Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Теоретическая механика»

С.И. Пармон
С.Г. Бохан

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
по выполнению практических работ
для студентов специальностей
1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Минск
БНТУ
2012

УДК 519.1 (075.8)
ББК 22.176я7
П 18

Р е ц е н з е н т ы:
О.И. Чичко, *Е.В. Полынкова*

Пармон, С.И., Бохан, С.Г.
П 18 Дискретная математика: методическое пособие по выполнению практических работ для студентов специальностей 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника». С.И. Пармон, С.Г. Бохан. – Минск: БНТУ, 2012 – 64 с.

ISBN 978-985-525-656-5.

В методическом пособии в доступной форме изложены разделы, традиционно изучаемые в дисциплине «Дискретная математика», читаемой на дневном отделении машиностроительного факультета: математическая логика, теория множеств, комбинаторные алгоритмы и теория графов. Все разделы взаимно связаны друг с другом. В пособии представлено большое количество примеров и решенных задач, что помогает быстрее усвоить материал. Кроме того, в пособии приведены задания по вариантам для самостоятельной работы студентов, что позволяет закрепить изученный материал.

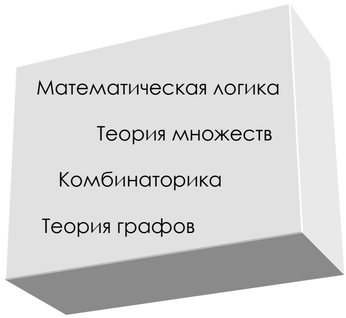
Методическое пособие может быть также полезно преподавателям, начинающим читать курс дискретной математики в технических вузах.

УДК 519.1 (075.8)
ББК 22.176я7

ISBN 978-985-525-656-5

Введение

Методическое пособие по выполнению практических работ знакомит студентов с проблемами дискретной математики, которая называется так потому, что в ней нет понятия бесконечного множества, предельного перехода, непрерывности, дифференцируемости и т. д.



В отличие от классической математики, которая занимается изучением непрерывных бесконечных структур, дискретная математика представляет собой область, в которой изучаются свойства структур конечного характера.

Для практических работ выделены разделы дискретной математики, которые в дальнейшем будут полезны для изучения таких дисциплин, как «Теория автоматов», «Математическое моделирование», «Исследование операций», «Электроника и микропроцессорная техника» и др.

Темы практических занятий по дисциплине «Дискретная математика»

Тема 1. Математическая логика

Практическая работа 1. Логические операции. Построение таблиц истинности.

Практическая работа 2. Основные законы логики. Упрощение логических формул.

Практическая работа 3. Построение переключательных схем. Кванторы общности и существования.

Тема 2. Теория множеств

Практическая работа 4. Операции над множествами.

Практическая работа 5. Отношения на множествах. Отображения. Функции.

Тема 3. Комбинаторика

Практическая работа 6. Комбинаторные алгоритмы.

Тема 4. Теория графов

Практическая работа 7. Способы задания графов. Операции над графами.

Практическая работа 8. Числа графа.

Тема 1. Математическая логика

Практическая работа 1

Логические операции. Построение таблиц истинности.

Краткая теория

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Высказывание – это предложение, которое либо истинно, либо ложно. Например, высказывание «Минск – столица Беларуси» является истинным, а высказывание «Свислочь впадает в Черное море» – ложным.

Из двух данных высказываний можно образовать новые высказывания с помощью различных союзов.

Союзы «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда» и частица «не» (словосочетание «неверно, что») называются **логическими связками**.

Логическая операция, соответствующая логической связке «не» («неверно, что»), называется **отрицанием**. Отрицание предложения А записывается так: $\overline{A}$. Иногда отрицание предложения А обозначают ⌉А. В отличие от конъюнкции и дизъюнкции операция отрицания производится над одним высказыванием и определяется таблицей из двух строк.

Логическая операция, соответствующая союзу «если, … то», называется **импликацией.** Импликация обозначатся символом $\rightarrow$. Запись А $\rightarrow$ В читается как «Если А, … то В».

Логическая операция, соответствующая союзу «тогда и только тогда, когда», называется **эквиваленцией**. Обозначается эквиваленция символом $\leftrightarrow$. Запись А $\leftrightarrow$ В читается как «А тогда и только тогда, когда В».

