Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

С.Ю. Лошкарева
О.П. Очеретняя

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методическое пособие
к практическим занятиям

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
Л 81

Рецензенты:
В.В. Карпук, Н.А. Шавель

Лошкарева, С.Ю.
Л 81 Основы высшей математики: методическое пособие к практическим занятиям / С.Ю. Лошкарева, О.П. Очеретняя. – Минск: БНТУ, 2011. – 55 с.

ISBN 978-985-525-681-7.

В методическом пособии приводятся примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения по курсу «Основы высшей математики».

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-681-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ВЕКТОРЫ

1.1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка. Решение СЛАУ методом Крамера

Для определителя употребляются следующие обозначения $\Delta,\ \det A,\ \det\left(a_{ij}\right)$.

Определители 2-го порядка вычисляются по формуле (1.1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

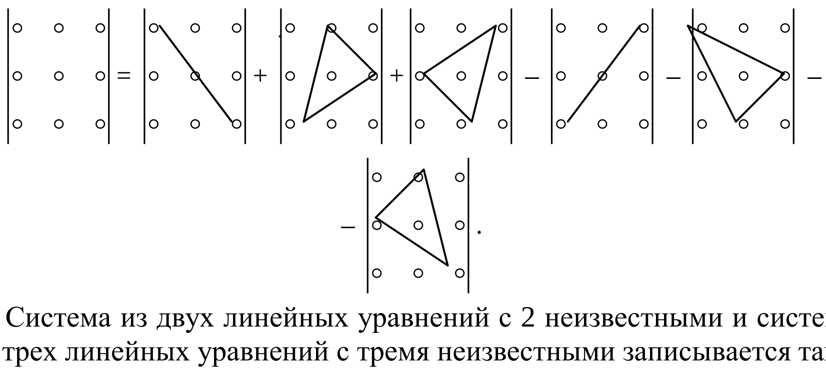
Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов, стоящих на главной $\left(a_{11}\cdot a_{22}\right)$ и побочной $\left(a_{21}\cdot a_{12}\right)$ диагоналях

Определители 3-го порядка вычисляются по формуле (1.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}. \qquad (1.2)$$

Для запоминания формул вычисления определителей можно воспользоваться «правилом треугольников» (правило Саррюса).



Система из двух линейных уравнений с 2 неизвестными и система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3. \end{cases}$$

Если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера (1.3).

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ \ i = \overline{1, n}, \qquad (1.3)$$

где Δ – определитель матрицы системы;

Δ_i – определитель, полученный из определителя заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Примеры решения задач

1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычисляя по формуле (1.1) получим

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -3 \cdot 8 - 4 \cdot (-5) = -24 + 20 = -4.$$

1.2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычисляя по формуле (1.2), получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

1.3. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Вычисляем по формуле (1.2).

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (-1) \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 4 - x \cdot 1 \cdot 1 - x^2 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= -x^2 + 4x + 2 + 4 - x - 2x^2 = -3x^2 + 3x + 6 = -3\left(x^2 - x - 2\right) =$$

$$= -3(x+1)(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 2.$$

1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 12. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы по формуле (1.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -8 - 3 = -11.$$

Так как $-11 \neq 0$, то можем вычислить Δ_1 и Δ_2 по формуле (1.1), а затем x_1 и x_2 по формуле Крамера (1.3).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22. \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 15 = 33.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2. \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3.$$

1.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9.$$

Вычисляя по формулам (1.2) и (1.3), получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 26 - 10 - 92 = -36 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-9} = 4.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 46 - 13 - 60 = -27 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 26 + 30 - 23 - 78 = -45 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45}{-9} = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.1. *Вычислить определители второго порядка.*

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$ *2.* $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ *3.* $\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$ *5.* $\begin{vmatrix} 131 & 231 \\ -130 & -230 \end{vmatrix}.$

(Ответ. 1) 18. 2) 1. 3) 2. 4) 0. 5) -100).

Задание 1.2. *Вычислить определители третьего порядка.*

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. *2.* $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. *3.* $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. *5.* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

(Ответ. 1) 6. 2) 4. 3) 6. 4) -6. 5) 27).

Задание 1.3. *Решить уравнения.*

1. $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ *2.* $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

(Ответ. 1) $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2.$ *2)* $x \in \mathrm{R}.$ *).*

Задание 1.4. *Решить системы уравнений.*

1. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 21, \\ 2x_1 + 7x_2 = 20. \end{cases}$ *2.* $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$ *3.* $\begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ -5x - 3y = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - 3y = 5, \\ 6x - 4y = 3. \end{cases}$ *5.* $\begin{cases} \sqrt{3}x + 2y = 5, \\ x + \sqrt{3}y = 1. \end{cases}$ *6.* $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 4, \\ \sqrt{2}x - 3y = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1- \ \ x_2- \ \ x_3= \ 4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$ *10.* $\begin{cases} 2x+3y- \quad z=1, \\ x+2y- \ \ 4z=9, \\ -x-12y+14z=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-2y+4z=9, \\ 2x+3y- \ \ z=0, \\ x+ \ y+ \ \ z=2. \end{cases}$

(*Ответ.* 1. $x_1=3,\ x_2=2$; 2. $x_1=1,\ x_2=-1$; 7. $x_1=-1,\ x_2=-2;\ x_3=0$;
8. $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-1$; 9. $x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=1$;
10. $\left(\frac{13}{3};-\frac{13}{3};-\frac{10}{3}\right)$; 11. $\left(\frac{52}{3};\frac{1}{2};-\frac{11}{6}\right)$).

1.2. Линейные операции над векторами. Координаты вектора

К линейным операциям над векторами относятся сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на число.

а) Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (*коммутативно*);
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ (*ассоциативно*);
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a},\quad \forall\overline{a}$;
4. $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0},\ \forall a$;
5. $\alpha\left(\beta\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\overline{a}$, при $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$;
6. $1\cdot\overline{a}=\overline{a},\quad \forall\overline{a}$;
7. $\left(\alpha+\beta\right)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$, при $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ (*дистрибутивно по отношению к сложению чисел*);
8. $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$, при $\forall\overline{a},\overline{b}$; $\forall\alpha\in\mathrm{R}$ (*дистрибутивно по отношению к сложению векторов*).

б) Пусть задан вектор $\overline{a}$ в базисе $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$. Тогда

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}, \tag{1.4}$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\overline{a}$.

Длина вектора $\overline{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ вычисляется по формуле

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\ . \tag{1.5}$$

Если вектор $\overline{AB}$ имеет начало в точке $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ и конец в точке $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$, то его координаты

$$\overline{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right).$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\overline{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ и $\overline{b} = \left(b_x,\ b_y,\ b_z\right)$, то

1. $\overline{a} + \overline{b} = \left(a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\right)$.
2. $\overline{a} - \overline{b} = \left(a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z\right)$.
3. $\lambda\ \overline{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y,\ \lambda a_z\right)$.

с) Пусть вектор $\overline{a}$ разложен по базису $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$ (см. рис. 1).

Вектор $\overline{a}$ с векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ образуют углы α, β, γ. Косинусы этих углов называются ***направляющими*** косинусами вектора. Координаты вектора $\overline{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ через направляющие косинусы выражаются формулами:

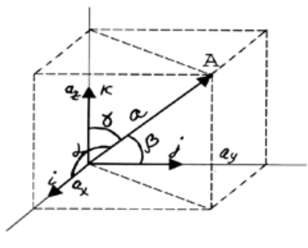


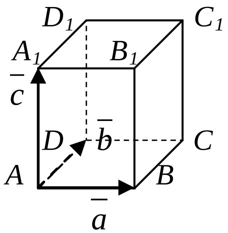
Рис. 1

$$a_x = \left|\overline{a}\right| \cos\alpha;\ \ a_y = \left|\overline{a}\right| \cos\beta;\ \ a_z = \left|\overline{a}\right| \cos\gamma. \tag{1.6}$$

Следовательно, $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}$;

Примеры решения задач

1.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{D_1B_1}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{D_1B}$, $\overline{DB_1}$ через $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.



Решение. По определению суммы векторов получаем:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{a} + \overline{b};$$

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}.$$

По определению разности двух векторов находим:

$$\overline{D_1B_1} = \overline{A_1B_1} - \overline{A_1D_1} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{a} - \overline{b};$$

$$\overline{B_1C} = \overline{BC} - \overline{BB_1} = \overline{AD} - \overline{AA_1} = \overline{b} - \overline{c}.$$

Теперь найдем $\overline{D_1B}$ и $\overline{DB_1}$.

$$\overline{D_1B} = \overline{D_1D} + \overline{DA} + \overline{AB} = -\overline{AA_1} - \overline{AD} + \overline{AB} = \overline{a} - \overline{b} - \overline{c}.$$

$$\overline{DB_1} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BB_1} = -\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{AA_1} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}.$$

1.7. Даны векторы $\overline{a} = (1;-2;3)$, $\overline{b} = (2;1;-4)$. Найти векторы $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$; $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{p} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$; $\overline{q} = 5\overline{a} - 4\overline{b}$.

