Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра гидравлики

И.В. Качанов
В.В. Кулебякин
В.К. Недбальский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Часть 2

Минск
БНТУ
2011

УДК 532.5 – 533.6
ББК 30.123я7
К 30

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор В.И. Байков,
доктор физико-математических наук В.А. Бабенко

Качанов, И.В.

К 30 Механика жидкости и газа: курс лекций: в 4 ч. / И.В. Качанов, В.В. Кулебякин, В.К. Недбальский. – Минск: БНТУ, 2011. – Ч. 2. – 44 с.

ISBN 978-985-525-511-7 (Ч. 2).

Издание содержит изложение основных разделов механики жидкости и газа в объеме курса лекций, предусмотренных учебным планом для строительных специальностей БНТУ. Может быть использовано в самостоятельной работе студентов, для подготовки к экзаменам и зачетам, при проведении лабораторных работ и практических занятий, окажет большую помощь студентам других специальностей, изучающим гидравлику.

Часть 1 настоящего издания вышла в 2010 г. в БНТУ.

УДК 532.5 – 533.6
ББК 30.123я7

ISBN 978-985-525-511-7 (Ч. 2)
ISBN 978-985-525-261-1

1. ДВИЖЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

Движение жидкой частицы является более сложным, чем в случае твердого тела, которое, как известно из механики, может складываться из поступательного движения полюса и вращательного движения тела относительно этого полюса. Особенностью частиц жидкости, как уже неоднократно отмечалось, является текучесть, т. е. легкая их деформируемость под действием самых ничтожных сил. Поэтому, помимо поступательного и вращательного жидкая частица может участвовать также в деформационном движении. Это положение и составляет суть так называемой первой теоремы Гельмгольца, к рассмотрению которой мы приступаем. Важнейшим достоинством приводимых ниже выкладок и рассуждений, достаточно простых, но требующих внимания, является то, что они раскрывают физический смысл и вносят ясность в ряд казалось бы совершенно абстрактных понятий.

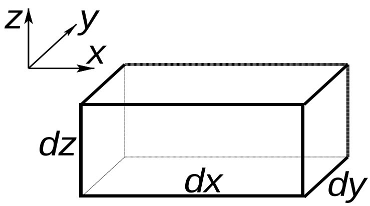

Рис. 1.1

Рассмотрим жидкую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.1). Длина его ребер dx, dy, dz. Деформация такой жидкой частицы может быть как линейной (ребра удлиняются и укорачиваются), так и угловой (возникает перекос граней). Наиболее удобно рассматривать каждый из этих видов деформаций раздельно.

Угловые деформации

Из рис. 1.1 следует, что угловая деформация (перекос граней и углов между ними) может возникнуть из-за разности скоростей, перпендикулярных ребрам. Для упрощения ограничим рассмотрение лишь одной гранью, показанной на рис. 1.2.

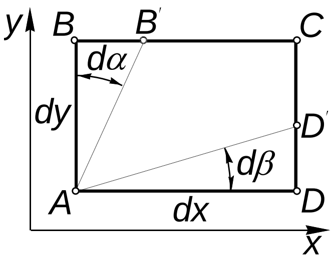

Рис. 1.2

Пусть компоненты скорости в точке A равны u_x, u_y, u_z. Найдем скорости в точке B, считая, что движение установившееся и, следовательно, все производные по времени равны нулю. Приращение компоненты скорости при переходе из одной точки пространства в другую можно представить как $u + du$. Так, для проекции u_x можем записать $u_x + du_x$, где, очевидно, что

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz\ .$$

Аналогичные выражения можно записать и для других проекций.

Рассмотрим приращение u_x при переходе от точки A к точке B. В этом случае $dx = dz = 0$, т. е.

$$u_{x(B)} = u_{x(A)} + du_x = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy\ .$$

Предположим, что за время dt из-за разности скоростей в точках A и B ребро займет положение AB'.

Аналогично рассуждая относительно компоненты скорости u_y в точках A и D, получим:

точка A: u_y (по условию);

точка D: $u_{y(D)} = u_{y(A)} + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx\ .$

В связи с разностью этих скоростей точка D займет позицию D'. Таким образом, получим

$$u_{x(B)} - u_{x(A)} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy;$$

$$u_{y(D)} - u_{y(A)} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx.$$

Путь, который проходит точка B за время dt, попадая в положение B', определяет величину перекоса, которую можно найти как

$$BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt.$$

Угловая деформация характеризуется тангенсом угла $d\alpha$:

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt \approx d\alpha$$

(при этом считаем, что $AB = dy$).

Вследствие малости угла $d\alpha$ можно принять, что $\operatorname{tg}(d\alpha) \approx d\alpha$.

Аналогично рассуждая, можно записать, что

$$\operatorname{tg}(d\beta) = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt \approx d\beta.$$

Полный перекос первоначально прямого угла A соответственно определится как сумма:

$$d\alpha + d\beta = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt. \tag{1.1}$$

Здесь следует обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство, а именно: рассматриваемое перемещение ребер вызвано не только деформацией, но и вращением частицы. Действительно, если бы грань только деформировалась без вращения, то ребра повернулись бы на одинаковый угол навстречу друг другу. Наоборот, в случае если бы происходило только вращение, ребра поворачивались бы на одинаковый угол в направлении вращения. Таким образом, в общем случае движение жидкого элемента можно рассматривать как сумму деформационного и вращательного движений и таким образом определить $d\alpha$ и $d\beta$. Рассмотрим деформацию прямого угла A, считая, что вращение происходит против часовой стрелки. Чисто деформационное движение будем характеризовать углами $d\gamma$, а чисто вращательное $d\varepsilon$ (рис. 1.3).