Составление таблиц истинности для заданных формул

Пусть *F* – некоторая формула логики высказываний. Если каждой переменной, входящей в эту формулу, приписать одно из значений истинности (*истина* либо *ложь*), то, пользуясь определениями логических операций, можно найти значение формулы F при данном наборе значений ее переменных.

Конъюнкция ($\wedge$) Таблица истинности 1

A	B	A $\wedge$ B
истина	*истина*	*истина*
истина	*ложь*	*ложь*
ложь	*истина*	*ложь*
ложь	*ложь*	*ложь*

Дизъюнкция ($\vee$) Таблица истинности 2

A	B	A $\vee$ B
истина	*истина*	*истина*
истина	*ложь*	*истина*
ложь	*истина*	*истина*
ложь	*ложь*	*ложь*

Импликация ($\rightarrow$) Таблица истинности 3

A	B	A $\rightarrow$ B
истина	*истина*	*истина*
истина	*ложь*	*ложь*
ложь	*истина*	*истина*
ложь	*ложь*	*истина*

Эквиваленция ($\leftrightarrow$) Таблица истинности 4

A	B	A $\leftrightarrow$ B
истина	*истина*	*истина*
истина	*ложь*	*ложь*
ложь	*истина*	*ложь*
ложь	*ложь*	*истина*

Отрицание ($\overline{\text{A}}$ или $\neg$A) Таблица истинности 5

A	$\overline{A}$
истина	*ложь*
ложь	*истина*

Две формулы называются **равносильными** или **эквивалентными**, если их таблицы истинности совпадают. Формула называется **тавтологией**, если все значения таблицы истинности равны «истина». Формула называется **противоречием**, если все значения таблицы истинности равны «ложь».

Пример решения задачи

Определить, эквивалентны ли следующие формулы:

$$x \to \overline{y};$$

$$\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}.$$

Составим таблицы истинности

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \to \overline{y}$	$\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$
Истина	Истина	Ложь	Ложь	Ложь	Истина
Истина	Ложь	Ложь	Истина	Истина	Ложь
Ложь	Истина	Истина	Ложь	Истина	Истина
Ложь	Ложь	Истина	Истина	Истина	Истина

Таблицы истинности для данных формул не совпадают, следовательно, формулы не эквивалентны.

Задания для решения в группе

1. Определить, равносильны ли следующие формулы:

$$(A \wedge (B \vee \overline{B}) \equiv A \to B.$$

2. Определить, является ли заданная формула тавтологией:

$$((P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \wedge R)).$$

3. Определить, является ли заданная формула противоречием:

$$(((P \wedge \overline{Q}) \to Q) \to (P \to Q)).$$

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Составить таблицу истинности $(x \to y)(\overline{x} \oplus z)$.

2. С помощью построения таблиц истинности доказать, что заданная формула является тавтологией $(P \to (Q \to P))$.

Вариант 2

1. Построить таблицу истинности для следующей формулы: $(xy \to y) \oplus xy$).

2. Определить, эквивалентны ли следующие формулы: $((x_1 \to x_2) \to x_3)$ и $(x_3 \leftrightarrow x_2) \to x_1$. Составить таблицы истинности.

Вариант 3

1. Составить таблицу истинности для следующей формулы: $xyz \vee \overline{xy}$.

2. Определить, эквивалентны ли следующие формулы: $(P \wedge (Q \wedge R)) \equiv ((P \wedge Q) \wedge R)$.

Вариант 4

1. Составить таблицы истинности $(xy \oplus x) \downarrow yx$.

2. Доказать, что заданная формула является тавтологией $((P \to Q)R \vee (Q \to P))$.

Вариант 5

1. Построить таблицу истинности для следующей формулы:

2. $((P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P)))$. Определить, является ли формула тавтологией.

2. Доказать тождественную истинность формулы

$((P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)))$.

Вариант 6

1. Составить таблицу истинности для следующей формулы.

$(x \oplus y)(y \downarrow y)$

2. Определить, при каких значениях переменных x, y, z ложна следующая формула: $(((x \to (y \wedge z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y})$.

Вариант 7

1. Составить таблицу истинности для следующей формулы $(xy \oplus x) \mid y\overline{x}$.

2. Определить, эквивалентны ли следующие формулы $z(x \to y)$ и $xz \to xy$. Составить таблицы истинности.

Вариант 8

1. Составить таблицу истинности для следующей формулы: $(x \to y) \oplus xy$.

