Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики № 1

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Методическое пособие
для студентов инженерно-технических
специальностей

Минск
БНТУ
2011

УДК 519.677:004(075.8)
ББК 22.1я7
П 76

Авторы:
Е.А. Бричикова, Г.Н. Рейзина,
Н.М. Соколова, Н.И. Чепелев

Рецензенты:
Е.А. Федосик, Н.Н. Гурский

Бричикова, Е.А.
П 76 Применение средств компьютерной математики для решения прикладных задач: методическое пособие для студентов инженерно-технических специальностей / Е.А. Бричикова [и др.]. – Минск: БНТУ, 2011. – 30 с.

ISBN 978-985-525-414-1.

Методическое пособие содержит решение систем алгебраических уравнений в пакете MATHCAD, решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в пакетах MATHCAD и MATLAB, а также моделирование динамических систем в пакете SIMULINK. Приведены примеры.

УДК 519.677:004(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-414-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих прикладных задач сводится к решению алгебраических и дифференциальных уравнений или систем. Большинство уравнений и систем уравнений решить аналитически невозможно. В этом случае применяются численные методы решения уравнений и систем уравнений.

Настоящее методическое пособие позволит познакомиться с методами решения систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений средствами компьютерной математики (пакетами MATHCAD и MATLAB).

В первом разделе продемонстрированы способы решения систем алгебраических уравнений с помощью пакета MATHCAD.

Во втором разделе приведены примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью пакетов MATHCAD и MATLAB, а также возможность построения графиков полученных решений.

В третьем разделе показаны возможности пакета Simulink, который поставляется вместе с пакетом MATLAB и служит для интерактивного моделирования нелинейных динамических систем, заданных в виде стандартных блоков, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. РЕШЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATHCAD

С помощью пакета Mathcad невырожденную систему линейных алгебраических уравнений можно:

1) исследовать на совместность;
2) решить по формулам Крамера;
3) решить матричным методом (с помощью обратной матрицы);
4) решить методом Гаусса;
5) решить при помощи функции lsolve(A,b);
6) решить с помощью вычислительного блока Given.

Это не все способы решения таких систем, которые представляет пакет Mathcad, но в данном методическом пособии внимание будет уделено только этим.

Пусть надо решить систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 15. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим все эти методы на системе (1).

1.1. Исследование системы на совместность

Исследовать систему на совместность означает найти ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы, если они равны – система совместна.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ – матрица системы,

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов.

Чтобы определить матрицу надо записать имя матрицы, ввести оператор присваивания (:=) либо нажатием клавиши = клавиатуры, либо с панели Арифметика; далее в математическом меню выбрать кнопку с изображением матрицы, в открывшемся диалоговом окне выбрать количество строк и столбцов, нажать ОК и заполнить появившийся шаблон, перемещаясь между элементами с помощью клавиши TAB.

Найдем расширенную матрицу систему с помощью функции Ab:= augument (A,b), которая вызывается щелчком левой кнопки на значке $f(x)$ стандартной панели в открывшемся окне слева (категории) выбираем Вектор и Матрица, а справа (имя) функцию augument.

$$Ab := \mathrm{augument}(A, b)$$

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ранги матриц A и Ab находим с помощью функции rank(A) (rank(Ab)) из той же категории Вектор и Матрица.

rank(A) = 4, rank(Ab) = 4

Так как ранги равны, то система совместна, а так как rank(A) = rank(Ab) = n (числу неизвестных), то система имеет единственное решение.

1.2. Решение системы по формулам Крамера

Решить систему (1) по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i – определители матрицы, полученные из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов;

Δ – определитель матрицы системы A.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы системы с помощью соответствующего значка на панели Матрицы.

$\Delta := |A| \quad \Delta = 100.$

Далее формируем матрицы $A1$, $A2$, $A3$, $A4$:

$$A1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & -2 & 3 & -3 \\ 5 & 9 & 4 & 4 \\ 15 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 15 & 3 & -3 \\ 9 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 15 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 15 & -3 \\ 9 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 15 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

и вычисляем определители $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, $\Delta 4$.

$$\Delta 1 := |A1|, \quad \Delta 2 := |A2|, \quad \Delta 3 := |A3|, \quad \Delta 4 := |A4|$$

$$\Delta 1 = 200, \quad \Delta 2 = -100, \quad \Delta 3 = 100, \quad \Delta 4 = -200.$$

Находим x_1, x_2, x_3, x_4.

$$x_1 := \frac{\Delta 1}{\Delta}, \quad x_2 := \frac{\Delta 2}{\Delta}, \quad x_3 := \frac{\Delta 3}{\Delta}, \quad x_4 := \frac{\Delta 4}{\Delta}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -2.$$

1.3. Решение системы матричным методом

Решение системы (1) матричным способом с помощью обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей квадратной невырожденной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Система в матричном виде записывается следующим образом:

$$A \cdot X = b,$$

где A – матрица системы;

X – матрица неизвестных;

b – матрица свободных членов.

Так как $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot b$, то $X = A^{-1} \cdot b$.