Решение.

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (1;-2;3) + (2;1;-4) = (1+2;-2+1;3-4) = (3;-1;-1);$$

$$\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}=(1;\,-2;\,3)-(2;\,1;\,-4)=(1-2;\,-2-1;\,3-(-4))=(-1;-3;\,7);$$
$$\overline{p}=3\overline{a}+2\overline{b}=3(1;\,-2;\,3)+2(2;\,1;\,-4)=$$
$$=(3\cdot1+2\cdot2;\,3\cdot(-2)+2\cdot1;3\cdot3+2\cdot(-4))=(7;-4;\,1);$$
$$\overline{q}=5\overline{a}-4\overline{b}=5(1;\,-2;\,3)-4(2;\,1;\,-4)=$$
$$=(5\cdot1-4\cdot2;\,5\cdot(-2)-4\cdot1;5\cdot3-4\cdot(-4))=(-3;-4;-31).$$

1.8. Вычислить периметр треугольника ABC с вершинами в точках $A(8;0;7)$; $B(10;2;8)$; $C(10;-2;8)$**.**

Решение. Найдем длины сторон AB, BC, AC.

$$AB=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(10-8)^2+(2-0)^2+(8-7)^2}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3;$$
$$BC=\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(10-10)^2+(2-2)^2+(8-8)^2}=\sqrt{(-4)^2}=4;$$
$$AC=\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(10-8)^2+(-2-0)^2+(8-7)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3.$$

Значит, периметр треугольника $p=4+3+3=10.$

1.9. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой, если $A(3;-7;8)$; $B(-5;4;1)$; $C(27;-40;29)$.

Решение. Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, то точки A, B, C лежат на одной прямой.

$$\overline{AB}=(-8;11;-7);\quad \overline{AC}=(24;-33;21)\text{, т.е. } \overline{AC}=-3\overline{AB}.$$

Значит векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны и, следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой.

1.10. Лежат ли точки $A(-2;-13;3)$, $B(1;4;1)$, $C(1;4;1)$ и $D(0;0;0)$ в одной плоскости.

Решение. *I способ*. Если векторы $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ лежат в одной плоскости (компланарны), то и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Найдем координаты векторов $\overline{DA}=(-2;-13;3)$, $\overline{DB}=(1;4;1)$, $\overline{DC}=(-1;-1;-4)$.

Если вектор $\overline{DA}$ можно разложить по векторам $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ $\left(\overline{DA}=x\overline{DB}+y\overline{DC}\right)$, то векторы $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ – компланарны.

Запишем это в координатах.

$$\begin{cases} -2=x-y \\ -13=4x-y \\ 3=x-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ 4y-8-y=-13 \\ y-2-4y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ y=-5/3 \\ y=-5/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-11/3 \\ y=-5/3 \end{cases}.$$

Значит $\overline{DA}=-\frac{11}{3}\overline{DB}-\frac{5}{3}\overline{DC}$, т.е. векторы DA, DB, DC – компланарны и, следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

II способ. Если определитель, составленный из координат векторов $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ не равен 0, то эти векторы образуют базис, т.е. являются линейно независимыми.

$$\begin{vmatrix} -2 & -13 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=32+13-3+12-52-2=0,$$

Следовательно, векторы линейно зависимы (компланарны), а значит точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

1.11. Векторы заданы в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатами: $\bar{a}=(2;-1;8)$, $\bar{l}_1=(1;2;3)$, $\bar{l}_2=(1;-1;-2)$, $\bar{l}_3=(1;-6;0)$. Доказать, что только $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

Решение. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -18 - 4 + 3 - 12 = -31 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{l_1},\ \overline{l_2},\ \overline{l_3}$ образуют базис.

Обозначим координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{l_1},\ \overline{l_2},\ \overline{l_3}$ через $x,\ y,\ z$. Тогда

$$\overline{a} = \left(x,\ y,\ z\right) = x \cdot \overline{l_1} + y \cdot \overline{l_2} + z \cdot \overline{l_3} =$$
$$= x \cdot \left(1; 2; 3\right) + y \cdot \left(1; -1; -2\right) + z \cdot \left(1; -6; 0\right).$$

Составим систему: $\begin{cases} x + y + \ \ z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y \qquad = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \\ z = 1 \end{cases}$

Значит $\overline{a} = 2\overline{l_1} - \overline{l_2} + \overline{l_3} = \left(2; -1; 1\right).$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.5. *В тетраэдре $ABCD$ точка К – середина медианы BB_1 грани BCD. Разложить вектор $\overline{AK}$ по векторам* $\overline{a} = \overline{AB},\ \overline{b} = \overline{AC},\ \overline{c} = \overline{AD}.$ *(Ответ.* $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{4}\overline{b} + \frac{1}{4}\overline{c}$ *.)*

Задание 1.6. *В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани DCC_1D_1 пересекаются в точке М. Разложить вектор $\overline{AM}$ по векторам* $\overline{AB},\ \overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$ *.(Ответ.* $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AA_1}$.

Задание 1.7. *Даны векторы* $\overline{a} = \left(5; -1; 1\right),\ \overline{b} = \left(-2; 1; 0\right),$ $\overline{c} = \left(0; 0,2; 0\right),\ \overline{d} = \left(-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{7}\right).$ *Найти координаты векторов:*

1) $\overline{a} - \overline{b}$; 2) $\overline{d} - \overline{a}$; 3) $\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$; 4) $\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$; 5) $-\frac{1}{3}\overline{d}$.

(*Ответ* 1) $(7;-2;1)$; 2) $\left(-5\frac{1}{3};\,3\frac{2}{5};-1\frac{1}{7}\right)$; 3) $(7;-2;3)$; 4) $(7;\,-2;\,-1)$;

5) $\left(\frac{1}{9};-\frac{4}{5};\frac{1}{21}\right)$.

Задание 1.8. *Найти координаты точки B, если известны координаты вектора AB и точки A.* 1) $\overline{AB}=(4;2;3)$; $A(1;-2;0)$;

2) $\overline{AB}=(5;-4;-4)$; $A(0;4;1)$; 3) $\overline{AB}=(-4;11;-2)$; $A(0;-11;-3)$.

(*Ответ.* 1) $(5;0;3)$; 2) $(5;0;-3)$; 3) $(-4;0;-5)$).

Задание 1.9. *Вершины четырехугольника* $ABCD$ *находятся в точках* $A(2;0;4)$, $B(7;-15;16)$, $C(-1;-1;11)$ *и* $D(-14;28;-6)$. *Показать, что* $ABCD$ *– трапеция.*

Задание 1.10. *Двумерный вектор* $\overline{a}$ *образует с осью Ox угол α и имеет длину a. Определите координаты вектора* $\overline{a}$, *если:* 1) $\alpha=0^0$, $\overline{a}=3$; 2) $\alpha=90^0$, $\overline{a}=2$; 3) $\alpha=135^0$, $\overline{a}=3$; 4) $\alpha=-120^0$, $\overline{a}=5$;

5) $\alpha=-30^0$, $\overline{a}=4$. (

(*Ответ.* 1) $(3;0)$; 2) $(0;2)$; 3) $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\left(-\frac{5}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\left(2\sqrt{3};-2\right)$).

Задание 1.11. *Трехмерный вектор* $\overline{a}$ *составляет с координатными осями* Ox и Oy *углы* $\alpha=60^0$ и $\beta=120^0$. *Вычислить его координаты, если* $\left|\overline{a}\right|=2$.

(*Ответ.* $\overline{a_1}=\left(1;\,-1;\,\sqrt{2}\right)$ *или* $\overline{a_2}=\left(1;\,-1;\,-\sqrt{2}\right)$).

Задание 1.12. *Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{a}=(3;\,-5;\,8)$, $\overline{b}=(-1;\,1;\,-4)$.

(*Ответ.* 6; 14).

Задание 1.13. *Даны точки* $A(1;0;k)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;0;1)$. *При каких значениях k треугольник ABC является равнобедренным? (Ответ.* 3,75; 2).

Задание 1.14. *Даны точки* $A(4;4;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;4)$, $D(1;4;4)$. *Докажите, что ABCD – равнобочная трапеция.*

Задание 1.15. *Даны точки* $A(-1;2;3)$, $B(-2;1;2)$ *и* $C(0;-1;1)$. *Найдите точку равноудаленную от этих точек и расположенную на координатной плоскости: а) xOy; б) yOz; в) zOx.*

(Ответ. а) $\left(3/8;17/8;0\right)$; *б)* $\left(0;1;3/2\right)$; *в)* $\left(-1/3;\ 0;\ 17/6\right)$. *).*

Задание 1.16. *Даны точки* $O(0;0;0)$, $A(4;0;0)$, $B(0;6;0)$ *и* $C(0;0;2)$. *Найти: а) координаты центра и радиус окружности, описанный около* ΔAOB*; б) координаты точки, равноудаленной от вершин тетраэдра OABC. (Ответ. а)* $(2;3;0)$, $\sqrt{13}$; *б)* $(2;3;-1)$. *).*

Задание 1.17. *Даны векторы* $\overline{a}=(3;\,-2;\,1)$, $\overline{b}=(-2;\,3;\,1)$. *Найти:* *а)* $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$; *б)* $\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$; *в)* $\left|\overline{a}\right|-\left|\overline{b}\right|$; *г)* $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$.

