Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра «Информационные системы и технологии»

МАТЕМАТИКА

Задания к контрольной работе № 2

Минск
БНТУ
2011

УДК 51 (076.2)
ББК 22.1я7
М 34

Составители:
*В.В. Напрасников, Ю.В. Напрасникова,
В.А. Казакевич, В.И. Юринок*

Рецензенты:
Ю.О. Герман, А.В. Василевский

Настоящий материал предназначен для использования при выполнении контрольной работы студентами специальности 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», получающими образование на основе дистанционной формы обучения по дисциплине «Математика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{x^6}{4+x}dx$; б) $\int x\sin^2(2x)dx$;

в) $\int \frac{2}{x^2\left(x+4\right)}dx$; г) $\int \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx$.

Решение:

а) Произведем замену $4+x^7=t$. Получим

$$\int \frac{x^6}{4+x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} 4+x^7=t \\ 7x^6dx=dt \\ x^6dx=\dfrac{dt}{7} \end{array}\right|=\int\frac{dt}{7t}=\frac{1}{7}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{7}\ln\left|t\right|+c=\frac{1}{7}\ln\left|4+x^7\right|+c.$$

б) Преобразуем подынтегральное выражение, используем формулу:

$$\sin^2(2x)=\frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Получим:

$$\int x\sin^2(2x)dx=\int x\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x-x\cos(4x)\right)dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos(4x)dx=J_1-J_2,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c_1 = \frac{x^2}{4} + c_1 .$$

Для вычисления следующего интеграла используем интегрирование по частям.

$$J_2 = \frac{1}{2}\int x\cos(4x)dx = \left| \begin{array}{c} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x; du = dx \\ dv = \cos(4x)dx; \quad v = \dfrac{1}{4}\sin(4x) \\ \int v du = \dfrac{1}{16}\int \sin(4x) d\left(4x\right) = -\dfrac{1}{16}\cos(4x) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{16}\cos(4x) \right) = \frac{1}{8}x\sin(4x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + c_2 .$$

В итоге получаем ответ:

$$\int x\sin^2(2x)dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}x\sin(4x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + c .$$

в) Для вычисления интеграла $\int \frac{2}{x^2\left(x+4\right)}dx$ разложим дробь под знаком интеграла на простейшие:

$$\frac{2}{x^2\left(x+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4} .$$

Приводим правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{2}{x^2\left(x+4\right)} = \frac{Ax\left(x+4\right) + B\left(x+4\right) + Cx^2}{x^2\left(x+4\right)} .$$

Приравниваем числители этих дробей:

$$2 = Ax\left(x+4\right)+B\left(x+4\right)+Cx^2.$$

При $x=0$ получим $2=4B$. Находим $B=\dfrac{1}{2}$.

При $x = -4$ получим $2 = C\cdot\left(-4\right)^2$. Находим $C=\dfrac{1}{8}$.

Приравниваем коэффициенты при степени x^2 и вычисляем А.

$$A+C=0;\quad A=\ -C;\quad A=\ -\frac{1}{8}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\int\frac{2}{x^2\left(x+4\right)}dx=\int\left(-\frac{1}{8x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{8\left(x+4\right)}\right)dx=$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left|x+4\right|+c=-\frac{1}{8}\ln\left|x\right|-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln\left|x+4\right|+c.$$

а) Произведем замену $t=\sin(x)$. Получим

$$\int\sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx=\begin{vmatrix}\sin(x)=t\\ \cos(x)dx=dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+c=\frac{2}{3}\sqrt{(\sin x)^3}+c.$$

Задача 2

Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и линией, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

Решение:

Данная линия является половиной эллипса, изображенной на рис. 1. Тело вращения изображено рис. 2.