2. Определить, эквивалентны ли следующие формулы $(x \to y)z$ и $(xz \to y)$.

Вариант 10

1. Определить, эквивалентны ли следующие формулы $x \leftrightarrow \overline{y}$ и $(\overline{x} \to y)$.

2. При каких значениях переменных x, y, z ложна следующая формула $(((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z)))$.

Практическая работа 2

Основные законы логики. Упрощение логических формул

Краткая теория

Равносильности формул логики высказываний называются **законами логики**. Перечислим наиболее важные из них:

I. $X \equiv X$ – закон тождества.

II. $X \wedge \overline{X} \equiv$ л – закон противоречия.

III. $X \vee \overline{X} \equiv$ и – закон исключенного третьего.

IV. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ – закон двойного отрицания.

V. $X \wedge X \equiv X$; $X \vee X \equiv X$ – законы идемпотентности[1].

VI. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$; $X \vee Y \equiv Y \vee X$ – законы коммутативности (переместительности).

VII. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$; $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$ – законы ассоциативности (сочетательности).

VIII. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности (распределительности).

IX. $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$; $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ – законы де Моргана[2].

X. $X \wedge$ и $\equiv X$; $X \wedge$ л $\equiv X$.

XI. $X \wedge$ л $\equiv$ л $X \vee$ и $\equiv$ и.

Равносильности I–III выражают в математико-логической форме основные законы формальной логики, сформулированные еще Аристотелем.

Всегда можно выразить импликацию и эквиваленцию через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Имеют место следующие равносильности – законы разложения импликации и эквиваленции:

$X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$;

$X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y)\,(Y \to X)$.

---

[1] На латинском языке *idem* означает «тоже», *potentia* – «сила».

[2] Август де Морган (1806–1871) – английский логик.

Примеры

1. Упростить следующую формулу с помощью законов логики:

$$(P \to (Q \to P)).$$

Решение.

$(P \to (Q \to P))$ $\equiv$ (применим закон разложения импликации) $(\overline{P} \vee (\dddot{Q} \vee P))$ $\equiv$ (раскроем скобки) $\overline{P} \vee \dddot{Q} \vee P \equiv$ (перегруппируем переменные) $\overline{P} \vee \mathrm{P} \vee \dddot{Q} \equiv$ (применим закон исключенного третьего) истина $\vee\, \dddot{Q} \equiv$ истина.

Ответ: формула $(P \to (Q \to P))$ равносильна значению «истина», следовательно, она является тавтологией.

2. Выполнить эквивалентные преобразования формулы

$F = (x1 \wedge x2 \wedge x3 \wedge \bar{x}4) \vee (\bar{x}1 \wedge x3) \vee (\bar{x}2 \wedge x3) \vee (x3 \wedge x4)$.

– по закону коммутативности:

$F = (x3 \wedge x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4) \vee (x3 \wedge \bar{x}1) \vee (x3 \wedge \bar{x}2) \vee (x3 \cdot x4)$;

– по закону дистрибутивности:

$F = (x3 \wedge x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4) \vee (x3 \wedge \bar{x}1) \vee (x3 \wedge (\bar{x}2 \vee x4))$;

– по закону дистрибутивности:

$F = (x3 \wedge x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4) \vee x3 \cdot (\bar{x}1 \vee \bar{x}2 \vee x4)$;

– по закону дистрибутивности:

$F = x3 \wedge ((x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4) \vee (\bar{x}1 \vee \bar{x}2 \vee x4))$;

– по закону де Моргана:

$F = x3 \wedge ((x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4) \vee (\overline{x1 \wedge x2 \wedge \bar{x}4}))$;

– по закону противоречия:

$F = x3 \wedge$ истина $\equiv x3$.

Задания для решения в группе

Упростить следующие формулы с помощью законов логики:

1. $((P \wedge (Q \to P)) \to \overline{P})$;

2. $(X_3 \leftrightarrow X_2) \to X_1$;

3. $(\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}} \vee \overline{X}) \wedge \overline{X \vee \overline{\overline{X}Y}}$;

4. $((P \to Q)R \vee (Q \to P))$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Упростить следующую формулу с помощью законов логики: $((P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P)))$.

2. Доказать тождественную истинность формулы $((P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)))$.

Вариант 2

1. Определить с помощью законов логики, эквивалентны ли следующие формулы:

$(X \to \overline{Y})$ и $(X \vee \overline{Y})$ $(X \wedge Y)$.