(Ответ. а) $\sqrt{6}$; *б)* $2\sqrt{14}$; *в)* 0; *г)* $5\sqrt{2}$ *)).*

Задание 1.18. *В некотором базисе заданы векторы:* $\overline{a}=(1;\,1;\,2)$, $\overline{l_1}=(2;\,2;\,-1)$, $\overline{l_2}=(0;\,4;\,8)$, $\overline{l_3}=(-1;\,-1;\,3)$. *Убедитесь, что* $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$, $\overline{l_3}$ *образуют базис и найдите в нем координаты вектора* $\overline{a}$. *(Ответ.* $\overline{a}=(1;0;1)$ *).*

Задание 1.19. *Доказать, что векторы* $\overline{a}=(5;\,4;\,1)$, $\overline{b}=(-3;\,5;\,2)$, $\overline{c}=(2;\,-1;\,3)$ *образуют базис, и найти координаты вектора* $\overline{d}=(7;23;\,4)$ *в этом базисе. (Ответ.* $\overline{d}=(3;2;-1)$ *).*

1.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi\,. \tag{1.7}$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\,b_y,\,b_z\right)$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z, \tag{1.8}$$

Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,. \tag{1.9}$$

Основные свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2=\overline{a}^2\;\Rightarrow\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$.
2. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0,$ если $\left|\overline{a}\right|=0\;\left(\left|\overline{b}\right|=0\right)$ или $\overline{a}\perp\overline{b}.$
3. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}.$
4. $\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\left(\lambda\,\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right).$
5. $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.$
6. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}.$

Физический смысл скалярного произведения. Если вектор $\overline{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\overline{S}$, то работа указанной силы определяется равенством

$$A=\overline{F}\cdot\overline{S}=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{F},\overline{S}}\right) \tag{1.10}$$

Примеры решения задач

1.12. Даны $\left|\overline{a_1}\right| = 3$; $\left|\overline{a_2}\right| = 4$; $\left(\widehat{\overline{a_1}, \overline{a_2}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить а) $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}$; б) $\left(3\overline{a_1} - 2\overline{a_2}\right)\left(\overline{a_1} + 2\overline{a_2}\right)$; в) длину вектора $\overline{a_1} + \overline{a_2}$.

Решение. а) по формуле (1.7) находим

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = \left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a_1}, \overline{a_2}}\right) = 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -6.$$

б) Используя свойства скалярного произведения, получим:

$$\left(3\overline{a_1} - 2\overline{a_2}\right)\left(\overline{a_1} + 2\overline{a_2}\right) = 3\overline{a_1}^{\,2} + 6\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} - 2\overline{a_2} \cdot \overline{a_1} - 4\overline{a_2}^{\,2} =$$

$$= 3\overline{a_1}^{\,2} + 4\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} - 4\overline{a_2}^{\,2} = 3\left|\overline{a_1}\right|^2 + 4\left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right| \cos\left(\widehat{\overline{a_1}, \overline{a_2}}\right) - 4\left|\overline{a_2}\right|^2 =$$

$$= 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 4 \cdot 4^2 = 27 - 24 - 64 = -61.$$

в) $$\left|\overline{a_1} + \overline{a_2}\right|^2 = \left(\overline{a_1} + \overline{a_2}\right)^2\left(\overline{a_1} + \overline{a_2}\right) = \overline{a_1}^{\,2} + 2\overline{a_1}.\overline{a_2} + \overline{a_2}^{\,2} =$$

$$= \left|\overline{a_1}\right|^2 + 2\left|\overline{a_1}\right|.\left|\overline{a_2}\right| \cos\left(\widehat{\overline{a_1}, \overline{a_2}}\right) + \left|\overline{a_2}\right|^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 4^2 =$$

$$= 13 \;\Rightarrow\; \left|\overline{a_1} + \overline{a_2}\right| = \sqrt{13}.$$

Ответ. а) -6; б) -61; в) $\sqrt{13}$.

1.13. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями.

Решение. В четырехугольнике ABCD диагоналями являются AC и BD. Найдем координаты векторов $\left|\overline{AC}\right|$, $\left|\overline{BD}\right|$ и их длины.

$$\overline{AC} = (-5;3;-1);\; \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}.$$

$$\overline{BD} = (-6;-9;3);\; \left|\overline{BD}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 81 + 9} = \sqrt{126}.$$

Угол φ между диагоналями находим по формуле (1.9).

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|} = \frac{-5\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{126}} = \frac{0}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{126}} = 0.$$

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0.$

Ответ. $\varphi = 90^0.$

1.14. При каком значении λ векторы $\overline{a} = \lambda\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} - \lambda\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

Решение. Чтобы векторы были взаимно перпендикулярны, надо чтобы их скалярное произведение равнялось нулю. Используя формулу (1.8), получим равенство

$$\lambda\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -6.$$

Ответ. $\lambda = -6$.

1.15. Даны вершины треугольника *ABC:* $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Вычислить внешний угол при вершине *B*.

Решение. Внешний угол при вершине *B* равнее углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Найдем их координаты: $\overline{AB} = (-3;0;-4)$, $\overline{BC} = (7;0;1)$. По формуле (1.9) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{-3\cdot 7 + 0\cdot 0 + (-4)\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}} =$$

$$= \frac{-25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \frac{3\pi}{4}.$

Ответ. $\varphi = \frac{3\pi}{4}.$

1.16. Вычислить работу равнодействующей $\overline{F}$ сил $\overline{F}_1 = (1;-3;8)$, $\overline{F}_2 = (1;2;7)$, $\overline{F}_3 = (-1;5;9)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(7;1;3)$ в точку $M_2(10;4;4)$.

Решение. Равнодействующая сил равна

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=(1;4;24),$$

а вектор перемещения $\overline{M_1M_2}=\overline{S}=(3;3;1)$.

Тогда работа (см. формулу (1.10)) равна

$$A=\overline{F}\cdot\overline{S}=1\cdot3+4\cdot3+24\cdot1=39.$$

Ответ. 39.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.20. *Даны векторы* $\overline{a}=3\overline{i}-5\overline{j}+\overline{k}$ *и* $\overline{b}=\overline{j}-5\overline{k}$ *.Вычислить:*

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a}\cdot\overline{i}$; 3) $\overline{b}\cdot\overline{j}$; 4) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{k}$; 5) $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\left(\overline{k}+\overline{i}-3\overline{j}\right)$.

(Ответ. 1) -10; 2) 3; 3) 1; 4) -4; 5) 28.

Задание 1.21. *Даны векторы* $\overline{a}=m\cdot\overline{i}+3\cdot\overline{j}+4\cdot\overline{k}$ *и* $\overline{b}=4\overline{i}+m\cdot\overline{j}-7\overline{k}$ *. При каком значении m векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *перпендикулярны? (Ответ. 4).*

Задание 1.22. *Векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *взаимно перпендикулярны, вектор* $\overline{c}$ *образует с ними углы, равные* $\dfrac{\pi}{3}$*. Зная, что* $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left|\overline{c}\right|=8$

вычислить: $1)\left(3\overline{a}-2\overline{b},\overline{b}+3\overline{c}\right), 2)\left|\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}\right|^2$.

(Ответ.1)–72; 2) 373).

Задание 1.23. *Даны вершины* $\Delta ABC:\ A(1;2;1), B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$. *Вычислив внутренние углы треугольника, убедиться, что этот треугольник – равнобедренный.*

Задание 1.24. *Даны три вектора* $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 10\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$. *Найти:* 1) $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, 2) $\text{пр}_{\overline{a}}\left(\overline{b} + \overline{c}\right)$, 3) $\text{пр}_{\overline{a+b}}\overline{c}$, 4) $\text{пр}_{\overline{a}}\left(2\overline{a} - 3\overline{c}\right)$.

(Ответ. 1) $-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{26}{10}$; 4) $-\frac{68}{3}$ *).*

Задание 1.25. *В параллелепипеде* $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

$AA_1 = AB = AD = 1$, $\angle DAB = 60^0$, $\angle A_1AB = 90^0$. *Вычислить:*
1) $\overline{BC_1} \cdot \overline{D_1B}$; 2) $\left|\overline{A_1C}\right|$; 3) $\cos\left(\overline{DA_1}, \overline{D_1B}\right)$; 4) $\cos\left(\overline{AC_1}, \overline{DB_1}\right)$.