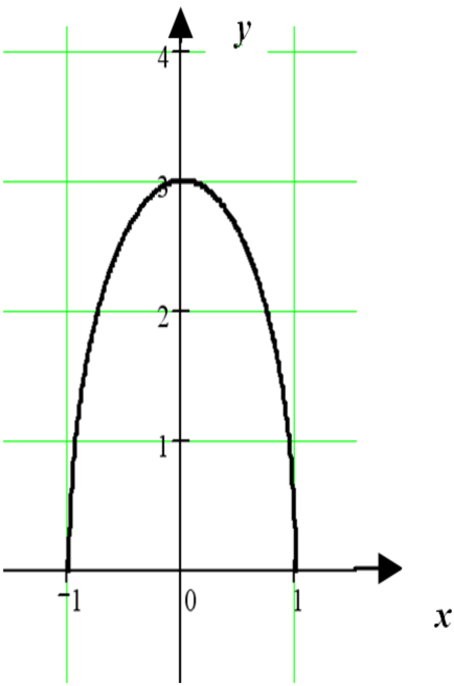

Рис. 1. Вид половины эллипса

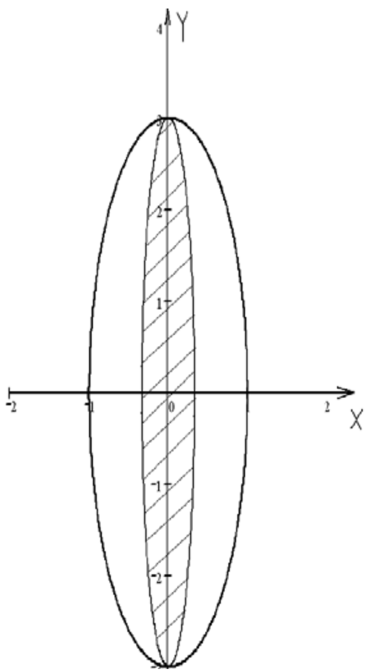

Рис. 2. Тело вращения

Объем этого эллипсоида вращения определим по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Параметрические уравнения кривой облегчают выполнение подстановки.

Поскольку $x = \cos(t)$, то $dx = d(\cos(t))$.

При $a = -1$ $\quad t = \pi$,

при $b = 1$ $\quad t = 0$.

Следовательно,

$$V_x = \pi \int_\pi^0 (3\sin t)^2 d(\cos t) = 9\pi \int_\pi^0 (1 - \cos^2 t) d\,(\cos t) \quad =$$

$$= 9\pi \left(\int_\pi^0 d(\cos t) - \int_\pi^0 \cos^2 t \cdot d(\cos t) \right) = 9\pi(\cos\ t\ - \frac{1}{3}\cos^3 t) \Big|_\pi^0 =$$

$$= 9\pi((1\ - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3})) = 9\pi(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) = 12\pi \text{ (куб.единиц)}.$$

Ответ: $V_x = 12\pi$(куб.единиц)

Задача 3

Найти частные производные $\dfrac{d^2 z}{dx^2}; \dfrac{d^2 z}{dxdy}$ для функции

$$z = \sin\left(y - x^2\right).$$

Решение:
Находим частную производную первого порядка по *x*:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d(\sin(y-x^2))}{dx}=(\cos(y-x^2)\cdot\frac{d\left(y-x^2\right)}{dx}=$$

$$=\cos\left(y-x^2\right)\left(-2x\right)=-2x\cdot\cos\left(y-x^2\right).$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dx}(\frac{dz}{dx})=\frac{d}{dx}(-2x\cdot\cos\left(y-x^2\right))=$$

$$=-2\cdot\cos\left(y-x^2\right)-\left(-2x\right)\cdot\sin\left(y-x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}(y-x^2)=$$

$$=-2\cdot\cos\left(y-x^2\right)-\left(-2x\right)\cdot\sin\left(y-x^2\right)\cdot(-2x)=$$

$$=-2\cdot\cos\left(y-x^2\right)-4x^2\cdot\sin\left(y-x^2\right).$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{dz}{dy}(\frac{dz}{dx})=\frac{d}{dy}(-2x\cdot\cos\left(y-x^2\right))=$$

$$=\left(-2x\right)\cdot(-\sin\left(y-x^2\right))\cdot\frac{d}{dy}(y-x^2)=\ 2x\cdot\sin\left(y-x^2\right)\cdot$$

Задача 4

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5,\qquad M_0\left(-2;1;0\right)$$

Решение:
Найдем частные производные функции

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5$$

$$\frac{dF}{dx} = 2x + z + 4;\ \ \frac{dF}{dy} = -2y; \frac{dF}{dz} = -2z + x.$$

Вычислив значения частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, получим координаты направляющего вектора нормали

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{M_0} = 2\cdot(-2) + 0 + 4 = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)_{M_0} = -2\cdot 1 = -2, \quad \left(\frac{dF}{dz}\right)_{M_0} = -2\cdot 0 - 2 = -2.$$

$$\overrightarrow{m} == \{0;-2;-2\}.$$

В соответствии с формулой

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{dF}{dy}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{dF}{dz}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