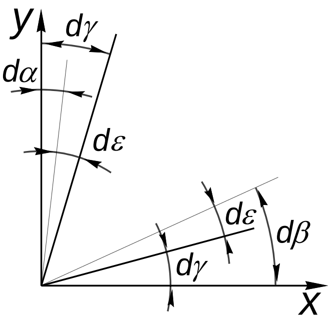

Рис. 1.3

Из рис. 1.3 следует, что

$$d\alpha = d\gamma - d\varepsilon \quad \text{и} \quad d\beta = d\gamma + d\varepsilon$$

т. е.

$$d\alpha + d\beta = 2d\gamma,$$

откуда

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(d\alpha + d\beta\right).$$

Вычитая, получим

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\left(d\beta - d\alpha\right).$$

Таким образом приходим к выводу, что деформация характеризуется полусуммой углов, а вращение – их полуразностью. В соответствии с соотношением (1.1) можно записать:

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dt.$$

Таким образом получим скорость угловой деформации, происходящей вокруг оси z:

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

И по аналогии относительно других осей:

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right).$$

По определению, $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ есть угловая скорость вращения жидкой частицы. Проекции угловых скоростей при этом определятся из формул

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right); \tag{1.2}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \tag{1.3}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{1.4}$$

Соотношения (1.2)–(1.4) играют исключительно важную роль в механике жидкости и газа. Они устанавливают связь между угловой и поступательной скоростями деформируемой жидкой частицы. Вопрос о знаках – это вопрос выбора. В гидромеханике поворот против часовой стрелки обычно считается положительным, по часовой – отрицательным.

В векторной форме выражение для угловой скорости может быть записано как

$$\overline{\omega} = \bar{e}_x \omega_x + \bar{e}_y \omega_y + \bar{e}_z \omega_z .$$

Заменяя ω_x, ω_y и ω_z их выражениями из (1.2)–(1.4), получаем

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\left[\bar{e}_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \bar{e}_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \bar{e}_z \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right].$$

Учитывая соотношения векторной алгебры (применительно к вектору скорости жидкой частицы), можем записать

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{u} \tag{1.5}$$

либо

$$\operatorname{rot} \bar{u} = 2\overline{\omega} . \tag{1.6}$$

Формула (1.6) раскрывает гидромеханический смысл вихря (ротора) векторного поля скоростей. Если $\bar{u}$ характеризует поле мгновенных скоростей, то векторное поле $\operatorname{rot} \bar{u}$ представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц жидкости этого поля.

Линейные деформации

Очевидно, что линейные деформации жидкой частицы могут возникнуть в результате различия скоростей в точках, совпадающих с направлением ее ребер. Как и ранее полагаем компоненты скорости в точке A равными u_x, u_y, u_z.

Вдоль оси x:

точка A: $u_{x(A)}$;

точка D: $u_{x(D)} = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$.

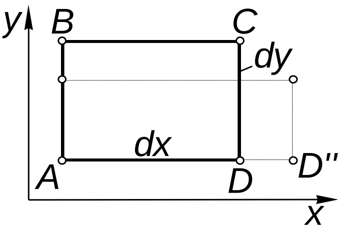

Рис. 1.4

Разность скоростей, вызывающая удлинение ребра AD (рис. 1.4): $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Удлинение частицы DD'' за время dt

$$DD'' = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt. \qquad (1.7)$$

Относительное удлинение

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x.$$

Скорость относительного удлинения

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x.$$

Аналогичные выражения можно получить для других осей:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Если процесс происходит одновременно вдоль всех осей, то это приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Таким образом, объемная деформация сводится к изменению первоначального объема параллелепипеда $dV = dxdydz$ на величину $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ за счет растяжения либо сжатия ребер. При этом

$$\delta V_x = DD''dydz,$$

и с учетом (1.7)

$$\delta V_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dV dt.$$

К аналогичным выводам можно прийти, рассматривая изменения по другим осям координат:

$$\delta V_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dV dt \quad \text{и} \quad \delta V_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dV dt.$$

Таким образом:

$$\delta V = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt.$$

Скоростью относительной объемной деформации назовем отношение изменения объема к его первоначальному объему и времени, за которое это изменение произошло, т. е.

$$\frac{\delta V}{dV dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{u}.$$

Если $\operatorname{div} \bar{u} = 0$, то это означает, что $\delta V = 0$, т. е. деформация жидкой частицы происходит без изменения ее объема. В этом и заключается гидромеханический смысл равенства нулю дивергенции вектора скорости.

Полученную выше связь между поступательной и вращательной скоростями жидкой частицы можно получить и более коротким путем, представляющим определенный интерес. Разные подходы к одному и тому же вопросу способствуют его углубленному пониманию. Поэтому рассмотрим также этот путь.

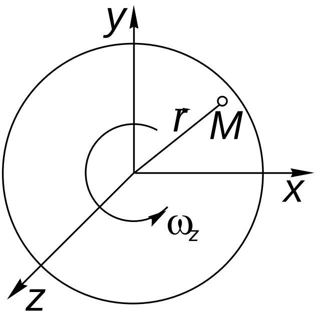

Рис. 1.5

Пусть жидкая частица вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω_z (рис. 1.5). Запишем выражение для ротора скорости в проекциях на оси координат (рис. 1.6). Имеем

$$\mathrm{rot}_x \bar{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z};$$

$$\mathrm{rot}_y \bar{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x};$$

$$\mathrm{rot}_z \bar{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

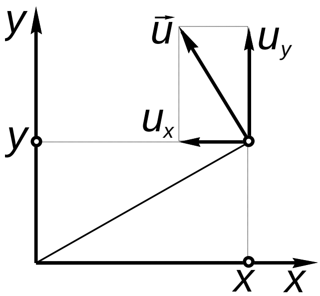

Рис. 1.6

Рассмотрим точку M на жидкой частице.

