)} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yJ(3,4)} \cdot U_{\Delta 4}}{Y_{yJ(3,3)}} = -5,25, \text{ кВ};$$

$$U_{\Delta 2} = \frac{Y_{yJ(2,7)} - Y_{yJ(2,6)} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yJ(2,5)} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yJ(2,4)} \cdot U_{\Delta 4} - Y_{yJ(2,3)} \cdot U_{\Delta 3}}{Y_{yJ(2,2)}} = -6,915, \text{ кВ};$$

$$U_{\Delta 1} = \frac{Y_{yJ(1,7)} - Y_{yJ(1,6)} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yJ(1,5)} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yJ(1,4)} \cdot U_{\Delta 4} - Y_{yJ(1,3)} \cdot U_{\Delta 3} - Y_{yJ(1,2)} \cdot U_{\Delta 2}}{Y_{yJ(1,1)}} = -5,473, \text{ кВ}.$$

Дальнейший расчет режима производим аналогично предыдущим пунктам.

**Расчет режима электрической сети по узловым уравнениям
в форме баланса токов при их решении методом
ускоренной итерации**

Организуем итерационный процесс на базе матричного уравнения

$$Y_y \cdot \vec{U}_{\Delta} = \vec{J}_y, \quad (1)$$

где Y_y – матрица узловых проводимостей без учета балансирующего узла;

\vec{U}_Δ – вектор-столбец падений напряжений относительно балансирующего узла;

\vec{J}_y – вектор-столбец задающих токов, содержащих свой знак.

Правую часть уравнения (1) представим в виде

$$[J_i]^{(k)} = \left[\frac{P_i}{(U_{\Delta i}^{(k)} + U_{\text{БВ}})} \right], \quad (2)$$

где P_i – задающая мощность в i -м узле;

$U_{\text{БВ}}$ – напряжение в балансирующем узле;

$U_{\Delta i}^{(k)}$ – падение напряжения в i -том узле при k -м приближении.

Приравняем левую часть уравнения (1) и правую часть уравнения (2):

$$Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = \left[\frac{P_i}{(U_{\Delta i}^{(k)} + U_{\text{БВ}})} \right]. \quad (3)$$

На основе выражения (3) составим систему уравнений применительно к нашей сети, представив левую часть в алгебраической форме, а правую оставив без изменения:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{11} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{12} \cdot U_{\Delta 2}^{(j-1)} + Y_{13} \cdot U_{\Delta 3}^{(j-1)} + Y_{14} \cdot U_{\Delta 4}^{(j-1)} + Y_{15} \cdot U_{\Delta 5}^{(j-1)} + Y_{16} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_1}{(U_{\Delta 1}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}, \\ Y_{21} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{22} \cdot U_{\Delta 2}^{(j)} + Y_{23} \cdot U_{\Delta 3}^{(j-1)} + Y_{24} \cdot U_{\Delta 4}^{(j-1)} + Y_{25} \cdot U_{\Delta 5}^{(j-1)} + Y_{26} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_2}{(U_{\Delta 2}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}, \\ Y_{31} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{32} \cdot U_{\Delta 2}^{(j)} + Y_{33} \cdot U_{\Delta 3}^{(j)} + Y_{34} \cdot U_{\Delta 4}^{(j-1)} + Y_{35} \cdot U_{\Delta 5}^{(j-1)} + Y_{36} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_3}{(U_{\Delta 3}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}, \\ Y_{41} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{42} \cdot U_{\Delta 2}^{(j)} + Y_{43} \cdot U_{\Delta 3}^{(j)} + Y_{44} \cdot U_{\Delta 4}^{(j)} + Y_{45} \cdot U_{\Delta 5}^{(j-1)} + Y_{46} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_4}{(U_{\Delta 4}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}, \\ Y_{51} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{52} \cdot U_{\Delta 2}^{(j)} + Y_{53} \cdot U_{\Delta 3}^{(j)} + Y_{54} \cdot U_{\Delta 4}^{(j)} + Y_{55} \cdot U_{\Delta 5}^{(j)} + Y_{56} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_5}{(U_{\Delta 5}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}, \\ Y_{61} \cdot U_{\Delta 1}^{(j)} + Y_{62} \cdot U_{\Delta 2}^{(j)} + Y_{63} \cdot U_{\Delta 3}^{(j)} + Y_{64} \cdot U_{\Delta 4}^{(j)} + Y_{65} \cdot U_{\Delta 5}^{(j)} + Y_{66} \cdot U_{\Delta 6}^{(j-1)} = \frac{P_6}{(U_{\Delta 6}^{(j-1)} + U_{\text{БВ}})}. \end{array} \right.$$

Уравнения системы разрешим относительно диагональных неизвестных $U_{\Delta}^{(i)}$. Для этого все элементы каждого уравнения необходимо перенести вправо, оставив слева лишь произведение, содержащее $U_{\Delta}^{(i)}$, где i – номер уравнения в системе. Затем разделим обе части уравнения на Y_{ji} (диагональные элементы в матрице узловых проводимостей Y_{ij} не могут равняться нулю, следовательно, такое деление возможно), стоящий при $U_{\Delta}^{(i)}$, где i – номер уравнения в системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\Delta 1}^{(i)} = 0 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} - \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} - \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{15}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{16}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_1}{(U_{\Delta 1}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{11}}, \\ U_{\Delta 2}^{(i)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} - \frac{Y_{24}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{25}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{26}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_2}{(U_{\Delta 2}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{22}}, \\ U_{\Delta 3}^{(i)} = -\frac{Y_{31}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{32}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{34}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{35}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{36}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_3}{(U_{\Delta 3}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{33}}, \\ U_{\Delta 4}^{(i)} = -\frac{Y_{41}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{42}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{43}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{45}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{46}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_4}{(U_{\Delta 4}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{44}}, \\ U_{\Delta 5}^{(i)} = -\frac{Y_{51}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{52}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{53}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - \frac{Y_{54}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{56}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_5}{(U_{\Delta 5}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{55}}, \\ U_{\Delta 6}^{(i)} = -\frac{Y_{61}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{62}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{63}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - \frac{Y_{64}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} - \frac{Y_{65}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i)} - 0 + \frac{P_6}{(U_{\Delta 6}^{(i-1)} + U_{\text{БВ}}) \cdot Y_{66}}. \end{array} \right.$$

Для итерационного процесса необходимо выбрать начальное приближение падений напряжений $U_{\Delta}^{(0)}$ и подставить в правую часть данной системы. Получим $U_{\Delta}^{(1)}$, затем подставим его в правую часть, получим $U_{\Delta}^{(2)}$ и т. д. Процесс может вестись по методу простой или ускоренной итерации.

Будем вести итерационный процесс по методу ускоренной итерации, то есть для нахождения k -й переменной в i -й итерации используются переменные $U_{\Delta 1}^{(i)}, U_{\Delta 2}^{(i)}, \dots, U_{\Delta (k-1)}^{(i)}$, вычисленные на этой же i -й итерации и переменные $k + 1, k + 2, \dots, n$, вычисленные на предыдущей $(i - 1)$ -й итерации.

Начальное приближение для первой итерации

$$U_{\Delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Матрица узловых проводимостей

$$Y_y = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,167 & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & 0,148 & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,204 & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,056 \end{bmatrix}, \text{ См.}$$

Зададимся необходимой точностью расчета $\varepsilon = U_{i+1} - U_i \leq 0,04 \text{ кВ}$, где i – номер итерации.

Первая итерация:

$$U_{\Delta 1}^{(1)} = 0 - \frac{Y_y(1,2)}{Y_y(1,1)} \cdot U_{\Delta(2,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(1,3)}{Y_y(1,1)} \cdot U_{\Delta(3,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(1,4)}{Y_y(1,1)} \cdot U_{\Delta(4,1)}^{(0)} - \\ - \frac{Y_y(1,5)}{Y_y(1,1)} \cdot U_{\Delta(5,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(1,6)}{Y_y(1,1)} \cdot U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + \frac{P_{(1,1)}}{\left(U_{\Delta(1,1)}^{(0)} + U_{\text{БУ}} \right) \cdot Y_y(1,1)},$$

$$U_{\Delta 1}^{(1)} = -8,077 \text{ кВ}, \quad U_1^{(1)} = U_{\Delta 1}^{(1)} + U_{\text{БУ}} = 115,673 \text{ кВ},$$

$$U_{\Delta 2}^{(1)} = \frac{Y_y(2,1)}{Y_y(2,2)} \cdot U_{\Delta 1}^{(1)} - 0 - \frac{Y_y(2,3)}{Y_y(2,2)} \cdot U_{\Delta(3,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(2,4)}{Y_y(2,2)} \cdot U_{\Delta(4,1)}^{(0)} -$$

$$- \frac{Y_y(2,5)}{Y_y(2,2)} \cdot U_{\Delta(5,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(2,6)}{Y_y(2,2)} \cdot U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + \frac{R_{2,1}}{\left(U_{\Delta(2,1)}^{(0)} + U_{\text{By}} \right) \cdot Y_y(2,2)},$$

