Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

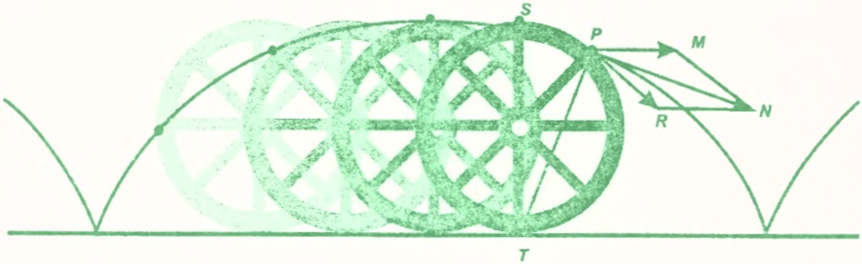
Кафедра инженерной математики

Н.С. Попейко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

Часть 1



Минск
БНТУ
2011

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

Н.С. Попейко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебно-методический комплекс
для студентов-заочников первого курса
экономических специальностей**

В 2 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(075.4)
~~ББК 22.1я7~~
П57

Рецензент *Н.П. Воронова*

Попейко, Н.С.
П57 Высшая математика: учебно-методический комплекс для студентов-заочников первого курса экономических специальностей: в 2 ч. / Н.С. Попейко. – Минск: БНТУ, 2011. – Ч. 1. – 123 с.

ISBN 978-985-525-473-8 (Ч. 1).

Учебно-методический комплекс состоит из двух частей. Первая содержит материалы к тестированию и экзамену по темам: «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальные исчисления функций одной переменной», «Функции нескольких переменных».

Также учебно-методический комплекс содержит правила оформления контрольной работы, экзаменационные вопросы, теоретический материал, варианты заданий к контрольной работе № 1, примеры решения задач, тест.

Комплекс может быть полезен как при самостоятельном изучении математики, так и на занятиях в вузе.

Во вторую часть войдут материалы по темам: «неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения», «Ряды».

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-473-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-525-474-5

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов:

– изучение материала по учебникам, изданным, либо в электронном виде;

– решение задач;

– ответы на вопросы для самопроверки;

– выполнение контрольных работ.

В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы; создаются учебно-методические комплексы по изучаемым дисциплинам. Кроме этого, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей дисциплины «Высшая математика» является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Изучение теоретического материала

1. Изучая теоретический материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в пособии) и вычерчивая имеющиеся в пособии чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий дисциплины, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по пособию полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение пособия должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности сопровождаться в общем виде выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения дисциплины студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела дисциплины; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется уровень усвоения всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания в решении практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по пособию и конспекту.

2. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

2.1. Вопросы к экзамену

1. Матрицы, действия над ними.
2. Определители и их свойства.
3. Методы решения ЛСАУ:
   а) формулы Крамера;
   б) матричный метод;
   в) метод Гаусса.
4. Ранг матрицы; критерий совместимости ЛСАУ.
5. Решение однородных систем.
6. Векторы, линейные операции над ними в координатной форме.
7. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, вычисление, свойства.
8. Виды уравнений прямой на плоскости.
9. Виды уравнений плоскости в пространстве.
10. Виды уравнений прямой в пространстве.
11. Условия параллельности и перпендикулярности:
    а) прямых;
    б) плоскостей;
    в) прямой и плоскости.
12. Предел последовательности.
13. Предел функции в точке.
14. Теоремы о пределах.
15. Замечательные пределы.
16. Сравнение бесконечно малых величин.
17. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Условия непрерывности.
18. Классификация точек разрыва.
19. Определение производной; таблица производных (с доказательством всех формул).
20. Правила дифференцирования.
21. Дифференцирование сложной, обратной, неявной, параметрически заданной функции.
22. Дифференциал, его приложения.

23. Повторное дифференцирование явных, неявных, параметрически заданных функций.

24. Приложение первой производной к исследованию поведения функций.

25. Приложение второй производной к исследованию поведения функций.

26. Функции нескольких переменных, область определения.

27. Частные производные и полный дифференциал.

28. Повторное дифференцирование ФНП.

29. Экстремум функции нескольких переменных.

2.2. Рекомендуемая литература

1. Жевняк, Р.М. Высшая математика: в 5 ч. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск, 1998.
2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1980.
3. Элементы линейной алгебры / под общ. ред. Р.Ф. Апатенок. – Минск, 1977.
4. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемешев. – М., 1980.
5. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1984.
6. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1985.
7. Пискунов, И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / В.С. Пискунов. – М., 1985.
8. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М., 2003.
9. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск, 2000.
10. Балашевич, В.А. Основы математического программирования / В.А. Балашевич. – Минск, 1985.
11. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М., 1993.

12. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М., 1986.

13. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М., 1981.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск, Вышэйшая школа, 1991.

15. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М: Высшая школа, 2003.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

3.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

3.2. Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76 - 2 \cdot 30 = 16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

3.3. Контрольная работа № 1
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задание 1.1

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36, \\ x_1-4x_2-2x_3=-19. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=-11, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ x_1+2x_2+4x_3=16. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=9, \\ 5x_1+2x_2+2x_3=11, \\ x_1+2x_2+4x_3=19. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3=4, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3=12, \\ 2x_1+x_2+3x_3=16, \\ 3x_1+2x_2+x_3=+8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1-x_2=-6, \\ x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ x_1+3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9, \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2, \\ 3x_2-7x_3=-6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=-10. \end{cases}$

Задание 1.2

Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 8x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1-6x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 2x_1-4x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2-4x_3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 5x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-x_3=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-8x_3=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-6x_2+x_3=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-2x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+5x_3=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=0, \\ 8x_1-x_2+7x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+2x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=0, \\ 5x_1-8x_2-2x_3=0, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-4x_3=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7x_1-6x_2+x_3=0, \\ 4x_1+5x_2=0, \\ 3x_1-11x_2+x_3=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1-4x_2+2x_3=0, \\ 3x_2-x_3=0, \\ 5x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1+6x_2-4x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 5x_1+5x_2-3x_3=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 8x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=0, \\ 7x_1-4x_2-4x_3=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+7x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3=0, \\ 4x_1+2x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Задание 1.3

По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:
а) модуль вектора a;
б) скалярное произведение векторов a и b;
в) проекцию вектора c на вектор d;
г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

1. $A\ (4;\ 6;\ 3)$, $B\ (-5;\ 2;\ 6)$, $C\ (4;\ -4;\ -3)$, $a = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{CB}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 5$, $\beta = 4$.

2. $A\ (4;\ 3;\ -2)$, $B\ (-3;\ -1;\ 4)$, $C\ (2;\ 2;\ 1)$, $a = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

3. $A\ (-2;\ -2;\ 4)$, $B\ (1;\ 3;\ -2)$, $C\ (1;\ 4;\ 2)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$, $b = \overrightarrow{BC}$, $c = \overrightarrow{BC}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

4. $A\ (2;\ 4;\ 3)$, $B\ (3;\ 1;\ -4)$, $C\ (-1;\ 2;\ 2)$, $a = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{BA}$, $c = b$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

5. $A\ (2;\ 4;\ 5)$, $B\ (1;\ -2;\ 3)$, $C\ (-1;\ -2;\ 4)$, $a = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{BC}$, $c = b$, $d = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

6. $A\ (-1;\ -2;\ 4)$, $B\ (-1;\ 3;\ 5)$, $C\ (1;\ 4;\ 2)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, $c = b = \overrightarrow{AB}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 1$, $\beta = 7$.

7. $A\ (1;\ 3;\ 2)$, $B\ (2;\ 4;\ 1)$, $C\ (1;\ 3;\ 2)$, $a = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $B = \overrightarrow{AC}$, $c = b$, $d = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

8. $A\ (2;\ -4;\ 3)$, $B\ (-3;\ -2;\ 4)$, $C\ (0;\ 0;\ -2)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$, $b = c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{CB}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

9. $A\ (3;\ 4;\ -4)$, $B\ (-2;\ 1;\ 2)$, $C\ (2;\ -3;\ 1)$, $a = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $b = c = \overrightarrow{BA}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

10. $A\ (0;\ 2;\ 5)$, $B\ (2;\ -3;\ 4)$, $C\ (3;\ 2;\ -5)$, $a = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $b = c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{AB}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

11. $A\ (-2;\ -3;\ -4)$, $B\ (2;\ -4;\ 0)$, $C\ (1;\ 4;\ 5)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, $b = c = \overrightarrow{AB}$, $d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

12. $A\ (-2;\ -3;\ -2)$, $B\ (1;\ 4;\ 2)$, $C\ (1;\ -3;\ 3)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, $b = c = \overrightarrow{AB}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

13. $A\ (5;\ 6;\ 1)$, $B\ (-2;\ 4;\ -1)$, $C\ (3;\ -3;\ 3)$, $a = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $b = c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

14. $A\ (10;\ 6;\ 3)$, $B\ (-2;\ 4;\ 5)$, $C\ (3;\ -4;\ -6)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$, $b = c = \overrightarrow{BA}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

15. $A\ (3;\ 2;\ 4)$, $B\ (-2;\ 1;\ 3)$, $C\ (2;\ -2;\ -1)$, $a = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

16. $A\ (-2;\ 3;\ -4)$, $B\ (3;\ -1;\ 2)$, $C\ (4;\ 2;\ 4)$, $a = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $b = c = \overrightarrow{AB}$, $d = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

17. $A\ (4;\ 5;\ 3)$, $B\ (-4;\ 2;\ 3)$, $C\ (5;\ -6;\ -2)$, $a = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, $b = c = \overrightarrow{AC}$, $d = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$.

18. $A\ (2;\ 4;\ 6)$, $B\ (-3;\ 5;\ 1)$, $C\ (4;\ -5;\ -4)$, $a = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$, $b = c = \overrightarrow{CA}$, $d = \overrightarrow{BA}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

19. $A\,(-4; -2; -5)$, $B\,(3; 7; 2)$, $C\,(4; 6; -3)$, $a = \vec{BA} + \vec{BC}$, $b = c = \vec{AC}$, $d = \vec{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$.

20. $A\,(5; 4; 4)$, $B\,(-5; 2; 3)$, $C\,(4; 2; -5)$, $a = \vec{AC} - \vec{AB}$, $b = \vec{BC}$, $c = \vec{AB}$, $d = \vec{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

21. $A\,(3; 4; 6)$, $B\,(-4; 6; 4)$, $C\,(5; -2; -3)$, $a = \vec{BC} + \vec{CA}$, $b = \vec{BA}$, $c = \vec{CA}$, $d = \vec{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

22. $A\,(-5; -2; -6)$, $B\,(3; 4; 5)$, $C\,(2; -5; 4)$, $a = \vec{AC} - \vec{BC}$, $b = c = \vec{AB}$, $d = \vec{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

23. $A\,(3; 4; 1)$, $B\,(5; -2; 6)$, $C\,(4; 2; -7)$, $a = \vec{AC} + \vec{AB}$, $b = c = \vec{BC}$, $d = \vec{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

24. $A\,(4; 3; 2)$, $B\,(-4; -3; 5)$, $C\,(6; 4; -3)$, $a = \vec{AC} - \vec{BC}$, $b = c = \vec{BA}$, $d = \vec{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

25. $A\,(-5; 4; 3)$, $B\,(4; 5; 2)$, $C\,(2; 7; -4)$, $a = \vec{BC} + \vec{AB}$, $b = c = \vec{CA}$, $d = \vec{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

26. $A\,(6; 4; 5)$, $B\,(-7; 1; 8)$, $C\,(2; -2; -7)$, $a = \vec{CB} - \vec{AC}$, $b = \vec{AB}$, $c = \vec{CB}$, $d = \vec{AC}$, $l = \mathrm{AB}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

27. $A\,(6; 5; -4)$, $B\,(-5; -2; 2)$, $C\,(3; -3; 2)$, $a = \vec{AB} - \vec{CB}$, $b = c = \vec{AC}$, $d = \vec{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$.

28. $A\,(-3; -5; 6)$, $B\,(3; 5; -4)$, $C\,(2; 6; 4)$, $a = \vec{AC} - \vec{BA}$, $b = \vec{CB}$, $c = \vec{BA}$, $d = \vec{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

29. A (3; 5; 4), B (4; 2; –3), C (–2; 4; 7), $a = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{BA}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

30. A (4; 6; 7), B (2; –4; 1), C (–3; –4; 2), $a = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $b = c = \overrightarrow{BC}$, $d = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

Задание 1.4

Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1 A_2 A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(1; 1; 6)$, $A_4(0; 4; -1)$.

2. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(5; 8; 3)$, $A_3(1; 2; -26)$, $A_4(-1; 0; 2)$.

3. $A_1(2; 4; 3)$, $A_2(1; 1; 5)$, $A_3(4; 9; 3)$, $A_4(3; 6; 7)$.

4. $A_1(9; 5; 5)$, $A_2(-3; 7; 1)$, $A_3(5; 7; 8)$, $A_4(6; 9; 2)$.

5. $A_1(0; 7; 1)$, $A_2(2; -1; 5)$, $A_3(1; 6; 3)$, $A_4(3; -9; 8)$.

6. $A_1(5; 5; 4)$, $A_2(1; -1; 4)$, $A_3(3; 5; 1)$, $A_4(5; 8; -1)$.