Линейная скорость этой частицы $\bar{u} = \bar{\omega}_z \times \bar{r}$. Запишем выражения для проекций скоростей на оси координат:

$$u_x = -\omega_z y;$$

$$u_y = \omega_z x;$$

$$u_z = 0,$$

откуда находим

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \omega_z ;$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega_z .$$

Таким образом

$$\mathrm{rot}_z \overline{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z .$$

Аналогично для двух других компонент

$$\mathrm{rot}_x \overline{u} = 2\omega_x \text{ и } \mathrm{rot}_y \overline{u} = 2\omega_y .$$

Либо в векторной форме

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} \mathrm{rot}\, \overline{u},$$

что полностью совпадает с (1.5).

Движение, при котором $\mathrm{rot}\, \overline{u} \neq 0$, называют *вихревым*, если же $\mathrm{rot}\, \overline{u} = 0$ – *безвихревым* либо потенциальным. Сказанное означает, что если течение вихревое, то движение жидких частиц происходит с вращением.

2. КИНЕМАТИКА ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ

Вихревое движение широко распространено, поэтому изучение его закономерностей несомненно представляет практический интерес. Вращательное движение жидких частиц, как показано ранее, характеризуется вихрем скорости:

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\overline{u}.$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль может быть записан как

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Движение, при котором величина вихря скорости не равна нулю, т. е. $\operatorname{rot}\overline{u} \neq 0$, называют вихревым. Если же $\operatorname{rot}\overline{u} = 0$, то движение безвихревое (потенциальное).

Кинематические понятия для вихревого движения можно получить по аналогии с общими представлениями кинематики. В основу кинематики вихревого движения положено определение вихревой линии, которое аналогично понятию линии тока. Вихревой называется линия, в каждой точке которой в данный момент времени касательная совпадает с направлением вектора вихря скорости. Другими словами, *вихревая линия* – это мгновенная ось вращения частиц жидкости, которые в данный момент времени расположены на ней. По аналогии с дифференциальным уравнением линии тока можно записать

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}.$$

Вихревая трубка – аналог трубки (поверхности) тока, т. е. это поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура. *Вихревая нить* – аналог струйки тока и представляет собой жидкий объем, заключенный в вихревой трубке. Если вихревая трубка имеет конечные размеры, то частицы, заполняющие ее и находящиеся во вращательном движении, образуют вихревой шнур.

Интенсивность вихря

Понятие интенсивности вихря достаточно абстрактно и вводится чисто математически. Напомним, что потоком векторного поля называют интеграл вида

$$\iint_A \bar{u} \cdot \bar{n} dA .$$

Поскольку вихрь скорости (ротор) есть вектор, то вместо $\bar{u}$ можно подставить $\mathrm{rot}\,\bar{u}$, что и приводит к понятию интенсивности вихря, т. е. интенсивность вихря – это поток вектора вихря скорости:

$$i = \iint_A \mathrm{rot}\,\bar{u} \cdot \bar{n} dA.$$

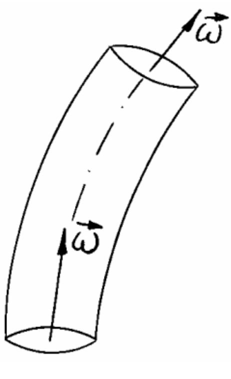

Рис. 2.1

Эту формулу, используя очевидное соотношение $\mathrm{rot}\,\bar{u} \cdot \bar{n} = \mathrm{rot}_n \bar{u}$, можно переписать как

$$i = \iint_A \mathrm{rot}_n \vec{u} dA .$$

Имея в виду, что $\mathrm{rot}\,\bar{u} = 2\overline{\omega}$ (рис. 2.1), можем записать

$$i = 2\iint_A \overline{\omega} \cdot \bar{n} dA = 2\iint_A \omega_n dA.$$

Используя формулу Гаусса–Остроградского и переходя от интеграла по поверхности к интегралу по объему, получим

$$i = 2\iint\limits_A \omega_n dA = 2\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{\omega} dV = 2\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) dV .$$

Заметим, что полученное подынтегральное выражение по структуре напоминает обычное уравнение неразрывности для стационарного течения жидкости с постоянной плотностью. Раскроем это выражение, имея в виду, что проекции вектора вихря (по правилам векторного произведения) представляются как

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z}\right) = 0 .$$

Следовательно, можно записать

$$\iint\limits_A \omega_n dA = 0. \qquad (2.1)$$

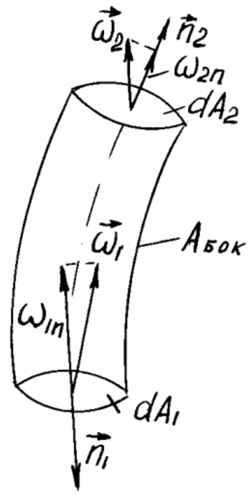

Рис. 2.2

Применим (2.1) к вихревому шнуру (рис. 2.2). На боковой поверхности $\omega_n \equiv 0$, так как вектор $\overline{\omega}$ направлен по касательной к поверхности. Поэтому можем записать

$$-\iint\limits_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint\limits_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0;$$

$$\iint\limits_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint\limits_{A_2} \omega_{n2} dA_2 .$$

Если допустить, что в пределах сечения $\omega_n = \text{const}$, то

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2 .$$

Либо в общем случае

$$\omega A = \text{const}, \tag{2.2}$$

т. е. это своеобразное «уравнение неразрывности» в интегральной форме для завихренности. Полученный результат носит название теоремы Гельмгольца о вихрях (второй теоремы Гельмгольца), которую можно сформулировать следующим образом: интенсивность вихревого шнура на всей его протяженности остается постоянной. Из выражения (2.2) следует и другой весьма важный вывод. Поскольку произведение ωA остается неизменным, то уменьшение площади сечения шнура должно приводить к увеличению угловой скорости вращения частиц. При $A = 0$ это условие означает, что $\omega = \infty$, что физически невозможно. Следовательно, вихрь не может зарождаться либо оканчиваться в толще жидкости. Окончательно развившись, он должен замкнуться либо на твердую поверхность, либо сам на себя, т. е. образовать вихревое кольцо. В этом свойстве также существует аналогия с поведением трубки тока.