(*Ответ.* 1) $-1{,}5$; 2) 2; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ *).*

Задание 1.26. *В прямоугольном параллелепипеде* $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60^0$. *Найти* $\varphi = \angle A_1AC_1$.

(Ответ. 45^0*).*

Задание 1.27. *В тетраэдре* $DABC$: $DA = 5$ *см*, $AB = 4$ *см*, $AC = 3$ *см*, $\angle BAC = 90^0$, $\angle DAB = 60^0$, $\angle DAC = 45^0$.

(Ответ. $\frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}$ *).*

Задание 1.28. *Даны три вектора* $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$. *Найти вектор* $\overline{x}$, *удовлетворяющий условиям:* $\overline{x} \cdot \overline{a} = -5$; $\overline{x} \cdot \overline{b} = -11$; $\overline{x} \cdot \overline{c} = 20$.

(Ответ. $\overline{x} = \left(2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}\right)$ *).*

Задание 1.29. *Даны два вектора* $\overline{a} = (8; 4; 1)$, $\overline{b} = (2; -2; 1)$. *Найти вектор* $\overline{c}$, *компланарный векторам* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *перпендикулярный к вектору* $\overline{a}$ *и равный ему по длине, образующий с вектором* $\overline{b}$ *тупой угол.*

(Ответ. $\overline{c} = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{11}{\sqrt{2}}; -\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$*).*

Задание 1.30. *Даны* $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 1,\ \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = 60^0.$ *Найти:* 1) $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{a}+\overline{b}}\right)$; 2) $\cos\left(\widehat{\overline{b},\overline{a}-\overline{b}}\right)$; 3) $\cos\left(\widehat{\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}}\right)$.

(Ответ. 1) $\frac{5\sqrt{7}}{14}$; 2) 0; 3) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ *).*

Задание 1.31. *Найти такое число* α, *чтобы косинус угла между векторами* $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ *и* $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ *был равен* $\frac{5}{12}$.

(Ответ $\alpha = \pm\sqrt{\frac{47}{5}}$ *).*

Задание 1.32. *Определить работу силы* $\overline{F}$, *если* $|\overline{F}| = 15H$, *которая действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом* $\frac{\pi}{3}$ *к направлению действия силы.*

(Ответ. 30 Дж).

Задание 1.33. *Вычислить работу, производимую силой* $\overline{F} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - 5\overline{k}$, *если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения* $A(2;-3;5)$ *в положение* $B(3;-3;-1)$.

(Ответ. 33).

Задание 1.34. *Тело движется прямолинейно под действием силы* $\overline{F}$, *удовлетворяющей условию* $2\overline{F} = 3\overline{F}_1 + 5\overline{F}_2$. *Известны проекции сил* $\overline{F}_1$ *и* $\overline{F}_2$ *на направления перемещения тела:* $\text{пр}_{\overline{S}}\overline{F}_1 = 4$; $\text{пр}_{\overline{S}}\overline{F}_2 = \frac{4}{7}$. *Найти работу силы* $\overline{F}$, *затраченную на преодоление пути, равного 8 м.*

(Ответ. 59).

Задание 1.35. *Точка, двигаясь прямолинейно, перемещается из* $B(5;3;-7)$ *в* $C(4;1;4)$ *под действием сил* $\overline{F}_1 = (3;-4;2)$, $\overline{F}_2 = (2;3;-5)$ *и* $\overline{F}_3 = (-3;-2;4)$, *приложенных в этой точке. Найдите работу равнодействующей силы.*

(Ответ. A = 15).

Задание 1.36. *Под действием силы* $\overline{F}=(2;4;6)$ *точка перемещается параллельно вектору* $\overline{S}=(3;2;-1)$ *на отрезок, равный длине вектора* $\overline{S}$. *Вычислить работу силы* $\overline{F}$ *и угол, составленный векторами силы и перемещения.*

(Ответ. $A=8,\ \cos\varphi = 2/7$ *).*

Задание 1.37. *Даны точки* $A(1;-2;5)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;2;2)$, $D(-1;1;3)$. *Показать, что четырехугольник ABCD – параллелограмм и вычислить его углы.*

(Ответ. $\arccos\frac{1}{\sqrt{102}}$, $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{102}}$ *).*

Задание 1.38. *Найти вектор* $\overline{b}$, *ортогональный вектору* $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$ *и удовлетворяющий условиям:* $(\overline{b},\overline{i})=3;\ (\overline{b},\overline{j})=2.$

(Ответ. $\overline{b}=3\overline{i}+\overline{j}+5\overline{k}$ *).*

Задание 1.39. *Дан вектор* $\overline{a}=5\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$. *Найти вектор* $\overline{b}$, *удовлетворяющий условиям:* $(\overline{b},\overline{i})=2;\ (\overline{b},\overline{k})=-1,\ (\overline{a},\overline{b})=3.$

(Ответ. $\overline{b}=2\overline{i}-2\overline{j}-\overline{k}$ *).*

1.4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется **вектор** $\overline{c}$, обозначаемый символом $[\overline{a},\ \overline{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1. Длина вектора $\overline{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е.

$$\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right). \tag{1.11}$$

2. Вектор $\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]$ перпендикулярен к плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{c}\perp\overline{a},\ \overline{c}\perp\overline{b}$.

3. Векторы $\overline{a},\ \overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку векторов.

Основные свойства векторного произведения

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$.
2. $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right)$.
3. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.
4. $\overline{a}\times\overline{b}=0\ \Leftrightarrow\ a\parallel b$ – необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
5. $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеющих общее начало в точке O (рис. 2).

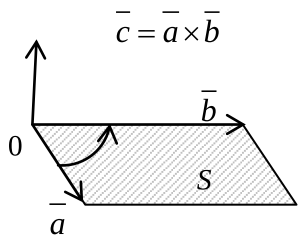


Рис. 2

Если $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ и $\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ в *координатной форме* имеет вид:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)= \tag{1.12}$$

$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\overline{i}+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)\overline{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\overline{k}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, определяется формулой

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|. \tag{1.13}$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* $\overline{M}$ силы $\overline{F}$, приложенной к точке *B* тела, закрепленного в точке *A*

$$\overline{M}=\overline{AB}\times\overline{F}. \tag{1.14}$$

Примеры решения задач

1.17. Заданы векторы $\overline{a_1}=\left(3;-1;2\right)$ и $\overline{a_2}=\left(1;2;-1\right)$. Найти координаты вектора $\left[2\overline{a_1}-\overline{a_2},\ 2\overline{a_1}+\overline{a_2}\right]$.

Решение. Найдем координаты векторов $2\overline{a_1}-\overline{a_2},\ 2\overline{a_1}+\overline{a_2}$.

$$2\overline{a_1}-\overline{a_2}=2\left(3;-1;2\right)-\left(1;2;-1\right)=\left(5;-4;5\right),$$

$$2\overline{a_1}+\overline{a_2}=2\left(3;-1;2\right)+\left(1;2;-1\right)=\left(7;0;3\right).$$

$$\left[2\overline{a_1}-\overline{a_2},\ 2\overline{a_1}+\overline{a_2}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & -4 & 5\\ 7 & 0 & 3\end{vmatrix}=-12\overline{i}+35\overline{j}+0\overline{k}+28\overline{k}-0\overline{i}-15\overline{j}=$$

$$=-12\overline{i}+20\overline{j}+28\overline{k}.$$

Значит, координаты искомого вектора $\left(-12;\ 20;\ 28\right)$.

1.18. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A\left(4;3;2\right)$, $B\left(2;3;4\right)$, $C\left(1;1;1\right)$.

Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{AB} = -2\bar{i} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \overline{AC} = -3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 8\bar{j} + 4\bar{k}.$$

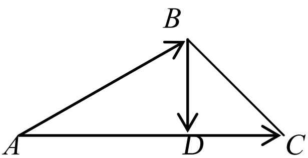
Следовательно площадь параллелограмма

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ. $4\sqrt{6}$ (кв.ед.).

1.19. Даны вершины треугольника $A(4;3;2)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$. Определить длину высоты, опущенной из точки B на сторону AC, и вычислить площадь $\triangle ABC$.

Решение. Площадь $\triangle ABC$ вычислим по формуле $S = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.



Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и длину вектора $\overline{AC}$.

Имеем $\overline{AB} = (4;-5;0)$, $\overline{AC} = (0;4;-3)$, $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5.$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|15\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{225 + 144 + 256} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (кв.ед.)}.$$

Так как $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{BD}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|$, то $\left|\overline{BD}\right| = \dfrac{2S}{\left|\overline{AC}\right|} = \dfrac{25}{5} = 5.$

Ответ. 5; 12,5.

1.20. Найди модуль момента силы $\overline{F} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ относительно точки $A(1;2;-1)$, если $B(2;-1;3)$ – точка приложения силы $\overline{F}$.