7. $A_1(6; 1; 1)$, $A_2(4; 6; 6)$, $A_3(4; 2; 0)$, $A_4(1; 2; 6)$.

8. $A_1(7; 5; 3)$, $A_2(9; 4; 4)$, $A_3(4; 5; 7)$, $A_4(7; 9; 6)$.

9. $A_1(6; 8; 2)$, $A_2(5; 4; 7)$, $A_3(2; 4; 7)$, $A_4(7; 3; 7)$.

10. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 1)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

11. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(7; 10; 2)$, $A_3(2; 8; 4)$, $A_4(9; 6; 9)$.

12. $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.

13. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

14. $A_1(10; 9; 6)$, $A_2(2; 8; 2)$, $A_3(9; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.

15. $A_1(1; 8; 2)$, $A_2(5; 2; 6)$, $A_3(5; 7; 4)$, $A_4(4; 10; 9)$.

16. $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$.

17. $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(-5; 7; -7)$, $A_3(5; -3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$.

18. $A_1(8; -6; 4)$, $A_2(10; 5; -5)$, $A_3(5; 6; -8)$, $A_4(8; 10; 7)$.

19. $A_1(1; -1; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

20. $A_1(1; -2; 7)$, $A_2(4; 2; 10)$, $A_3(2; 3; 5)$, $A_4(5; 3; 7)$.

21. $A_1(4; 2; 10)$, $A_2(1; 2; 0)$, $A_3(3; 5; 7)$, $A_4(2; -3; 5)$.

22. $A_1(2; 3; 5)$, $A_2(5; 3; -7)$, $A_3(1; 2; 7)$, $A_4(4; 2; 0)$.

23. $A_1(5; 3; 7)$, $A_2(-2; 3; 5)$, $A_3(4; 2; 10)$, $A_4(1; 2; 7)$.

24. $A_1(4; 3; 5)$, $A_2(1; 9; 7)$, $A_3(0; 2; 0)$, $A_4(5; 3; 10)$.

25. $A_1(3; 2; 5)$, $A_2(4; 0; 6)$, $A_3(2; 6; 5)$, $A_4(6; 4; -1)$.

26. $A_1(2; 1; 6)$, $A_2(1; 4; 9)$, $A_3(2; -5; 8)$, $A_4(5; 4; 2)$.

27. $A_1(2; 1; 7)$, $A_2(3; 3; 6)$, $A_3(2; -3; 9)$, $A_4(1; 2; 5)$.

28. $A_1(2; -1; 7)$, $A_2(6; 3; 1)$, $A_3(3; 2; 8)$, $A_4(2; -3; 7)$.

29. $A_1(0; 4; 5)$, $A_2(3; -2; 1)$, $A_3(4; 5; 6)$, $A_4(3; 3; 2)$.

30. $A_1(3; -1; 2)$, $A_2(-1; 0; 1)$, $A_3(1; 7; 3)$, $A_4(8; 5; 8)$.

Задание 1.5

Решить следующие задачи.

1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(-1; 7; 10)$.

3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0{,}5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -3; 5)$ параллельно плоскости Oxy.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2; 5; -1)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oy.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; 0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$.

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3; 2; -5)$.

10. Составить уравнение плоскости в отрезках, если она проходит через точку $M(6; -10; 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz – отрезок $c = 2$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2; 3; –4) параллельно двум векторам $a = (4; 1; -1)$ и $b = (2; -1; 2)$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -1; 2)$, $B(2; 1; 4)$ параллельно вектору $a = (5; -2; -1)$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$, если $A(5; -2; 3)$, $B(1; -3; 5)$.

16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2; -3; 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2; 3; -4)$, $M_2(-1; 2; -3)$.

18. Показать, что прямая $\dfrac{x}{12} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -4; 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3; -5; 2)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 2; 3)$ и $N(-3; 4; -5)$ параллельно оси Oz.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

23. Найти проекцию точки $M(4; -3; 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.

24. Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -3; -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

26. При каких значениях n и A прямая $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{n} = \dfrac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 1; 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; 3; -5)$ и $N(-1; 1; -6)$ параллельно вектору $a = (4; 4; 3)$.

30. Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.

Задание 1.6

Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x} + \ln \operatorname{tg} x^2$; $\quad y = e^{-x^2} \operatorname{arctg} 2x$; $\quad y = (\arcsin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x} + \ln(1 + \operatorname{tg} x)$; $\quad y = \ln\left(e^x + e^{-2x}\right)$; $\quad y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$.

3. $y = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos x} + \dfrac{1}{\ln(1 + \sin x)}$;

$y = \left(1 + e^{2x}\right) \arccos x$; $\quad y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{1+x}}$.

4. $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$; $\quad y = e^{-3x}(1 + \ln x)$; $\quad y = (\arccos x)^{\frac{1}{\arccos x}}$.

5. $y = \ln\left(1 + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$; $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$; $\quad y = (1 + x)^{\left(1 + x^2\right)}$.

6. $y = \sqrt{1 + \dfrac{\sin x}{\cos 2x}}$; $\quad y = \operatorname{arctg}\left(e^{-x^2}\right)$; $\quad y = (1 + \cos x)^{\sin x}$.

7. $y=\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$; $\quad y=\mathrm{e}^{\cos x}(1+\operatorname{arctg}4x)$; $\quad y=(1+2x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

8. $y=\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right)$; $\quad y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{x-\cos x}$; $\quad y=(\ln(1+x))^{1+x^2}$.

9. $y=\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\cos x+\sin x}$; $\quad y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot\arccos 2x$; $\quad y=(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)$.

10. $y=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}+\mathrm{e}^{\frac{-1}{\cos x}}$; $\quad y=\cos x\cdot\sin(\ln x)$; $\quad y=x^{\sin x}$.

11. $y=\ln\left(1+\dfrac{1}{\cos 2x}\right)+\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sin x+\sin 3x}$;

$y=\arccos(1+x)\cdot\arcsin\left(1+4x^2\right)$; $\quad y=x^{x+\frac{1}{x}}$.

12. $y=\cos x\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$; $\quad y=\mathrm{e}^{-2x}\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)$; $\quad y=(\cos x+\sin x)^{x^2+x}$.

13. $y=\dfrac{\cos 2x+\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; $\quad y=\mathrm{e}^{-x^2}\operatorname{tg}\left(2x+x^2\right)$; $\quad y=(x+\sin x)^{x^2+1}$.

14. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\cos x+\sin x}$; $\quad y=\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{e}^{x+4x^2}$; $\quad y=\left(x+x^2+1\right)^{\operatorname{tg}x}$.

15. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{1+\operatorname{ctg}2x}+\ln(1+\operatorname{ctg}2x)$; $y=\mathrm{e}^{1+x+\operatorname{arctg}\left(1+x^2\right)}$; $y=(1+\arcsin x)^{\cos^2 x}$.

16. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad y=x^2\left(1+\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2 x}\right)$;

$$y=\left(\frac{\cos^2 x}{1+4\cos x+4\cos^2 x}\right)^{\cos x}.$$

17. $y=\ln \operatorname{tg}\frac{e^{2\cos x}}{4}+\sqrt{1-e^{2x}}$; $\quad y=\sqrt{x}+\sqrt{x-a}+\arcsin x$;

$$y=\left(1+\sqrt{x^2-a^2}\right)^{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

18. $y=\sqrt{x^2+e^x+e^{\cos x}}\,x^x$; $\quad y=e^{x^2+\operatorname{arctg} x^2}$; $\quad y=\left(e^x+1\right)^{x^2+x+1}$.

19. $y=\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)+\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}$; $\quad y=\operatorname{arctg}\left(\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\right)$;

$y=(1+\operatorname{arctg} x)^{\left(1+\cos^2 x\right)}$.

20. $y=\ln\left(1+4\cos^2 x\right)+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x+x}$; $\quad y=xe^{x^2}\left(1+\arccos 4x\right)$;

$$y=\frac{(x+1)^3}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}x^x.$$

21. $y=\cos(x\ln x)\cdot\left(x^2+11\right)$; $\quad y=\arccos\left(\frac{1}{1+(ax+b)^2}\right)$;

$y=\left(\sin x^2+2\right)^{x^2+1}$.

22. $y=-\frac{1+\ln\left(\cos^2 x\right)}{\cos x}$; $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\operatorname{arctg} e^x$; $\quad y=\left(1+4x^2+4x^4\right)^x$.

23. $y=(x+1)\left(1-\dfrac{1}{x^2+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)$; $\quad y=\mathrm{tg}x+\cos(n\arccos x)$;

$y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)+x^{1+x^2}$.

24. $y=\sqrt{x\left(1+\mathrm{e}^x\right)\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}$; $\quad y=\sin(n\arccos x)+2x\mathrm{e}^{-\arccos x}$;

$y=\left(ax^2+bx+c\right)^x$.

25. $y=x^x\left(1+\cos^2 x\right)$; $\quad y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\mathrm{e}^{-x^2}}\cos(n\arccos x)$;

$y=\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\cos x\right)^{x^2+x+1}$.

26. $y=\arccos\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$; $\quad y=\dfrac{1}{1+2\mathrm{tg}^2 x}+\arccos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;

$y=\left(\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$.

27. $y=\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$; $\quad y=\mathrm{e}^{\cos x}(1+\mathrm{arctg}4x)$; $\quad y=(1+2x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

28. $y=\mathrm{arctg}\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right)$; $\quad y=\dfrac{\mathrm{ctg}^2 x}{x-\cos x}$; $\quad y=(\ln(1+x))^{1+x^2}$.

29. $y=\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\cos x+\sin x}$; $\quad y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot\arccos 2x$; $\quad y=(\arcsin x)^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

30. $y=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}+e^{-\frac{1}{\cos x}}$; $y=\cos x\cdot\sin(\ln x)$; $y=x^{\sin x}$.

Задание 1.7

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1. $y=x^2(1+\ln x)$; $y+x=e^{y+x}$; $\begin{cases} y=\operatorname{arctg}(t+1); \\ x=1+t^2. \end{cases}$

2. $y=\operatorname{arctg}\left(e^{-x^2}\right)$; $x+y+1=\ln(1+x-y)$; $\begin{cases} y=\cos t; \\ x=\sin\left(1+t^2\right). \end{cases}$

3. $y=\cos^2 x e^{2x}$; $y=x^2+e^{\frac{y}{x}}$; $\begin{cases} y=\ln t; \\ x=e^{1-t^2}. \end{cases}$

4. $y=xe^{3x}$; $e^{x-y}=\cos(x+2y+1)$; $\begin{cases} y=\cos t; \\ x=\sin 2t. \end{cases}$

5. $y=x^2\cos 3x$; $y+x=\sin\dfrac{y}{x}$; $\begin{cases} y=e^t; \\ x=\sin t. \end{cases}$

6. $y=\cos\left(4x^2+x\right)$; $y=e^{y+x}$; $\begin{cases} y=t\cos t; \\ x=\sin t. \end{cases}$

7. $y=\operatorname{ctg} x+x^2e^x$; $y=\ln(x-y)+y^2-x^2$; $\begin{cases} y=e^{2t}; \\ x=\operatorname{sh} t. \end{cases}$

8. $y=(x+1)\cos 2x$; $x-y=\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)$; $\begin{cases} y=\ln t; \\ x=e^{-2t}. \end{cases}$

9. $y=x^x$; $\quad e^{xy}=\ln(1+x-y)$; $\quad \begin{cases} y=\cos^2 t+\arccos t; \\ x=2t+e^{-t}. \end{cases}$

10. $y=x^2\ln\left(1+x^2\right)$; $\quad y=x^3+e^{xy}$; $\quad \begin{cases} y=\sin t; \\ x=\dfrac{t^2}{1+t}. \end{cases}$

11. $y=\left(x^2+1\right)e^{-3x}$; $\quad e^{x+y}=x^2-y^2$; $\quad \begin{cases} y=\cos 2t; \\ x=e^{-2t^2}. \end{cases}$

12. $y=\left(x^3+1\right)\ln\left(1+x^2\right)$; $\quad (y+x)^2+(y-x)^2=e^{x+y}$; $\quad \begin{cases} y=\cos^2 t; \\ x=e^{-t^2}. \end{cases}$

13. $y=\left(\sin^2 x+1\right)e^{-3\cos x}$; $\quad e^{x\ \ +y^2}=\cos\left(x^2-y^2\right)$; $\quad \begin{cases} y=\cos t^2; \\ x=\ln\cos t. \end{cases}$

14. $y=\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\ln x$; $\quad x^2+4y^2=ye^x$; $\quad \begin{cases} y=\cos\left(1+t^2\right); \\ x=2\operatorname{arctg} t^2. \end{cases}$

15. $y=x^{\ln x}$; $\quad \operatorname{arctg}(x+y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\quad \begin{cases} y=2\sin t; \\ x=\dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

16. $y=x^2\cos\left(x^2+1\right)$; $\quad y^3-x^3=2xy+1$; $\quad \begin{cases} y=\sqrt{1-t^2}; \\ x=\ln\left(1+\sqrt{1-t^2}\right). \end{cases}$

17. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}$; $\quad y=x^2+e^{\frac{y}{x}}$; $\quad \begin{cases} y=2t^2+3t; \\ x=\sin^2\left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