Понятие об интенсивности вихря является весьма важным, но, к сожалению, непосредственное определение этой величины экспериментальным путем связано с непреодолимыми трудностями. Кроме того, если пытаться распространить это понятие на вихри конечных размеров, то по аналогии со средней скоростью пришлось бы вводить понятие о средней угловой скорости, что связано с определенными трудностями чисто математического характера. Поэтому гидромеханики избрали другой путь, заменив это понятие другим, более удобным для целей практики.

Циркуляция скорости

Для введения понятия о циркуляции скорости воспользуемся методикой, предложенной Н.Я. Фабрикантом. Несомненным ее преимуществом является то, что она позволяет ввести понятие циркуляции не формально математически, а исходя из достаточно простых и ясных физических предпосылок.

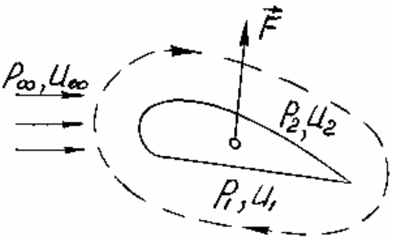

Рис. 2.3

Рассмотрим крыловой профиль, находящийся в равномерном потоке воздуха. Как известно, на профиль в этом случае будет действовать подъемная сила F (рис. 2.3). Физически наличие этой силы можно объяснить лишь тем, что давление под профилем p_1 больше, а давление над профилем p_2 меньше, чем давление на некотором удалении от него (давление невозмущенного потока), которое обозначают p_∞. Это позволяет утверждать, что под крыловым профилем скорость $u_1 < u_\infty$, а над ним $u_2 > u_\infty$. В данном случае u_∞ – скорость невозмущенного потока.

Теперь из скоростей u_1 и u_2 вычтем скорость u_∞, т. е. получим разности $u_1 - u_\infty$ и $u_2 - u_\infty$. Это действие приводит к понятию возмущенного потока, т. е. движения, которое возникает в среде из-за того, что в нее внесено инородное тело. По существу, это реакция потока, в данном случае обусловленная тем, что в ней появился крыловой профиль. Установим теперь направление потоков возмущения. Под профилем $u_1 < u_\infty$, и он направлен против скорости u_∞, над профилем соответственно наоборот. В результате появляется циркуляционный поток, направленный по часовой стрелке, как это показано на рис. 2.3. Чтобы характеризовать этот поток количественно, вводится понятие циркуляции скорости по замкнутому контуру.

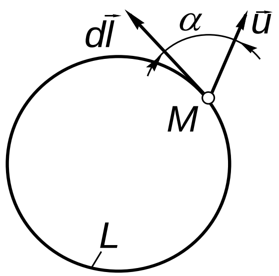

Рис. 2.4

Рассмотрим замкнутый контур C, показанный на рис. 2.4. Пусть в произвольной точке M скорость равна $\bar{u}$. Составим скалярное произведение $\bar{u} \cdot d\bar{l}$, где $d\bar{l}$ – направленный элемент дуги.

Циркуляцией скорости называют контурный интеграл вида:

$$\Gamma = \oint \bar{u} \cdot d\bar{l}.$$

Обратим внимание на структуру этого соотношения. Оно построено аналогично выражению для работы, поэтому иногда говорят, что циркуляция – это своеобразная «работа» вектора скорости. Имея в виду, что $\bar{u}(u_x, u_y, u_z)$ и $d\bar{l}(dx, dy, dz)$, по правилу скалярного произведения получим

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy + u_z dz).$$

Для плоского течения:

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy). \qquad (2.3)$$

Ранее утверждалось, что понятие циркуляции с практической точки зрения является более удобным, чем интенсивность вихря. Действительно, из формулы (2.3) следует, что для определения циркуляции достаточно знать проекции скорости, нахождение которых не связано с существенными трудностями. Однако при этом пока открытым остается вопрос о том, существует ли связь между циркуляцией скорости и интенсивностью вихря.

Теорема Стокса

В движущейся жидкости рассмотрим вихревое поле и выделим в нем малый замкнутый контур со сторонами dx и dy (рис. 2.5). Пусть в начале координат скорости будут u_x и u_y.

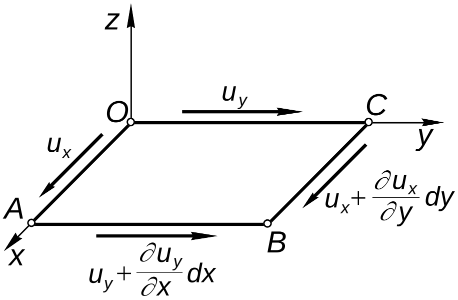

Рис. 2.5

Запишем выражение для элементарной циркуляции по этому контуру, имея в виду, что поток двумерный:

$$d\Gamma = u_x dx + u_y dy.$$

Рассмотрим контур $OABC$. Если вдоль OA скорость u_x, то вдоль CB ее приращение составит $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$, и аналогично вдоль AB – $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx$. Это следует из выражения для полного дифференциала скорости, например:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy.$$

Используем эти выражения для расчета элементарной циркуляции вдоль контура $OABCO$. Имеем

$$d\Gamma = u_x dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy.$$

Раскрывая скобки и выполнив сокращения, получаем

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dxdy = 2\omega_z dA.$$

Отсюда следует, что циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равна интенсивности вихря, пронизывающего этот контур. Данный вывод легко обобщить и на случай произвольной кривой конечных размеров. Таким образом можем записать:

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n dA = i\,.$$

Это и есть формула Стокса, показывающая, что циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей (напряжений) вихрей, пронизывающих поверхность, натянутую на контур.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Как отмечалось ранее, условием потенциальности движения является равенство нулю вихря скорости, т. е. $\mathrm{rot}\,\bar{u}=0$. Физически это означает, что движение жидкости происходит без вращения частиц. Следует отметить, что потенциальное движение играет исключительно важную роль в механике жидкости.