Определяем матрицу A и находим обратную матрицу.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 & 0,1 & 0,3 \\ -0,4 & 0,2 & 0,1 & -0,3 \\ 0,9 & 0,3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,9 & -0,3 & -0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица найдена с помощью соответствующей кнопки панели Матрицы. Далее находим решение системы X.

$$X := A^{-1} \cdot b, \qquad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Решение системы методом Гаусса

Решаем систему (1) методом Гаусса с помощью Mathcad.

Так как первый элемент массива имеет номер 0, с помощью встроенной переменной ORIGIN изменяем его номер на 1. ORIGIN вводится с клавиатуры прописными буквами.

ORIGIN:=1.

Далее, аналогично проделанному в 1.1, определяем матрицу системы A и матрицу-столбец свободных членов b и создаем расширенную матрицу системы.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$P := \mathrm{augment}(A, b) \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

С помощью функции rref(P) из категории Вектор и Матрица приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$R := \mathrm{rref}(P) \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Последний столбец этой матрицы представляет собой столбец решений, выделяем последний столбец и выводим решение.

$$n := \mathrm{cols}(R) \quad X := R^{\langle n \rangle} \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Система решена.

1.5. Решение системы с помощью функции lsolve (A,b)

Решаем систему (1) с помощью функции lsolve (A,b).

Определяем матрицу системы A и матрицу-столбец свободных членов b.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Из категории Решение вызываем функцию lsolve (A,b).

$$\operatorname{lsolve}(A,b)=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

В результате сразу получаем вектор-решение.

1.6. Решение системы с помощью вычислительного блока Given

Решаем систему (1) с помощью вычислительного блока Given.

Вводим с помощью клавиатуры слово Given, записываем систему (1) и вызываем функцию Find из категории Решение. Равно в уравнениях набирается с помощью кнопки = панели Булево или с клавиатуры сочетанием клавиш Ctrl + =.

Given

$$x1+x2+x3+x4=0$$

$$2\cdot x1-2\cdot x2+3\cdot x3-3\cdot x4=15$$

$$9\cdot x1+9\cdot x2+4\cdot x3+4\cdot x4=5$$

$$3\cdot x1-3\cdot x2+2\cdot x3-2\cdot x4=15$$

$$Find(x1,x2,x3,x4)\to\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Символьный знак равенства → вводится с клавиатуры сочетанием клавиш Ctrl + . (точка) или с панелей Символы и Вычисления. Система решена.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в системе MATHCAD

Mathcad имеет ряд встроенных функций для решения дифференциальных уравнений. Для численного решения дифференциального уравнения нужно задать:

– само дифференциальное уравнение,

– начальные условия,

– множество точек, в которых нужно найти решение.

Наиболее употребляемым численным методом для решения дифференциальных уравнений является метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Для реализации этого метода в Mathcad имеется встроенная функция rkfixed, обращение к которой имеет вид

$$z := \mathrm{rkfixed}\left(y, x1, x2, N, D\right).$$

Аргументы функции имеют следующий смысл:

y – вектор начальных условий размерности n, где n – порядок дифференциального уравнения;

$x1$, $x2$ – начальная и конечная точки интервала, на котором ищется решение;

N – число точек, в которых ищется решение;

$D(x,y)$ – функция, которая возвращает значение в виде матрицы-столбца из n элементов.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = xy + 2\dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 0$, на отрезке $[1; 2]$.

Реализация решения данного дифференциального уравнения в системе Mathcad показана на рис. 1.