$$U_{\Delta 2}^{(1)} = -7,592 \text{кВ}, \quad U_2^{(1)} = U_{\Delta 2}^{(1)} + U_{\text{By}} = 116,158 \text{кВ},$$

$$U_{\Delta 3}^{(1)} = \frac{Y_y(3,1)}{Y_y(3,3)} \cdot U_{\Delta 1}^{(1)} - \frac{Y_y(3,2)}{Y_y(3,3)} \cdot U_{\Delta 2}^{(1)} - 0 - \frac{Y_y(3,4)}{Y_y(3,3)} \cdot U_{\Delta(4,1)}^{(0)} -$$

$$- \frac{Y_y(3,5)}{Y_y(3,3)} \cdot U_{\Delta(5,1)}^{(0)} - \frac{Y_y(3,6)}{Y_y(3,3)} \cdot U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + \frac{R_{3,1}}{\left(U_{\Delta(3,1)}^{(0)} + U_{\text{By}} \right) \cdot Y_y(3,3)},$$

$$U_{\Delta 3}^{(1)} = -7,436 \text{кВ}, \quad U_3^{(1)} = U_{\Delta 3}^{(1)} + U_{\text{By}} = 116,314 \text{кВ},$$

$$U_{\Delta 4}^{(1)} = \frac{Y_y(4,1)}{Y_y(4,4)} \cdot U_{\Delta 1}^{(1)} - \frac{Y_y(4,2)}{Y_y(4,4)} \cdot U_{\Delta 2}^{(1)} - \frac{Y_y(4,3)}{Y_y(4,4)} \cdot U_{\Delta 3}^{(1)} - 0 - \frac{Y_y(4,5)}{Y_y(4,4)} \cdot U_{\Delta(5,1)}^{(0)} -$$

$$- \frac{Y_y(4,6)}{Y_y(4,4)} \cdot U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + \frac{R_{4,1}}{\left(U_{\Delta(4,1)}^{(0)} + U_{\text{By}} \right) \cdot Y_y(4,4)},$$

$$U_{\Delta 4}^{(1)} = -9,708 \text{кВ}, \quad U_4^{(1)} = U_{\Delta 4}^{(1)} + U_{\text{By}} = 114,042 \text{кВ},$$

$$U_{\Delta 5}^{(1)} = \frac{Y_y(5,1)}{Y_y(5,5)} \cdot U_{\Delta 1}^{(1)} - \frac{Y_y(5,2)}{Y_y(5,5)} \cdot U_{\Delta 2}^{(1)} - \frac{Y_y(5,3)}{Y_y(5,5)} \cdot U_{\Delta 3}^{(1)} -$$

$$- \frac{Y_y(5,4)}{Y_y(5,5)} \cdot U_{\Delta 4}^{(1)} - 0 - \frac{Y_y(5,6)}{Y_y(5,5)} \cdot U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + \frac{R_{5,1}}{\left(U_{\Delta(5,1)}^{(0)} + U_{\text{By}} \right) \cdot Y_y(5,5)},$$

$$U_{\Delta 5}^{(1)} = -9,1 \text{кВ}, \quad U_5^{(1)} = U_{\Delta 5}^{(1)} + U_{\text{By}} = 114,65 \text{кВ},$$

$$U_{\Delta 6}^{(1)} = \frac{Y_y(6,1)}{Y_y(6,6)} \cdot U_{\Delta 1}^{(1)} - \frac{Y_y(6,2)}{Y_y(6,6)} \cdot U_{\Delta 2}^{(1)} - \frac{Y_y(6,3)}{Y_y(6,6)} \cdot U_{\Delta 3}^{(1)} -$$

$$\frac{Y_y(6,4)}{Y_y(6,6)} \cdot U_{\Delta 4}^{(1)} - \frac{Y_y(6,5)}{Y_y(6,6)} \cdot U_{\Delta 5}^{(1)} - 0 + \frac{P_{(6,1)}}{\left(U_{\Delta(6,1)}^{(0)} + U_{BY} \right) \cdot Y_y(6,6)},$$

$$U_{\Delta 6}^{(1)} = -14,655 \text{кВ}, \quad U_6^{(1)} = U_{\Delta 6}^{(1)} + U_{BY} = 109,095 \text{кВ}.$$

$$U_{\Delta}^{(1)} = \begin{bmatrix} -8,077 \\ -7,592 \\ -7,436 \\ -9,708 \\ -9,1 \\ -14,655 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(1)} = \begin{bmatrix} 115,673 \\ 116,158 \\ 116,314 \\ 114,042 \\ 114,65 \\ 109,095 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Принимая во внимание однотипность формул итерационного процесса, будем отображать только рассчитанные значения, а не сами вычисления последующих итераций.

Вторая итерация:

$$U_{\Delta}^{(2)} = \begin{bmatrix} -6,66 \\ -6,788 \\ -6,763 \\ -8,767 \\ -10,07 \\ -15,861 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(2)} = \begin{bmatrix} 117,09 \\ 116,962 \\ 116,987 \\ 114,983 \\ 113,68 \\ 107,889 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad \varepsilon = U^{(2)} - U^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,417 \\ 0,805 \\ 0,673 \\ 0,941 \\ -0,97 \\ -1,206 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Точность расчета не удовлетворяет заданной, поэтому проводим расчет следующей итерации.

Третья итерация:

$$U_{\Delta}^{(3)} = \begin{bmatrix} -6,009 \\ -6,883 \\ -5,941 \\ -8,469 \\ -10,404 \\ -16,26 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(3)} = \begin{bmatrix} 117,741 \\ 116,867 \\ 117,809 \\ 115,281 \\ 113,346 \\ 107,49 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad \varepsilon = U^{(3)} - U^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,858 \\ 0,089 \\ 1,103 \\ 0,59 \\ -0,041 \\ -0,083 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Точность расчета не удовлетворяет заданной, поэтому проводим расчет следующей итерации.

Четвертая итерация:

$$U_{\Delta}^{(4)} = \begin{bmatrix} -5,733 \\ -6,904 \\ -5,664 \\ -8,355 \\ -10,506 \\ -16,384 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(4)} = \begin{bmatrix} 118,017 \\ 116,846 \\ 118,086 \\ 115,395 \\ 113,244 \\ 107,366 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad \varepsilon = U^{(4)} - U^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,276 \\ -0,0208 \\ 0,27743 \\ 0,1137 \\ -0,1021 \\ -0,1239 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Точность расчета не удовлетворяет заданной, поэтому проводим расчет следующей итерации.

Пятая итерация:

$$U_{\Delta}^{(5)} = \begin{bmatrix} -5,633 \\ -6,905 \\ -5,56 \\ -8,307 \\ -10,532 \\ -16,417 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(5)} = \begin{bmatrix} 118,1169 \\ 116,8451 \\ 118,1905 \\ 115,4429 \\ 113,2179 \\ 107,3334 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad \varepsilon = U^{(5)} - U^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,0997 \\ -0,001 \\ 0,1043 \\ 0,0481 \\ -0,0256 \\ -0,0324 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Точность расчета не удовлетворяет заданной, поэтому проводим расчет следующей итерации.

Шестая итерация:

$$U_{\Delta}^{(6)} = \begin{bmatrix} -5,592 \\ -6,9 \\ -5,516 \\ -8,283 \\ -10,533 \\ -16,419 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U^{(6)} = \begin{bmatrix} 118,1577 \\ 116,85 \\ 118,2342 \\ 115,4675 \\ 113,217 \\ 107,3306 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad \varepsilon = U^{(6)} - U^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,005 \\ 0,04 \\ 0,02 \\ -0,001 \\ -0,002 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Точность расчета удовлетворяет заданной. Итерационный процесс окончен.

Построим график сходимости итераций $U = f(K)$, где K – номер итерации (рисунок 2).

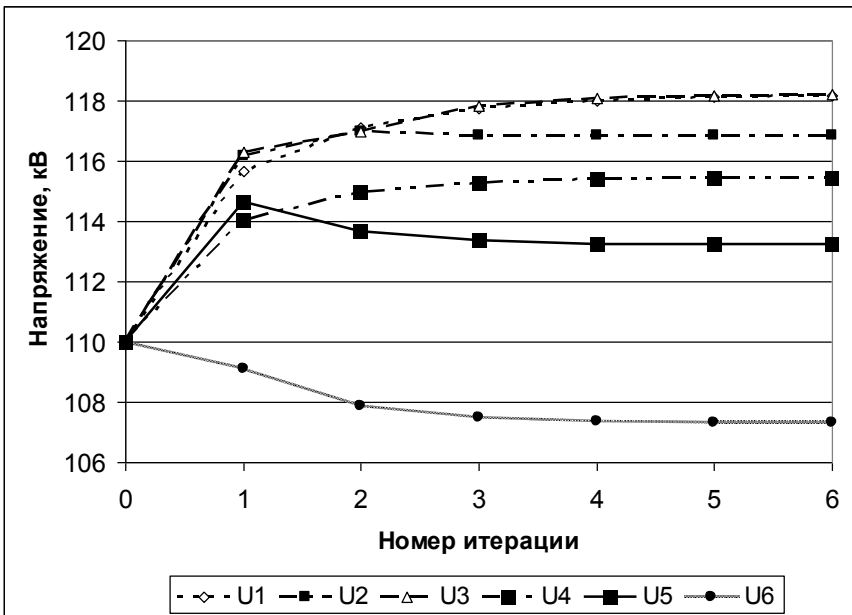


Рисунок 2 – График сходимости итерации

На основе вычисленных напряжений, производим расчет остальных параметров режима сети.