Потенциал скорости

Как следует из теоремы Стокса, числовые значения интенсивности вихря и циркуляции скорости по охватывающему его контуру, равны, т. е. $i=\Gamma$:

$$i=\iint_A \mathrm{rot}\,\bar{u}\cdot\bar{n}\,dA=\Gamma.$$

С другой стороны, для потенциального потока, по определению $\mathrm{rot}\,\bar{u}=0$, т. е. в потенциальном поле циркуляция по замкнутому контуру равна нулю.

Запишем выражения для проекций угловых скоростей:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right);$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Из вышесказанного следует, что для безвихревого (потенциального) движения $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial z};\quad \frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial x};\quad \frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y}. \qquad (3.1)$$

Эти соотношения позволяют существенно упростить вычисления компонент скорости u_x, u_y и u_z.

Рассмотрим выражение $u_x dx + u_y dy + u_z dz$. Его построение аналогично выражению для элементарной работы, известному из механики твердого тела. Рассмотрим, в каком случае оно является полным дифференциалом. Напомним, что если выражение для работы является полным дифференциалом, то силовое поле называется консервативным, или имеющим потенциал. В свое время известный ученый Клеро показал, что выражение этого типа является полным дифференциалом в случае, если обеспечивается равенство накрест взятых производных. Соотношения (3.1) показывают, что взятые накрест производные для рассматриваемого выражения удовлетворяют этому требованию. Таким образом, при потенциальном движении жидкости записанное выше выражение является полным дифференциалом некоторой функции φ, т. е.

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz\,. \tag{3.2}$$

С другой стороны, по общему правилу полный дифференциал может быть представлен как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz\,. \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \tag{3.4}$$

По предложению Гельмгольца функцию φ называют потенциалом скорости.

Таким образом, всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение: если существует потенциал скорости, то движение происходит без вращения частиц, т. е. является безвихревым.

Соотношения (3.4) можно получить и другим путем. Поскольку разные подходы к одному и тому же вопросу способствуют его углубленному пониманию, то эти же соотношения получим, используя другую методику.

Как уже отмечалось, условием потенциальности течения является $\mathrm{rot}\,\bar{u} = 0$. В векторной алгебре доказывается, что операция ротора над градиентом какой-либо скалярной функции тождественно равна нулю, т. е.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0.$$

Сопоставляя эти соотношения, можем записать

$$\bar{u} = \mathrm{grad}\,\varphi, \tag{3.5}$$

что означает, что вектор скорости можно рассматривать как градиент некоторой скалярной функции φ. Раскроем значения $\bar{u}$ и $\mathrm{grad}\,\varphi$. Имеем

$$\bar{u} = \bar{e}_x u_x + \bar{e}_y u_y + \bar{e}_z u_z\,;$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \bar{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

Откуда, учитывая (3.5), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

т. е. вновь приходим к соотношениям вида (3.4).

При этом открытым остается вопрос о целесообразности введения понятия потенциала скорости. Однако следует иметь в виду, что одной из важнейших практических задач гидромеханики является определение сил, действующих на тело, обтекаемое потоком жидкости или газа. Решение этой задачи непосредственно связано с необходимостью расчета поля скоростей, т. е. определением проекций скоростей (u_x, u_y, u_z) в каждой его точке. Из выражений (3.4) следует, что все три компоненты скорости могут быть вычислены, если известна лишь одна величина – потенциал скорости. Таким образом, знание потенциала скорости существенно упрощает расчет скоростного поля. Однако при этом возникает следующая проблема: как найти потенциал скорости течения.

Уравнение Лапласа

Известно, что операция дивергенции над градиентом скалярной функции приводит к так называемому оператору Лапласа. Если в качестве скалярной функции использовать потенциал скорости, то можно записать

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\bar{u} = 0$, а $\operatorname{grad}\varphi = \bar{u}$. Таким образом

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad (3.6)$$

либо

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (3.7)$$

Выражения (3.6) и (3.7) называются уравнениями Лапласа. Следовательно, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Любая функция, удовлетворяющая этому уравнению, носит название гармонической, значит, потенциал скорости является гармонической функцией. Как любое дифференциальное уравнение, уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений, поэтому для того, чтобы однозначно определить потенциал скорости, необходимо задать граничные условия. Для задач, связанных с обтеканием тел, так называемых внешних задач гидромеханики, такими условиями являются $u_n = 0$ и $u = u_\infty$.

Первое условие характеризует безотрывность течения, или условие «прилипания» (равенство нулю нормальной компоненты скорости на поверхности тела). Второе – показывает, что на значительном удалении от тела распределение скоростей описывается известной функцией.

Поверхности (либо линии для двумерных потоков), в каждой точке которых $\varphi = \text{const}$, называются *эквипотенциальными*.

Циркуляция скорости в потенциальном поле

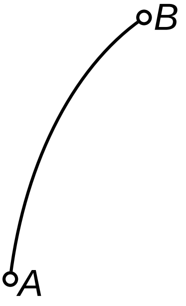

Рис. 3.1

Рассмотрим, например, плоский (двумерный) поток. Выделим в нем произвольную кривую и запишем выражение для циркуляции вдоль этой кривой (рис. 3.1):

$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B, \tag{3.9}$$

т. е. циркуляция вдоль кривой не зависит от ее формы, а определяется лишь разностью потенциалов в ее конечных точках. Если кривая замкнута, то очевидно, что $\varphi_B = \varphi_A$ и $\Gamma = 0$, т. е.