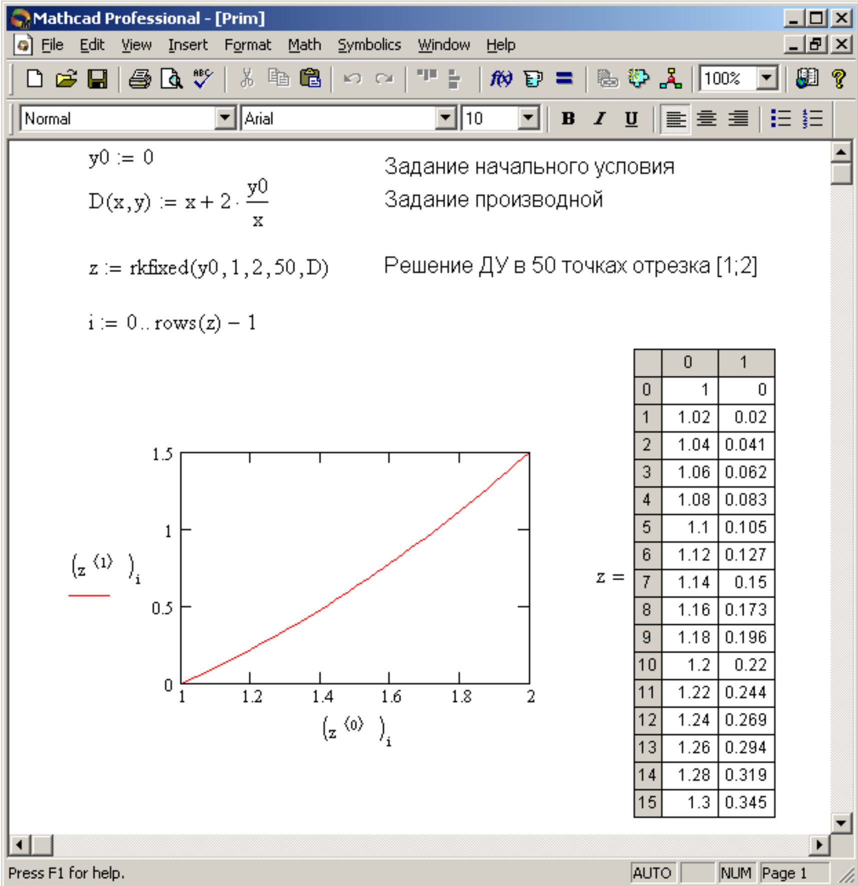

Рис. 1. Решение примера 1 в Mathcad

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = qx - axy \\ \dfrac{dy}{dt} = -sx + bxy \end{cases}$ при начальных условиях $\begin{cases} x(0) = 100 \\ y(0) = 40 \end{cases}$.

Решение в системе Mathcad приведено на рис. 2.

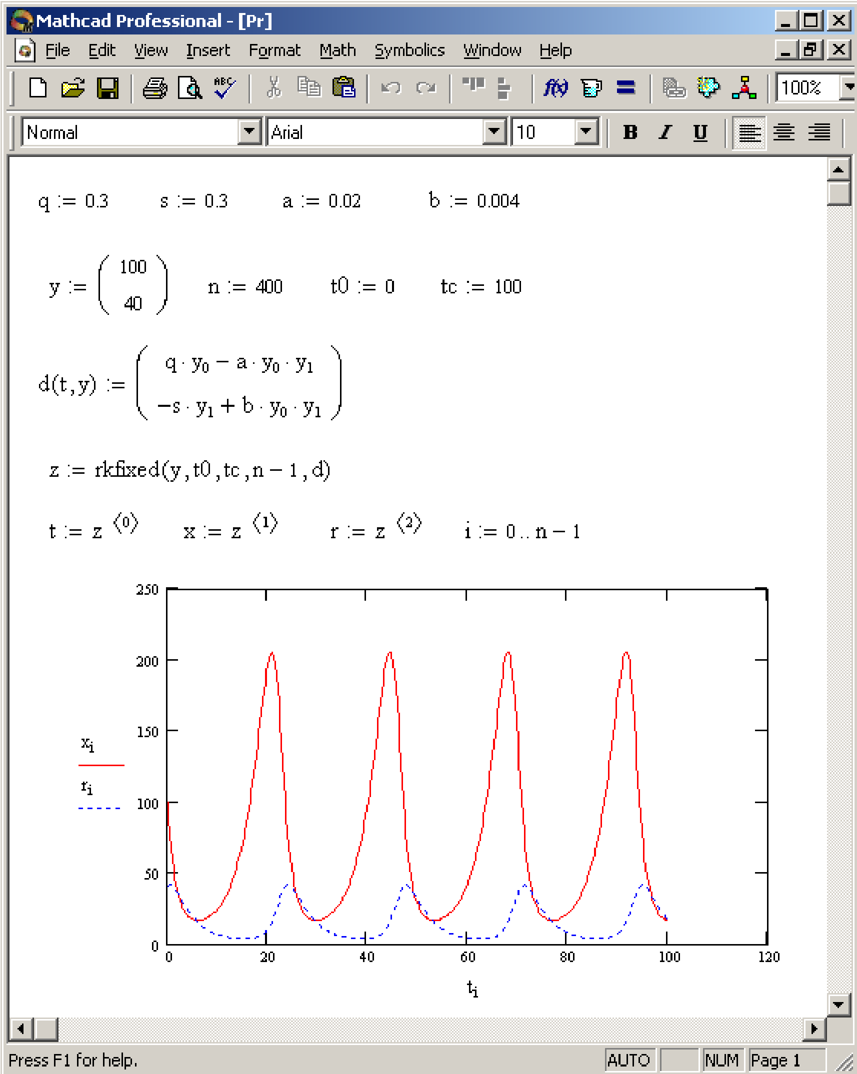

Рис. 2. Решение системы дифференциальных уравнений из примера 2 в Mathcad

2.2. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в системе MATLAB

Для решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в MATLAB предусмотрены следующие функции: ode45, ode23, ode23s, ode23t. В функции ode45 реализован метод Рунге-Кутта 4–5 порядка, в функции ode23 реализован метод Рунге-Кутта 2–3 порядка.

Обращение ко всем функциям имеет вид

$$\mathrm{ode45}(f, \mathrm{interval}, x0, [\mathrm{options}]),$$

где f – вектор-функция для вычисления правой части;

interval – массив из двух чисел, определяющих интервал интегрирования;

$x0$ – вектор начальных условий;

options – параметры управления ходом решения.