2. Упростить следующую формулу с помощью законов логики: $(((X \to (Y \wedge Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y})$.

Вариант 3

1. Выразить формулу $X \to (Y \to X)$ через $\wedge$ и $\vee$.

2. Определить с помощью законов логики, эквивалентны ли следующие формулы: $Z(X \to Y)$ и $XZ \to XY$.

Вариант 4

1. Выразить формулу $X \leftrightarrow (Y \to X)$ через $\wedge$ и $\vee$.

2. Упростить следующую формулу с помощью законов логики: $X_1(X_3 \vee \overline{X_2}) \vee X_2(X_3 \vee \overline{X_1})$.

Вариант 5

1. Упростить формулу $X \to (Y \to \overline{X})$.

2. Определить, эквивалентны ли следующие формулы: $(X \to Y)Z$ и $(XZ \to Y)$.

Вариант 6

1. Определить, эквивалентны ли следующие формулы: $X \leftrightarrow \overline{Y}$ и $(\overline{X} \to Y)$.

2. Упростить следующую формулу с помощью законов логики:

$(((X \vee Y) \vee Z) \to ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)))$.

Вариант 7

1. Определить, эквивалентны ли следующие формулы: $X \to \overline{Y}$ и $\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}$.

2. Упростить формулу $X \vee Z \vee (Y \to X)$.

Вариант 8

1. Определить, эквивалентны ли следующие формулы:

$(A \wedge (B \vee \overline{B}) \equiv A$.

2. Упростить следующую формулу с помощью законов логики:

$(X \vee \overline{Y}) \to Z$.

Вариант 9

1. Упростить формулу $X \vee (Y \to X)$.

2. Упростить следующую формулу с помощью законов логики:

$((P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \wedge R))$.

Вариант 10

1. С помощью законов логики определить, является ли формула тавтологией:

$(((P \wedge \overline{Q}) \to Q) \to (P \to Q))$.

2. Упростить формулу $(\overline{XY} \vee \overline{X}YZ) \wedge (\overline{X} \vee \overline{XYV\overline{Y}})$.

Практическая работа 3

Построение переключательных схем. Кванторы всеобщности и существования

Краткая теория

Кванторы всеобщности и существования

Чтобы превратить высказывательную форму в высказывание, достаточно вместо каждой из переменных, входящих в форму, подставить какое-нибудь ее значение.

Пусть, например, дана высказывательная форма «Число x – простое», где x принимает значения из множества натуральных чисел N. Предложение «Для всякого x из N истинно, что x – простое число» утверждает, очевидно, то же самое, что предложение «Всякое x натуральное число – простое», и следовательно, является высказыванием ложным. Предложение «Существует такое x, что x – простое число» равнозначно предложению «Существует простое число» и является истинным высказыванием.

Выражение «для всякого x» называется **квантором всеобщности** по переменной x. Это выражение кратко записывается так: $\forall \boldsymbol{x}$.

Выражение «существует x такое, что...» называется **квантором существования** по переменной x и обозначается так: $\exists \boldsymbol{x}$.

Вместо слова «всякий» употребляют слова «каждый», «любой»; вместо «существует» – слова «есть», «найдется», «некоторые», «хотя бы один».

Переход от формы $\Phi(x)$ к высказыанию $\forall x(\Phi(x))$ или к высказыванию $\exists x(\Phi(x))$ называется операцией квантификации формы $\Phi(x)$, или просто квантификацией $\Phi(x)$.

Переключательные схемы

Переключательная схема – это устройство из переключателей (контактов) и проводов, связывающих два полюса – вход и выход (полюсов может быть и больше, но мы ограничимся рассмотрением двухполюсных схем). Для конкретности будем говорить о переключательных схемах, представляющих собой участок электрической цепи, по которому проходит ток от источника A к потребителю B (например, к лампочке). Между источником и потребителем может быть замыкающий и размыкающий цепь контакт либо несколько контактов, соединенных последовательно или параллельно.

Рассмотрим схему с одним контактом (рис. 3.1). Цепь замкнута (лампочка горит) в том и только в том случае, если контакт замкнут.