Падение напряжения в узлах относительно балансирующего

$$U_y = U^{(6)}, U_\Delta = U_\Delta^{(6)}.$$

Определяем токи в ветвях схемы:

$$I_B = dY_B \cdot M^T \cdot U_\Delta = \begin{bmatrix} 0,222 \\ 0,383 \\ -0,004 \\ 0,149 \\ 0,202 \\ 0,327 \\ 0,073 \\ 0,125 \\ 0,256 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Определяем падения напряжения в ветвях схемы:

$$\Delta U_B = dZ_B \cdot I_B = \begin{bmatrix} 5,592 \\ 6,9 \\ -0,077 \\ 2,69 \\ 3,633 \\ 5,886 \\ 1,308 \\ 2,251 \\ 2,767 \end{bmatrix}, \text{кВ.}$$

Определяем приближенные значения потоков мощности в ветвях схемы:

$$P_{\mathbf{B}} = I_{\mathbf{B}} \cdot U_{\text{НОМ}} = \begin{bmatrix} 24,411 \\ 42,166 \\ -0,468 \\ 16,44 \\ 22,202 \\ 35,972 \\ 7,991 \\ 13,753 \\ 28,18 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определим потери мощности в ветвях сети:

$$\Delta P_{\mathbf{B}} = \text{diag}(U_{\mathbf{B}}) \cdot M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1,241 \\ 2,645 \\ 0,0003 \\ 0,402 \\ 0,733 \\ 1,925 \\ 0,095 \\ 0,281 \\ 0,709 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определяем суммарные потери мощности в ветвях:

$$m = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$$\Delta P_{\Sigma} = [m] \cdot \Delta P_{\mathbf{B}} = 8,032, \text{ МВт.}$$

Определим токи в узлах схемы:

$$J_{\text{расч}} = M \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} -0,004 \\ -0,254 \\ 0,26 \\ -0,281 \\ 0,0002 \\ -0,327 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Определим мощности в узлах сети:

$$P_{\text{расч}} = \text{diag}(U_{\text{У}}) \cdot J_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} -0,482 \\ -29,695 \\ 30,792 \\ -32,401 \\ 0,017 \\ -35,099 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{МВт.}$$

Рассчитаем небаланс мощности. Как уже говорилось ранее, он не должен превышать 1 %.

$$P_{\text{нб}} = P - P_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0,482 \\ -0,005 \\ 0,258 \\ 0,001 \\ -0,017 \\ -0,001 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P_{\text{нб}} \% = \frac{P_{\text{нб}}}{P} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,016 \\ 0,83 \\ -0,003 \\ 0 \\ 0,003 \end{bmatrix}, \%. .$$

Как видно, небаланс мощности не превышает 1 %. Это свидетельствует о том, что заданная точность итерационного процесса расчета напряжений достигнута.

Расчет режима электрической сети по обращенным узловым уравнениям

Организуем итерационный процесс решения на базе матричного уравнения

$$Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = \vec{J}, \quad (4)$$

где Y_y – матрица узловых проводимостей без учета балансирующего узла;

\vec{U}_Δ – вектор-столбец падений напряжений в узлах сети относительно балансирующего узла;

\vec{J} – вектор-столбец задающих токов (токи содержат свой знак).

Разрешим уравнение относительно падений напряжений:

$$\vec{U}_\Delta = Y_y^{-1} \cdot \vec{J}. \quad (5)$$

Представим \vec{U}_Δ как разность напряжений в узлах \vec{U} и напряжения в балансирующем узле $\vec{U}_{\text{БУ}}$:

$$\vec{U}_\Delta = \vec{U} - \vec{U}_{\text{БУ}}. \quad (6)$$

Приравняем правые части уравнений (5) и (6):

$$\vec{U} - \vec{U}_{\text{БУ}} = Y_y^{-1} \cdot \vec{J}.$$

Выразим вектор-столбец напряжений в узлах:

$$\vec{U} = \vec{U}_{\text{БУ}} + Y_y^{-1} \cdot \vec{J}. \quad (7)$$

Выразим \vec{J} через задающие мощности в узлах и напряжения в узлах схемы:

$$\vec{J} = \left[\begin{array}{c} P_i \\ U_i \end{array} \right]. \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в выражение (7):

$$\vec{U} = \vec{U}_{\text{БУ}} + \gamma_y^{-1} \cdot \left[\frac{P_i}{U_i} \right]. \quad (9)$$

Обратную матрицу γ_y^{-1} обозначим через Z . Она носит название *матрица собственных и взаимных узловых сопротивлений*. Элементы матрицы узловых сопротивлений Z_{ij} представляют собой коэффициенты частичного падения напряжения или коэффициенты влияния тока нагрузки в j -м узле на напряжение в i -м узле:

$$\gamma_y^{-1} = Z. \quad (10)$$

С учетом нового обозначения (10) уравнение узлов напряжения (9) примет вид

$$\vec{U} = \vec{U}_{\text{БУ}} + Z \cdot \left[\frac{P_{ij}}{U_{ij}} \right]. \quad (11)$$

Итерационная процедура определения напряжения по обращенным уравнениям может быть ускорена, если на k -й итерации для расчета i -го неизвестного принимать $U_1^{(k)}$, $U_2^{(k)}$, ..., $U_{(i-1)}^{(k)}$ из этой же k -й итерации, а остальные неизвестные U_{i+1} брать из предыдущей $(k-1)$ -й итерации, то есть вести процесс по методу ускоренной итерации.

Составим систему уравнений для итерационного процесса:

$$\begin{cases} U_1^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{11} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{12} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{13} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{14} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{15} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{16} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}, \\ U_2^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{21} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k)}} + Z_{22} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{23} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{24} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{25} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{26} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}, \\ U_3^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{31} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k)}} + Z_{32} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k)}} + Z_{33} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{34} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{35} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{36} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}, \\ U_4^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{41} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k)}} + Z_{42} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k)}} + Z_{43} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k)}} + Z_{44} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{45} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{46} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}, \\ U_5^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{51} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k)}} + Z_{52} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k)}} + Z_{53} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k)}} + Z_{54} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k)}} + Z_{55} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{56} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}, \\ U_6^{(k)} = U_{\text{БУ}} + Z_{61} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k)}} + Z_{62} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k)}} + Z_{63} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k)}} + Z_{64} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k)}} + Z_{65} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k)}} + Z_{66} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}}. \end{cases}$$

Точность итерационного процесса будет ,

$$U_{i+1} - U_i \leq \varepsilon,$$

где i – номер итерации.

Вычислим обратную матрицу узловых проводимостей $Y_y^{-1} = Z$:

$$Z = Y_y^{-1} = \begin{bmatrix} 13,905 & 8,068 & 13,046 & 12,531 & 10,3 & 10,3 \\ 8,068 & 12,237 & 8,681 & 9,049 & 10,643 & 10,643 \\ 13,046 & 8,681 & 22,463 & 17,313 & 12,997 & 12,997 \\ 12,531 & 9,049 & 17,313 & 20,183 & 14,616 & 14,616 \\ 10,3 & 10,643 & 12,997 & 14,616 & 21,629 & 21,629 \\ 10,3 & 10,643 & 12,997 & 14,616 & 21,629 & 39,629 \end{bmatrix}, \text{ Ом.}$$

Зададимся нулевым приближением узловых напряжений и рассчитаем первую итерацию:

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Первая итерация:

$$U_1^{(1)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(1,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_{(1,1)}^{(0)}} + Z_{(1,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_{(2,1)}^{(0)}} + Z_{(1,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_{(3,1)}^{(0)}} + \\ + Z_{(1,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_{(4,1)}^{(0)}} + Z_{(1,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}} + Z_{(1,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}},$$

$$U_2^{(1)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(2,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(2,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_{(2,1)}^{(0)}} + Z_{(2,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_{(3,1)}^{(0)}} + \\ + Z_{(2,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_{(4,1)}^{(0)}} + Z_{(2,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}} + Z_{(2,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}},$$

$$U_3^{(1)} = U_{\text{БВ}} + Z_{(3,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(3,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(3,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_{(3,1)}^{(0)}} +$$

$$+ Z_{(3,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_{(4,1)}^{(0)}} + Z_{(3,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}} + Z_{(3,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}},$$

$$U_4^{(1)} = U_{\text{БВ}} + Z_{(4,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(4,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(4,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} +$$

$$+ Z_{(4,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_{(4,1)}^{(0)}} + Z_{(4,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}} + Z_{(4,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}},$$

$$U_5^{(1)} = U_{\text{БВ}} + Z_{(5,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(5,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(5,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} +$$

$$+ Z_{(5,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(5,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}} + Z_{(5,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}},$$

$$U_6^{(1)} = U_{\text{БВ}} + Z_{(6,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(6,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(6,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} +$$

$$+ Z_{(6,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(6,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(6,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}}.$$

Узловые напряжения при первом приближении

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} 118,277 \\ 116,835 \\ 118,637 \\ 115,373 \\ 113,44 \\ 107,696 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Сравнивая эти значения с рассчитанными напряжениями в первом приближении по методу узловых уравнений в необращенной (исходной) форме, можно сделать вывод, что данный метод уже в первом приближении значения узловых напряжений дает с очень хорошей точностью.