18. $y=\sin(n\arcsin x)$; $\quad y=x+\ln(x^2+y^2)$; $\quad \begin{cases} y=2t^2+1; \\ x=e^t+e^{at}. \end{cases}$

19. $y=e^{ax^2+bx+c}$; $\quad y+x=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $\quad \begin{cases} y=a\cos^2 t; \\ x=b\sin t. \end{cases}$

20. $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $\quad xy^3+2y-x^3=a$; $\quad \begin{cases} y=2t\cos t; \\ x=2t\sin t. \end{cases}$

21. $y=\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$; $\quad \dfrac{x+y}{x-y}=e^{2x+y}$; $\quad \begin{cases} y=e^{-\frac{1}{1+t^2}}; \\ x=\cos(1+t^2). \end{cases}$

22.
$y=\dfrac{a}{b+\sqrt{1-x^2}}$; $\quad x^2-y^2=\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$; $\quad \begin{cases} y=2a\cos(1+t^2); \\ x=2b\sin(1+t^2). \end{cases}$

23. $y=\sin(1+\arcsin x)$; $\quad x^2\operatorname{arctg} y=y^2-x^2$; $\quad \begin{cases} y=2at\cos t; \\ x=at\sin t. \end{cases}$

24. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $\quad \cos^3 x+\cos^3 y=3\cos x\cos y$; $\quad \begin{cases} y=\dfrac{2m}{1+4\operatorname{tg}^2 t}; \\ x=\dfrac{\pi}{2}e^{-t^2}. \end{cases}$

25. $y=x^2+\sqrt{x^2+1}+\ln x$; $\quad x^2=\arcsin(x+y)+y^2$;

$\begin{cases} y=\operatorname{arctg}(t^2+1); \\ x=2\sin(t+1). \end{cases}$

26. $y=\left(1+x^2\right)\arccos(\alpha\cos x)$; $y=\cos\left(1+\frac{1}{xy}\right)+x$;

$$\begin{cases} y=2t^2+\mathrm{e}^{-\frac{a}{t^2}}; \\ x=\mathrm{e}^{2\alpha t+1}. \end{cases}$$

27. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}$; $y=x^2+\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $\begin{cases} y=2t^2+3t; \\ x=\sin^2\left(1+\frac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

28. $y=\sin(n\arcsin x)$; $y=x+\ln\left(x^2+y^2\right)$; $\begin{cases} y=2t^2+1; \\ x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{at}. \end{cases}$

29. $y=\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}$; $y+x=\sin\frac{y}{x}$; $\begin{cases} y=a\cos^2 t; \\ x=b\sin t. \end{cases}$

30. $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $xy^3+2y-x^3=a$; $\begin{cases} y=2t\cos t; \\ x=2t\sin t. \end{cases}$

Задание 1.8

Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\ln\left(1+x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}(\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x(1-\cos x)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x^2}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\dfrac{\pi}{2}}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\sin\dfrac{x}{2}-\cos x-x}{\ln\left(1+x^2\right)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+7\sqrt{x+1}\right)^{\frac{3}{\sqrt{x}}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-e^{\frac{-1}{x}}}{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1+x^2}{x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{x^3+\ln\left(1+x^2\right)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$; $\quad\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}-x}{\sin x^2+x^2}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\cos x-1)}{x^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x+\sin x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\mathrm{tg}x\right)^{3\mathrm{ctg}x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{2\left(e^{2\pi x}-1\right)}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^x$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2\sin\dfrac{\pi x}{6}}{1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin\alpha x\right)^{\frac{1}{\sin\beta^2 x^2}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{\left(x^5-1\right)\sin(x-1)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(2x)^2}-\dfrac{1}{\cos x-1}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta^2 x^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{4}x}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1-2\ln x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{e^{-x^2}-1}$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$.

20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha x^2}{1-\cos\beta x^2}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha x}{\operatorname{tg}^2\beta x}$; $\quad\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{1-x^5}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x^2}\right)^{x^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{(x-1)^2}$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+x)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{\sin(x-4)}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\dfrac{x^2}{2}}{\sin^2 x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-e^{ax}}{x^2\sin x}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2\operatorname{tg}x}$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x(1-\cos x)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)$; $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{\ln(1-x^2)}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$.

Задание 1.9

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y=\sqrt{x^2+2x+2}$.

2. $y=\dfrac{1}{x}+x^2$.

3. $y=1+\dfrac{1}{e^{(x-1)}}$.

4. $y=x^3e^{-4x}$.

5. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

6. $y=e^{-|x|}$.

7. $y=4e^{-\frac{1}{x-1}}$.

8. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

9. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

10. $y=|x-1|+\ln x$.

11. $y=\frac{1}{x}e^{-x^2}$.

12. $y=(x+1)\ln(x+1)$.

13. $y=x\ln|x|$.

14. $y=\frac{e^x}{e^x+1}$.

15. $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$.

16. $y=\sqrt{x^2+2x}$.

17. $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

18. $y=(x-2)e^{-x}$.

19. $y=x-\frac{1}{x^4}$.

20. $y=\frac{e^x}{x}$.

21. $y=x^3\cdot e^{-x}$.

22. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

23. $y=x+\ln|x|$.

24. $y=(x+1)e^{-x}$.

25. $y=x+\frac{1}{x}$.

26. $y=\frac{x^3-1}{x^2}$.

27. $y=\sqrt{x^2-2x}$.

28. $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$.

29. $y=\frac{1}{e^x+1}$.

30. $y=x\ln|x|$.

Задание 1.10

Найти полные дифференциалы указанных функций.

1. $z = 2x^3y - 4xy^5$;
2. $z = x^2 y \sin x - 3y$;
3. $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$;
4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$;
5. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$;
6. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$;
7. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$;
8. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$;
9. $z = \arcsin(x + y)$;
10. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$;
11. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$;
12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$;
13. $z = e^{x+y-4}$;
14. $z = \cos(3x + y) - x^2$;
15. $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;
16. $z = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
17. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$;
18. $z = \ln(x + xy - y^2)$;
19. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$;
20. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$;
21. $z = \arcsin\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$;
22. $z = \operatorname{arcctg}(x - y)$;
23. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$;
24. $z = y^2 - 3xy - x^4$;

25. $z=\arccos(x+y)$;

26. $z=\ln\left(y^2-x^2+3\right)$;

27. $z=2-x^3-y^3+5x$;

28. $z=7x-x^3y^2+y^4$;

29. $z=\mathrm{e}^{y-x}$;

30. $z=\ln\left(3x^2-2y^2\right)$.

Задание 1.11

Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

1. $z=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$;

2. $z=\operatorname{ctg}(x+y)$;

3. $z=\operatorname{tg}(x/y)$;

4. $z=\cos(xy^2)$;

5. $z=\sin(x^2-y)$;

6. $z=\operatorname{arctg}(x+y)$;

7. $z=\arcsin(x-y)$;

8. $z=\arccos(2x+y)$;

9. $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)$;

10. $z=\ln(3x^2-2y^2)$;

11. $z=\mathrm{e}^{2x^2+y^2}$;

12. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$;

13. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$;

14. $z=\cos(x^2y^2-5)$;

15. $z=\sin\sqrt{x^3y}$;

16. $z=\arcsin(x-2y)$;

17. $z=\arccos(4x-y)$;

18. $z=\operatorname{arctg}(5x+2y)$;

19. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$;

20. $z=\ln(4x^2-5y^3)$;

21. $z = e^{\sqrt{x+y}}$;

22. $z = \arcsin(4x + y)$;

23. $z = \arccos(x - 5y)$;

24. $z = \sin\sqrt{xy}$;

25. $z = \cos(3x^2 - y^3)$;

26. $z = \operatorname{arctg}(3x + 2y)$;

27. $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$;

28. $z = \operatorname{arcctg}(x - 4y)$;

29. $z = \ln(3xy - 4)$;

30. $z = \operatorname{tg}(xy^2)$.

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

4.1. Матрицы и операции над ними

Понятие о матрице

Таблица чисел a_{ik} вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$. Числа a_{ik} называются ее *элементами.* Если $m = 1$, $n > 1$, мы имеем одностpочечную матрицу, которую называют *матрицей-строкой:* $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу $(a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1})^T$, которую называют *матрицей-столбцом.*

Если в матрице число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то такую матрицу называют *квадратной,* причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы.

Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они одинакового размера (т. е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны.

Сложение и вычитание матриц

Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \left(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}\right).$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей.*

Разностью двух матриц A и B одинакового размера называется матрицы C, такая, что $C + B = A$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A и числа λ называется матрица B, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right)$.

Умножение матриц

Произведением AB $(m \times n)$, т. е. матрицы A $(n \times k)$ на матрицу B $(m \times k)$ называется матрица C, элемент которой d_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{i\nu} \cdot b_{\nu j} \quad i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,k}\,.$$

Единичной матрицей называется такая матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

при умножении которой слева или справа на матрицу A получается матрица A:

$$E \cdot A = A \cdot E = A\,.$$

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется *транспонированной по отношению к* A. Если для матриц A и B определено произведение AB, то $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Основные свойства действий над матрицами

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

5) $A(BC) = (AB)C$;

6) $A(B + C) = AB + AC$.

4.2. Определители

Определители второго порядка

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Определитель обозначают символом $|A|$. Т. о.,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную* диагональ, а элементы a_{12}, a_{21} – *побочную.*

Определители третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Чтобы запомнить какие числа в правой части последнего равенства следует брать со знаком «плюс», какие – со знаком «минус», полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника.*

Минором (M_{ij}) какого-либо элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Алгебраическим дополнением (A_{ij}) элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Понятие определителя n-го порядка

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Свойства определителей n-го порядка

1. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот.

2. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный.

3. Определитель с двумя параллельными рядами равен нулю.

4. Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель умножится на это же число λ.

5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

6. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.

7. Сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\,;\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = 0 \qquad (j \neq i).$$

8. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых.

9. Определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и тоже произвольное число λ.

4.3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Если определитель $|A|$ матрицы равен нулю, то матрица A называется *вырожденной,* в противном случае матрица A называется *невырожденной.*

Матрица

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}\,;\ A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является обратной для A.

Матрица A^* называется *присоединенной.*

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Обозначается r или r_A.

Если ранг квадратной матрицы A порядка n равен r, то $n-r$ называют *дефектом матрицы* A.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующее:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;

3) перестановку местами двух параллельных рядов матрицы.

Ранг матрицы, полученный из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

При вычислении ранга матрицы могут быть использованы элементарные преобразования, метод приведения матрицы к трапециевидной форме, метод окаймляющих миноров и др.

Метод приведения к трапециевидной форме заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матриц данная матрица приводится к виду:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Ранг матрицы B, а следовательно, и ранг данной матрицы равен r, где r – число строк матрицы B, в каждой из которых хотя бы один элемент отличен от нуля.

Минор порядка $k+1$, содержащий в себе минор M порядка k_1, называется окаймляющим минор M.

Метод окаймляющих миноров основан на том, что ранг данной матрицы равен порядку такого минора этой матрицы, который отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю.

4.4. Система линейных уравнений

Правило Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Если в системе (4.1) определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение. Решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n},$$

где Δ – определитель матрицы системы;

Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Матричный метод

Запишем систему (4.1) в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если $|A| \neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то система (4.1) имеет единственное решение: $X = A^{-1}B$.

Решение произвольных систем. Метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.2}$$

или, в матричной форме

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = 0$, то система называется *однородной*, иначе – она называется *неоднородной*.

Решением системы (4.2) называется всякий n-компонентный вектор-столбец X, который обращает матричное уравнение в равенство. Система называется *совместной*, если у нее существует хотя бы одно решение, иначе она называется *несовместной*.

Матрица

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right),$$

которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* (4.2).

Теорема Кронекера-Капелли

Для совместности системы (4.2) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Решение системы линейных уравнений производится следующим образом:

1) находим r_A – ранг матрицы системы и $r_{\tilde{A}}$ – ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несовместна;

2) если $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то выделяем базисный минор и базисные неизвестные;

3) данную систему заменяем равносильной, состоящих из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора;

4) если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то из системы, полученной в пункте 3, находим выражение базисных неизвестных через свободные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечно много решений исходной системы.

Элементарными преобразованиями системы (4.2) называются следующие:

1) умножение обеих частей одного из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;

2) перемена местами двух любых уравнений;

3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

Метод Гаусса

1. Выбираем одно из уравнений системы, в котором коэффициент при одном из неизвестных отличен от нуля. Производя над уравнениями системы преобразования, которые приводят к равносильной системе, исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме выбранных ранее.

Если в результате в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это уравнение не удовлетворяется никаким значением неизвестных, следовательно полученная система несовместна.

Если в системе появится уравнение, все коэффициенты которого и свободный член равны нулю, то оно может быть отброшено.

2. В системе, полученной после первого шага, выбираем одно из уравнений, в котором коэффициент при другом неизвестном отличен от нуля. Исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме двух выбранных.

Аналогично производим последующие шаги. После нескольких шагов будет иметь место один из случаев:

а) получится несовместная система;

б) получится треугольная система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{nn}x_n &= b_n^{(n-1)}, \end{aligned}\right\},$$

где $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{nn} \neq 0$.