Решение. Момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно точки A равен $\overline{S} \times \overline{F}$, где $\overline{S}$ – вектор, определяемый отрезком $\overline{AB}$. Следовательно, $\overline{S} = \overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$. Поэтому

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11\overline{i} + 11\overline{j} + 11\overline{k}.$$

Следовательно, $\left|\overline{M}\right| = \sqrt{(-11)^2 + 11^2 + 11^2} = 11\sqrt{3}.$

Ответ. $11\sqrt{3}$.

1.21. Три силы $\overline{F_1} = (2;4;6)$, $\overline{F_2} = (1;-2;3)$, $\overline{F_3} = (1;1;-7)$ приложены в точке $A(3;-4;8)$. Определить величину момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4;-2;6)$.

Решение. Найдем равнодействующую трех сил

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = (2+1+1;\ 4-2+1;\ 6+3-7) = (4;3;2).$$

Определим координаты вектора $\overline{BA}$:

$\overline{BA} = (3-4;\ -4+2;\ 8-6) = (-1;\ -2;\ 2).$

Тогда

$$\overline{BA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k}.$$

Следовательно, $\overline{BA} \times \overline{F} = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15.$

Ответ. 15.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.40. *Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы* $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ *и* $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

(Ответ. $\sqrt{38}$ *).*

Задание 1.41. *Дан треугольник с вершинами* $A(4;-14;8)$, $B(2;-18;12)$, $C(12;-8;12)$. *Найти длину его высоты, опущенной из вершины С на сторону АВ. (Ответ.* $h = 10$ *).*

Задание 1.42. *Вычислить расстояние между параллельными сторонами параллелограмма ABCD, построенного на векторах* $\overline{AB} = (6;\ 0;\ 2)$ *и* $\overline{AC} = \left(3/2;\ 2;\ 1\right)$. *(Ответ.* $\frac{13\sqrt{10}}{20}$; $\frac{26}{\sqrt{101}}$ *).*

Задание 1.43. *Найдите вектор* $\overline{x}$ *из системы уравнений*

$$\begin{cases} \overline{x} \cdot \overline{i} = 3, \\ \overline{x} \times \overline{i} = -2\overline{k}. \end{cases}$$

(Ответ. $\overline{x} = (3;\ 2;\ 0)$*).*

Задание 1.44. *Найдите вектор* $\overline{x}$, *зная, что он ортогонален векторам* $\overline{a} = (2;\ 3;\ -1)$ *и* $\overline{b} = (1;\ -1;\ 3)$ *и удовлетворяет уравнению* $\overline{x} \cdot \left(2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}\right) = 51$.

(Ответ. $(24;-21;-15)$ *).*

Задание 1.45. *Сила* $F = 2i - 4j + 3k$ *приложена к точке* $A(4;5;-2)$. *Найдите момент силы относительно начала координат.*

(Ответ $\overline{M} = (7;\ -16;\ -26)$*).*

Задание 1.46. *Сила* $\overline{P} = (2;\ 2;\ 9)$ *приложена к точке* $A(4;2;-3)$. *Определить величину момента этой силы относительно точки* $B(2;4;0)$.

(Ответ. $\left|M\right| = 28$ *).*

Задание 1.47. *Даны силы* $\overline{M}=(2;-1;3)$, $\overline{N}=(3;2;-1)$, $\overline{P}=(-4;1;3)$, *приложенные в точке* $C(-1;4;-2)$. *Определить величину момента равнодействующей этих сил относительно точки* $A(2;3;-1)$.

(Ответ. $|M|=\sqrt{66}$ *).*

Задание 1.48. *Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C, D. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и вершины C и D, если*

1) $A(3;4;5)$, $B(1;2;1)$, $C(-2;-3;6)$, $D(3;-6;-3)$;

2) $A(4;3;1)$, $B(2;7;5)$, $C(-4;-2;4)$, $D(2;-3;-5)$;

3) $A(5;2;7)$, $B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3)$, $D(1;-5;2)$.

(Ответ. 1) $\sqrt{2114}$; $\frac{\sqrt{4426}}{2}$; *2)* $\sqrt{1666}$; $\frac{\sqrt{9746}}{2}$; *3)* $\sqrt{1196}$; $\frac{19\sqrt{2}}{2}$ *).*

1.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число $[\overline{a},\overline{b}]\overline{c}$, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на третий вектор $\overline{c}$, и обозначается $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ или $(\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c})$.

Свойства смешанного произведения

При круговой перестановке множителей смешанное произведение не изменяется; при перестановке, нарушающих их круговой порядок, смешанное произведение меняет свой знак.

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=-\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}=-\overline{c}\cdot\overline{b}\cdot\overline{a}=-\overline{a}\cdot\overline{c}\cdot\overline{b}.$
2. $[\overline{a},\,\overline{b}]\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot[\overline{b},\,\overline{c}].$
3. $\left(\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2},\,\overline{b},\,\overline{c}\right)=\alpha_1\left(\overline{a_1},\,\overline{b},\overline{c}\right)+\alpha_2\left(\overline{a_2},\,\overline{b},\overline{c}\right);\ \alpha_1,\,\alpha_2\in R.$

4. $\left(\alpha \cdot \overline{a}\right) \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$, $\forall \alpha \notin R$.

5. $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right) = 1$.

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{cases} V, \text{ если тройка векторов } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ - правая,} \\ -V, \text{если тройка векторов } \overline{a},\overline{b},\overline{c} \text{ - левая.} \end{cases}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left|\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\right|$.

Если векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ заданы своими координатами $\overline{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\overline{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\overline{c} = \left(x_3, y_3, z_3\right)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Необходимым и достаточным условием *компланарности трех векторов* $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения ($(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$).

Смешанное произведение может обращаться в нуль в одном из следующих трех случаях:

1. Один из векторов $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ равен 0.

2. $\sin\varphi = 0$, тогда $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

3. $\cos\theta = 0$, следовательно, вектор $\overline{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Примеры решения задач

1.22. Найти смешанное произведение векторов $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-3\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$.

Решение. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы разложением по ортам осей:

$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$; $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$; $\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}$.

Используя формулу (1.15), получаем

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-10.$$

1.23. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(5;5;6)$, $B(4;5;4)$, $C(4;3;3)$, $D(2;2;2)$.

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды и имеющими общую вершину *A*.

$\overline{AB}=(-1;0;-2)$, $\overline{AC}=(-1;-2;-3)$, $\overline{AD}=(-3;-3;-4)$.

Так как $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB},\ \overline{AC},\overline{AD},\ \right|$, то

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-8-6+12+9\right|=\frac{7}{6}.$$

1.24. Доказать, что точки $A(3;-4;1)$, $B(2;-3;7)$, $C(1;-4;3)$, $D(4;-3;5)$ лежат в одной плоскости.

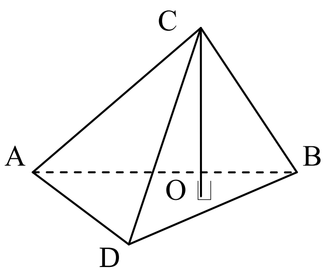
Решение. Если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то и векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ лежат в одной плоскости, т.е. эти векторы компланары, и значит $\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\overline{AD}\right)=0$. Найдем координаты этих векторов. $\overline{AB}=(-1;1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(1;1;4)$. Тогда

$$\left(\overline{AB},\ \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 8 + 2 = 0.$$

А это значит, что точки $A(3;-4;1)$, $B(2;-3;7)$, $C(1;-4;3)$, $D(4;-3;5)$ лежат в одной плоскости.

1.25. Даны вершины пирамиды точки $A(0;-2;5)$, $B(6;6;0)$, $C(3;-3;6)$, $D(2;-1;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *C* на грань *ABD*.

Решение. Так как $V = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot |CO|$, то $h = |CO| = \frac{3V}{S_{ABD}}$.



Найдем векторы: $\overline{AB} = (6;8;-5)$, $\overline{AC} = (3;-1;1)$, $\overline{AD} = (2;1;-2)$.

Объем пирамиды, построенной на этих векторах равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left(\overline{AB},\ \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}.$$

Вычислим площадь основания пирамиды, которым является треугольник *ABD*, используя свойства векторного произведения.

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AD}\right]\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|-11\bar{i} + 2\bar{j} - 10\bar{k}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2+2^2+(-10)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{225}=\frac{15}{2}\text{ (кв.ед.).}$$

Тогда искомая $h=\left|CO\right|=\dfrac{3V}{S_{ABD}}=\dfrac{3\cdot\frac{5}{12}}{\frac{5}{12}}=3$ ед.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.49. *Выяснить, компланарны ли векторы* $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$*, если*

1) $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k},\ \overline{b}=9\overline{i}-11\overline{j}+13\overline{k},\ \overline{c}=2\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}.$

2) $\overline{a}=8\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k},\ \overline{b}=2\overline{j}-\overline{k},\ \overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}.$

3) $\overline{a}=\left(-2;-1;1\right),\ \overline{b}=\left(4;-4;1\right),\ \overline{c}=\left(4;-6;2\right).$

4) $\overline{a}=\left(1;1;1\right),\ \overline{b}=\left(1;0;1\right),\ \overline{c}=\left(0;1;1\right).$

(Ответ. 1), 3) – компланары; 2), 4) – не компланары).