Пример 3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dt} = -y + \sin ty; \quad y(0) = 15.$

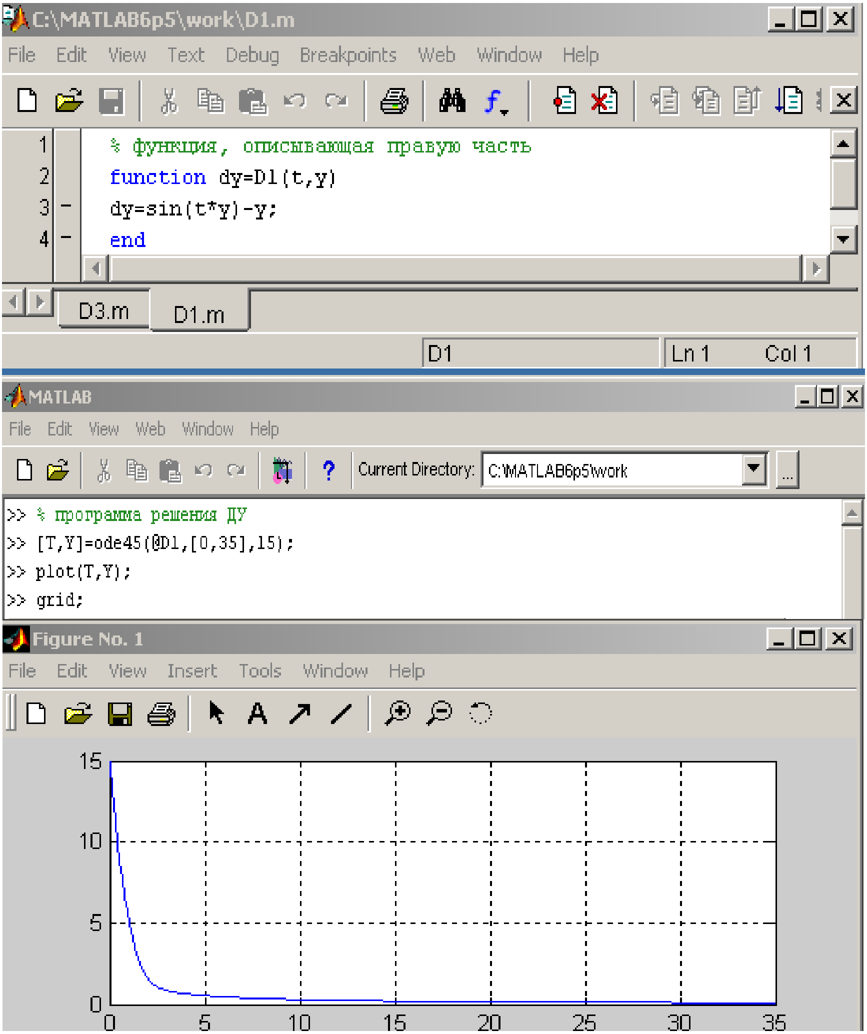

Рис. 3. Решение примера 3 в MATLAB

Пример 4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \sin(\pi t)/(t+1) \\ x'_2 = (x_1 + 2x_2 - 1)/((t+1),(x_1 - 2)) \end{cases}$$

при начальных условиях $\begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 4. \end{cases}$

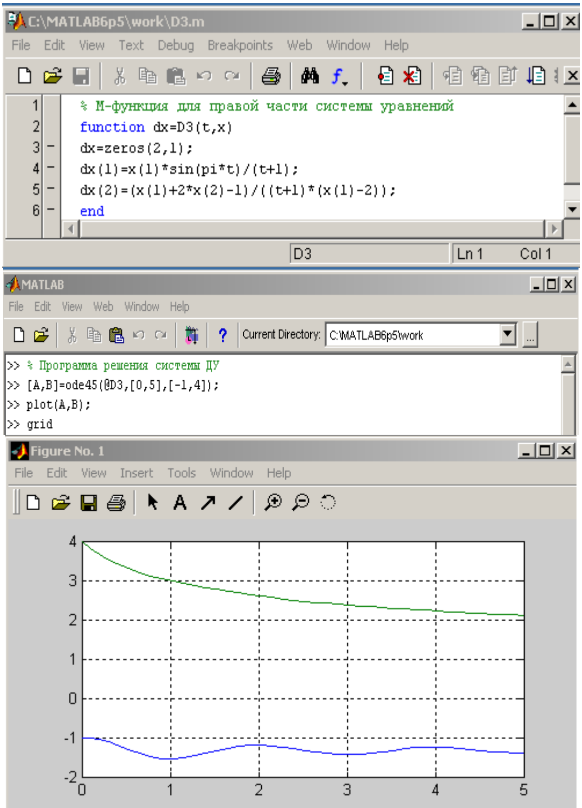

Рис. 4. Решение системы дифференциальных уравнений

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПОДСИСТЕМЕ SIMULINK

В состав подсистемы MATLAB входит подсистема Simulink – интерактивная среда для моделирования и анализа широкого класса динамических систем, использующая графический язык блок-диаграмм. Моделирование основывается на компонентах – графических блоках, которые содержатся в библиотеках и являются основой для создания модели в виде графического представления блок-схемы. Такое представление автоматизирует один из наиболее трудоемких этапов моделирования – алгоритмизацию и решение сложных систем алгебраических и дифференциальных уравнений, функционально описывающих данную модель. Добавление в модель любого нового блока, задание его параметров (свойств модели) и соединений приводит к автоматической генерации и изменению кода.