Эта система, а следовательно, и исходная, имеет единственное решение;

в) получится трапециевидная система:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= b_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где $p < n,\ a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp} \neq 0$.

В системе (4.3) число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp} \neq 0$, то из последнего уравнения системы x_p выражается через x_{p+1}, x_n. Осуществляя обратный ход, выразим $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получим бесконечно много решений системы (4.3), а следовательно, и исходной системы.

Однородные линейные системы. Фундаментальная система решений

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

называется *однородной*. Она всегда совместна: совокупность нулей $(0, 0, \ldots, 0)$ является решением, которое называется *нулевым* (тривиальным).

Если однородная система имеет 2 решения $(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1})$ и $(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n2})$, то любая их линейная комбинация $(\alpha c_{11} + \beta c_{12}, \alpha c_{21} + \beta c_{22}, \ldots, \alpha c_{n1} + \beta c_{n2})$ также является решением системы.

Любой базис пространства решений системы называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Базисные решения могут быть получены, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равные нулю.

4.5. Определение вектора. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора в данном базисе

Направленным отрезком называется отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая – за конец.

Два ненулевых направленных отрезка называются *эквивалентными*, если их длины равны и они сонаправлены. Нулевые направленные отрезки считаются эквивалентными.

Вектором называется множество всех направленных отрезков, эквивалентных между собой. Каждый направленный отрезок этого множества называется представителем вектора.

Длиной направленного отрезка AB называется расстояние между точками A и B.

Длиной вектора a называется длина любого из направленных отрезков, образующих вектор a. Длина вектора $a = \overrightarrow{AB}$ обозначается $|a|$ или $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\pi/2$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны, т. е. если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой: $a \parallel b$.

Векторы называются *компланарными*, если представляющие их направленные отрезки лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение векторов на число.

Суммой векторов a_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ называется вектор, обозначаемый $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, начало которого находится в начале первого вектора a_1, а конец – в конце последнего вектора a_n ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов. В случае суммы двух векторов применяют правило параллелограмма.

Произведением вектора a *и числа* λ называется вектор, обозначаемый λa (или $a\lambda$), модуль которого равен $|\lambda| \cdot |a|$, а направление совпадает с направлением вектора a, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Проекцией вектора a *на ось* l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\, a$ и равное $|a|\cos\varphi$, где $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора a, т. е. $\text{пр}_l\, a = |a|\cos\varphi$.

Координатами вектора a называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Запись $a = (x, y, z)$ означает, что вектор a имеет координаты x, y, z.

Линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ – числа.

Векторы $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называются *линейно зависимыми,* если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$.

Векторы $a_1, a_2, ..., a_n$ называются *линейно независимыми,* если равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов e_1, e_2, e_3.

Любой вектор a в пространстве можно разложить по базису e_1, e_2, e_3, т. е. представить a в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = x e_1 + y e_2 + z e_3,$$

где x, y, z – координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3.

Базис называется *ортонормированным,* если базисные векторы попарно ортогональны и каждый базисный вектор является единичным.

Совокупность точки O (начало координат) и ортонормированного базиса i, j, k (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси) называется *декартовой прямоугольной системой координат в пространстве.*

Свободный вектор a, заданный в координатном пространстве $OXYZ$, может быть представлен в виде

$$a = a_x i + a_y j + a_z k,$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора a на соответствующие оси координат, т. е. координаты вектора a.

Такое разложение вектора a называется его разложением по осям координат, или разложением по ортам i, j, k. Векторы $a_x i, a_y j, a_z k$ называются составляющими вектора a по осям координат.

Длина или модуль вектора $a = (a_x, a_y, a_z)$ определяется по формуле

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Если векторы a и b заданы своими прямоугольными координатами: $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$a + b = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$$

$$a - b = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$$

Произведение вектора $a\,(a_x, a_y, a_z)$ и числа λ имеет координаты $(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

Радиусом-вектором точки M относительно декартовой прямоугольной системы координат (O, i, j, k) называется вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке $M(x, y, z)$. Его обозначают $r(M)$ или r.

Радиус-вектор r имеет следующее разложение по ортам:

$$r = xi + yj + zk.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = r_2 - r_1$, где r_1, r_2 – радиусы-векторы точек A и B соответственно. Следовательно, разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по ортам имеет вид:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,i + (y_2 - y_1)\,j + (z_2 - z_1)\,k.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направление вектора a задается углами α, β, γ, образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов (*направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. В силу приведенных выше формул направление вектора $\overrightarrow{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d};\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d};\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Единичным вектором (ортом) вектора a называют вектор $a_0 = \frac{a}{|a|}$, который имеет длину, равную единице и направление, совпадающее с направлением вектора a. Координаты единичного вектора a_0 равны его направляющим косинусам:

$$a_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

4.6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(a,b)=|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – меньший угол между направлениями векторов a и b.

Отметим, что всегда $0\le\varphi\le\pi$.

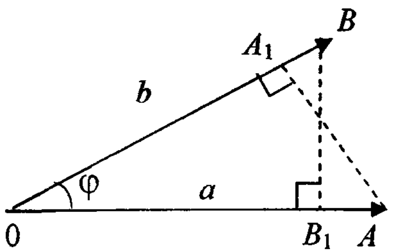


Рис. 4.1

Так как $|b|\cos\varphi=\text{пр}_a b$ и $|a|\cos\varphi=\text{пр}_b a$ (рис. 4.1), то выражение скалярного произведения можно представить в виде:

$$(a,b)=|a|\cdot\text{пр}_a b=|b|\cdot\text{пр}_b a.$$

Следовательно, $\text{пр}_b a=\dfrac{(a,b)}{|b|}$ и $\text{пр}_a b=\dfrac{(a,b)}{|a|}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $(a,a)=|a|^2=a^2$, отсюда $|a|=\sqrt{(a,a)}$;

2) $(a,b)=0$, если $a=0$, либо $b=0$, либо $a\perp b$;

3) $(a,b)=(b,a)$;

4) $(\lambda a,b)=(a,\lambda b)=\lambda(a,b)$, $\lambda\in R$;

5) $(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$.

Если в прямоугольной системе координат векторы a и b заданы своими координатами:

$$a=(X_1,Y_1,Z_1),\quad b=(X_2,Y_2,Z_2),$$

то

$$(a,b)=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат. Если $b=a$, то $(a,a)=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$.

Поскольку $aa=a^2=|a|^2$, то $|a|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi=\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

Если ось l образует с координатными осями углы α, β, γ соответственно, то проекция вектора $S=(X,Y,Z)$ на эту ось определяется равенством

$$\text{пр}_l S=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma.$$

Понятие скалярного произведения возникло в механике. Если вектор F изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора S, то работа A указанной силы определяется равенством

$$A=(F,S)=|F|\cdot|S|\cos(F\hat{,}S).$$

4.7. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов a, b, c с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора a к вектору b наблюдается из конца вектора c происходящим против движения часовой стрелки (рис. 4.2, *а*). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке (рис. 4.2, *б*), то данная тройка векторов называется *левой*.

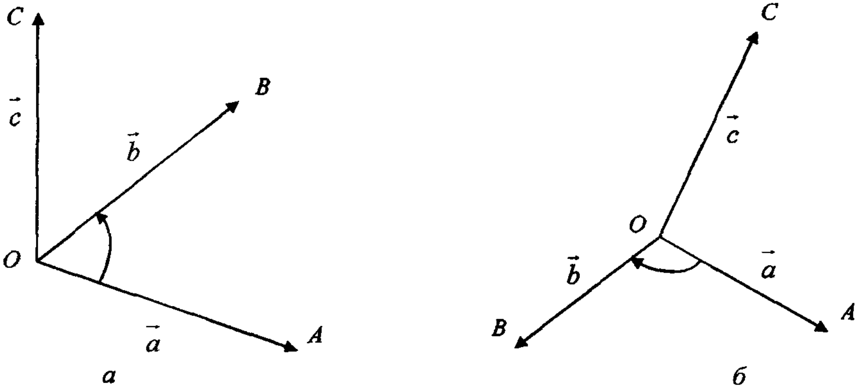


Рис. 4.2

Векторным произведением векторов a и b называется вектор, обозначаемый $c=[a,b]$ или $c=a\times b$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора с равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, т. е.

$$\left|[a,b]\right| = |a|\cdot|b|\cdot\sin(a\hat{,}b).$$

2) вектор $[a,b]$ перпендикулярен к плоскости векторов a и b, т. е. $c\perp a$, $c\perp b$.

3) упорядоченная тройка векторов a, b, c – правая.

Основные свойства векторного произведения векторов:

1) $a\times b=-(b\times a)$;

2) $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$;

3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

4) $(a\times b=0)\Leftrightarrow a\parallel b$ – есть необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов a и b;

5) $|a \times b| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, имеющих общее начало в точке O (рис. 4.3).

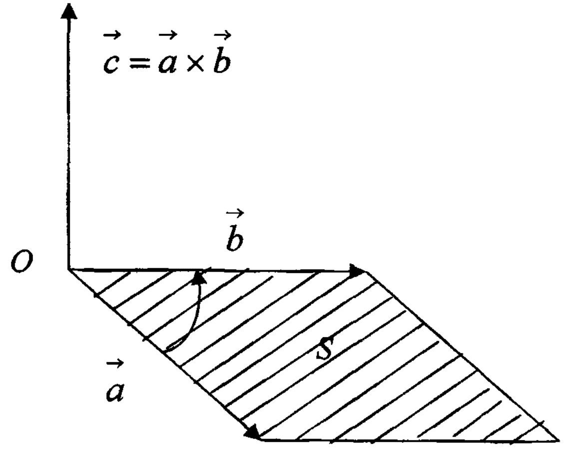


Рис. 4.3

Если $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $a \times b$ в координатной форме выражается следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах a и b, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} |\, [a, b] \,|,$$

а *синус угла* между ними равен

$$\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{|[a,b]|}{|a|\cdot|b|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* M силы F, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A:

$$M=\overrightarrow{AB}\times F.$$

4.8. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов a, b, c называется число, обозначаемое (a,b,c) и определяемое как скалярное произведение вектора $[a,b]$ и вектора c:

$$(a,b,c)=([a,b],c).$$

Алгебраические свойства смешанного произведения векторов:

1) $(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b)$;
2) $(b,a,c)=-(a,b,c)$, $(c,b,a)=-(a,b,c)$, $(a,c,b)=-(a,b,c)$;
3) $(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2,b,c)=\alpha_1(a_1,b,c)+\alpha_2(a_2,b,c)$, где $\alpha_1,\alpha_2\in R$;
4) $(i,j,k)=0$;
5) $(a,b,c)=([a,b],c)=(a,[b,c])$.

Если векторы a, b, c заданы своими координатами $a=(x_1,y_1,z_1)$, $b=(x_2,y_2,z_2)$, $c=(x_3,y_3,z_3)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле $(a,b,c)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Смешанное произведение $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах a, b, c, взятому со знаком «плюс», когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком «минус» – в противном случае:

$$(a,b,c)=\begin{cases} V, & \text{если тройка векторов } a,b,c \text{ – правая,} \\ -V, & \text{если тройка векторов } a,b,c \text{ – левая.} \end{cases}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V=\frac{1}{6}\left|(a,b,c)\right|.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов a, b, c является равенство нулю их смешанного произведения: $(a,b,c)=0$.

4.9. Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой

Теорема 4.1. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y:

$$Ax+By+C=0, \tag{4.4}$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, причем $A^2+B^2\neq 0$, и обратно, всякое уравнение вида (4.4) определяет прямую.

Всякий ненулевой вектор $\vec{n}=(A,B)$, перпендикулярный к прямой (4.4), называется *нормальным вектором прямой*. Уравнение (4.4) называется *общим уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A,B)$.

Возможны частные случаи.

1) $C=0, A\neq 0, B\neq 0$. Прямая $Ax+By=0$ проходит через начало координат;

2) $A=0, B\neq 0, C\neq 0$. Прямая $Bx+C=0$ (или $y=-C/B$) параллельна оси Oy;

3) $B=0, A\neq 0, C\neq 0$. Прямая $Ax+C=0$ (или $y=-C/A$) параллельна оси Oy;

4) $A=C=0, B\neq 0$. Прямая $By=0$ (или $y=0$) совпадает с осью Ox;

5) $B=C=0, A\neq 0$. Прямая $Ax=0$ (или $x=0$) совпадает с осью Oy.

Если прямая l проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(A,B)$, то уравнение прямой будет иметь вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A,B)$ *и проходящей через заданную точку* $M_0(x_0,y_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то его можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y=kx+b,$$

где $k=-A/B$, $b=-C/B$.

Полученное уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом k*, где $k=\operatorname{tg}\alpha$.

Угол α $(0\leq\alpha<\pi)$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = kx_0 + b$, то, вычитая это равенство из $y = kx + b$, получим уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

называемое *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k, *проходящей через заданную точку* $M_0(x_0,y_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то, подставив их координаты в последнее уравнение и выразив $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$. Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, где a и b – длины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy, взятые с соответствующими знаками (в зависимости от того, положительные или отрицательные полуоси координат пересекает прямая).