Задание 1.50. *Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах* $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$*, если*

1) $\overline{a}=8\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k},\ \overline{b}=3\overline{j}-\overline{k},\ \overline{c}=4\overline{i}.$

2) $\overline{a}=\overline{i}-5\overline{j}+3\overline{k},\ \overline{b}=-5\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k},\ \overline{c}=-3\overline{i}-2\overline{j}-2\overline{k}.$

3) $\overline{a}=\left(5;-3;2\right),\ \overline{b}=\left(-6;3;4\right),\ \overline{c}=\left(-8;6;-5\right).$

4) $\overline{a}=\left(-1;3;4\right),\ \overline{b}=\left(2;5;2\right),\ \overline{c}=\left(1;2;3\right).$

(Ответ. 1) 12; 2) 179; 3) 33; 4) 27.

Задание 1.51. *Даны вершины пирамиды* точки $A\left(3;2;1\right)$, $B\left(4;0;-1\right)$, $C\left(2;-1;0\right)$, $D\left(4;2;5\right)$. *Вычислить длину высоты треугольной пирамиды, опущенной из вершины D.*

(Ответ. $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ *).*

Задание 1.52. *Определить длину высоты параллелепипеда* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *если* $\overline{AB}=(-1;\ 2;\ 5)$, $\overline{AA_1}=(2;\ 1;\ -1)$, $\overline{AD}=(4;\ -3;\ 2)$.

(Ответ. $\frac{65}{\sqrt{870}}$ *).*

Задание 1.53. *Объем пирамиды с вершинами в точках* $A(4;1;2)$, $B(6;3;7)$, $C(2;3;1)$, $D(x;-4;8)$ *равен* $51\frac{1}{3}$ *куб.ед. Найти x.*

(Ответ. $x_1=-5;\ x_2=46\frac{1}{3}$.

Задание 1.54. *Объем треугольной пирамиды равен 9 куб.ед. Три ее вершины находятся в точках* $A(4;-1;2)$, $B(5;1;4)$, $C(3;2;-1)$. *Найти координаты четвертой вершины D, если она находится на оси Oz.*

(Ответ. $D(0;\ 0;\ 3)$ *).*

Задание 1.55. *Объем тетраэдра V = 5, три его вершины находятся в точках* $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. *Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.*

(Ответ. $D_1(0;\ 8;\ 0)$, $D_2(0;\ -7;\ 0)$.

Задание 1.56. *Убедившись, что векторы* $\overline{a}=7\overline{i}+6\overline{j}-6\overline{k}$, $\overline{b}=6\overline{i}+2\overline{j}+9\overline{k}$ *можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.*

(Ответ. $\pm\left(6\overline{i}-9\overline{j}-2\overline{k}\right)$ *).*

Тема 2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Таблица производных, правила дифференцирования

$f(x)$	f'		$u(f(x))$	u'
C	0		–	–
x	1		u	u'
x^n	$n\cdot x^{n-1}$		u^n	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$\sin x$	$\cos x$		$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$		$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\mathrm{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		$\mathrm{tg}\, u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\mathrm{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$\mathrm{ctg}\, u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
e^x	e^x		e^u	$e^u\cdot u'$
a^x	$a^x\cdot\ln a$		a^u	$a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$		$\ln u$	$\dfrac{1}{u}\cdot u'$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$		$\log_a u$	$\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin u$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arccos u$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\mathrm{arctg}\, u$	$\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$		$\mathrm{arcctg}\, u$	$\dfrac{-1}{1+u^2}\cdot u'$

Правила дифференцирования

$$(C\cdot u)' = C\cdot u' \qquad (u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$$

2.2. Вычисление табличных производных

Примеры решения задач

2.1. Найти производную y' от функций:

а) $y = 5\mathrm{tg}x - 2^x + \sqrt{17}$.

$$y' = 5(\mathrm{tg}x)' - \left(2^x\right)' + \left(\sqrt{17}\right)' = 5\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 2^x\cdot\ln 2.$$

б) $y = \arcsin x\cdot\sqrt{x}$.

$$y' = (\arcsin x)'\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\arcsin x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\arcsin x.$$

в) $y = \dfrac{\sin x}{\ln x}$.

$$y' = \frac{(\sin x)'\cdot\ln x - (\ln x)'\cdot\sin x}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x\cdot\ln x - \frac{1}{x}\cdot\sin x}{(\ln x)^2}.$$

2.2. Найти значение производной функций $y = x^5 + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - 10$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Найдем производную функции

$$y' = \left(x^5\right)' + 3\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' - (10)' = 5x^4 + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}.$$

Найдем значение y' в точке $x_0 = 1$:

$$y'(1) = 5\cdot 1^4 + 3\left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot 1^{-\frac{4}{3}} = 5 - 1 = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.1*. Найти производные* y' *от функций:*

1. $y = x^3 - \dfrac{3}{x^5} + 2\mathrm{tg}x.$
2. $y = \dfrac{1}{x^2} + 3\mathrm{arcctg}\,\mathrm{x} - 6.$
3. $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4}{x^4} - 5\sqrt[4]{x} + \sqrt{6}.$
4. $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x} + 2\arcsin x.$
5. $y = e^x - 2\mathrm{arctg}x + 56.$
6. $y = 2\log_2 x + 3^x - 12\,\mathrm{ctg}\,x$
7. $y = \left(\sin x - 5^x\right)\cdot\left(x^3 + 1\right).$
8. $y = \left(2x^7 + 3\ln x\right)\cdot\left(\mathrm{tg}x + \cos x\right).$
9. $y = \left(4 + \mathrm{arcctg}x\right)\cdot\left(\log_3 x - 1\right).$
10. $y = \arccos x\cdot\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1\right).$
11. $y = \left(2\sin x - 3\cos x\right)\cdot 3^x.$
12. $y = \left(\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - x^3\right)\left(2\mathrm{ctg}x + 7\right).$
13. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - \cos x}.$
14. $y = \dfrac{2x - 7\cos x}{\mathrm{arctg}x}.$
15. $y = \dfrac{4\sin x}{3x^3 + 5x}.$
16. $y = \dfrac{\arccos x = 3x^2}{e^x + 1}.$
17. $y = \dfrac{5 + 3^x}{1 - \mathrm{tg}x} + 2\arccos x.$
18. $y = \dfrac{e^x + 2}{2 - \cos x} - 2^x\cdot\sin x.$

Задание 2.2. *Найти значение производной* $y'(x)$ *от функции у в точке* $x = x_0$.

1. $y = -\frac{5}{6}x^6 + 2x^3 - x;\ x_0 = 1.$ ***(****Ответ. 0).*

2. $y = 2^x + \ln 2 \cdot x^3 - \sqrt{12};\ x_0 = 2.$ *(Ответ. 16*ln*2).*

3. $y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2};\ x_0 = -1.$ *(Ответ. – 4/3).*

4. $y = \frac{\arccos x}{x^2 + 1};\ x_0 = 1.$ *(Ответ.* $\pi - 1$*).*

2.3. Производные высших порядков

Производная второго порядка вычисляется по формуле:

$$y'' = (y')'. \tag{2.1}$$

Производная *n-го* порядка вычисляется по формуле:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'. \tag{2.2}$$

Примеры решения задач

2.3. Найти значение второй производной функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 1$ в точке $x = -2$.

Решение. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 1\right)' = x^2 - 2x + 4.$

$$y'' = \left(x^2 - 2x + 4\right)' = 2x - 2.$$

Значение второй производной в точке x = -2: $y''(-2) = 2(-2) - 2 = -6.$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.3. *Найти значение второй производной* y'' *от функции y в точке* $x = x_0$.

1. $y = 3^x$, $x_0 = 0$. *(Ответ.* $(\ln 3)^2$ *).*

2. $y = \cos x$, $x_0 = \pi$. *(Ответ. 1).*

3. $y = x \cdot \sin x$, $x_0 = 0$. *(Ответ. 2).*

4. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x_0 = 1$. *(Ответ.* $-\dfrac{1}{2}$ *).*

2.4. Производные сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная функции от функции (сложной функции) $y = f(\varphi(x))$ равна произведению производной данной функции *y* по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента *u* по независимой переменной *x*:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{2.3}$$

Примеры решения задач

2.4. Найти производную y' от функций: $a)$ $y = \sin 2x \cdot tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

$б)$ $y = e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)}$.