циркуляция по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

Функция тока плоского течения

В практических задачах гидромеханики двумерных потоков понятие о функции тока находит широкое применение. Рассмотрим двумерный поток и при этом ограничимся рассмотрением течения несжимаемой жидкости.

Как было показано, дифференциальное уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

либо

$$u_x dy - u_y dx = 0 . \tag{3.9}$$

Запишем уравнение неразрывности для этого случая:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 . \tag{3.10}$$

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении определения потенциала скорости, поставим вопрос об условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы выражение (3.9) являлось полным дифференциалом некоторой скалярной функции. Применим к (3.9) условия Клеро (равенство взятых накрест производных):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 .$$

Однако это есть не что иное, как уравнение неразрывности (3.10) для плоского потока, которое удовлетворяется всегда, если только движение существует. Следовательно, можно записать:

$$d\psi = u_x dy - u_y dx\,, \tag{3.11}$$

где ψ получила название функции тока. Учитывая, что $d\psi$ является полным дифференциалом, можно записать:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\,. \tag{3.12}$$

Сопоставляя (3.11) и (3.12), получаем

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,;\;\; u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{3.13}$$

из чего следует, что если функция тока течения известна, то можно определить компоненты скорости в любой точке пространства. Сопоставляя (3.9) и (3.11), приходим к выводу, что если частица движется вдоль линии тока, то функция тока остается постоянной (при $\psi = \text{const}$ $d\psi = 0$ и (3.11) превращается в (3.9)). Встает вопрос: является ли функция тока гармонической функцией, т. е. удовлетворяет ли она уравнению Лапласа?

Для плоского потенциального течения $\omega_z = 0$, но $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$, т. е. $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$. Из (3.13) $u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 .$$

Таким образом, функция тока, как и потенциал скорости, является гармонической функцией. При этом если потенциал скорости существует только в потенциальном потоке, то функция тока этим условием не ограничена. Это объясняется тем, что уравнение неразрывности (т. е. условие сохранения массы), которое используется для введения функции тока, справедливо как для вихревого, так и для безвихревого движений.

Гидромеханический смысл функции тока

Установим гидромеханический смысл функции тока, для чего проведем две достаточно близко расположенные линии тока (рис. 3.2). Вычислим объемный расход жидкости, протекающий между ними, для чего разложим вектор скорости частицы $\bar{u}$ на две составляющие: u_x и u_y, что позволит представить расход как сумму $dQ = dQ_x + dQ_y$, при этом $dQ_x = u_x dy$ и $dQ_y = -u_y dx$.

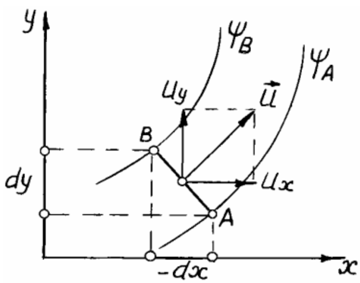

Рис. 3.3

$$dQ = u_x dy - u_y dx ;$$

$$Q = \int_A^B \left(u_x dy - u_y dx\right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A ,$$

т. е. разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна объемному расходу между ними.

Связь потенциала скорости и функции тока

Связь между этими параметрами может быть легко установлена, если записать полученные выше выражения для проекций скоростей:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Эти соотношения играют чрезвычайно важную роль в механике жидкости и носят название соотношений Коши–Римана. Если их перемножить, то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3.14}$$

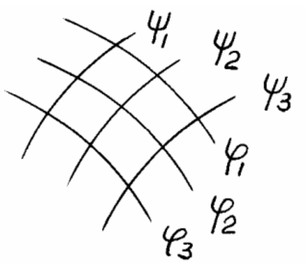

Рис. 3.3

Из математики известно, что выражения типа (3.14) свидетельствуют о взаимной ортогональности кривых. Следовательно, линии тока и эквипотенциальные линии образуют сетку взаимно ортогональных кривых, которая носит название гидродинамической сетки движения жидкости, примерный вид которой показан на рис. 3.3.

Наложение потенциальных потоков

Предположим, что имеются два потока с известными потенциалами скорости φ_1 и φ_2, удовлетворяющими уравнению

Лапласа. Из теории линейных дифференциальных уравнений, к которым принадлежит и уравнение Лапласа, известно, что сумма частных решений этих уравнений также является их решением. Другими словами, это означает, что потенциал φ, образованный как $\varphi_1 + \varphi_2$, также будет удовлетворять уравнению Лапласа, т. е. будет описывать некоторый новый поток, имеющий потенциал φ. Из этого следует, что новый поток можно получить путем простого сложения потенциалов скоростей уже известных течений. Скорость в каждой точке нового потока при этом является векторной суммой скоростей первоначальных потоков. Задача нахождения нового течения может быть решена как графически, так и аналитически.

Сначала рассмотрим графический метод. Общий подход сводится к следующему. Необходимо построить линии тока течений в одинаковом масштабе, что при достаточной густоте линий тока при их пересечении даст фигуру, близкую к параллелограмму (рис. 3.4).

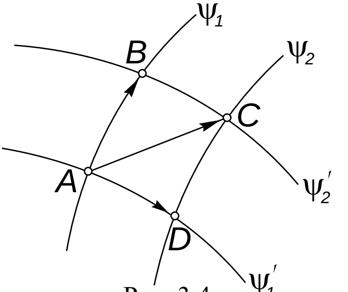

Рис. 3.4

Отрезки AB и AD в выбранном масштабе представляют собой скорости течений, их результирующая определяется как диагональ AC параллелограмма ($ABCD$). При построении такой сетки необходимо выполнить следующее условие: расход между соседними линиями тока для обоих течений должен быть одинаков.