Каноническое уравнение прямой

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(m, n)$, называемому *направляющим вектором прямой*, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Это равенство называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

Параметрические уравнения прямой

В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и $\vec{a}(m, n)$ существует число $t \in R$, такое что $\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{a}$ или $(x - x_0, y - y_0) = t(m, n)$. Отсюда $x - x_0 = t\,m$, $y - y_0 = t\,n$, т. е.

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,m, \\ y = y_0 + t\,n. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}(m, n)$.

Нормальное уравнение прямой

Если обе части общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ умножить на число $\mu = 1\Big/\left(\pm\sqrt{A^2 + B^2}\right)$ (которое называется *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C < 0$, то получается уравнение, называемое *нормальным уравнением прямой*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую;

α – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

Угол между двумя прямыми

Под углом φ между двумя прямыми будем понимать наименьший угол, на который надо повернуть одну прямую, чтобы она стала параллельна или совпала с другой прямой $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то косинус угла между ними находится как косинус угла между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

4.10. Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости

Теорема 4.2. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.5)$$

если $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.

Уравнение (4.5) называется *общим уравнением плоскости*. Здесь A, B, C – координаты ненулевого вектора $\bar{n}(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости, называемого *нормальным вектором плоскости*.

Положение плоскости в пространстве вполне определено, если известны точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащая ей, и нормальный вектор $\bar{n}(A,B,C)$.

Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

и называется *уравнением плоскости с нормальным вектором* $\bar{n}(A,B,C)$ *и проходящей через точку* $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением (4.5):

1) $A=0$; параллельна оси Ox;
2) $B=0$; параллельна оси Oy;
3) $C=0$; параллельна оси Oz;
4) $D=0$; проходит через начало координат;
5) $A=B=0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
6) $A=C=0$; перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);
7) $B=C=0$; перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);
8) $A=D=0$; проходит через ось Ox;
9) $B=D=0$; проходит через ось Oy;
10) $C=D=0$; проходит через ось Oz;
11) $A=B=D=0$; совпадает с плоскостью xOy $(z=0)$;
12) $A=C=D=0$; совпадает с плоскостью xOz $(y=0)$;
12) $B=C=D=0$; совпадает с плоскостью yOz $(x=0)$.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении плоскости (4.5) коэффициент $D \neq 0$, то разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$. Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*. В нем a, b и c – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями *Ox*, *Oy* и *Oz*.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ однозначно определяют положение плоскости *P* в пространстве.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости *P*. Тогда векторы $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, и $\overline{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ компланарны и, значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right)=0$, или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Равенство является *уравнением плоскости, проходящей через три точки.* Раскрыв данный определитель, придем к общему уравнению плоскости.

Нормальное уравнение плоскости

Пусть $\overline{n^{\circ}}$ – единичный вектор нормали к плоскости *P*, проведенный к ней из начала координат. Тогда его координатами будут направляющие косинусы: $\overline{n^\circ}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz. Пусть p – длина этого перпендикуляра, а $\bar{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$. Тогда уравнение плоскости в векторной форме имеет вид

$$\left(\bar{r}, \overline{n^\circ}\right) - p = 0, \ p \geq 0 .$$

В координатной форме это уравнение принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

и называется *нормальным уравнением плоскости*.

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду следует все члены уравнения умножить на *нормирующий множитель* $\mu = \pm 1 / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, где знак выбирается противоположным знаку свободного члена D.

Уравнение плоскости, параллельной двум данным векторам

Положение плоскости в пространстве также определено единственным образом, если известны два неколлинеарных вектора $\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$, параллельных плоскости, и точка, через которую эта плоскость проходит. В качестве нормального вектора плоскости P можно взять вектор векторного произведения $\bar{n} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$, перпендикулярный к векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, а значит и к плоскости P. Зная точку, через которую проходит плоскость P, можно записать его уравнение.

Также получить уравнение плоскости можно, выбрав произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости P и учитывая, что векторы $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – компланарны. Значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\left(\overline{M_0M}, \overline{a_1}, \overline{a_2}\right) = 0$, или в координатной форме получим равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое является *уравнением плоскости, параллельной двум векторам и проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение пучка плоскостей

Уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ при произвольном λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую. Такое уравнение называют *уравнением пучка плоскостей.*

Угол между двумя плоскостями

Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{n_1}\,\hat{,}\,\overline{n_2}\right) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей.

Параллельность и перпендикулярность двух плоскостей

Если плоскости перпендикулярны, то

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Если две плоскости параллельны, то параллельны и их нормальные векторы. Учитывая условие параллельности векторов, получаем *условие параллельности двух плоскостей*:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \neq D_1/D_2 .$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* P: $Ax + By + Cz + D = 0$ называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость P.

Искомое расстояние находится по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости. Знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

4.11. Прямая в пространстве

Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно однозначно определить пересечением двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned} P_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ P_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\},$$

нормальные векторы $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ которых непараллельны, уравнения называются *общими уравнениями прямой* в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{a}(m,n,p)$ – вектор, параллельный прямой L, называемый *направляющим вектором* этой прямой, и $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x,y,z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{a}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ и вектора $\bar{a}(m,n,p)$ пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Эти уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве и определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельную вектору $\bar{a}(m,n,p)$.

Параметрические уравнения прямой

От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к *параметрическим уравнениям*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

или в *векторной* форме

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_0+\bar{a}t;$$

где $\bar{r}$ и $\bar{r}_0$ – радиус-векторы точек M и M_0;

$\bar{a}$ – направляющий вектор прямой;

t – параметр.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая L проходит через две заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то в качестве направляющего вектора $\bar{a}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, то, согласно каноническим уравнениям, уравнения L имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

они называются уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.

Угол между прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Под *углом между прямыми* понимают угол между направляющими векторами $\bar{a}_1(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{a}_2(m_2;n_2;p_2)$. Величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=\cos\left(\bar{a}_1 \hat{,} \bar{a}_2\right)=\frac{\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части последней дроби следует взять по модулю.

Перпендикулярность двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то скалярное произведение их направляющих векторов $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$, т. е.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 .$$

Параллельность двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то параллельны их направляющие векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} .$$

Компланарность двух прямых

Пусть прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, прямая L_2 – через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Следовательно, необходимым и достаточным условием нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости является

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 либо пересекаются, если $\overline{a_2} = \lambda \overline{a_1}$, либо параллельны, если $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$. Если условие не выполняется, то прямые L_1 и L_2 являются *скрещивающимися*.

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой, заданной в каноническом виде и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{a}(m; n, p)$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|\bar{a} \times \overline{M_0 M_1}\right|}{|\bar{a}|}.$$

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой L и плоскостью P называют угол φ, образованный прямой L и ее проекцией на плоскость P.

Если прямая L задана каноническими уравнениями, а плоскость P – общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда косинус угла между нормальным вектором $\bar{n}(A, B, C)$ к плоскости и направляющим вектором $\bar{a}$ прямой определяется

$$\cos\left(\widehat{\bar{n}, \bar{a}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\bar{n} \cdot \bar{a}}{|\bar{n}||\bar{a}|},$$

и т. к. $\sin\varphi \geq 0$ для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если прямая L параллельна плоскости P, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{a}$ перпендикулярны, а потому $\bar{a} \cdot \bar{n} = 0$, т. е. равенство

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является *условием параллельности прямой и плоскости.*

Если прямая L перпендикулярна плоскости P, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{a}$ параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

являются *условиями перпендикулярности* прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой. Подставляя x, y, z из этих уравнений в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \qquad (4.6)$$

Возможны следующие случаи:

1) при $Am+Bn+Cp\neq 0$ уравнение (4.6) имеет единственное решение

$$t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp).$$

Подставив это значение t в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения M;

2) при

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$$

уравнение (4.6) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Эти условия являются *условиями параллельности* прямой и плоскости;

3) при

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

любое значение t является решением уравнения (4.6), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Последние равенства называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

4.12. Теория пределов

Числовая последовательность и ее предел

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве N. Она записывается в виде $(a_1;\, a_2;\, \ldots;\, a_n;\, \ldots)$ или сокращенно (a_n), где $a_n = f(n)$ – общий член последовательности; n – номер члена последовательности.

Последовательность (a_n) называется *ограниченной* (*неограниченной*), если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| \le M$ (если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| > M$).

Число a называется *пределом последовательности* (a_n), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$, такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. При этом пишется $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то (a_n) называется *бесконечно малой последовательностью* (б. м. п.). Такие последовательности обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма конечного числа б. м. п. есть б. м. п.;

2) произведение конечного числа и б. м. п. есть б. м. п.

3) произведение б. м. п. и ограниченной последовательности есть б. м. п.

Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой последовательностью* (б. б. п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ $(a_n \neq 0)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ $(a_n \neq 0)$.

Если (a_n) и (b_n) сходятся, то справедливы следующие теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где c – const;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ и записывается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to x_0$.

При помощи логических символов это определение можно записать:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon): \forall x;$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если в последнем выражении рассматривать только $x < x_0 (x > x_0)$, то имеем понятия левого (правого) предела функции в точке x_0, который обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, или $f(x_0 - 0) \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right)$, или $f(x_0 + 0)$.

С помощью логических символов определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение и обозначение предела при $x \to -\infty$ аналогичны.

Если $b = 0$, то $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (б. м. ф.) и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (б. б. ф.) в точке x_0, если $\forall M \in R_+$, $\exists \delta(M) : \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$ и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, при этом, если $f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right)$.

Связь между б. м. ф. и б. б. ф. следующая:

1) если $f(x)$ – б. м. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. б. ф., где A – действительное число $\neq 0$;

2) если $f(x)$ – б. б. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. м. ф., где $0 < A < \infty$.

Свойства функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$ выражаются следующей теоремой.

Теорема 4.3. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

Свойства б. м. ф. аналогичны свойствам бесконечно малых последовательностей.

Произведение $f(x)\cdot g(x)$ при $x\to x_0$ есть б. б. ф., если $f(x)$ – б. б. ф. при $x\to x_0$, а $g(x)$ – или б. б. ф., или $|g(x)|<c$ в некоторой окрестности точки x_0.

По определению выполняются соотношения:

1) $x+\infty=+\infty,\quad x-\infty=-\infty,\quad \forall x\in R$;

2) $x(+\infty)=+\infty,\quad x(-\infty)=-\infty,\quad \forall x>0$;

3) $x(+\infty)=-\infty,\quad x(-\infty)=+\infty,\quad \forall x<0$;

4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$;

5) $(+\infty)(+\infty)=+\infty,\quad (-\infty)(-\infty)=+\infty,\quad (+\infty)(-\infty)=-\infty$.

Операции $(+\infty)+(-\infty)=\infty-\infty$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ – не определены и называются *неопределенностями*. К неопределенностям относятся так же отношения вида $\dfrac{0}{0}$; $0\cdot\infty$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0.

В простейших случаях эти неопределенности раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения.

Кроме того, для всех элементарных функций в области их определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)=f(x_0).$$

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{a}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{a}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\pm\infty}\dfrac{a}{x}=0$, где $a>0$, $a\in R$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0 & \text{при} \quad 0<a<1,\\ +\infty & \text{при} \quad a>1;\end{cases}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad 0<a<1,\\ 0 & \text{при} \quad a>1;\end{cases}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad a>1,\\ -\infty & \text{при} \quad 0<a<1;\end{cases}$

5) $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=\begin{cases}-\infty & \text{при} \quad a>1,\\ +\infty & \text{при} \quad 0<a<1.\end{cases}$

В дальнейшем будут использоваться первый и второй замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}=2{,}71828...$$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$ необходимо иметь в виду, что если $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(v(x))=b$, то

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=a^b.$$

4.13. Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

На практике применяются и другие определения непрерывности функции в точке x_0, а именно:

– функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

а) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$;

в) выполняются равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

– функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она непрерывна на этом множестве.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ не определена в этой точке;

2) $f(x)$ определена в точке x_0, но не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$).

Различают следующие случаи точек разрыва функции:

1) если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и при этом $x_0 \notin D(f)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва*;

2) если не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но существуют конечные односторонние пределы, причем $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка x_0 назы-

вается *разрывом первого рода*, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$ или не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

4.14. Производная, дифференцирование сложных и обратных функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности точки x_0 и $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, где $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$.

Предел отношения $\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ при условии, что последнее произвольным образом стремится к нулю называется *производной функции* $y=F(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначается $f'(x_0)$; $y'(x_0)$; $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной в точке x: $(f(x))'$; $\dfrac{df(x)}{dx}$; $\dfrac{d}{dx}f(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x; y.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y=f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0,f(x_0))$, т. е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox, поэтому уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.*

Если $f'(x_0) = 0$, нормаль имеет уравнение $x = x_0$.

Если функция $x = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки (координата x такой точки есть известная функция времени t), то производная $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ есть ее скорость в момент времени t. В этом заключается механический смысл производной:

$$v(t) = s'(t).$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в некоторой точке x, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$(cu)' = cu';$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ (где } c - \text{const});$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \tag{4.7}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad (4.8)$$

Формулы (4.7) и (4.8) обобщаются на случай алгебраической суммы (произведения) любого конечного числа функций $u_k = u_k(x) \times \times \left(k = \overline{1, n}\right)$, имеющих производную в точке x:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n',$$

$$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n'.$$

Укажем производные основных элементарных функций.