Вторая итерация:

$$U_1^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(1,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(1)}} + Z_{(1,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(1,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} + \\ + Z_{(1,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(1,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(1,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}} ,$$

$$U_2^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(2,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(2)}} + Z_{(2,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(1)}} + Z_{(2,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} + \\ + Z_{(2,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(2,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(2,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}} ,$$

$$U_3^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(3,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(2)}} + Z_{(3,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(2)}} + Z_{(3,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(1)}} + \\ + Z_{(3,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(3,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(3,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}} ,$$

$$U_4^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(4,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(2)}} + Z_{(4,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(2)}} + Z_{(4,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(2)}} + \\ + Z_{(4,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(1)}} + Z_{(4,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(4,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}} ,$$

$$U_5^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(5,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(2)}} + Z_{(5,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(2)}} + Z_{(5,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(2)}} + \\ + Z_{(5,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(2)}} + Z_{(5,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(1)}} + Z_{(5,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}} ,$$

$$U_6^{(2)} = U_{\text{БУ}} + Z_{(6,1)} \frac{P_{(1,1)}}{U_1^{(2)}} + Z_{(6,2)} \frac{P_{(2,1)}}{U_2^{(2)}} + Z_{(6,3)} \frac{P_{(3,1)}}{U_3^{(2)}} + \\ + Z_{(6,4)} \frac{P_{(4,1)}}{U_4^{(2)}} + Z_{(6,5)} \frac{P_{(5,1)}}{U_5^{(2)}} + Z_{(6,6)} \frac{P_{(6,1)}}{U_6^{(1)}}.$$

Узловые напряжения при втором приближении

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} 118,238 \\ 116,901 \\ 118,325 \\ 115,563 \\ 113,309 \\ 107,443 \end{bmatrix}, \text{ кВ}, \quad \varepsilon = U^{(2)} - U^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,039 \\ 0,066 \\ -0,312 \\ 0,19 \\ -0,13 \\ -0,253 \end{bmatrix}, \text{ кВ}.$$

Точность расчета удовлетворяет заданной. Итерационный процесс окончен.

Построим график хода итерационного процесса $U = f(l)$, где l – номер итерации (рисунок 3).

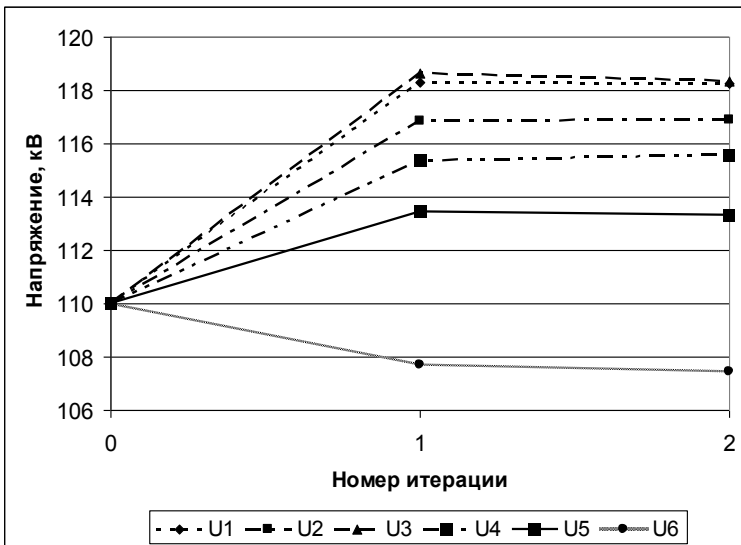


Рисунок 3 – График сходимости итерации

На основе вычисленных напряжений производим расчет остальных параметров режима сети.

Падение напряжения в узлах относительно балансирующего

$$U_y = U^{(2)} = \begin{bmatrix} 118,238 \\ 116,901 \\ 118,325 \\ 115,563 \\ 113,309 \\ 107,443 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U_{\Delta} = U_y - U_{\text{Бу}} \cdot n = \begin{bmatrix} -5,512 \\ -6,849 \\ -5,425 \\ -8,187 \\ -10,441 \\ -16,307 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Определяем токи в ветвях схемы:

$$I_{\text{в}} = dY_{\text{в}} \cdot M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,219 \\ 0,38 \\ -0,005 \\ 0,149 \\ 0,2 \\ 0,326 \\ 0,074 \\ 0,125 \\ 0,256 \end{bmatrix}, \text{кА}.$$

Определяем падения напряжения в ветвях схемы:

$$\Delta U_{\text{в}} = dZ_{\text{в}} \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 5,512 \\ 6,849 \\ -0,088 \\ 2,675 \\ 3,592 \\ 5,867 \\ 1,336 \\ 2,253 \\ 2,763 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Определяем потоки мощности в ветвях схемы:

$$P_{\mathbf{B}} = I_{\mathbf{B}} \cdot U_{\text{НОМ}} = \begin{bmatrix} 24,062 \\ 42,853 \\ -0,537 \\ 16,345 \\ 21,95 \\ 35,851 \\ 8,166 \\ 13,77 \\ 28,138 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определим потери мощности в ветвях сети:

$$\Delta P_{\mathbf{B}} = \text{diag}(I_{\mathbf{B}}) \cdot M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1,206 \\ 2,606 \\ 0,0004 \\ 0,397 \\ 0,717 \\ 1,912 \\ 0,099 \\ 0,282 \\ 0,707 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определяем суммарные потери мощности в ветвях:

$$\Delta P_{\Sigma} = m \cdot \Delta P_{\mathbf{B}} = 7,926 \text{ МВт.}$$

Определим токи в узлах схемы:

$$J_{\text{расч}} = M \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,255 \\ 0,261 \\ -0,279 \\ 0,001 \\ -0,326 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Определим мощности в узлах сети:

$$P_{\text{расч}} = \text{diag}(U_y) \cdot J_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} -0,095 \\ -29,829 \\ 30,845 \\ -32,266 \\ 0,134 \\ -35,017 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{МВт.}$$

Рассчитаем небаланс мощности. Как уже говорилось ранее, он не должен превышать 1 %:

$$P_{\text{нб}} = P - P_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0,095 \\ 0,129 \\ 0,205 \\ -0,134 \\ -0,134 \\ -0,083 \end{bmatrix}, \text{МВт}; \quad P_{\text{нб}} \% = \frac{P_{\text{нб}}}{P} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,434 \\ 0,659 \\ 0,414 \\ 0 \\ 0,235 \end{bmatrix}, \%.$$

Как видно, небаланс мощности не превышает 1 %. Это свидетельствует о том, что заданная точность итерационного процесса достигнута как по напряжению, так и по мощности.

Расчет режима электрической сети методом Ньютона

Итерационный процесс будет базироваться на уравнении

$$Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = \vec{J}, \quad (12)$$

где Y_y – матрица узловых проводимостей без учета балансирующего узла;

\vec{U}_Δ – вектор-столбец падений напряжений относительно балансирующего;

\vec{J} – вектор-столбец задающих токов (токи содержат при себе свой знак).

Распишем \vec{U}_Δ как разность напряжений в узлах \vec{U} и напряжения в балансирующем узле $\vec{U}_{бу}$:

$$\vec{U}_\Delta = \vec{U} - \vec{U}_{бу} \cdot n, \quad (13)$$

где n – единичный вектор.

Выразим \vec{J} через задающие мощности и напряжения в узлах схемы:

$$\vec{J} = \left[\frac{P_i}{U_i} \right]. \quad (14)$$

Подставив (14) и (13) в уравнение (12), получаем

$$Y_y \cdot (\vec{U} - \vec{U}_{бу}) = \left[\frac{P_i}{U_i} \right]. \quad (15)$$

Раскрыв скобки и перенеся все слагаемые в левую часть, в общем виде запишем выражение для i -го узла схемы:

$$\sum_{j=1}^n Y_{ij} \cdot U_j - Y_{i-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} - \frac{P_i}{U_i} = 0,$$

где j – количество узлов в схеме;

i – номер узла в сети.