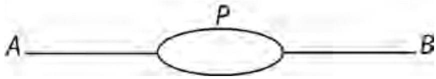


Рис. 3.1. Схема с одним контактом

Сопоставим контакту P переменную $\overline{\overline{X}}$, а двум состояниям контакта «замкнут», «разомкнут» — соответственно значения *истина* или *ложь* переменной $\overline{\overline{X}}$. Условимся также обозначать утверждение «цепь замкнута» через и, а утверждение «цепь разомкнута» – через л; тогда формула X опишет работу данной цепи, которая представлена в виде таблицы истинности:

P	*x*	**Цепь**
Замкнут	*истина*	Замкнута
Разомкнут	*ложь*	Разомкнута

Если между источником и потребителем тока поместить два контакта P_1 и P_2 (рис. 3.2), соединенные последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты, и разомкнута, когда хотя бы один из них разомкнут. Конъюнкция переменных x_1 и x_2 поставленных в соответствие контактам, истинна, когда обе переменные принимают значение истина, и ложна, когда хотя бы одна из них принимает значение ложь. Таким образом, формула $x_1 \wedge x_2$ соответствует схеме на рис. 3.2.

Рис. 3.2. Схема с последовательными контактами

Очевидно, что формула $X1 \vee X2 \vee \ldots \vee Xn$ описывает схему с n последовательно соединенными контактами.

Если контакты P_1 и P_2 соединены параллельно (рис. 3.3), то цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, и разомкнута, когда оба они разомкнуты.

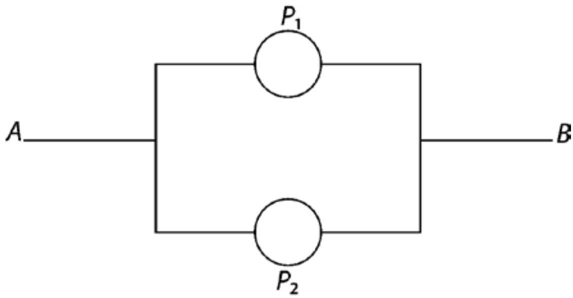


Рис. 3.3. Схема с параллельными контактами

Такой схеме соответствует формула $x_1 \vee x_2$, являющаяся истинной, когда хотя бы одна из переменных принимает значение истина, и ложной, когда обе переменные принимают значение ложь. Легко видеть, что дизъюнкция $X1 \vee X2 \vee Xn\ldots$ описывает работу цепи с n параллельно соединенными контактами.

Пример

Определить истинность значений следующего квантора:

$$\forall x\ ((x > 2 \wedge x < 1) \leftrightarrow x \neq x).$$

Решение.

Выражение $x > 2 \wedge x < 1$ всегда ложно, выражение $x \neq x$ также всегда ложно, а $\leftrightarrow$ «ложь» – «ложь» по таблице истинности равна «истине». Следовательно, значение всего квантора всегда будет истинным.

Задания для решения в группе

1. Определить истинность значений следующего квантора: $\forall x\ ((x > 1 \wedge x < 2) \leftrightarrow x = x)$.

2. Определить истинность значений следующего квантора: $\exists T \forall x\ (x^2 = (x + T)^2)$.

3. Построить переключательную схему для формулы $((X_1 \to X_2) \to X_3)$.

4. Построить переключательную схему для формулы $(P \vee (Q \wedge R))$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $\forall x \exists P\ (Px = 3x + 1)$.

2. Построить переключательную схему для формулы
$((P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)))$.

Вариант 2

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $\forall x \exists P\ (2x - 1 = Px)$.

2. Построить переключательную схему для формулы
$(((X \to (Y \wedge Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y})$.

Вариант 3

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $\exists x \forall P\ (2x - 1 = Px)$.

2. Построить переключательную схему для формулы $Z(X \to \overline{Y})$.

Вариант 4

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $(\exists T \neq 0)\ (\forall x \neq 0)\ (x^2 = (x + T)^2)$.

2. Построить переключательную схему, соответствующую формуле $X_1(X_3 \vee \overline{X_2}) \vee X_2(X_3 \vee \overline{X_1})$.

Вариант 5

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $(\forall x)\ (\exists T \neq 0)\ (x^2 = (x + T)^2)$.

2. Построить переключательную схему для формулы $(X \to Y)\overline{Z}$.

Вариант 6

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $(\exists x \neq 0)\ (\exists T \neq 0)\ (x^2 = T^2)$.

2. Построить переключательную схему для формулы
$(((X \vee Y) \vee Z) \to ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)))$.