1. $(c)' = 0$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in R$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a \in R_+)$.
4. $(e^x)' = e^x$.
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
7. $(\sin x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\sin x$.
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

13. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

14. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

18. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции

Пусть на множестве T задана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, причем функция $x = \varphi(t)$, (x – промежуточный аргумент) имеет в некоторой точке $t \in T$ производную $x' = \varphi'(t)$, а функция $y = f(x)$ – в соответствующей точке $x \in X$ (X – множество значений функции $x = \varphi(t)$) производную $y' = f'(x)$, тогда

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(t),$$

т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимой переменной.

Аналогично находится и производная сложной функции с большим числом промежуточных аргументов. Например, если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$ (два промежуточных аргумента), т. е. если $y = f(\varphi\{\psi(t)\})$, то $y'(t) = f'(u)\varphi'(x)\psi'(t)$.

Производная обратной функции

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$, причем в рассматриваемой точке x производная функции $y=f(x)$ не равна нулю, то для производной обратной функции в соответствующей точке y справедлива формула

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

Из этой формулы следует, что

$$f'(x)=\frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

4.15. Дифференциал функции и его приложения

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x\in X$, если ее приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, может быть представлено в виде

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x), \tag{4.9}$$

где $A=\text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Определение. Если приращение функции $y=f(x)$ в точке $x\in X$ может быть представлено в виде (4.9), то главная часть этого приращения, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в точке* x.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}f(x)$ или $\mathrm{d}f$.

Таким образом,

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

Обычно дифференциал функции находят, пользуясь его аналитическим выражением:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x. \tag{4.10}$$

Дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т. е.

$$\mathrm{d}x = \Delta x.$$

Поэтому

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Из формул (4.10) и (4.11) следует, что задача нахождения дифференциала функции $f(x)$ равносильна нахождению ее производной. Поэтому большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциала. Так, например, если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента, то

$$\mathrm{d}(cu) = c\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

Формула (4.11) сохраняет свою силу в том случае, если аргумент x сам является дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $(x = \varphi(t))$, т. е. форма дифференциала не зависит от того, является аргумент данной функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это важное свойство дифференциала функции принято называть *инвариантностью его формы*.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на использовании приближенного равенства

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Последнее приближенное равенство позволяет по известному значению функции $y = f(x)$ и ее производной в точке x_0 вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке, достаточно близкой к x_0 (т. е. при достаточно малом приращении Δx).

4.16. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение. Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$. Вторая производная обозначается одним из символов: $f''(x)$; y'' или $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка: третья производная $f'''(x) = (f''(x))'$ (другие обозначения y''' или $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$); четвертая производная $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$ (другие обозначения $y^{IV}, y^{(4)}, \dfrac{d^4 y}{dx^4}$); производная n-го порядка $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ (другие обозначения $y^{(n)}$ или $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$).

Механический смысл второй производной. Если функция $x = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения точки, то $x'' = f''(t)$ – ускорение этого движения в момент времени t.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка последовательно находят все ее производные низших порядков. Ранее был указан способ нахождения неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$. При этом было замечено, что полученное выражение для y', как правило, содержит x и y. Для отыскания второй производной y'' неявной функции надо уже найденную первую производную продифференцировать по переменной x, считая y функцией x. Вторая производная, как правило, будет выражаться через x, y, y'. Поскольку y' уже найдена, то ее подставляют в полученное выражение для y'' и тем самым находят y'', выраженную окончательно через x и y. Аналогично находят y''', y^{IV} и т. д.

Для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } t \in T,$$

первая производная имеет вид $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t}$. Производные высших порядков можно записать:

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{(y'(x))'_t}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(x) = \dfrac{(y''(x))'_t}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Определение. Дифференциал от дифференциала от функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ее *вторым дифференциалом* (или *дифференциалом второго порядка*) в точке x. Обозначается второй дифференциал символом $\mathrm{d}^2 y$ или $\mathrm{d}^2 f(x)$. Таким образом, $\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y)$.

Аналогично определяются и обозначаются дифференциалы любого порядка: третий дифференциал $\mathrm{d}^3 y = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^2 y\right)$; дифференциал n-го порядка $\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{n-1} y\right)$.

В случае, когда аргумент x является независимой переменной, для дифференциалов второго, третьего и n-го порядка справедливы соответственно представления:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\,(\mathrm{d}x)^2; \tag{4.12}$$

$$\mathrm{d}^3 y = f'''(x)\,(\mathrm{d}x)^3;$$

$$\mathrm{d}^n y = f^n(x)\,(\mathrm{d}x)^n.$$

Для сложной функции $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, дифференциал второго порядка имеет вид

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)(\mathrm{d}x)^2 + f'(x)\,\mathrm{d}^2 x. \tag{4.13}$$

Сравнив формулы (4.12) и (4.13) можно сделать вывод, что второй дифференциал (в отличие от первого) уже не обладает свойством инвариантности формы. Тем более не обладают свойством инвариантности последующие дифференциалы.

4.17. Приложения дифференциального исчисления

Монотонность, точки экстремума функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на конечном или бесконечном промежутке (a, b).

Определение. Функция $f(x)$, $x \in (a,b)$ называется *возрастающей* на промежутке (a,b), если для любых $x_1,\ x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{4.14}$$

(рис. 4.3, 4.4), и *убывающей*, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует

$$f(x_1) > f(x_2) \tag{4.15}$$

(рис. 4.5, 4.6).

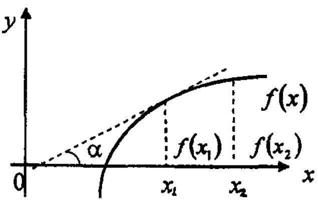


Рис. 4.3

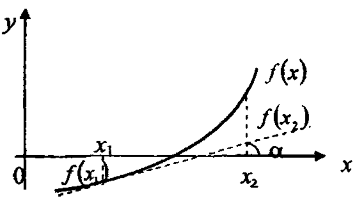


Рис. 4.4

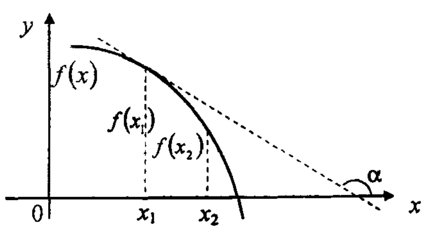


Рис. 4.5

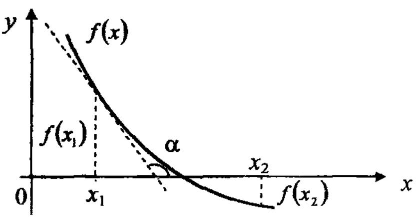


Рис. 4.6

Если в определении неравенства (4.14), (4.15) заменяются нестрогими неравенствами $f(x_1) \le f(x_2)$ и $f(x_1) \ge f(x_2)$, то соответственно употребляются термины: неубывающая и невозрастающая функция. Возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая функции объединяются понятием монотонной функции.

Теорема 4.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке (a,b) и внутри его имеет конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ не убывала (не возрастала) на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы было

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

для всех $x \in (a,b)$.

Если же для любого $x \in (a,b)$

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0),$$

то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Условия теоремы для возрастающей и убывающей функции достаточны, но не необходимы. Например, функция $y = x^3$ возрастает на $(-1,1)$, но $y'(0) = 0$.

Установленная связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически объясняется просто, так как производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Если касательная образует с осью Ox острый угол α ($\mathrm{tg}\,\alpha > 0$), то функция возрастает в данном промежутке (рис. 4.3, 4.4), если же угол α – тупой $(\mathrm{tg}\,\alpha < 0)$, то функция убывает (рис. 4.5, 4.6).

Особую роль в исследовании поведения функции на промежутке играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует δ-окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, такая, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$

$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значение $f(x_0)$ называют *локальным максимумом* (*минимумом*) функции и обозначают

$$\max_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \quad \left(\min_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \right).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы называют *экстремумами* функции.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями. Если функция $f(x)$ на (a,b) имеет несколько максимумов и минимумов, то может оказаться, что локальный максимум функции меньше ее локального минимума. Например, на рис. 4.7 точки x_1, x_3, x_5 есть точки локальных максимумов, а точки x_2, x_4 – точки локальных минимумов функции $f(x)$.

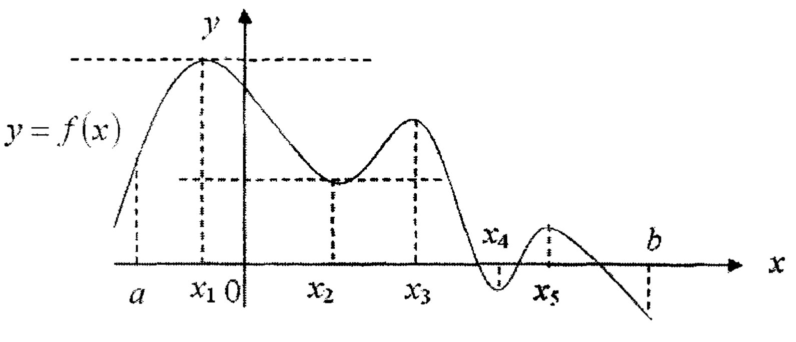


Рис. 4.7

Наибольшее или наименьшее значения функции $f(x)$ в области ее определения или на отрезке $[a,b]$ в отличие от локальных ее экстремумов называют соответственно *абсолютными* (*глобальными*) *максимумом* и *минимумом* $f(x)$ и обозначают

$$\max_{x \in [a,b]} f(x), \quad \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Эти значения функция принимает в одной из точек экстремума в интервале (a,b) или в одной из граничных точек a,b.

Например, для функции $f(x)$ на рис. 4.7 на отрезке $[a,b]$ абсолютный максимум $f(x_1)$ достигается в точке x_1, абсолютный минимум равен $f(b)$.

Необходимое условие экстремума функции выражается теоремой Ферма.

Теорема 4.5. Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то ее производная

$$f'(x)=0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума параллельна оси Ox (рис. 4.7).

Точки, в которых $f'(x)=0$, называются *стационарными*.

Функция может достигать экстремума также и в точке, в которой конечная производная не существует. Например, функция $y=|x+3|$ не имеет производной в точке $x=-3$ $(y'(-3-0)=-1$, $y'(-3+0)=-1)$, но достигает в ней минимума $y=0$ (рис. 4.8).

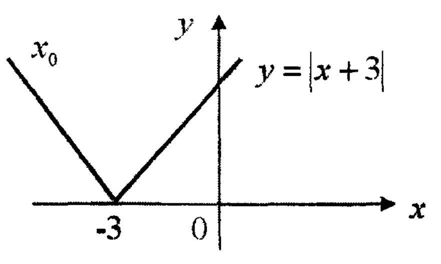


Рис. 4.8

Точки, в которых функция непрерывна, а ее производная равна нулю или обращается в бесконечность, или не существует, называются *критическими точками* или *точками возможного экстремума функции*. Критическая точка x_0 называется *угловой точкой функции* $f(x)$, если существуют $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$ (рис. 4.9) и точкой возврата функции, если ее левая $f'(x_0-0)$ и правая $f'(x_0+0)$ производные бесконечны (касательная к графику $f(x)$ в точке x_0 параллельна оси Oy) (рис. 4.10).

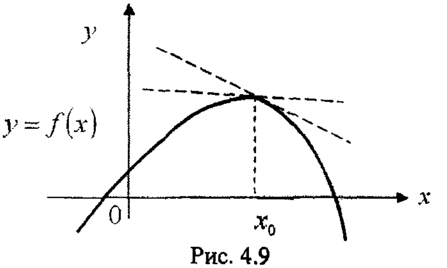


Рис. 4.9

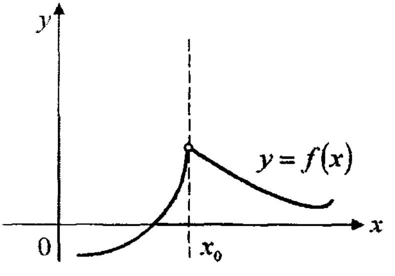


Рис. 4.10

Вместе с тем не всякая критическая точка функции является точкой ее экстремума. Например, для функции $y=x^3$ точка $x=0$ – стационарная, но в этой точке нет экстремума. Для того чтобы выяснить, является ли критическая точка функции точкой ее локального экстремума, требуются дополнительные исследования. Эти исследования состоят в проверке достаточных условий для существования экстремума.

Теорема 4.6 (*первый достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Например, для функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ точки $x_1=1$ и $x_2=3$, являются стационарными, т. к. $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Согласно теореме 4.6 точка $x_1=1$ есть точка максимума, а точка $x_2=3$ – точка минимума данной функции.

Теорема 4.7 (*второй достаточный признак существования экстремума*). Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в ее δ-окрестности $O_\delta(x_0)$, является точкой локального максимума функции, если $f''(x_0)<0$, и точкой локального минимума, если $f''(x_0)>0$.

Для функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ $f''(x)=6x-12=6(x-2)$, $f''(1)<0$, $f''(3)>0$. По теореме 4.7 стационарные точки $x_1=1$ и $x_2=3$ являются соответственно ее точками максимума и минимума.