Составим вектор-функцию небаланса токов в узлах сети $W(U) = 0$:

$$F(U) = \begin{cases} Y_{11}U_1 - \frac{P_1}{U_1} - Y_{1-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} + Y_{12}U_2 + Y_{13}U_3 + Y_{14}U_4 + Y_{15}U_5 + Y_{16}U_6 = 0, \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 - \frac{P_2}{U_2} - Y_{2-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} + Y_{23}U_3 + Y_{24}U_4 + Y_{25}U_5 + Y_{26}U_6 = 0, \\ Y_{31}U_1 + Y_{32}U_2 + Y_{33}U_3 - \frac{P_3}{U_3} - Y_{3-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} + Y_{34}U_4 + Y_{35}U_5 + Y_{36}U_6 = 0, \\ Y_{41}U_1 + Y_{42}U_2 + Y_{43}U_3 + Y_{44}U_4 - \frac{P_4}{U_4} - Y_{4-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} + Y_{45}U_5 + Y_{46}U_6 = 0, \\ Y_{51}U_1 + Y_{52}U_2 + Y_{53}U_3 + Y_{54}U_4 + Y_{55}U_5 - \frac{P_5}{U_5} - Y_{5-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} + Y_{56}U_6 = 0, \\ Y_{61}U_1 + Y_{62}U_2 + Y_{63}U_3 + Y_{64}U_4 + Y_{65}U_5 + Y_{66}U_6 - \frac{P_6}{U_6} - Y_{6-\text{БУ}} \cdot U_{\text{БУ}} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Проводимость между i -м узлом и балансирующим $Y_{i-\text{БУ}}$ можно найти по формуле

$$Y_{i-\text{БУ}} = \sum_{j=1}^n Y_{ij},$$

где n – количество узлов в схеме,

или при вычислении Y_{Σ} через матрицу M_{Σ} в начале расчета.

Составим матрицу Якоби, взяв частные производные по dU_j от каждой i -й строчки системы (16):

$$\frac{\partial F_i(U)}{\partial U_j} = \begin{bmatrix} Y_{11} + \frac{P_1}{U_1^2} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} + \frac{P_2}{U_2^2} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} + \frac{P_3}{U_3^2} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} + \frac{P_4}{U_4^2} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} + \frac{P_5}{U_5^2} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} + \frac{P_6}{U_6^2} \end{bmatrix}$$

Тогда итерационная формула запишется в виде

$$U^{(k)} = U^{(k-1)} + \Delta U^{(k-1)},$$

где $\Delta U^{(k-1)} = - \left[\frac{\partial F_i(U^{(k-1)})}{\partial U_j} \right]^{-1} \cdot F(U^{(k-1)})$ – поправка к вектору

напряжений узлов сети на k -й итерации.

Точность проверяется следующим образом:

$$\|F(U^{(k-1)})\| \leq \varepsilon.$$

Зададимся начальным приближением напряжений в узлах.

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Приведем строку проводимости i -х узлов с балансирующим:

$$Y_{\text{БУ}} = [0,04 \quad 0,056 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \text{ См.}$$

Рассчитаем первую итерацию, по результатам которой получим вектор-функцию небаланса токов в узлах в первом приближении $F(U^{(1)})$, А:

$$F_1^{(1)} = Y_{y(1,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,1)} + Y_{y(1,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{y(1,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} + \\ + Y_{y(1,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{y(1,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{y(1,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(1,1)}}{U_{(1,1)}^{(0)}},$$

$$F_2^{(1)} = Y_{y(2,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,2)} + Y_{y(2,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{y(2,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} \\ + Y_{y(2,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{y(2,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{y(2,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(2,1)}}{U_{(2,1)}^{(0)}},$$

$$F_3^{(1)} = Y_{y(3,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,3)} + Y_{y(3,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{y(3,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} + \\ + Y_{y(3,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{y(3,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{y(3,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(3,1)}}{U_{(3,1)}^{(0)}},$$

$$F_4^{(1)} = Y_{y(4,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,4)} + Y_{y(4,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{y(4,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} + \\ + Y_{y(4,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{y(4,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{y(4,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(4,1)}}{U_{(4,1)}^{(0)}},$$

$$F_5^{(1)} = Y_{y(5,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,5)} + Y_{y(5,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{y(5,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} + \\ + Y_{y(5,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{y(5,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{y(5,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(5,1)}}{U_{(5,1)}^{(0)}},$$

$$F_6^{(1)} = Y_{Y(6,1)} \cdot U_{(1,1)}^{(0)} - U_{\text{БУ}} \cdot Y_{\text{БУ}(1,6)} + Y_{Y(6,2)} \cdot U_{(2,1)}^{(0)} + Y_{Y(6,3)} \cdot U_{(3,1)}^{(0)} +$$

$$+ Y_{Y(6,4)} \cdot U_{(4,1)}^{(0)} + Y_{Y(6,5)} \cdot U_{(5,1)}^{(0)} + Y_{Y(6,6)} \cdot U_{(6,1)}^{(0)} - \frac{P_{(6,1)}}{U_{(6,1)}^{(0)}}.$$

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} -545,635 \\ -493,889 \\ -282,273 \\ 294,545 \\ 0 \\ 319,091 \end{bmatrix}, \text{ А.}$$

Теперь берем частные производные $\frac{\partial F_i(U)}{\partial U_j}$ и вычисляем их значения на текущем приближении напряжений:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_{y(1,1)} + \frac{P_{(1,1)}}{(U_{(1,1)}^{(0)})^2} & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & Y_{y(2,2)} + \frac{P_{(2,1)}}{(U_{(2,1)}^{(0)})^2} & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & Y_{y(3,3)} + \frac{P_{(3,1)}}{(U_{(3,1)}^{(0)})^2} & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & Y_{y(4,4)} + \frac{P_{(4,1)}}{(U_{(4,1)}^{(0)})^2} & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & Y_{y(5,5)} + \frac{P_{(5,1)}}{(U_{(5,1)}^{(0)})^2} & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & Y_{y(6,6)} + \frac{P_{(6,1)}}{(U_{(6,1)}^{(0)})^2} \end{bmatrix} \text{ См}$$

Находим напряжения в первом приближении по формуле

$$U^{(1)} = U^{(0)} - \left(\frac{\partial F_i(U^{(0)})}{\partial U_j} \right)^{-1} \cdot F^{(1)},$$

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,206 & -0,056 & -0,056 & -0,056 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0,164 & 0 & 0 & -0,056 & 0 \\ -0,056 & 0 & 0,151 & -0,093 & 0 & 0 \\ -0,056 & 0 & -0,093 & 0,201 & -0,056 & 0 \\ 0 & -0,056 & 0 & -0,056 & 0,167 & -0,056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,056 & 0,053 \end{bmatrix}, \text{ Ом,}$$

$$\left(U^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 15,472 & 9,613 & 14,827 & 14,712 & 12,718 & 13,526 \\ 9,613 & 13,82 & 10,453 & 11,151 & 13,056 & 13,885 \\ 14,827 & 10,453 & 24,37 & 19,812 & 15,824 & 16,829 \\ 14,712 & 11,151 & 19,812 & 23,249 & 17,985 & 19,128 \\ 12,718 & 13,056 & 15,824 & 17,985 & 25,565 & 27,19 \\ 13,526 & 13,885 & 16,829 & 19,128 & 27,19 & 47,909 \end{bmatrix}, \text{ Ом,}$$

$$\left(U^{(1)}\right)^{-1} \cdot F^{(1)} = \begin{bmatrix} -8,726 \\ -7,307 \\ -8,926 \\ -6,176 \\ -3,881 \\ 1,933 \end{bmatrix}, \text{ кВ,} \quad U^{(1)} = U^{(0)} - \left(U^{(1)}\right)^{-1} \cdot F^{(1)} = \begin{bmatrix} 118,726 \\ 117,307 \\ 118,926 \\ 116,176 \\ 113,881 \\ 108,067 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Аналогично рассчитаем вторую итерацию, по результатам которой получим вектор-функцию небаланса токов в узлах во втором приближении $F^{(2)}$:

$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} 9,959 \\ 6,72 \\ 4,675 \\ 10,118 \\ 5,133 \\ 1,825 \end{bmatrix}, \text{ А.}$$

Уточняем значения диагональных элементов в матрице расчетных производных и получаем обратную матрицу:

$$\left(\mathcal{V}^{(2)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 15,485 & 9,606 & 14,875 & 14,722 & 12,734 & 13,57 \\ 9,606 & 13,79 & 10,468 & 11,138 & 13,048 & 13,904 \\ 14,875 & 10,468 & 24,479 & 19,864 & 15,876 & 16,918 \\ 14,722 & 11,138 & 19,864 & 23,247 & 17,997 & 19,179 \\ 12,734 & 13,048 & 15,876 & 17,997 & 25,596 & 27,276 \\ 13,57 & 13,904 & 16,918 & 19,179 & 27,276 & 48,097 \end{bmatrix}, \text{ Ом.}$$

Найдем напряжения уже второго приближения согласно формуле

$$U^{(2)} = U^{(1)} - \left(\frac{\partial F_i(U^{(1)})}{\partial U_j} \right)^{-1} \cdot F^{(2)}.$$

$$\left(\mathcal{V}^{(2)}\right)^{-1} \cdot F^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,527 \\ 0,442 \\ 0,646 \\ 0,677 \\ 0,652 \\ 0,73 \end{bmatrix}, \text{ кВ, } U^{(2)} = U^{(1)} - \left(\mathcal{V}^{(2)}\right)^{-1} \cdot F^{(2)} = \begin{bmatrix} 118,198 \\ 116,864 \\ 118,28 \\ 115,499 \\ 113,229 \\ 107,338 \end{bmatrix}, \text{ кВ,}$$

$$\varepsilon = U^{(2)} - U^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,527 \\ -0,442 \\ -0,646 \\ -0,677 \\ -0,652 \\ -0,73 \end{bmatrix}, \text{ кВ.}$$

Итерационный процесс окончен, так как выполняется необходимое условие точности.