Решение. $a)$ $y' = \left(\sin 2x\right)' \cdot \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' \cdot \sin 2x =$

$$= \cos 2x \cdot \left(2x\right)' \cdot \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \sin 2x =$$

$$= 2\cos 2x \cdot \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \sin 2x.$$

б) $y' = \left(e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)} \right)' = e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)} \cdot \left(\arcsin\left(x^{\frac{1}{2}} \right) \right)' =$

$$= e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.4. *Найти производные* y' *следующих функций:*

1. $y = \cos 4x.$ *2.* $y = e^{(3x+5)}.$ *3.* $y = \arcsin \dfrac{x}{2}.$ *4.* $y = \ln^7 x.$

5. $y = \operatorname{arctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4} \right).$ *6.* $y = \left(x^2 + x - 5 \right)^{10}.$ *7.* $y = \sqrt[3]{x^5 - 4x^2 + 3}.$

8. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}.$ *9.* $y = \sin e^x.$ *10.* $y = \operatorname{tg} x^2 + \operatorname{tg}^2 x.$

11. $y = \sqrt{2x+3} - \dfrac{1}{\sin x}.$ *12.* $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3} \right) \cdot x.$ *13.* $y = \dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{2x-3}.$

14. $y = \operatorname{arctg} 2x \cdot e^x.$ *15.* $y = \dfrac{\sin 3x}{\cos 9x}.$ *16.* $y = e^{7x} - 2\arccos 3x.$

17. $y = \cos^2 x \cdot \ln\left(x^2 - 1 \right).$ *18.* $y = \dfrac{\ln(2x-5)}{\arccos(x+1)}.$

19. $y = \dfrac{5\sin 3x}{1 + \operatorname{tg} x}.$ *20.* $y = \dfrac{4^x + 1}{2 - \cos 2x}.$

Задание 2.5. *Найти производные* y' *следующих функций:*

1. $y = \operatorname{tg}^3\left(e^{2x} \right).$ *2.* $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 5x}}.$ *3.* $y = \arcsin^2\left(e^x + x \right).$

4. $y = \sin\left(\ln\left(x^3 - 3x^2 + 4 \right) \right).$ *5.* $y = \cos \ln \arcsin \dfrac{1}{x+1}.$

Задание 2.6. *Найти значение производной* $y'(x)$ *следующих функций в точке* $x = x_0$*:*

1. $y=\sqrt{x^2+3}+\dfrac{2x}{x+1}$, $x_0=1$. *(Ответ. 1).*

2. $y=5(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+16}$, $x_0=0$. *(Ответ. 1).*

3. $y=\dfrac{1}{2}\sin x\cdot \mathrm{tg}2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. *(Ответ. 1).*

4. $y=\dfrac{e^{2x+1}}{\cos 3x}$, $x_0=0$. *(Ответ. 2e).*

2.5. Производные неявных функций

Пусть функция $y=y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$. В этом случае говорят, что функция *y* задана неявно.

Производная $y'=y'(x)$ может быть найдена из уравнения $F'_x=0$, где $F=F(x,y)$ рассматривается как сложная функция от переменной *x*.

Примеры решения задач

2.5. Найти производную y'_x от неявно заданной функции

$x\cdot\cos y-y^3+\sin 2x+1=0.$

Решение. Продифференцируем обе части равенства

$\left(x\cdot\cos y-y^3+\sin 2x+1\right)'=0'.$

$$\cos y-x\cdot\sin y\cdot y'+3y^2\cdot y'+2\cos 2x=0.$$

Выразим y': $\cos y+2\cos 2x=x\cdot\sin y\cdot y'-3y^2\cdot y'$.

$$\cos y+2\cos 2x=y'\left(x\cdot\sin y-3y^2\right)\Rightarrow y'=\frac{\cos y+2\cos 2x}{x\cdot\sin y-3y^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.7. *Найти производные* y'_x *от неявно заданной функции:*

1. $x^3 + y^4 - x\cdot\sqrt{y} = 0.$
5. $3^x + 2^y = 6^{x+y}.$
2. $e^x \cdot \sin y - e^y \cdot \cos x = 0$.
6. $\ln(3x+2y) - \dfrac{x}{y} + 1 = 0.$
3. $\sin(x+y) + x\cdot \arcsin y = 0.$
7. $x^3 + y^2 - 2xy - 3x + 4y - 5 = 0.$
4. $e^{xy} = x + y.$
8. $\dfrac{x}{y} + \sin xy = 0.$

2.6. Приложения производной

Геометрический смысл производной: $y'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = k$ – угловой коэффициент касательной к линии $y = y(x)$ в точке x_0.

Механический смысл производной: если путь тела при прямолинейном неравномерной движении описывается функцией $s(t)$, то скорость тела будет описываться $v(t) = (s(t))'$, а ускорение тела $a(t) = (v(t))' = (s(t))''$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.8. *Тело движется прямолинейно и неравномерно. Путь тела описывается функцией* $s(t) = \dfrac{t^2+3}{t+4}$. *Найти скорость тела в момент времени* $t = 2$. *(Ответ.* $\frac{17}{36}$ *).*

Задание 2.9. *Тело движется прямолинейно по закону* $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$. *Найти ускорение тела в момент времени* $t = 4$. *(Ответ.* 4 *).*

Задание 2.10. *Тело движется прямолинейно по закону* $s(t)=3t^3-4t^2+1$. *Найти скорость тела в момент, когда ускорение равно 0. (Ответ.* $-\frac{16}{9}$*).*

Задание 2.11. *В тонком неоднородном стержне масса (в граммах) распределяется по закону* $m(l)=4l^2-2l+5$, *где l – расстояние от начала стержня до любой его точки. Найти плотность стержня на расстоянии 4 см от начала стержня. (Ответ. 30).*

Задание 2.12. *В колебательном контуре заряд меняется по закону* $q(t)=\cos\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)$, *где t – время (в сек). Найдите величину силы тока в контуре в момент времени* $t=\frac{\pi}{6}$. *(Ответ.* $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$*).*

2.7. Уравнение касательной к графику функции, точки экстремума

Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке $x=x_0$ вычисляется по формуле

$$y=y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0). \qquad (2.4)$$

Примеры решения задач

2.6. Написать уравнение касательной к кривой, заданной неявной функцией $x^2+y^3-3xy-2x+y-1=0$ в точке *M*(2; -1).

Решение. Найдем производную y'_x неявно заданной функции

$$\left(x^2+y^3-3xy-2x+y-1\right)'=0'.$$

$$2x+3y^2y'-3y-3xy'-2+y'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x+3y-2}{3y^2-3x+1}.$$

Подставив вместо x и y координаты точки M, найдем значение производной в данной точке: $y'\big|_M = \frac{9}{2}$. Полагая $x_0 = 2,\ y_0 = -1$ найдем уравнение касательной: $y = -1 + \frac{9}{2}\left(x - 2\right) \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - 10.$

Задачи для самостоятельного решения

***Задание 2.13**. Написать уравнение касательной к графику функции* $y = y\left(x\right)$ *в точке* $x = x_0$*:*

1. $y = x^3 + \frac{3}{x},\ x_0 = -2.$ *(Ответ.* $y = 11{,}25x + 13$*).*

2. $y = 4^x - 2^{x+1},\ x_0 = 0.$ *(Ответ.* $y = -1$*).*

3. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{2}.$ *(Ответ.* $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$*).*

***Задание 2.14**. Написать уравнение касательной к кривой, заданной неявной функцией в точке* $M\left(x_0, y_0\right)$*:*

1. $x^3 + 2xy - y^2 - 1 = 0,\ M\left(1;\ 2\right)$.

(Ответ. $y = 3{,}5x - 1{,}5$*).*

2. $\left(x+1\right)\sin y - 5x + 3y - 2 = 0,\ M\left(-1;\ 1\right)$.

(Ответ. $y = 1 + \frac{5 - \sin 1}{3}\left(x + 1\right)$*).*

3. $-2\cos\left(xy\right) + y + 1 = 0,\ M\left(0;\ 1\right)$.

(Ответ. y = 1).

***Задание 2.15**. Найти точки экстремума функций*

1. $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$. *(Ответ.* $x = -\frac{2}{3}$ *– точка максимума; x = 1 – точка минимума).*

2. $y = x + \sqrt{10 - x}$ *. (Ответ.* $x = 9$ *– точка максимума).*

3. $y=\dfrac{1-x^2}{x-2}$. *(Ответ.* $x=2+\sqrt{3}$ *– точка максимума;* $x=2-\sqrt{3}$ *– точка минимума).*

4. $y=x\cdot e^{1-2x^2}$. *(Ответ.* $x=\frac{1}{2}$ *– точка максимума;* $x=-\frac{1}{2}$*– точка минимума).*

5. 4. $y=x\cdot\ln^2 x$. *(Ответ.* $x=e^{-2}$ *– точка максимума;* $x=1$*– точка минимума).*

Тема 3. ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Таблица интегралов, правила интегрирования

Пусть $t = t(x)$; $dt = t'(x)dx$, тогда

1. $\int dt = t + C.$
2. $\int t^n dt = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1.$
3. $\int t^{-1} = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C.$
4. $\int e^t dt = e^t + C.$
5. $\int a^t dt = \dfrac{a^t}{\ln a} + C.$
6. $\int \sin t dt = -\cos t + C$.
7. $\int \cos t dt = \sin t + C.$
8. $\int \dfrac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C.$
9. $\int \dfrac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C.$
10. $\int \dfrac{dt}{t^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{t-a}{t+a}\right| + C.$
11. $\int \dfrac{dt}{a^2 - t^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{t+a}{t-a}\right| + C.$
12. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln\sqrt{t + t^2 \pm a^2} + C.$
13. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\dfrac{t}{a} + C.$

Правило интегрирования:

$$\int \left(\alpha \cdot f(x) \pm \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx. \tag{3.1}$$

Примеры решения задач

3.1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + 3\sqrt{x} - 1\right) dx = \int \frac{2}{\sin^2 x} + \int 3x^{\frac{1}{2}} dx - \int dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int dx = 2(-\mathrm{ctg}x) + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + C =$$

$$= -2\mathrm{ctg}x + 2x^{\frac{3}{2}} - x + C.$$

3.2. Вычислить интеграл: $\int \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2} \right) dx = \int \left(x + 4x^{-1}dx - 5x^{-2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4\ln x - \frac{5x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln x - \frac{5}{x} + C.$$

3.3. Вычислить интеграл: $\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$.