найдем уравнение касательной плоскости:

$$0\cdot(x+2) + (-2)\cdot(y-1) - 2\cdot(z-0) = 0,$$

$$-2y + 2 - 2z = 0,$$

$$\text{или} \qquad y + z - 1 = 0.$$

На основании формулы

$$\frac{x-x_0}{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\dfrac{dF}{dy}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)_{M_0}}$$

запишем уравнение нормали к поверхности:

$$\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-0}{-2}.$$

Переходя к параметрической форме уравнений, получим

$$\begin{aligned} &x=-2,\\ &y=1+t, \qquad t\in R.\\ &z=t. \end{aligned}$$

Задача 5

Вычислить массу тела V, ограниченного заданными поверхностями

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad z=2\,.$$

Плотность в точке $M\left(x,y,z\right)$ задается функцией $\gamma=\gamma\left(x,y,z\right)$.
В нашем случае пусть $\gamma=z$.

Решение: Вершина конуса находится в точке O (0,0,0), и в сечении конуса плоскостью z = 2 получается окружность (рис. 3).

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad z=2\,.$$

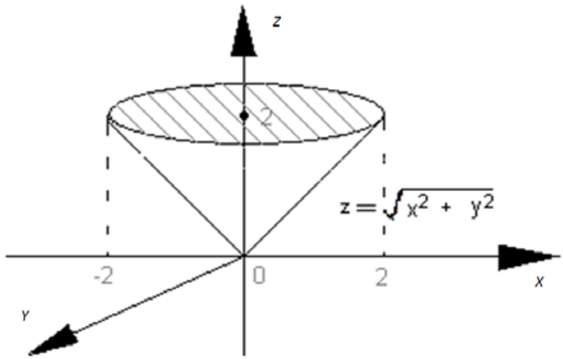

Рис. 3. Сечение конуса плоскостью z = 2

Воспользуемся формулой для вычисления массы

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dxdydz\ .$$

Этот интеграл равен

$$m = \int\limits_0^h z dz \iint\limits_{(D)} dxdy\,,$$

где h=2, *(D)* есть проекция на плоскость XY сечения конуса плоскостью, ей параллельной и лежащей на высоте z над нею. Эта проекция есть круг, радиуса z, так что двойной интеграл, представляющий его площадь, равен πz^2. Отсюда

$$m = \int\limits_0^2 z\pi z^2 dz = \frac{1}{4}\pi z^4 \Big|_0^2 = 4\pi \text{ (единиц массы).}$$

Ответ: 4π (единиц массы).

ЗАДАНИЯ ПО ВАРИАНТАМ

Схема выбора варианта

Контрольная работа состоит из пяти заданий. Вариант выбирается по номеру зачетной книжки, стоящему после знака /. Если этот номер больше 20, то вычтите из него 20. Например, владелец зачетной книжки 417527/**14** должен решать задачи с номером **14** из первого задания **34** из второго задания, **54** из третьего, **74** из четвертого и **94** из пятого заданий.

Задание 1

1–20. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \sin 2x e^{\cos 2x} dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;

в) $\int \frac{14dx}{(x^2 - x + 1)(x + 2)}$; г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

2. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x \ \ + 4)(x - 3)^2}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

3. а) $\int x^2 e^{-x^3} dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$;

в) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2 + 4x + 4)} dx$; г) $\int (x - 4)\sin 5x dx$.

4. а) $\int \cos x e^{-\sin x} dx$; б) $\int \cos^6 x \sin \ \ x dx$;

в) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} dx$; г) $\int \arccos 2x dx$.

5. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx;$

в) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ г) $\int x\ln(x^2+4)dx.$

6. а) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx;$ б) $\int x^2 e^{x^3}dx;$

в) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)};$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$

7. а) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 x}dx;$ б) $\int (2x-3)e^{-x}dx;$

в) $\int \frac{5dx}{(x+4)(x-1)};$ г) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}dx$

8. а) $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}};$ б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx;$

в) $\int \frac{4dx}{(x+1)^2(x+3)},$ г) $\int \sin^4 x\cos xdx$

9. а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}dx,$ б) $\int (x^2-3x)\ln(x+2)dx,$

в) $\int \frac{1}{(x-2)^2(x-4)}dx,$ г) $\int (\sin x)\sqrt[5]{\cos^3 x}dx.$

10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2}dx,$ б) $\int x\cos^2 3xdx,$

в) $\int \frac{2}{x^3-2x^2+x}dx,$ г) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx.$

11. а) $\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$, б) $\int x\ e^{-3x} dx$,

в) $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$, г) $\int \frac{\sin\ x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$

12. а) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 3x}{\cos^2 3x} dx$, б) $\int x \sin 2x dx$,

в) $\int \frac{4}{(x-1)^2 (x+3)} dx$, г) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$.