Теорема 4.8 (*третий достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть функция $f(x)$ *n* раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда, если *n* – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума, если *n* – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума, если *n* – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Чтобы найти абсолютные (глобальные) экстремумы, т. е. наименьшее $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и наибольшее $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ее значение на отрезке $[a,b]$, следует вычислить ее значения в точках локального экстремума, принадлежащих отрезку, а также на концах отрезка, и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них. На концах отрезка в силу характера своего поведения функция может принимать значения большие или меньшие, чем значения в точках экстремума (рис. 4.7), поэтому концы отрезка включаются при отыскании абсолютных экстремумов.

4.18. Область определения функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Если каждой паре действительных чисел (x, y), принадлежащей множеству D, по определенному правилу f ставится в соответствие одно и только одно число $z \in E \le R$, то говорят, что на множестве D задана функция f (или отображение) двух переменных, определенная на множестве D со значениями в R и записывают $z = f(x, y)$ или $f : D \to R$.

Множество $D = D(f)$ называется областью определения функции. Множество E значений, принимаемых z в области определения, называется областью ее значений.

Так как всякое уравнение $z = f(x, y)$ определяет в пространстве, в котором введена декартовая система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под графиком функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Геометрически областью определения функции может быть вся плоскость Oxy или ее часть, ограниченная линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называют замкнутой и обозначают $\overline{D}$, во втором – открытой. Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют значением функции.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и большего числа переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий или поверхностей уровня.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости Oxy, в которых функция f сохраняет постоянное значение, т.е. удовлетворяющих равенству $f(x, y) = C$, где C – постоянная.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства, удовлетворяющих равенству $f(x, y, z) = C$, где C – постоянная.

4.19. Дифференцирование функций нескольких переменных

Частные производные

Частным приращением функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, соответствующим приращению Δx_i переменной x_i называется разность

$$\Delta_i z = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

В случае если функция z – функция двух переменных $z = f(x, y)$, то

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

$\Delta_x z$ – частное приращение функции $z = f(x, y)$ по переменной x, а

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$\Delta_y z$ – частное приращение функции $z = f(x, y)$ по переменной y.

Частной производной функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i к приращению самого аргумента функции x_i, при условии, что последнее приращение стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{\Delta x_i \to o} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Частные производные обозначаются одним из следующих образов: z'_{x_i}, $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, f'_{x_i}, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Процесс нахождения частных производных функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ называется *дифференцированием* функции.

В случае если функция z – функция двух переменных $z = f(x,y)$, то

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

и

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

где z'_x и z'_y – *частные производные* функции $z = f(x,y)$ по переменным x и y соответственно.

Частные производные функций нескольких переменных вычисляются по тем же самым правилам, что и производные функций одной переменной, но при этом надо считать, что все переменные, кроме переменной, по которой берется производная, являются константами.

Частные производные высших порядков

Частная производная от частной производной функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ называется *частной производной второго порядка* функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$.

Вводятся следующие обозначения:

$$z''_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} = (z'_{i_j})'_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

$$z''_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = (z'_{x_j})'_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right).$$

Аналогично определяются частные производные s-го порядка функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$.

В случае если частная производная высшего порядка функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ получена дифференцированием функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ по разным переменным, то она называется *смешанной.*

Если при нахождении смешанной производной s-го порядка функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ все промежуточные производные являлись непрерывными в точке $(x_1,\dots,x_n)$, то ее вычисление не зависит от того, в каком порядке брались производные по ее переменным. В этом случае, запись $\dfrac{\partial^s z}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$, где $k_1+\dots+k_n = s$, обозначает, что s-я смешанная производная функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ получена k_1 раз дифференцированием по переменной x_1, k_2 раз дифференцированием по переменной x_2, ..., k_n раз дифференцированием по переменной x_n, при этом порядок дифференцирования не имеет значения.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Дифференциал функции

Полным приращением функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$, при приращениях ее аргументов x_1, ..., x_n на Δx_1, ..., Δx_n соответственно называется разность

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Если полное приращение функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$\Delta z = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\Delta x),$$

где $A_1 = A_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $A_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $o(\Delta x)$ – такая функция, что $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}} = 0$, то функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *дифференцируемой*, а главная (линейная) часть полного приращения Δz

$$A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$$

называется *дифференциалом* функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается

$$dz = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n. \tag{4.16}$$

По определению, дифференциалом независимых переменных называются сами их приращения, то есть $\mathrm{d}x_1 = \Delta x_1$, …, $\mathrm{d}x_n = \Delta x_n$, поэтому формулу (4.16) можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{d}z = A_1 \mathrm{d}x_1 + \ldots + A_n \mathrm{d}x_n. \tag{4.17}$$

Достаточным условием дифференцируемости функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ является непрерывность всех ее частных производных, в этом случае имеет место следующие равенства $A_1 = A_1(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}$, …, $A_n = A_n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$, а значит формула (4.17) примет вид

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n.$$

В случае непрерывности частных производных функции $z = f(x, y)$, ее дифференциал равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Дифференциал функции нескольких переменных, как и для функции одной переменной, используется для приближенного вычисления значений функций. А именно, для дифференцируемой функции при маленьких приращениях аргументов Δx_1, ..., Δx_n приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е.

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n) \approx df(x_1, \ldots, x_n).$$

Если расписать подробно, получим

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, \ldots, x_n) + f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_1 + \\ + \ldots + f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_n.$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ данная формула примет следующий вид:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Дифференциал высшего порядка

Дифференциалом 2 порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, считая дифференциалы независимых переменных константами.

Дифференциалом s-го порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от дифференциала s–1-го порядка функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, считая дифференциалы независимых переменных константами и обозначается $d^s z$.

В случае, если функции $z = f(x_1,\dots,x_n)$ обладает всеми непрерывными частными производными до s-го порядка включительно, то символически можно записать

$$\mathrm{d}^s z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^s z.$$

Данная формула раскрывается по формуле бинома Ньютона.

s-й дифференциал независимой переменной x, вместо записи $(\mathrm{d}x)^s$, обозначается $\mathrm{d}x^s$.

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$, при выполнении соответствующих условий, второй дифференциал равен

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

Для функции трех переменных $u = f(x,y,z)$, при тех же условиях, имеем

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z +$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2.$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть функция $z = f(x_1,\dots,x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1,\dots,x_n)$, а функции $x_1 = g_1(t_1,\dots,t_m)$, …, $x_n = g_n(t_1,\dots,t_m)$ имеют частную производную по t_j в точке $(t_1,\dots,t_m)$, тогда сложная функция $z = f(g_1(t_1,\dots,t_m),\dots,g_n(t_1,\dots,t_m))$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1,\dots,t_m)$ и верна следующая формула

$$\frac{\partial z}{\partial t_j}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$

Частными, являются следующие случаи:

1) пусть функция $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1,\ldots,x_n)$, а функции $x_1=g_1(t)$, ..., $x_n=g_n(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда сложная функция $z=f(g_1(t),\ldots,g_n(t))$ дифференцируема в точке t и имеет место следующая формула:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j};$$

2) пусть функция $z=f(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $x=g(t_1,\ldots,t_m)$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1,\ldots,t_m)$, тогда сложная функция $z=f(g(t_1,\ldots,t_m))$ имеет частную производную по t_j в точке $(t_1,\ldots,t_m)$ и верна следующая формула

$$\frac{\partial z}{\partial t_j}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial t_j}.$$

Для функции двух переменных вышесказанное имеет следующую форму. Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x=g(u,v)$ и $y=h(u,v)$ имеют частную производную по u (по v) в точке (u,v), тогда сложная функция $z=f(g(u,v),h(u,v))$ имеет частную производную по u (по v) в точке (u,v) и верны следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Частным является следующий случай. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), а функции $x = g(t)$ и $y = h(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда сложная функция $z = f(g(t), h(t))$ дифференцируема в точке t и имеет место следующая формула:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

В случае, если $y = h(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Аналогичная формула имеет место, если переменная x является функцией от переменной y.

Дифференцирование неявно заданных функций

Пусть дифференцируемая функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ задана неявно $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, тогда

$$y'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}.$$

Если функция одной переменной $y = f(x)$ задается неявно $F(x, y) = 0$, то формула имеет вид

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Для функции $z = z(x, y)$, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$, имеем

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

4.20. Экстремум функции нескольких переменных

Локальные экстремумы функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если значения функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x, y)$ некоторой окрестности точки M_0, т.е. $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ [соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$] для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $|M_0M| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число.

Локальные максимум и минимум функции называются ее локальными экстремумами. Точка M_0, в которой достигается экстремум, называется точкой локального экстремума.

Необходимые условия экстремума

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е. $\frac{\partial f(x_0, y_o)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0, y_o)}{\partial y} = 0$.

Эти уравнения эквивалентны одному: $df(x_0, y_0) = 0$. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума. В стационарной точке касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ параллельна плоскости Oxy.

Достаточные условия локального экстремума

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка дважды дифференцируемой в некоторой окрестности точки M_0 функции и пусть

$$A = f_{xx}''(x_0, y_0), B = f_{xy}''(x_0, y_0), C = f_{yy}''(x_0, y_0), \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $\Delta = 0$, требуются дополнительные исследования. В этом случае используются неравенства $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ или $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Эти условия эквивалентны следующим:

1) если $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, то $f(x_0, y_0)$ – максимум функции $z = f(x, y)$;

2) если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, то $f(x_0, y_0)$ – минимум функции $z = f(x, y)$.

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1.1. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу $\widetilde{A}$ приведем к трапециевидной форме

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \widetilde{A} = 3$ (числу неизвестных системы). Значит, *исходная система совместна и имеет единственное решение.*

1. По формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -50; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25.$$

Находим $x_1 = \dfrac{-25}{-25} = 1$; $x_2 = \dfrac{-50}{-25} = 2$; $x_3 = \dfrac{25}{-25} = -1$.

2. С помощью обратной матрицы $X = A^{-1}H$, где A^{-1} – обратная матрица к A; H – столбец правых частей.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Решение системы:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} -6 & -11 & 3 \\ -7 & 8 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

3. Заданная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ -5x_2 - 3x_3 = -13; \\ 5x_3 = -5. \end{cases}$$

(прямой ход Гаусса совершен при нахождении рангов матриц A и $\widetilde{A}$).

Тогда $x_3 = -1$, $x_2 = (-13 + 3x_3)/(-5) = 2$, $x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 = 1$.

Задание 1.2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований матрицу A приведем к трапециевидной форме

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathrm{rang} A = 2 < 3$ и система имеет бесконечное множество решений, зависящих от 3 – 2 = 1 произвольной постоянной. Исходная система эквивалентна

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \\ 13x_2 - 16x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_2 = \dfrac{16x_3}{13}$, $x_1 = -\dfrac{17x_3}{13}$.

Полагая $x_3 = C$ (произвольной постоянной), имеем

$$x_1 = -\frac{17C}{13}, \qquad x_2 = \frac{16C}{13}, \qquad x_3 = C.$$

Задание 1.3. По координатам точек $A(-5; 1; 6)$, $B(1; 4; 3)$, $C(6; 3; 9)$ найти.

1. Модуль вектора $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{BC}$.

$\vec{AB} = (6; 3; -3)$; $\vec{BC} = (5; -1; 6)$; $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{BC} = (1; 4; -9)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{1+16+81} = \sqrt{98}\,.$$

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1\cdot 5 + 4\cdot(-1) + (-9)\cdot 6 = -53\,.$$

3. Проекцию вектора $\vec{c} = \vec{BC}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AB}$.

$$np_{\vec{d}}\,\vec{c} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|} = \frac{6\cdot 5 + 3\cdot(-1) + (-3)\cdot 6}{\sqrt{36+9+9}} = \frac{9}{\sqrt{54}}\,.$$

4. Координаты точки $M(X_M; Y_M; Z_M)$, делящей отрезок $\ell = AB$ в отношении 1:3; $\lambda = \frac{1}{3}$. Следовательно:

$$X_M = \frac{-5+\frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{7}{2};\ Y_M = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{7}{4};\ Z_M = \frac{6+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Задание 1.4. Даны четыре точки $A_1(4;\ 7;\ 8)$, $A_2(-1;\ 13;\ 0)$, $A_3(2;\ 4;\ 9)$, $A_4(1;\ 8;\ 9)$. Составить уравнения.

1. Плоскости $A_1A_2A_3$.

Уравнение плоскости по трем точкам имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-4 & 9-8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{откуда } 6x - 7y - 9z + 97 = 0\,.$$

2. Прямой A_1A_2.

Уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \text{ откуда } \frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}.$$

3. Прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что вектор $\vec{a}(6;-7;-9)\parallel A_4M$, откуда уравнение A_4M имеет вид $\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}$.

4. Прямой A_4N, параллельной A_1A_2.

Значит, вектор $\vec{b}(-5;6;-8)\parallel A_4N$ и уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-8}{6}=\frac{z-9}{-8}.$$

5. Плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вектор $\vec{b}(-5;\ 6;\ -8)$ перпендикулярен искомой плоскости. Значит, $-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0$ – ее уравнение, которое приводится к виду $5x-6y+8z-29=0$.