Simulink – это специальный инструмент исследования, который не требует от пользователя знания языков программирования, позволяет приобрести визуальные ассоциации и уяснить аналогии между структурой математического описания объекта и структурой блок-схемы, реализующей данную модель. Визуальные блоки облегчают восприятие причинно-следственных отношений между цепочкой независимых понятий: независимая переменная, дифференциальное уравнение, вынуждающая функция, начальные условия, решение дифференциального уравнения и соответствующей цепочкой понятий «аналогового» моделирования – время моделирования, входной сигнал, структурная схема объекта, начальные условия на интеграторах, выходной сигнал.

Рассмотрим решение проблемы моделирования на примере колебательной системы (рис. 5), состоящей из груза, упругого элемента и гасителя колебаний (демпфера). Груз подвергается действию силы.

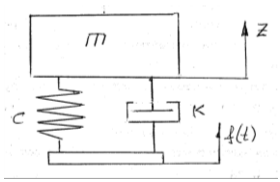

Рис. 5. Модель колебательной системы

Модель описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k\frac{dz}{dt} - cz + f(t), \tag{2}$$

где m – масса колебательной системы,

z – перемещение массы,

$\dfrac{dz}{dt}$ – скорость,

$\dfrac{d^2z}{dt^2}$ – ускорение,

$f(t)$ – действующая сила,

k – коэффициент демпфирования,

c – коэффициент упругости.

Преобразуем уравнение движения модели (2) к виду, который является основой для дальнейшего использования в Simulink

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m}\left[-k\frac{dz}{dt} - cz + f(t)\right]. \tag{3}$$

Запуск Simulink

В командном окне MATLAB наберите Simulink и нажмите клавишу «Ввод» (рис. 6, 7).

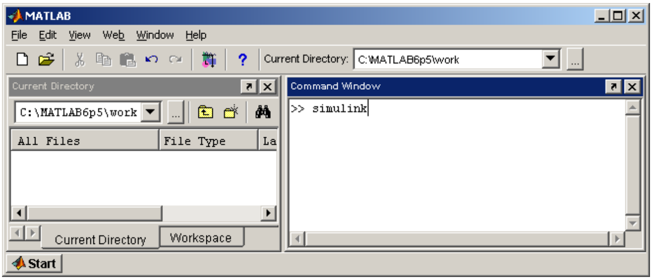

Рис. 6. Окно браузера библиотек Simulink

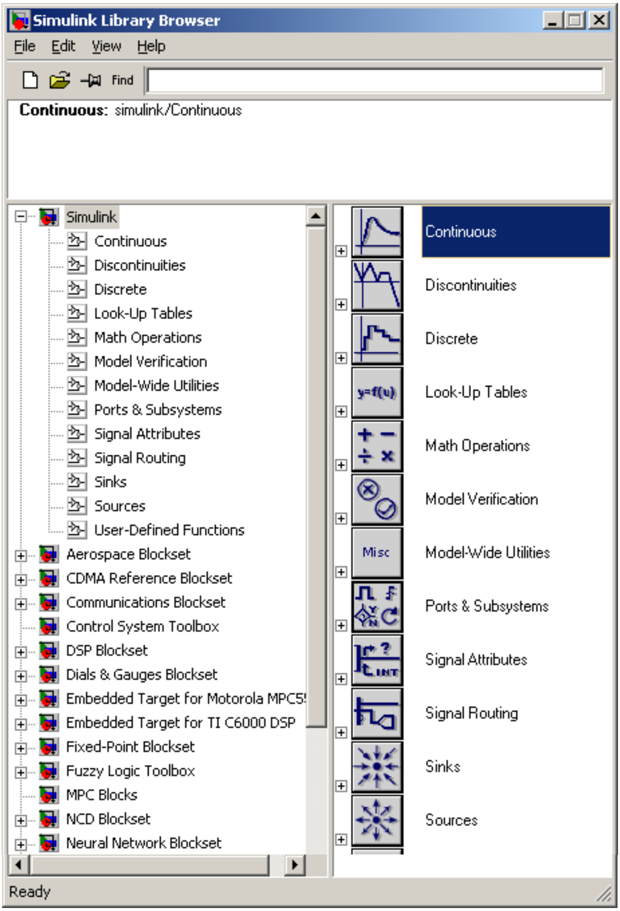

Рис. 7. Окно браузера библиотек

Последовательным выполнением File→New→Model создаем новое окно для модели (рис. 8).

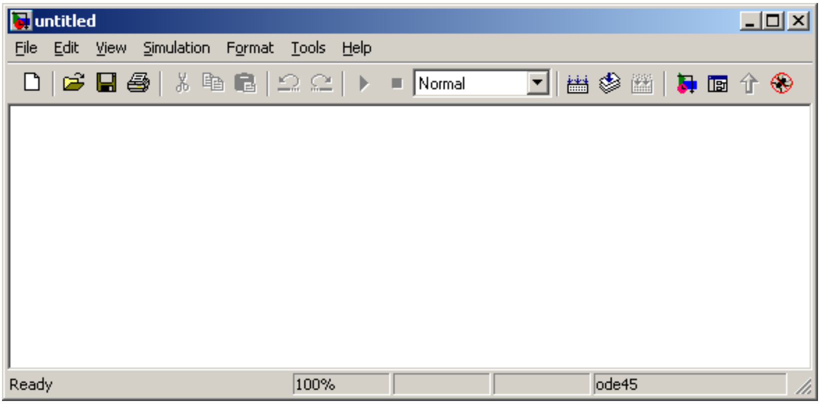

Рис. 8

Рассмотрим процедуру представления уравнения движения модели к блочному виду.