13. а) $\int \frac{6x^5+1}{x^6+x+1} dx$, б) $\int x \ln(x^2+2) dx$,

в) $\int \frac{1}{(x+4)(x+2)(x+1)} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

14. а) $\int \frac{x^2}{\sin^2(2+x^3)} dx$, б) $\int x e^{3x} dx$,

в) $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

15. а) $\int \frac{x dx}{\cos x^2}$, б) $\int x \ln(x^2 - 2x + 3) dx$,

в) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x-2)} dx$, г) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

16. а) $\int x \sin(1-3x^2) dx$, б) $\int 2x e^{-x} dx$,

в) $\int \frac{1}{x^3+x} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x}$.

17. а) $\int x \cos(3x^2+2) dx$, б) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$,

в) $\int \frac{8}{x^3-4x} dx$, г) $\int \sin 5x \cos 4x dx$.

18. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}dx$, б) $\int x\ln x dx$,

в) $\int \frac{2}{x(x+2)}dx$, г) $\int \cos^2 3x dx$.

19. а) $\int \frac{x^6 dx}{4+x^7}$, б) $\int x\sin^2 2x dx$,

в) $\int \frac{2}{x^2(x+4)}dx$, г) $\int \sqrt{\sin x}\cos\ x dx$.

20. а) $\int x^2\sqrt{3-4x^3}dx$, б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$,

в) $\int \frac{4}{x(x^2+4)}dx$, г) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Задание 2

21–26. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

21. $y=\sin x, \quad x\in\left[-\frac{3}{2}\pi;\frac{\pi}{2}\right], \quad y=1$.

22. $y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=1$.

23. $y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad y=2$.

24. $\begin{cases} y=2\sin t+1 \\ x=3\cos t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-1;\, 1]$ и осью OX.

26. $\rho = 2\sin 2\varphi$.

27–33. Найти длину дуги кривой:

27. $y = \ln\cos x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$

28. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \in [0;1].$

29. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$

30. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}.$

31. $\begin{array}{l} \rho = 1 + \sin\varphi \\ \varphi \in [0;\pi] \end{array}.$

32. $\rho = 3(1 - \cos\varphi), \quad \varphi \in [0;\pi].$

33. $\rho = e^{2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

34–40. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:

34. $y = \sin x, \quad x \in [0;\pi]$. 35. $y = -x^2 + 5, y = 1$.

36. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$.

37. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$.

38. $y = \ln x, \quad x = 4, \quad y = 0$.

39. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t + 1 \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

40. $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}, \quad t \in [0;\pi]$.

Задание 3

41–60. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **для функции** $z = z(x, y)$**.**

41. $z = e^{\frac{y^2}{x}}$.

42. $z = \frac{y}{\sqrt{x}} - 2\sin 2x$.

43. $z = \frac{y^2}{x} + tg^2 y$.

44. $z = e^{-\frac{x}{y^2}}$.

45. $z = e^{\frac{x^2}{y}}$.

46. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$.

47. $z = \sqrt{x} e^{\frac{x}{y}}$

48. $z = \sqrt{y} e^{\frac{x}{y}}$.

49. $z = x e^{\frac{x^2}{y}}$.

50. $z = \cos^2(x + \sqrt{y})$.

51. $z = \sin^2(\sqrt{x} + y)$.

52. $z = \ln(x^3 - 2y)$.

53. $z = \ln(x^3 - 3y^4)$.

54. $z = \frac{x}{y^2} + y^3$.

55. $z = \frac{x^2}{y} + \sqrt{y}$.

56. $z = \frac{x^2}{y^3} + x^3 - y$.

57. $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x^2 y$.

58. $z = \cos\ (\sqrt{x} + y^2)$.

59. $z = \sin(y - x^2)$.

60. $z = \cos(x^2 - y)$.