В качестве примера приведем картину течения, образующуюся при наложении плоскопараллельного потока на сток. Как следует из рис. 3.5, частицы жидкости в новом течении будут двигаться по кривым, направленным к стоку.

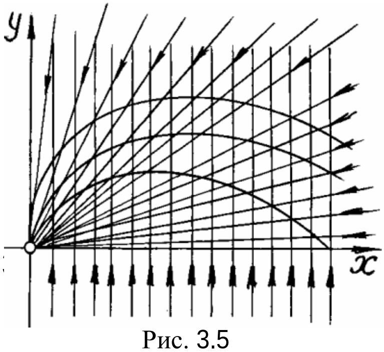

Рис. 3.5

Задача, как отмечалось выше, может быть решена и аналитически. В этом случае должны быть известны φ и ψ обоих течений.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРОМЕКИ–ЛЭМБА

Рассмотрение теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы показывает, что жидкость, как любое материальное тело, может участвовать в поступательном и вращательном движениях, но, кроме того, – в деформационном. Следует учесть, что для совершения работы в современных технических устройствах может быть использована лишь энергия поступательного движения. Энергия же вращательного (вихревого) движения полностью теряется, рассеивается в окружающей среде, превращаясь в тепло. Как говорят, происходит диссипация механической энергии в тепловую.

Система уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости в явной форме не учитывает факт существования вращательного движения. Поэтому для получения уравнений, учитывающих эту особенность движения жидких частиц, целесообразно использовать преобразование, называемое преобразованием Громеки–Лэмба. Формально оно сводится к тому, что в выражении для ускорения выделяются члены, характеризующие вращение жидких частиц.

Рассмотрим лишь одну компоненту ускорения (в проекции на ось x):

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \qquad (4.1)$$

Прибавим и вычтем в конвективной части ускорения выражение

$$u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Скомпонуем члены получившегося выражения с учетом их знаков:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \ ;$$

$$u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) =$$

$$= -u_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Выражения в скобках, очевидно, есть не что иное, как удвоенные компоненты вихря ω_z и ω_y, т. е. можно записать:

$$-2u_y\omega_z + 2u_z\omega_y = 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z \right).$$

Подставив полученные значения в (4.1), имеем

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z \right),$$

и по аналогии

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} + 2\left(u_x\omega_z - u_z\omega_x \right);$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} + 2\left(u_y\omega_x - u_x\omega_y \right).$$

В векторной форме выражение для ускорения будет иметь вид

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{u^2}{2} + 2\bar{\omega} \times \bar{u} \ . \qquad (4.2)$$

Если движение установившееся, то

$$\bar{a} = \operatorname{grad} \frac{u^2}{2} + 2\bar{\omega} \times \bar{u} \ . \qquad (4.3)$$

Уравнения движения в форме Громеки–Лэмба

Если в правую часть уравнений Эйлера подставить ускорение в виде (4.2) либо (4.3), то это приведет к уравнению движения в форме Громеки–Лэмба. Для установившегося движения имеем

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \, p = \operatorname{grad} \frac{u^2}{2} + 2\bar{\omega} \times \bar{u} \ . \qquad (4.4)$$

Выполним некоторые преобразования выражения (4.4).

В разделе гидростатики было введено понятие о скалярной функции Ф, называемой силовой. Было показано, что

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi. \qquad (4.5)$$

Поскольку эта функция является полным дифференциалом, то можно записать

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \ . \qquad (4.6)$$

Сопоставляя (4.5) и (4.6), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z \ . \qquad (4.7)$$

С другой стороны, вектор $\overline{F}$, проекциями которого являются X, Y и Z:

$$\overline{F} = \overline{e}_x X + \overline{e}_y Y + \overline{e}_z Z\ . \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) следует, что

$$\overline{F} = \overline{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \overline{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \overline{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \operatorname{grad} \Phi\ . \tag{4.9}$$

С учетом (4.9) выражение (4.4) принимает вид

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\overline{\omega} \times \overline{u}\ . \tag{4.10}$$

Следует иметь в виду, что эта форма записи справедлива лишь для несжимаемой жидкости, т. е. при условии $\rho = \text{const}$. И, наконец, уравнению движения (4.10) можно придать более удобную для анализа форму, умножив скалярно его левую и правую части на произвольно направленный отрезок:

$$d\overline{l} = \overline{e}_x dx + \overline{e}_y dy + \overline{e}_z dz\ .$$

Опуская подробное изложение этой операции, приведем лишь конечный результат:

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Интегрирование уравнения движения для установившегося течения

Интегрирование уравнения движения (4.11) возможно лишь в случае, когда правая часть (4.11) равна нулю. Из теории определителей известно, что признаками равенства нулю являются равенство нулю какой-либо строки или пропорциональность элементов одной строки элементам другой.

Исходя из физического смысла величин, составляющих определитель, имеем четыре возможных случая:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0;$$

$$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z};$$

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z};$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}.$$

Для любого из них можем записать

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0,$$

и после интегрирования

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C. \tag{4.12}$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то, как показано при рассмотрении гидростатики:

$$\Phi = -gz$$

и (4.12) принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C. \qquad (4.13)$$

Еще раз обратим внимание на то, что вид уравнения (4.13) одинаков вне зависимости от того, какой из четырех случаев равенства нулю определителя рассматривается. Однако смысл интеграла и область его применения различны. Именно поэтому в этом вопросе следует разобраться подробней.

Первый случай, как известно, является признаком потенциальности движения. Интеграл (4.13) в этом случае называют интегралом Коши–Лагранжа. Он справедлив для любых точек жидкости, движущейся без вращения частиц, т. е. потенциально.