В уравнение (3) в правой части в квадратных скобках суммируются три выражения – три сигнала: возмущающая сила – $f(t)$, производная смещения $\frac{dz}{dt}$ и смещение z, при этом каждая из них умножается на константу $\frac{1}{m}$.

Для составления модели необходимы (рис. 9):

– блок суммирования Sum с тремя входами $f(t)$; $\frac{dz}{dt}$ и z,

– блоки усиления Gain для умножения $k \cdot \frac{dz}{dt}$, $c \cdot z$ и $\frac{1}{m}$,

– два блока интегрирования Integrator и блок визуализации Scope.

Библиотека	Символ и название в библиотеке	Название блока на схеме	Математическое представление	Функциональное назначение
Math Operations	Sum		$-b\dfrac{dx}{dt}-kx+f(t)$	Суммирование правой части уравнения (10)
Math Operations	Gain	kx	$\times k$	Умножение входного сигнала на коэффициент упругости
Math Operations	Gain	bx'	$\times b$	Умножение входного сигнала на коэффициент демпфирования
Math Operations	Gain		$\dfrac{1}{m}$	Правая часть уравнения (10) делится на массу
Source	Step	$f(t)$	$f(t)$	Генерирует силу
Sinks	Scope	Scope		Визуализация сигнала $x(t)$
Continuous	$\frac{1}{s}$ Integrator	Integrator1	$\dfrac{d^2x}{dt^2}\to\int\to\dfrac{dx}{dt}$	Интегрирование второй производной смещения
Continuous	$\frac{1}{s}$ Integrator	Integrator	$\dfrac{dx}{dt}\to\int\to x$	Интегрирование первой производной смещения

Рис. 9

В библиотеке Sources находим источник сигнала для силы Step, в библиотеке *Math Operations* – блок для усиления сигнала Gain, для суммирования используем блок Sum из этой же библиотеки.

Удерживая левую кнопку мыши, перетащим символ блока Step из окна библиотеки Simulink-Sources в окно модели.

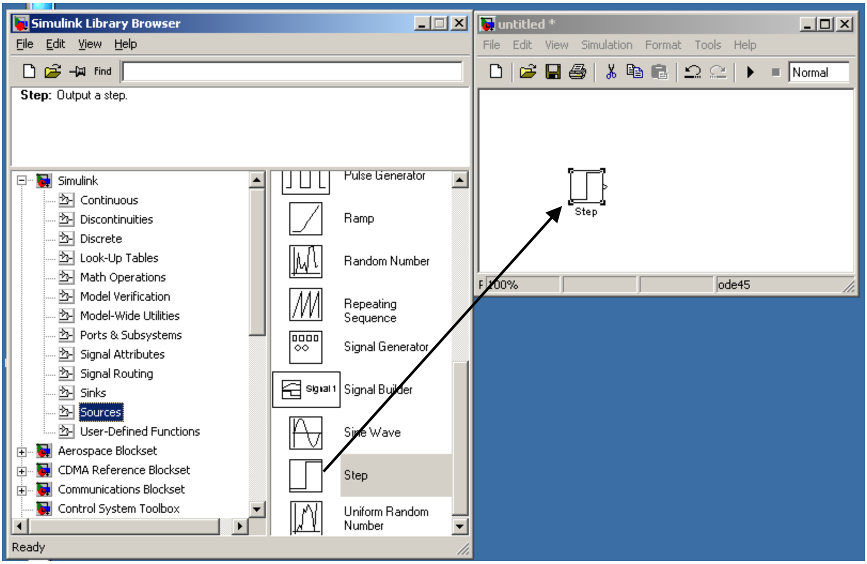

Рис. 10

Аналогично поступаем с другими блоками, каждый блок имеет точки входа и выхода, указанные стрелками.

Используя контекстное меню (щелчок правой кнопки по блоку Sum), изменим параметры блока Sum (рис. 11). Изменим форму блока round на rectangular, знак «+» заменим на знак «–» и добавим еще один знак «–» (еще одна точка входа). Знаки «+» и «–» соответствуют знакам слагаемых в математической модели. Для изменения названия блока Step на $f(t)$ достаточно щелкнуть мышью по слову Step и редактировать его.

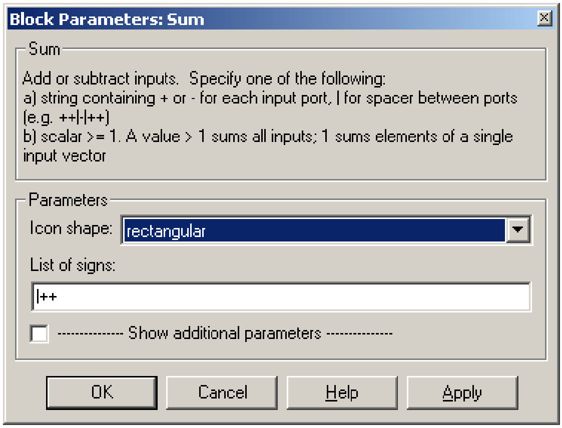

Рис. 11. Окно параметров блока

Используя мышь, соединим блоки линиями (рис. 12). Щелчком по названию блока изменим имена блоков в соответствии с их назначением, для этого к выходу с блока суммирования подключим еще один блок умножения. На выходе с этого блока получаем вторую производную (рис. 13).