Задание 4

61–80. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности *S* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

61. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, M_0\left(2,1,-1\right)$.

62. $S: x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy, M_0\left(-2,1,2\right)$.

63. $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, M_0(1,2,1)$.

64. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, M_0(-1,1,2)$.

65. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, M_0(2,1,-1)$.

66. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, M_0(2,1,-1)$.

67. $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, M_0(1,2,-3)$.

68. $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0, M_0(0,2,2)$.

69. $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, M_0(1,1,1)$.

70. $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z, M_0(1,1,1)$.

71. $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y, M_0(-1,-1,-1)$.

72. $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y, M_0(1,-1,1)$.

73. $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,, M_0(-1,1,1)$.

74. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, M_0(2,1,0)$.

75. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10, M_0(-1,1,3)$.

76. $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15, M_0(-1,3,4)$.

77. $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, M_0(-7,1,8)$.

78. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, M_0(1,-1,2)$.

79. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, M_0(-2,1,0)$.

80. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, M_0(1,4,-1)$.

Задание 5

81–100. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

81. $y^2 = x, x = 3, z = x, z \geq 0.$

82. $z = y^2, x + y = 1, x \geq 0, z \geq 0.$

83. $z = x^2 + 2y^2, y = x, x \geq 0, y = 1, z \geq 0.$

84. $z^2 = 4 - x, x^2 + y^2 = 4x, z \geq 0.$

85. $y = x^2, z = 0, y + z = 2.$

86. $x^2 + y^2 = 1, z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0.$

87. $x^2 + y^2 = 4y, z^2 = 4 - y, z \geq 0.$

88. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x, y \geq 0, z \geq 0.$

89. $y = 2x, x + y + z = 2, x \geq 0, z \geq 0.$

90. $z = 2x^2 + y^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

91–100. Вычислить массу тела *V*, ограниченного заданными поверхностями, если $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность в точке *M* (*x*, *y*, *z*)).

91. $V: z = 0, \quad z = x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad z = \sqrt{25 - y^2}; \quad \gamma = 2y.$

92. $V: z = 0, \quad z = 9 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 9; \quad \gamma = x^2 + y^2.$

93. $V: z = x^2 + y^2, \quad x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad \gamma = x.$

94. $V: y = x^2 + z^2 + 1, \quad y = 5; \quad \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}.$

95. $V: z = \sqrt{1 - y}, \quad y = x, \quad y = -x, \quad z = 0; \quad \gamma = 3z.$

96. $V: x = 1, \quad y = x, \quad z = 0, \quad z = y^2; \quad \gamma = xy.$

97. $V: z = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 2, \quad 2z = x^2 + y^2; \quad \gamma = 3.$

98. $V: 2z = x^2 + y^2, \quad z = 2; \quad \gamma = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$

99. $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2; \quad \gamma = z.$

100. $V: x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -4; \quad \gamma = 1.$

ПРОГРАММА ИЗУЧАЕМОЙ ЧАСТИ КУРСА

Неопределенный интеграл

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям.

Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Метод рационализации. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование простейших иррациональностей.

Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы.

Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Вычисление объемов и длин дуг. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Область определения. Предел. Непрерывность. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал. Производные от сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Неявные функции и их дифференцирование.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Метод наименьших квадратов.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Определенный интеграл по фигуре, его механический смысл. Свойства интегралов по фигуре.

Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

Замена переменных в кратных интегралах.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов I и II рода, их приложения. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (для втузов) / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1980. – Т. 1, 2, 3.
2. Бугров, Я.С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981.
3. Щипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высшая школа, 1985.
4. Герасимович, А.И. Математический анализ: справочное пособие: в 2 ч. / А.И. Герасимович. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.
5. Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособив: в 2 ч. / под общ. ред. Е.И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.
6. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: «Наука», 1988.
7. Герасимович, А.И. Математический анализ / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1990.
8. Жевняк, Р.М. Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 1, 2.
9. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: «Наука», 1989.
10. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. –М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 1,2.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Задания к контрольной работе № 2

С о с т а в и т е л и :
НАПРАСНИКОВ Владимир Владимирович
НАПРАСНИКОВА Юлианна Владимировна
КАЗАКЕВИЧ Виктор Александрович
ЮРИНОК Виктор Иванович

Технический редактор О.В. Песенько

Подписано в печать 14.10.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 100. Заказ 383.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.