Второй случай является признаком коллинеарности вектора вихря и вектора скорости. Это весьма редкий случай так называемого винтового движения.

Третий случай характеризует движение жидкой частицы вдоль вихревой линии, а четвертый – движение вдоль линии тока. При этом интеграл (4.13) носит название интеграла Бернулли. Он справедлив как для потенциального, так и для вихревого движений.

5. МОДЕЛЬ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Приступая к рассмотрению движения вязкой жидкости, необходимо прежде всего уяснить терминологию, т. е. смысл, вкладываемый в понятие «вязкая жидкость». С математических позиций необходимо установить вид функциональной зависимости для напряжений, т. е., другими словами, сформулировать модель вязкой жидкости. В дальнейшем под вязкой будем понимать жидкость, удовлетворяющую трем гипотезам: линейности, однородности и изотропности.

Гипотеза линейности

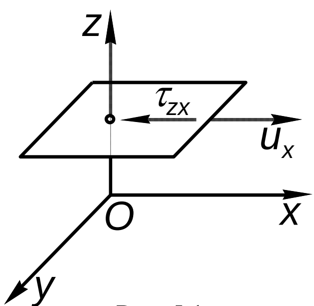

Рис. 5.1

Применим закон Ньютона для вязкости к жидкости, движущейся параллельно плоскости xOy (рис. 5.1), что дает

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Воспользуемся результатом, полученным при рассмотрении теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы. Согласно выводам, полученным при ее рассмотрении, скорость угловой деформации относительно оси y

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Учитывая, что рассматривается движение в плоскости xOy, и, следовательно, $u_z = 0$:

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Значит, касательное напряжение можно определить как

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y.$$

Полученный результат иллюстрирует так называемый закон трения Стокса. Согласно этому закону напряжения, возникающие в жидкости, в отличие от твердого тела пропорциональны не величинам самих деформаций, а скоростям деформаций и связаны с ними линейной зависимостью. При этом коэффициент пропорциональности остается неизменным и равным 2μ.

Кроме того, согласно закону Стокса касательные напряжения, как показано выше, пропорциональны скоростям угловой деформации, а нормальные – скоростям линейной деформации, т. е. $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Таким образом, можем записать

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

и т. д. (для компонент по другим осям координат).

Рассмотрим теперь нормальные напряжения, возникающие из-за сил вязкости. Согласно закону Стокса их можно записать в виде так называемых девиаторов напряжения, имеющих вид

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Полные нормальные напряжения отличаются тем, что помимо записанных выше компонент, обусловленных вязкостью, в любой, как в вязкой, так и в невязкой жидкости, действует гидростатическое давление. Таким образом, полные нормальные напряжения следует записать как сумму (с учетом знака):

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Выполним следующую операцию: из утроенной величины p_{xx} вычтем сумму $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$.

Получим

$$3p_{xx} - \left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) = -3p + 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} -$$

$$\left[-3p + 2\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] = 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div} \overline{u},$$

откуда найдем

$$p_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \overline{u} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

В качестве давления в вязкой жидкости принимают среднее арифметическое, т. е.

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

И, следовательно,

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u}\ ;$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u}\ ;$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u}\ .$$

Для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \bar{u} = 0$ и выражения соответственно упрощаются.

Гипотеза однородности

Предполагается, что вид линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций одинаков для всех точек пространства.

Гипотеза изотропности

Вязкая жидкость предполагается изотропной, т. е. ее свойства в любом направлении одинаковы.

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА)

Уравнения движения вязкой жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях, выполнив некоторые преобразования. Рассмотрим лишь одну проекцию этих уравнений (на ось *X*):

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right).$$

Как было показано при рассмотрении модели вязкой жидкости, нормальные напряжения

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\bar{u}.$$

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой ($\operatorname{div}\bar{u} = 0$), тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \qquad (6.1)$$

Касательное напряжение $\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$;

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \qquad (6.2)$$

аналогично

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}. \qquad (6.3)$$

Суммируя (6.1)–(6.3) и группируя члены, получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial x}\right).$$

Третий член можно записать в виде

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\bar{u},$$

но жидкость несжимаема и $\operatorname{div}\bar{u}=0$. Таким образом, получаем

$$\frac{du_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right).$$

Выражение в скобках есть ничто иное, как оператор Лапласа $\nabla^2\bar{u}$, а $\frac{\mu}{\rho}=\nu$. Окончательно получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right).$$

Аналогично можно расписать и две другие проекции. Полученная система уравнений движения вязкой жидкости носит название системы уравнений Навье–Стокса.

В векторной форме можно записать

$$\bar{a}=\bar{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\nabla^2\bar{u}. \tag{6.4}$$

Как видно уравнение (6.6) отличается от уравнения движения идеальной жидкости дополнительным членом ($\nu \nabla^2 \overline{u}$), учитывающим действие сил вязкого трения.

Целью гидродинамического расчета является нахождение полей скоростей и давлений, т. е. в результате расчета должны быть найдены четыре величины: u_x, u_y, u_z и p. Принципиально это оказывается возможным, так как три уравнения Навье–Стокса (в проекциях) плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными, а проекции массовых сил (X, Y, Z) задаются условиями конкретной задачи.

С чисто математических позиций уравнения Навье–Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективных членов ускорения. Следует отметить, что до настоящего времени, вследствие практически непреодолимых математических трудностей, не получено ни одного общего решения уравнений Навье–Стокса в их полном виде, т. е. при сохранении всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Известны лишь отдельные частные решения.

Одним из основных граничных условий при интегрировании является условие «прилипания», т. е. равенство нулю скорости жидкости на стенке.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
КУЛЕБЯКИН Виталий Васильевич
НЕДБАЛЬСКИЙ Викентий Константинович

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Ч а с т ь 2

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 02.02.2011.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,00. Тираж 100. Заказ 1159.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.