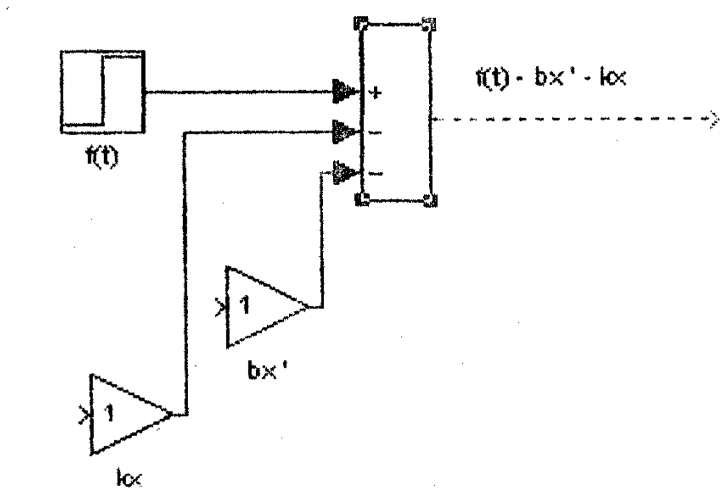

Рис. 12. Суммирование входных сигналов

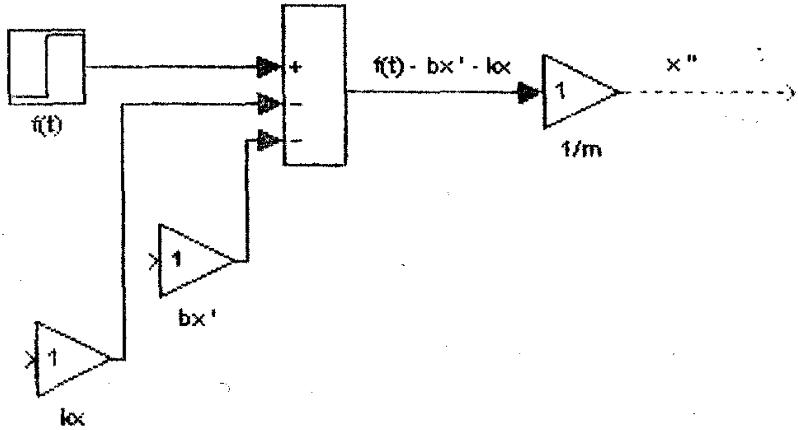

Рис. 13. Применение блока Gain к результату суммирования

Для получения смещения z, проинтегрируем сигнал z'' последовательно два раза, используя блок интегрирования Integrator из библиотеки Continuos. После первого интегрирования получаем сигнал – первую производную z', после второго – искомое смещение z (рис. 14).

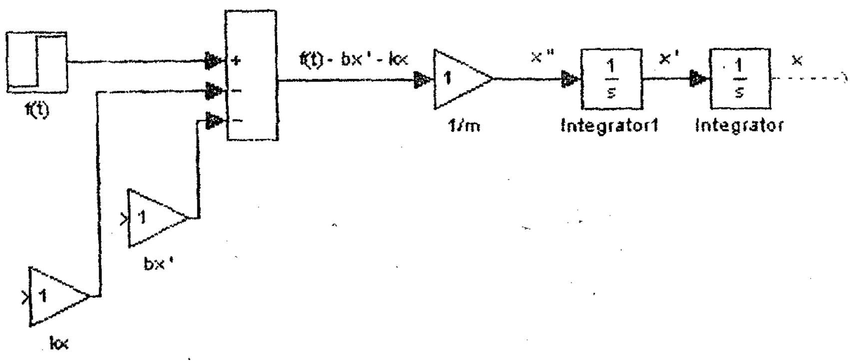

Рис. 14. Интегрирование выходного сигнала (дважды) для получения z

Используя контекстное меню, повернем блоки умножения для демпфирования и упругости на 180° и соединим с соответствующими выходами после интеграторов.

Для визуализации, например, смещения *z* добавим блок Scope из библиотеки Sinks (рис. 15).