Как и ожидалось, метод Ньютона дал одну из самых быстрых сходимостей итерационного процесса. Можно смело утверждать, что его основное преимущество – быстрая сходимость, однако он более трудоемок на каждой итерации.

Произведем построение графика сходимости итераций $U = f(l)$ (рисунок 4).

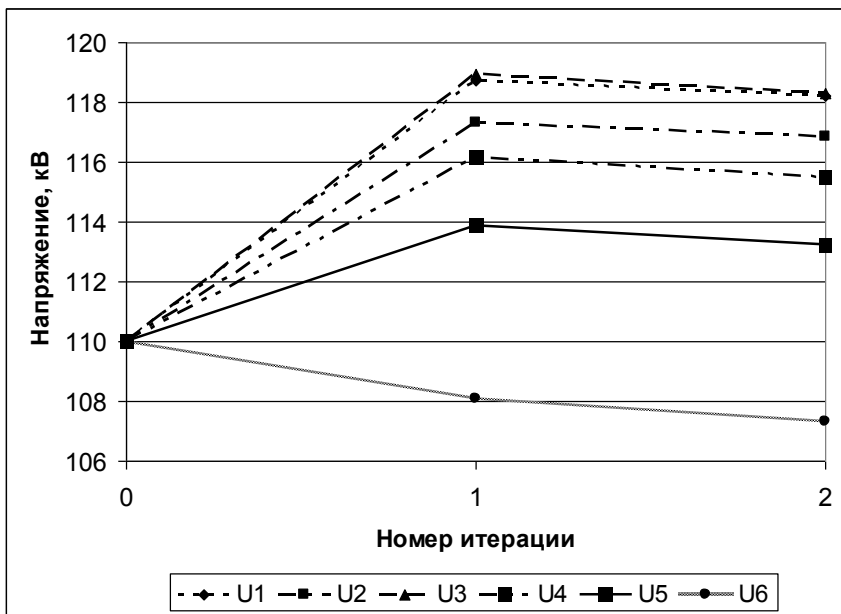


Рисунок 4 – График сходимости итерации

На основе вычисленных напряжений производим расчет остальных параметров режима сети.

Падение напряжения в узлах относительно балансирующего

$$U_y = U^{(2)} = \begin{bmatrix} 118,198 \\ 116,864 \\ 118,28 \\ 115,499 \\ 113,229 \\ 107,338 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U_{\Delta} = U_y - U_{\text{БВ}} \cdot n = \begin{bmatrix} -5,552 \\ -6,886 \\ -5,47 \\ -8,251 \\ -10,521 \\ -16,412 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Определяем токи в ветвях схемы:

$$I_{\text{В}} = dY_{\text{В}} \cdot M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,383 \\ -0,005 \\ 0,15 \\ 0,202 \\ 0,327 \\ 0,074 \\ 0,126 \\ 0,257 \end{bmatrix}, \text{кА}.$$

Определяем падения напряжения в ветвях схемы:

$$\Delta U_{\text{В}} = M^T \cdot U_y = dZ_{\text{В}} \cdot I_{\text{В}} = \begin{bmatrix} 5,552 \\ 6,886 \\ -0,081 \\ 2,699 \\ 3,636 \\ 5,891 \\ 1,334 \\ 2,27 \\ 2,781 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Определяем потоки мощности в ветвях схемы:

$$P_B = I_B \cdot U_{\text{НОМ}} = \begin{bmatrix} 24,234 \\ 42,079 \\ -0,498 \\ 16,495 \\ 22,218 \\ 36,001 \\ 8,151 \\ 13,874 \\ 28,322 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определим потери мощности в ветвях сети:

$$\Delta P_B = \text{diag}(I_B) \cdot M^T \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1,223 \\ 2,634 \\ 0,0004 \\ 0,405 \\ 0,734 \\ 1,928 \\ 0,099 \\ 0,286 \\ 0,716 \end{bmatrix}, \text{ МВт.}$$

Определяем суммарные потери мощности в ветвях:

$$\Delta P_{\Sigma} = m \cdot \Delta P_B = 8,026 \text{ МВт.}$$

Определим токи в узлах схемы:

$$J_{\text{расч}} = M \cdot I_{\text{в}} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,255 \\ 0,262 \\ -0,281 \\ -0,001 \\ -0,327 \end{bmatrix}, \text{кА.}$$

Определим мощности в узлах сети:

$$P_{\text{расч}} = \text{diag}(U_y) \cdot J_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} -0,093 \\ -29,761 \\ 30,989 \\ -32,49 \\ -0,093 \\ -35,13 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix}, \text{МВт}.$$

Рассчитаем небаланс мощности

$$P_{\text{нб}} = P - P_{\text{расч}} = \begin{bmatrix} 0,093 \\ 0,061 \\ 0,061 \\ 0,09 \\ 0,093 \\ 0,03 \end{bmatrix}, \text{МВт}, \quad P_{\text{нб}\%} = \frac{P_{\text{нб}}}{P} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,205 \\ 0,197 \\ -0,277 \\ 0 \\ -0,084 \end{bmatrix}, \%$$

Как видно, небаланс мощности не превышает 1 %. Это свидетельствует о том, что заданная точность итерационного процесса достигнута.

**Расчет утяжеленного режима
с применением матриц обобщенных
параметров электрической сети**

Рассчитаем матрицу коэффициентов распределения C :

$$C = dZ_{\mathbf{B}}^{-1} \cdot M^T \cdot Y_{\mathbf{y}}^{-1},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0,552 & -0,32 & -0,518 & -0,497 & -0,409 & -0,409 \\ -0,448 & -0,68 & -0,482 & -0,503 & -0,591 & -0,591 \\ 0,048 & -0,034 & -0,523 & -0,266 & -0,15 & -0,15 \\ 0,076 & -0,054 & -0,237 & -0,425 & -0,24 & -0,24 \\ -0,124 & 0,089 & -0,24 & -0,309 & -0,61 & -0,61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,324 & -0,232 & 0,243 & 0,193 & -0,019 & -0,019 \\ 0,124 & -0,089 & 0,24 & 0,309 & -0,39 & -0,39 \\ 0,048 & -0,034 & 0,477 & -0,266 & -0,15 & -0,15 \end{bmatrix}.$$

Утяжелим режим работы электрической сети с целью нахождения предела сходимости. Для этого рассчитаем серию режимов с шагом утяжеления по 10 %, то есть увеличим все задающие мощности, а также на 5 % уменьшим напряжение в балансирующем узле.

По результатам расчетов для нескольких коэффициентов утяжеления режимов оказалось, что при увеличении нагрузки в 2,8 раза итерационный процесс перестал сходиться. Это свидетельствует о нарушении статической устойчивости намеченного режима. Уменьшим на 20 % значения задающих мощностей при коэффициенте 2,8. Это и будет ориентировочное значение параметров предельно допустимого режима для данной сети. А предельный режим по сходимости (нормативный запас статической устойчивости режима электрической системы) имеет место при нагрузках

$$P = 2,8 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -83,16 \\ 86,94 \\ -90,72 \\ 0 \\ -98,28 \end{bmatrix}, \text{ МВт}; \quad P_{\text{пред}} = 0,8 \cdot 2,8 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -29,7 \\ 31,05 \\ -32,4 \\ 0 \\ -35,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -66,53 \\ 69,55 \\ -72,58 \\ 0 \\ -78,62 \end{bmatrix}, \text{ МВт}.$$

Покажем промежуточные вычисления для расходящегося режима с коэффициентом утяжеления 2,8.