6. Вычислить $\sin\alpha$ – угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

$$\sin\alpha=|\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1A_4},\vec{a}})|; \qquad \overrightarrow{A_1A_4}=(-3;\ 1;\ 1);$$

$$\sin\alpha=\frac{|-3\cdot 6+1\cdot(-7)+1\cdot(-9)|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{36+49+81}}=\frac{34}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{166}}.$$

7. Косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вектор $\vec{k} \perp Oxy$, а вектор $\vec{a} \perp A_1A_2A_3$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{9}{\sqrt{166}}.$$

Задание 1.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4;\,3;\,1)$ и $N(-2;\,0;\,-1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1;\,1;\,-1)$ и $B(-3;\,1;\,0)$.

Найти вектор $\vec{n}$, перпендикулярный искомой плоскости. Вектор $\vec{n} \perp \vec{MN}$ и $\vec{n} \perp \vec{AB}$, следовательно, в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять $[\vec{MN}, \vec{AB}]$.

$$\vec{MN} = (-6;-3;\,-2);\ \vec{AB} = (-4;\,0;\,1);$$

$$[\vec{MN}, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомой плоскости $-3(x-4)+14(y-3)-12(z-1)=0$, которое приводится к виду $3x-14y+12z+18=0$.

Задание 1.6. Найти $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, если $y = \operatorname{tg}\ln x^3 + \dfrac{x^4}{1+x^5}$, $y = 2^{\sin x^2}\cdot\sqrt[3]{x}$, $y = \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+5x}\right)}{x}$.

Решение.

1. Для $y = tg\ln x^3 + \dfrac{x^4}{1+x^5}$ имеем

$$y' = \frac{dy}{dx} = (\operatorname{tg}\ln x^3)' + \left(\frac{x^4}{1+x^5}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \ln x^3}\left(\ln x^3\right)' +$$

$$+\frac{(x^4)'(1+x^5) - x^4(1+x^5)'}{(1+x^5)^2} = \frac{1}{\cos^2 \ln x^3}\cdot\frac{(x^3)'}{x^3} + \frac{4x^3\left(1+x^5\right) - x^4\cdot 5x^4}{\left(1+x^5\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{x\cos^2 \ln x^3} + \frac{x^3\left(4-x^5\right)}{\left(1+x^5\right)^2}.$$

2. Для $y = 2^{\sin x^2}\cdot\sqrt[3]{x}$.

$$y' = \left(2^{\sin x^2}\right)'\sqrt[3]{x} + 2^{\sin x^2}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(2^{\sin x^2}\cdot\ln 2\right)'\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\cdot 2^{\sin x^2}\cdot x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= 2^{\sin x^2}\cdot\ln 2\cdot\left(\sin x^2\right)'\ln 2\cdot\sqrt[3]{x} + \frac{2^{\sin x^2}}{3x^{\frac{2}{3}}} = 2^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\left(x^2\right)'\cdot\ln 2\cdot\sqrt[3]{x} +$$

$$+\frac{2^{\sin x^2}}{3x^{\frac{2}{3}}} = 2^{1+\sin x^2}\cdot x^{\frac{4}{3}}\ln 2\cos x^2 + \frac{2^{\sin x^2}}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

3. Для $y = \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+5x}\right)}{x}$.

$$y' = \frac{1}{x^2}\left(\left(\arcsin\sqrt{x^2+5x}\right)' x - x' \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+5x})^2}}\left(\sqrt{x^2+5x}\right)' - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-5x}} \cdot \frac{\left(x^2+5x\right)'}{2\sqrt{x^2+5x}} - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x(2x+5)}{2\sqrt{1-x^2-5x}\sqrt{x^2+5x}} - \arcsin\sqrt{x^2+5x}\right).$$

Задание 1.7. Найти $\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$, если

$$y = \sin 5x\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right), \qquad y - \ln y = \sqrt{x}, \qquad \begin{cases} x = t\cos t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Решение.

1. $y' = (\sin 5x)'\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right) + \sin 5x\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 5\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)\cos 5x +$

$$+\mathrm{e}^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' \sin 5x = 5\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)\cos 5x + 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin 5x;$$

$$y'' = 5\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)' \cos 5x + 5\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)(\cos 5x)' + 2x'\mathrm{e}^{x^2} \sin 5x + 2x\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' \sin 5x +$$

$$+2xe^{x^2}\cdot(\sin 5x)' = 5e^{x^2}\cdot 2x\cos 5x + +5\left(1+e^{x^2}\right)(-5\sin 5x)2e^{x^2}\sin 5x +$$

$$+10xe^{x^2}\cdot\cos 5x = 20xe^{x^2}\cdot\cos 5x - \left(25+23e^{x^2}\right)\sin 5x + 4x^2e^{x^2}\sin 5x.$$

2. Дифференцируя уравнение для $y(x)$, имеем:

$$y' - (\ln y)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y' - \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

откуда

$$y' = \frac{y}{2(y-1)\sqrt{x}}.$$

Дифференцирование последнего соотношения дает

$$y'' = \frac{1}{2\left((y-1)\sqrt{x}\right)^2}\left[y'(y-1)\sqrt{x} - y((y-1)\sqrt{x})'\right] =$$

$$= \frac{1}{2(y-1)^2 x}\left[y'(y-1)\sqrt{x} - y\cdot\left(y'\sqrt{x} + (y-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2(y-1)^2 x}\left(y'\sqrt{x} + \frac{y(y-1)}{2\sqrt{x}}\right).$$

Внося выражение для y', находим

$$y'' = -\frac{y}{4(y-1)^2 x}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{y-1}{\sqrt{x}}\right).$$

3. Первая производная заданной параметрически функции вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь

$$x'_t = \cos t - t\sin t, \qquad y'_t = 2\cos t,$$

откуда

$$y'_x = \frac{2\cos t}{\cos t - t\sin t}.$$

Вторую производную вычислим по формуле

$$y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'_t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{\cos t - t\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\cos t}{\cos t - t\sin t}\right) =$$

$$= \frac{2}{(\cos t - t\sin t)^3}\Big((\cos t)'(\cos t - t\sin t) - \cos t(\cos t - t\sin t)'\Big) =$$

$$= \frac{2}{(\cos t - t\sin t)^3}\big(-\sin t(\cos t - t\sin t) - \cos t(-\sin t - \sin t - t\cos t)\big) =$$

$$= \frac{2(t - 3\sin t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3}.$$

Задание 1.8. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x^7}-1}{\sin x^7}; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right); \qquad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Решение.

1. Искомый предел является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x^7}-1}{\sin x^7} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+4x^7}-1\right)'}{\left(\sin x^7\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+4x^7\right)'}{3\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\cos x^7\left(x^7\right)'} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{28x^6}{21\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cos x^7\cdot x^6}=\frac{28}{21}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+4x^7\right)^{\frac{2}{3}}\cos x^7}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}.$$

2. Предел является неопределенностью вида $\infty-\infty$, поэтому вначале его надо преобразовать к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$a=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

К последнему (типа $0/0$) можно применять правило Лопиталя:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x\sin x\right)}{\sin x+x\cos x}.$$

Полученный предел вновь является неопределенностью $0/0$, поэтому повторное применение правила дает

$$a=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sin x\right)'}{\left(\sin x+x\cos x\right)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

3. Предел является неопределенностью вида 0^0, к которой удобно применять следующий прием. Обозначим

$$y=x^{\frac{2}{\ln\left(e^x-x\right)}},\quad \ln y=\frac{2\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}.$$

Вычислим вспомогательный предел

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left[\ln\left(e^x-1\right)\right]'} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(xe^x\right)'} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = 2.$$

Итак, искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0} y = e^2.$$

Задание 1.9. Исследовать функцию $y = 1 + e^{-x^2}$ и построить ее график.

Решение. Областью определения является вся действительная ось $\left(|x| < \infty\right)$. Для отыскания участков монотонности находим

$$y' = \left(e^{-x^2}+1\right) = -2xe^{-x^2}.$$

Тогда $y' > 0$ при $x < 0$ (интервал возрастания), $y' < 0$ при $x > 0$ (интервал убывания). Точка $x = 0$ является стационарной, поскольку $y'(0) = 0$. При переходе через $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, поэтому при $x = 0$ функция имеет локальный максимум.

Для отыскания участков выпуклости используется вторая производная

$$y'' = -2\left(xe^{-x^2}\right)' = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}.$$

При $2x^2-1>0$ или $|x|>1/\sqrt{2}$ будет $y''>0$ и функция вогнута; при $|x|<1/\sqrt{2}$ $y''<0$ и функция выпукла. Вертикальных асимптот функция не имеет. Для отыскания наклонных асимптот $y=ax+b$ вычислим

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to 0}(y-ax)=\lim_{x\to 0}\left(1+e^{-x^2}\right)=1.$$

Поэтому при $x\to\pm\infty$ функция имеет асимптоту $y=1$.

Результаты исследования с учетом четности функции $(y(-x)=y(x))$ показаны на графике (рис. 5.1).

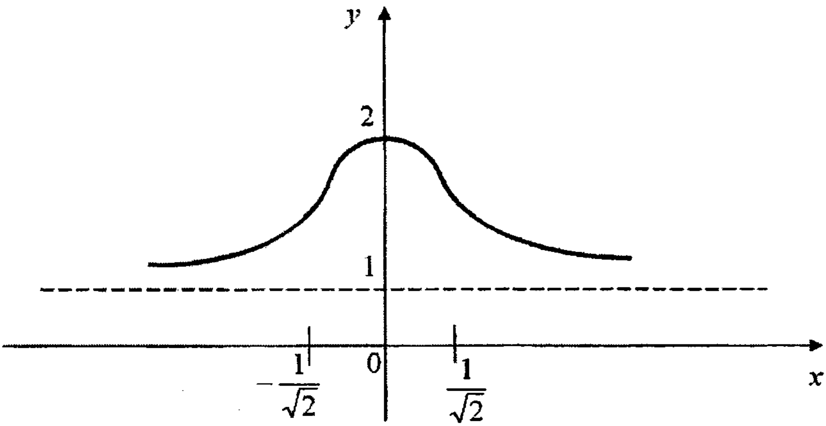


Рис. 5.1

Задание 1.10. Найти полный дифференциал функции $z=xy\cdot e^{5x^2}$.

Решение. Частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{5x^2}+xy\cdot e^{5x^2}\cdot 10x=ye^{5x^2}\left(1+10x^2\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{5x^2}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\left(1+10x^2\right) e^{5x^2}dx + xe^{5x^2}dy.$$

Задание 1.11. Найти частные производные второго порядка функции.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Затем, дифференцируя найденные частные производные, получим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x^y \cdot \ln x \cdot \ln x = x^y(\ln x)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = yx^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= yx^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1} = x^{y-1}(y\ln x + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

6. ТЕСТ ЗА 1 СЕМЕСТР

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Найти длину вектора $\overline{MN}$, если $M(5;\,1;\,2)$, $N(6;\,1;\,2)$.

3. Векторы $\bar{a}=\{1;\,2;\,-1\}$ и $\bar{b}=\{3;\,6;\,-3\}$ являются:

   а) ортогональными;
   б) компланарными;
   в) коллинеарными;
   г) равными.

4. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,2;\,5)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{-1;\,4;\,-2\}$ имеет вид:

   а) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{5}$;
   б) $(x+1)+2(y-4)+5(z+2)=0$;
   в) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-2}$;
   г) $-(x-1)+4(y-2)+(z-2)=0$.

5. Уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D$ называется:

   а) каноническим;
   б) общим;
   в) параметрическим;
   г) в отрезках.

6. Записать величину отрезка, которую отсекает прямая $x+6y-12=0$ от оси Oy.

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

8. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

9. Найти $y'(1)$, если $y=\left(x^2+5\right)^2$.

10. Найти $\dfrac{df}{dx}$ для функции $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3}$.

а) $\frac{2}{3x}$; б) $\frac{2x-3}{3x^2}$; в) $\frac{9-x^2}{x^4}$; г) $\frac{5x^4-x^2+3}{x^6}$.

11. Если $y' > 0$ на интервале (a, b), то на этом интервале функция y

а) возрастает; б) убывает; в) вогнута; г) выпукла.

12. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = xy + x^2 + y^2$.

13. Составить полный дифференциал функции $z = 5xy + \mathrm{e}^{xy}$.

а) $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x + \mathrm{e}^{xy}$; б) $\mathrm{d}z = (5y + \mathrm{e}^{xy}x)\mathrm{d}x + (5x + \mathrm{e}^{xy}y)\mathrm{d}y$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y + \mathrm{e}^{xy}y$; г) $\mathrm{d}z = (5y + \mathrm{e}^{xy}y)\mathrm{d}x + (5x + \mathrm{e}^{xy}x)\mathrm{d}y$.

6.1. Ответы на тест

1	2	3	4	5	6	7
–37	1	в	в	б	2	5

8	9	10	11	12	13
$\frac{1}{4}$	12	в	а	$x+2y$	б

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПОПЕЙКО Надежда Семеновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов-заочников первого курса
экономических специальностей

В 2 частях

Часть 1

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

Подписано в печать 15.12.2010.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,15. Уч.-изд. л. 5,59. Тираж 200. Заказ 891.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.