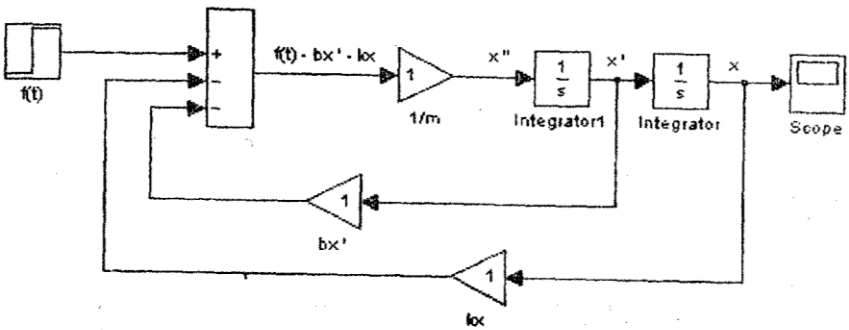

Рис. 15. Окончательная модель с визуализацией смещения

Таким образом, формирование функциональной схемы модели из блоков завершено. Далее задаем численные значения параметров моделирования, значения параметров модели вводятся после двойного щелчка по блоку в соответствующие окна.

Step блок	Step time	0
	Initial value	0
	Final value	1
Gain блок-масса	Gain	1
Gain блок-демпфирование	Gain	3
Gain блок-упругость	Gain	60
Integrator интегрирование (оба)	Initial condition	0

В результате получаем модель, представленную на рис. 16.

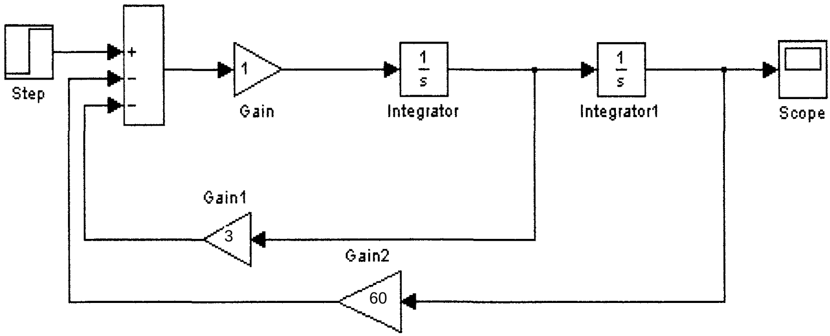

Рис. 16. Блок-схема решения
дифференциального уравнения второго порядка (3)

Решение дифференциального уравнения второго порядка приведено на рис. 17.

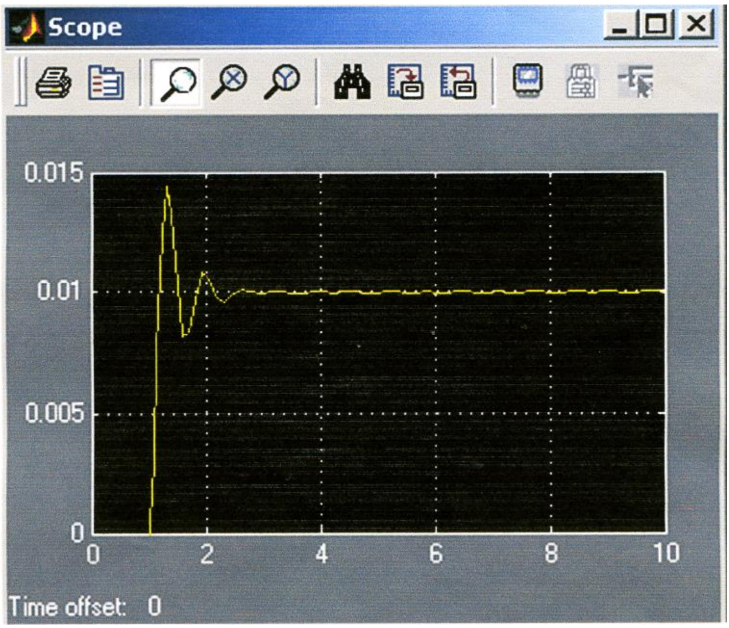

Рис. 17. Графическая иллюстрация
решения дифференциального уравнения (3)

Запуск модели осуществляется из меню Simulation→Start. Для вывода графика смещения на монитор используем двойной щелчок по блоку Scope, для автоматического масштабирования используем иконку Binocular.

Сохраняем созданную модель стандартным способом через меню File, присвоив файлу имя MyModel.mdl.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурский, Д.А. Вычисление в Mathcad / Д.А. Гурский. – Минск: Новое знание, 2003. – 814 с.
2. Дьяконов, В. Mathcad 2000: учебный курс / В. Дьяконов. – СПб.: Питер, 200. – 592 с.
3. Дьяконов, В.П. Mathcad 8.0 в математике, физике и в Internet / В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова. – М.: Ноллидэж. – 1999.
4. Кирянов, Д.В. Самоучитель Mathcad 2001 / Д.В. Кирянов. – СПб: БХВ-Петербург, 2001. – 544 с.
5. Очков, В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров / В.Ф. Очков. – М.: Компьютер Press, 1998.
6. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad: учебный курс / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2005. – 448 с.
7. Макаров, Е.Г. Mathcad: учебный курс / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.

Учебное издание

БРИЧИКОВА Елена Алексеевна
РЕЙЗИНА Галина Николаевна
СОКОЛОВА Нинель Мефодиевна
ЧЕПЕЛЕВ Николай Иосифович

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Методическое пособие
для студентов инженерно-технических
специальностей

Технический редактор О.В. Песенько
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

Подписано в печать 25.01.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,74. Уч.-изд. л. 1,36. Тираж 100. Заказ 586.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.