Рассчитаем задающие токи в узлах:

$$J_y^{(1)} = \frac{P}{0,95 \cdot U_{\text{ном}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,796 \\ 0,832 \\ -0,868 \\ 0 \\ -0,94 \end{bmatrix}, \text{ кА}.$$

Токи в ветвях в первом приближении:

$$I_{\text{в}}^{(1)} = C \cdot J_y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,64 \\ 1,132 \\ -0,037 \\ 0,441 \\ 0,573 \\ 0,94 \\ 0,236 \\ 0,368 \\ 0,795 \end{bmatrix}, \text{ кА}.$$

Рассчитываем падения напряжения в ветвях сети, в узлах сети, а также задающие мощности в узлах сети:

$$\Delta U_{\mathbf{B}}^{(1)} = dZ_{\mathbf{B}} \cdot I_{\mathbf{B}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 16,132 \\ 20,381 \\ -0,658 \\ 7,932 \\ 10,306 \\ 16,929 \\ 4,249 \\ 6,623 \\ 8,59 \end{bmatrix}, \text{ кВ}, \quad I_{\mathbf{B}\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,64 \\ 1,132 \\ -0,037 \\ 0,441 \\ 0,573 \\ 0,94 \end{bmatrix}, \text{ кА},$$

$$\Delta U_{\mathbf{B}\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} 16,132 \\ 20,381 \\ -0,658 \\ 7,932 \\ 10,306 \\ 16,929 \end{bmatrix}, \text{ кВ}, \quad U_{\Delta}^{(1)} = (M_{\alpha}^T)^{-1} \cdot \Delta U_{\mathbf{B}\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} -16,132 \\ -20,381 \\ -15,474 \\ -24,064 \\ -30,687 \\ -47,615 \end{bmatrix}, \text{ кВ},$$

$$U_{\mathbf{y}}^{(1)} = U_{\Delta}^{(1)} + U_{\text{Бу}} \cdot n = \begin{bmatrix} 107,618 \\ 103,369 \\ 108,276 \\ 99,686 \\ 93,063 \\ 76,135 \end{bmatrix}, \text{ кВ},$$

$$P_{\text{расч}}^{(1)} = \text{diag}(U_{\mathbf{y}}^{(1)}) \cdot J_{\mathbf{y}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -82,26 \\ 90,08 \\ -86,54 \\ 0 \\ -71,6 \end{bmatrix}, \text{ МВт}.$$

Точность расчета

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{расч}}^{(1)} - P}{P} 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,08 \\ 3,61 \\ -4,61 \\ 0 \\ -27,14 \end{bmatrix}, \%$$

Рассчитываем токи в узлах и токи в ветвях во втором приближении:

$$J_y^{(2)} = \frac{P}{U_y^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,804 \\ 0,803 \\ -0,91 \\ 0 \\ -1,291 \end{bmatrix}, \text{кА}, \quad I_B^{(2)} = C \cdot J_y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,822 \\ 1,38 \\ 0,043 \\ 0,55 \\ 0,806 \\ 1,291 \\ 0,23 \\ 0,485 \\ 0,846 \end{bmatrix}, \text{кА}.$$

Рассчитываем падения напряжения в ветвях сети, напряжения в узлах сети и задающие мощности:

$$\Delta U_B^{(2)} = dZ_B \cdot I_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 20,715 \\ 24,848 \\ 0,766 \\ 9,898 \\ 14,5 \\ 23,236 \\ 4,133 \\ 8,736 \\ 9,131 \end{bmatrix}, \text{кВ}; \quad I_{B\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,822 \\ 1,38 \\ 0,043 \\ 0,55 \\ 0,806 \\ 1,291 \end{bmatrix}, \text{кА};$$

$$\Delta U_{\text{в}\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} 20,715 \\ 24,848 \\ 0,766 \\ 9,898 \\ 14,5 \\ 23,236 \end{bmatrix}, \text{кВ}, \quad U_{\Delta}^{(2)} = (M_{\alpha}^T)^{-1} \cdot \Delta U_{\text{в}\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} -20,715 \\ -24,848 \\ -21,481 \\ -30,613 \\ -39,348 \\ -62,584 \end{bmatrix}, \text{кВ};$$

$$U_y^{(2)} = U_{\Delta}^{(2)} + U_{\text{Б}y} \cdot n = \begin{bmatrix} 103,035 \\ 98,902 \\ 102,269 \\ 93,137 \\ 84,402 \\ 61,166 \end{bmatrix}, \text{кВ};$$

$$P_{\text{расч}}^{(2)} = \text{diag}(U_y^{(2)}) \cdot J_y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -79,57 \\ 82,12 \\ -84,76 \\ 0 \\ -78,96 \end{bmatrix}, \text{МВт.}$$

Точность расчета

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{расч}}^{(2)} - P}{P} 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,32 \\ -5,55 \\ -6,57 \\ 0 \\ -19,66 \end{bmatrix}, \%$$

Находим токи в ветвях в третьем приближении:

$$J_y^{(3)} = \frac{P}{U_y^{(2)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,841 \\ 0,85 \\ -0,974 \\ 0 \\ -1,607 \end{bmatrix}, \text{кА};$$

$$I_B^{(3)} = C \cdot J_y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,97 \\ 1,601 \\ 0,083 \\ 0,644 \\ 1,004 \\ 1,607 \\ 0,243 \\ 0,603 \\ 0,934 \end{bmatrix}, \text{кА}.$$

Рассчитываем падения напряжения в ветвях сети, напряжения в узлах сети:

$$\Delta U_B^{(3)} = dZ_B \cdot I_B^{(3)} = \begin{bmatrix} 24,449 \\ 28,824 \\ 1,502 \\ 11,585 \\ 18,065 \\ 28,922 \\ 4,376 \\ 10,856 \\ 10,083 \end{bmatrix}, \text{кВ};$$

$$I_{B\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,97 \\ 1,601 \\ 0,083 \\ 0,644 \\ 1,004 \\ 1,607 \end{bmatrix}, \text{кА}; \quad \Delta U_{B\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} 24,449 \\ 28,824 \\ 1,502 \\ 11,585 \\ 18,065 \\ 28,922 \end{bmatrix}, \text{кВ};$$

$$U_{\Delta}^{(3)} = (M_{\alpha}^T)^{-1} \cdot \Delta U_{B\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} -24,449 \\ -28,824 \\ -25,951 \\ -36,033 \\ -46,89 \\ -75,812 \end{bmatrix}, \text{кВ};$$

$$U_y^{(3)} = U_{\Delta}^{(3)} + U_{BY} \cdot n = \begin{bmatrix} 99,301 \\ 94,926 \\ 97,799 \\ 87,717 \\ 76,86 \\ 47,938 \end{bmatrix}, \text{кВ}.$$

Рассчитываем мощности в узлах сети:

$$P_{\text{расч}}^{(3)} = \text{diag}(U_y^{(3)}) \cdot J_y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -79,82 \\ 83,14 \\ -85,44 \\ 0 \\ -77,03 \end{bmatrix}, \text{МВт}.$$

Вычисляем небалансы мощности в узлах:

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{расч}}^{(3)} - P}{P} 100\% = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,02 \\ -4,37 \\ -5,82 \\ 0 \\ -21,62 \end{bmatrix}, \%$$

Как видно из расчетов, режим расходится, так как небалансы мощности в узлах увеличиваются.

Далее вычерчиваются схемы электрической сети с результатами расчета режимов и производится анализ результатов расчёта режимов.

Литература

1. Электрические системы: в 7 т. / под ред. В.А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1970. – Т. 1: Математические задачи электроэнергетики – 334 с.
2. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: учебник для студентов вузов / под ред. В.А. Веникова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981 – 288 с., ил.
3. Электрические системы. Электрические сети / под ред. В.А. Веникова, В.А. Строева. – М.: Высшая школа, 1998. – 510 с.
4. Идельчик, В.И. Электрические системы и сети / В.И. Идельчик. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
5. Электрические системы: Режимы работы электрических сетей и систем / под ред. В.А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1975. – 344 с.
6. Электрические системы: в 7 т./ под ред. В.А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1971. – Т. 3: Электрические сети. – 330 с.
7. Идельчик, В.И. Расчеты и оптимизация режимов электрических систем и сетей / В.И. Идельчик. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 287 с.
8. Гурский, С.К. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в энергетике / С.К. Гурский. – Минск: Наука и техника, 1977. – 368 с.
9. Максимович, Н.Г. Линейные электрические цепи и их преобразования / Н.Г. Максимович. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 264 с.
10. Расчет и анализ режимов работы сетей / под ред. В.А. Веникова. – М.: Энергия, 1974.
11. Герасименко, А.А. Передача и распределение электрической энергии: учебное пособие / А.А. Герасименко, В.Т. Федин. – Красноярск: ИПЦ КГТУ; Минск: БНТУ, 2006. – 808 с.
12. Демидович, И.А. Основы вычислительной математики / И.А. Демидович, Б.П. Марон. – М.: Физматгиз, 1964. – 510 с.
13. Фадеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеева. – М.: Физматиздат, 1963. – 743 с.
14. Электроэнергетические системы и сети. Терминологический словарь: методическое пособие / В.Т. Федин [и др.]. – Минск: БНТУ, 2007.
15. Мельников, Н.А. Электрические сети и системы / Н.А. Мельников. – М.: Энергия, 1978.
16. Солдаткина, Л.А. Электрические сети и системы / Л.А. Солдаткина. – М.: Энергия, 1978.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрицы и их преобразования

Определения. *Матрицей* называется прямоугольная таблица величин, записанных в определенной последовательности; эти величины называются *элементами матрицы*. Такая таблица записывается в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix},$$

где p – число строк матрицы;

s – число ее столбцов.

Запись группы величин в виде матрицы не предусматривает выполнения каких-либо действий над ними. Это лишь форма упорядоченной записи данных величин в виде условной таблицы. Строгий порядок записи дает возможность оперировать сразу со всей таблицей, обозначаемой одним символом. Так, приведенную выше матрицу можно обозначить символом A и записать сокращенно в виде

$$A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, s,$$

где i – номер строки;

j – номер столбца.

Две матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы. Если число строк матрицы не равно числу ее столбцов ($p \neq s$), то такая матрица называется *прямоугольной размером* $p \times s$.