Решение.

$$\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -ctgx - x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

***Задание 3.1**. Вычислить неопределенные интегралы:*

1. $\int \left(3\cos x + 5e^x \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{4}{x} - \sin x \right) dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 10}}.$

3. $\int\left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}}+2^x\right)dx.$

4. $\int\left(\sqrt[5]{x^7}+3\right)dx.$

5. $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-5\cos x\right)dx.$

6. $\int\left(\frac{4}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx.$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{13-x^2}}.$

10. $\int\frac{dx}{4-x^2}.$

11. $\int\frac{dx}{9+x^2}.$

12. $\int\frac{dx}{17+x^2}.$

15. $\int\frac{dx}{x^2+10}.$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}.$

17. $\int\frac{dx}{x^2-10}.$

18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10}}.$

Задание 3.2. *Вычислить интегралы:*

1. $\int\frac{x^3+2}{x}dx.$

2. $\int\frac{x^2+x-4}{\sqrt{x}}dx.$

3. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^4-16}}dx.$

4. $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx.$

5. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

6. $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx.$

3.3. Интегрирование методом замены переменной

Примеры решения задач

3.4. Вычислить неопределенный интеграл $\int\cos 7x dx.$

Решение. Сделаем замену $u=7x$. Тогда $du=(7x)'dx \Rightarrow du=7dx.$ Преобразуем выражение

$$\int\cos 7x dx=\int\cos 7x\cdot\frac{7dx}{7}=\left|\begin{matrix}u=7x;\\ du=7dx\end{matrix}\right|=\int\cos u\frac{du}{7}=\frac{1}{7}\int\cos u du=$$

$$=\frac{1}{7}(-\sin u+C)=\frac{1}{7}\sin 7x+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 3.3. *Вычислить неопределенные интегралы:*

1. $\int \sin 5x dx.$
2. $\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx.$
3. $\int e^{2x+3}dx.$
4. $\int \sqrt{3x-15}dx.$
5. $\int (7x-8)^9 dx.$
6. $\int \frac{dx}{x+4}.$
7. $\int \frac{dx}{9+4x^2}.$
8. $\int \frac{dx}{19-49x^2}.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+7x^2}}.$
10. $\int \cos^2 x(-\sin x)dx.$
11. $\int \sqrt{2x^2+5}dx.$
12. $\int \sin\left(e^x\right)e^x dx.$
13. $\int \frac{xdx}{x^2+4}.$
14. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+2}}.$
16. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-9}.$
17. $\int \operatorname{tg} x dx.$
18. $\int \operatorname{ctg}(3x+1)dx.$
19. $\int \frac{3x-1}{x^2+4}dx.$
20. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$

(*Ответ*. 1) $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$. 2) $\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. 3) $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

4) $\frac{2}{9}(3x-15)^{\frac{3}{2}}+C$. 5) $\frac{1}{70}(7x-8)^{10}+C$. 6) $\ln(x+4)+C$. 7) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C$.

8) $\frac{1}{14\cdot\sqrt{19}}\ln\left|\frac{\sqrt{19}+7x}{\sqrt{19}-7x}\right|+C$. 9) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x+\sqrt{1+7x^2}\right|+C$. 10) $\frac{\cos^3 x}{3}+C$.

11) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}+C$. 12) $\cos\left(e^x\right)+C$. 13) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$.

14) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$. 15) $2\sqrt{\ln x+2}+C$. 16) $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x+3}{e^x-3}\right|+C$.

17) $-\ln(\cos x)+C$. 18) $\frac{1}{3}\ln(\sin(3x+1))+C$. 19) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

20) $\frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right)-\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 2x)^{\frac{3}{2}}+C$).

3.4. Метод интегрирования по частям

Применяется формула

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \qquad (3.2)$$

Примеры решения задач

3.5. Вычислить интеграл $\int x \cdot \cos x dx.$

Решение. Примем $u = x, \ \ dv = \cos x dx.$ Тогда

$$du = (u') dx = (x') dx = dx.$$

$$v - \int dv = \int \cos x dx = \sin x.$$

Подставив в формулу интегрирования по частям, получим

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int dx \cdot \sin x = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx =$$
$$= x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 3.4. *Вычислить интегралы.*

1. $\int x \cdot \sin x dx.$
2. $\int x \cdot \cos 2x dx.$
3. $\int x \cdot \sin 5x dx.$
4. $\int x \cdot e^x dx.$
5. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx.$
6. $\int x \cdot 2^x dx.$
7. $\int \ln x dx.$
8. $\int x \cdot \ln x dx.$
9. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$
10. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$
11. $\int \arcsin x dx.$
12. $\int x \cdot \mathrm{arctg} x dx.$

(*Ответ*. 1) $-x \cdot \cos x + \sin x + C.$ 2) $\frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

3) $-\frac{1}{5} x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C.$ 4) $x \cdot e^x - e^x + C.$ 5) $-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$

6) $\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C.$ 7) $x \cdot \ln x - x + C.$ 8) $\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$ 9) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C.$

10) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x-\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}}+C$. 11) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

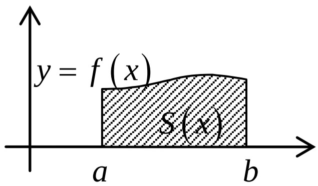
12) $\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$).

3.5. Вычисление определенных интегралов

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a;b]$, то имеет место **формула Ньютона–Лейбница**

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (3.3)$$

Геометрический смысл определенного интеграла: площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу осью Ox и прямыми $x=a,\ x=b$, численно равна:



$$S(x)=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3.4)$$

Примеры решения задач

3.6. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx$.

Решение. Так как $\int\cos x\,dx=\sin x$, то

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

3.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Вычислим неопределенный интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Сделав замену $u = \sqrt{1+3x}$, получим $u^2 = 1+3x \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{3};\ dx = \frac{2}{3}udu.$

Тогда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int \frac{\frac{u^2-1}{3} \cdot \frac{2}{3}udu}{u} = \frac{2}{9}\int \left(u^2 - 1\right)du = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3} - u\right) =$$

$$= \frac{2}{27}\left(\sqrt{1+3x}\right)^3 - \frac{2}{9}\sqrt{1+3x}.$$

Вычислим теперь определенный интеграл

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left(\frac{2}{27}\left(\sqrt{1+3x}\right)^3 - \frac{2}{9}\sqrt{1+3x}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= \left(\frac{2}{27}\left(\sqrt{1+3\cdot5}\right)^3 - \frac{2}{9}\sqrt{1+3\cdot5}\right) - \left(\frac{2}{27}\left(\sqrt{1+3\cdot0}\right)^3 - \frac{2}{9}\sqrt{1+3\cdot0}\right) =$$

$$= \frac{2}{27}\cdot 64 - \frac{2}{9}\cdot 4 - \frac{2}{27} + \frac{2}{9} = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 3.5. *Вычислить определенные интегралы.*

1. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$.
2. $\int\limits_{0}^{4} \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.
3. $\int\limits_{0}^{1} x \cdot e^{-x}dx$.
4. $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.
5. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{2-\ln^2 x}}$.
6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 3x dx$.
7. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.
8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2+1}$.
9. $\int\limits_{1}^{2} x \cdot \ln x dx$.

(*Ответ*. 1) $\frac{\pi}{4}$. 2) $4e$. 3) $1-\frac{2}{e}$. 4) $\frac{8}{3}$. 5) $\frac{\pi}{6}$. 6) $-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}$. 7) $\sqrt{5}-1$. 8) $\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 2$. 9) $2\ln 2-\frac{3}{4}$).

Учебное издание

ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
ОЧЕРЕТНЯЯ Ольга Павловна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методическое пособие
к практическим занятиям

Технический редактор Д.А. Исаев

Подписано в печать 12.07.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,20. Уч.-изд. л. 2,50. Тираж 250. Заказ 567.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.