Если числа строк и столбцов матрицы одинаковы ($p = s$), то матрица называется *квадратной порядка* p . Матрица, состоящая из одной строки ($p = 1, s > 1$), называется *строкой*; матрица, состоящая из одного столбца ($s = 1, p > 1$), – *столбцом*; матрица $A = (a)$, состоящая из одной величины ($p = s = 1$), отождествляется с этой величиной.

Переставив в матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

размером $p \times s$ строки со столбцами, получим транспонированную матрицу размером $s \times p$:

$$A_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что для строки транспонированной матрицей является столбец, а для столбца – строка.

Квадратная матрица A равна транспонированной A_t , если она *симметрична*, то есть если $a_{ij} = a_{ji}$. Частным случаем симметричной матрицы является *диагональная*, у которой отличны от нуля лишь элементы, расположенные на диагонали. Диагональная матрица порядка p

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{bmatrix}$$

сокращенно записывается как

$$A = \text{diag}(a_i), \quad i=1, 2, \dots, p.$$

Если все элементы a_i – диагональной матрицы равны единице, то есть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (\Delta_{ij}),$$

где Δ_{ij} – символ Кронекера ($\Delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\Delta_{ij} = 1$ при $i = j$), то такая матрица называется *единичной* и обозначается символом 1 . Столбец, все элементы которого равны единице, называется *единичным столбцом* и обозначается n . Транспонированный единичный столбец есть единичная строка n_i .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом 0 .

Определителем квадратной матрицы A называется определитель, элементы которого равны элементам матрицы; он обозначается символом $|A|$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *неособенной* (или невырожденной), если ее определитель отличен от нуля; в противном случае матрица называется *особенной*.

Умножение матриц на число и сложение матриц. *Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α* называется матрица, элементы которой получены из элементов матрицы A умножением на число α :

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1s} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha a_{p1} & \alpha a_{p2} & \dots & \alpha a_{ps} \end{bmatrix}.$$

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, имеющих одинаковое число строк и столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$).

Умножение матриц. Умножение матриц A и B производится только в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . При этом элементы матрицы-произведения $C = A \times B$ вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} i -й строки j -го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B . При

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, s;$$

$$B = (b_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, q;$$

получим $C = A \times B = (c_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, q$, причем

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^s a_{il} b_{lj}.$$

Очевидно, что произведение двух прямоугольных матриц есть прямоугольная матрица, число строк которой равно числу строк первой матрицы-сомножителя, а число столбцов – числу столбцов второй матрицы сомножителя.

Произведение двух матриц не обладает свойством коммутативности, то есть $A \times B \neq B \times A$. Даже сама постановка вопроса об этом равенстве имеет смысл только для квадратных матриц A и B одинакового порядка. Действительно, матрицы $A \times B$ и $B \times A$ одновременно имеют смысл только в том случае, если число строк первой матрицы равно числу столбцов второй, а число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. При выполнении этих условий матрицы $A \times B$ и $B \times A$ будут квадратными, но разных порядков, если A и B – не квадратные. Но даже и для квадратных матриц одинакового порядка в общем случае $A \times B \neq B \times A$.

В отдельных случаях умножение двух матриц может быть коммутативно. При этом матрицы-сомножители называются *перестановочными*. Так, единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка и играет среди квадратных матриц такую же роль, как и единица среди чисел, то есть

$$1 \times A = A \times 1 = A.$$

Из определения операции умножения матриц следует, что транспонированная матрица-произведение равна произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке:

$$(A \times B)_t = B_t \times A_t.$$

Обращение матриц. Для квадратной неособенной матрицы A определена операция ее обращения, то есть нахождения обратной матрицы A^{-1} . Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1.$$

Элементы обратной матрицы $A^{-1} = B = (b_{ij})$ вычисляются по формуле

$$b_{ij} = A_{ji} / |A|,$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} в определителе матрицы A .

Обратная матрица произведения двух квадратных матриц равна произведению обратных матриц сомножителей, взятому в обратном порядке:

$$(A \times C)^{-1} = C^{-1} \times A^{-1}.$$

Кроме того, транспонированная обратная матрица равна обратной транспонированной матрице:

$$(A^{-1})_t = (A_t)^{-1}.$$

Обращение матрицы при помощи разбиения на блоки. Обратную матрицу $B = A^{-1}$ можно получить, решив систему матричных уравнений $AB = 1$ при представлении матриц в блочной форме,

то есть при разделении обращаемой матрицы на несколько матриц меньшего порядка (блоков). Разбиение исходной матрицы A на блоки осуществляется тем или иным образом в соответствии с ее конкретной структурой.

Рассмотрим наиболее часто применяемый случай разбиения матрицы на четыре блока таким образом, что диагональные блоки являются квадратными и неособенными. Тогда получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{П1})$$

где блоки матрицы B имеют те же размеры, что и соответствующие блоки матрицы A .

Пусть порядок исходной матрицы A равен p , а порядки ее квадратных диагональных блоков A_{11} и A_{22} равны соответственно q и r ($p = q + r$). Тогда блоки A_{12} и A_{21} в общем случае ($q \neq r$) будут прямоугольными размеров $q \times r$ и $r \times q$ соответственно.

В соответствии с правилами умножения блочных матриц выражение (П1) представим в виде четырех матричных уравнений:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = 1; \quad (\text{П2})$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0; \quad (\text{П3})$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0; \quad (\text{П4})$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 1. \quad (\text{П5})$$

Разрешая полученную систему (П2) – (П5) относительно блоков матрицы B , получим искомую матрицу A^{-1} . При этом обращение матрицы A порядка p в общем случае сводится к обращению матриц порядков q и r и к выполнению операций сложения и умножения блоков матрицы A . Поскольку операция обращения матриц является

наиболее трудоемкой, вычислительную схему целесообразно строить таким образом, чтобы количество обрабатываемых матриц было минимальным (для рассматриваемой задачи – два). В данном случае возможны две таких схемы решения, одна из которых строится следующим образом.

Умножая (П4) на $A_{12}A_{22}^{-1}$ слева, получим

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} + A_{12}B_{21} = 0,$$

откуда

$$A_{12}B_{21} = -A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}.$$

Подставим полученное выражение в (П2):

$$A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = 1,$$

откуда

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}.$$

Полученный результат подставим в (П4) и разрешим это уравнение относительно B_{21} :

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}.$$

Умножая (П5) слева на $A_{12}A_{22}^{-1}$, получим

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} + A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1}$$

или

$$A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}A_{21}B_{12}.$$

Полученный результат подставим в (П2):

$$A_1 B_{12} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} B_{12} = -A_2 A_{22}^{-1},$$

откуда

$$B_{12} = -\left(A_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)^{-1} A_2 A_{22}^{-1} = -B_{11} A_2 A_{22}^{-1}.$$

Подставив B_{12} в (П5), определим

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} B_{12} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)^{-1} A_2 A_{22}^{-1}.$$

Таким образом, блоки матрицы B вычисляются в соответствии с выражениями

$$B_{11} = \left(A_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)^{-1};$$

$$B_{12} = -B_{11} A_2 A_{22}^{-1};$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21} B_{11};$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} B_{12}.$$

Расчет по этим выражениям требует обращения двух матриц: A_{22} и $\left(A_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)$.

Аналогично можно построить и вторую схему определения блоков матрицы B , которая базируется на обращении матриц A_{11} и $\left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}\right)$. Согласно этой схеме

$$B_{22} = \left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}\right)^{-1};$$

$$B_{21} = -B_{22} A_{21} A_{11}^{-1};$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22};$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{12} B_{21}.$$

Собственные значения матрицы. *Собственными значениями* квадратной матрицы A порядка n называются корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda \cdot 1| = 0,$$

то есть уравнения

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения матрицы с вещественными элементами могут быть либо вещественными, либо комплексно-сопряженными числами.

Квадратичная форма и положительно-определенная матрица. *Квадратичная форма* – это однородный полином второй степени от нескольких переменных:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Здесь A – симметричная квадратная матрица порядка n , называемая *матрицей квадратичной формы*; x – столбец того же порядка.

Квадратичная форма называется *вещественной*, если элементы A – вещественные числа.

Вещественная квадратичная форма называется *положительно-определенной*, если она положительна при любых значениях $x_i, i=1, 2, \dots, n$, не все из которых равны нулю. Вещественная сим-

метричная матрица называется *положительно-определенной*, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена. Примером положительно-определенной матрицы может служить диагональная матрица с положительными элементами (в частности, единичная матрица). Если G – положительно-определенная матрица, а A – произвольная квадратная неособенная матрица того же порядка, что и G , то матрица A_1GA – также положительно-определенная. В частности, при $G = 1$ получаем, что матрица $A_1A = A_1A$ – положительно-определенная.

Учебное издание

ШИМАНСКАЯ-СЕМЕНОВА Татьяна Алексеевна

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА РЕЖИМОВ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Методическое пособие по выполнению курсовой работы
и изучению дисциплины «Математические модели
в энергетике» для студентов специальности
1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети»

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Д.К. Измайлович

Подписано в печать 01.11.2010.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 9,18. Уч.-изд. л. 7,18. Тираж 200. Заказ 972.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.