Вариант 7

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $\forall x((x > 2 \wedge x < 1) \leftrightarrow x \neq x)$.

2. Построить переключательную схему для формулы $X \vee Z \vee (Y \to X)$.

Вариант 8

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $\forall x((x > 1 \wedge x < 2) \leftrightarrow x = x)$.

2. Составить переключательную схему, соответствующую формуле $(X \vee \overline{Y}) \to Z$.

Вариант 9

1. Определить истинность значений $\forall x \exists P\ (2x - 1 = Px)$.

2. Составить переключательную схему для формулы
$((P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \wedge R))$.

Вариант 10

1. Записать следующие высказывания словами и определить истинность их значений: $(\exists T = 0)\ (\forall x)\ (x^2 = (x + T)^2)$.

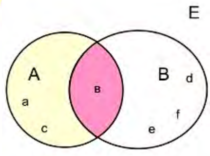
2. Построить переключательную схему для формулы
$(\overline{XY} \vee \overline{X}YZ) \wedge (\overline{X} \vee \overline{XYV\overline{Y}})$.

Тема 2. Теория множеств

Практическая работа 4

Операции над множествами

Краткая теория



Теоретико-множественные представления – описание исследуемой системы и процессов средствами теории множеств, т. е. как ***множества*** взаимосвязанных и/или взаимодействующих частей – ***элементов.*** Связи между элементами задаются через ***отношения*** и/или ***соответствия.*** Множества, элементы, отношения, соответствия характеризуются определенными ***свойствами*** и набором допустимых ***операций*** над ними.

Объединение:

$$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\};$$

Пересечение:

$$A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\};$$

Разность:

$$A \backslash B = \{x |\ x \in A \wedge x \notin B\};$$

Симметрическая разность:

$$A \Delta B = \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\};$$

Дополнение:

$$A = \{x | x \notin A\}.$$

На рис. 4.1 приведены диаграммы Эйлера, иллюстрирующие операции над множествами. Сами исходные множества изображаются фигурами (в данном случае овалами), а результат выделяется графически (в данном случае для выделения использована заливка).

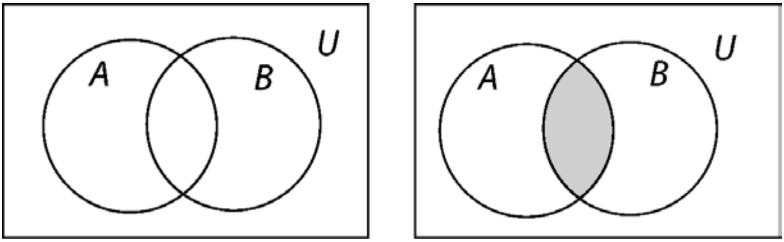


Рис. 4.1. Операции над множествами

Прямое произведение множеств

Пусть A и B – два множества. Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит A, а второй принадлежит B:

$$A \cdot B := \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Степенью множества A называется его прямое произведение самого на себя. Обозначение: $An = A \cdot A \ldots \cdot A$.

Множество, включающее в себя максимально возможное число подмножеств универсального множества, называется **булеаном.** Он включает в себя пустое подмножество и множества, сформированные из одного, двух, трех и т. д. до общего числа элементов универсального множества. Булеан обозначают символом $\boldsymbol{B(U)}$.

Например, если $K = \{a, b, c\}$, то $B(K) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Свойства операций над множествами

Пусть задан универсум. Тогда для $\forall\ A, B, C \subset U$ выполняются следующие свойства:

Идемпотентность $A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Коммутативность $A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$

Ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Поглощение $(A \cap B)\ A = A$	$(A \cup B) \cap A = A$
Свойство нуля $A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Свойство единицы $A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Инволютивность	$\overline{\overline{A}} = A$
Законы де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Свойства дополнения $A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Выражение для разности	$A \setminus B = \ A \cap \overline{B}\ \ A \cup \overline{A} = U$

Примеры

1. **Дано.**

Универсум $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

$A = \{1, 3, 5, 7\}$;

$B = \{5, 6, 7, 8, 10\}$;

$C = \{1, 2, 7, 9\}$.

Найти.

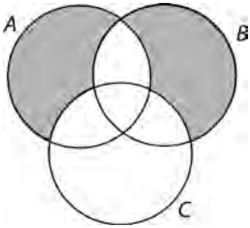
Множество $D = A \Delta B \cap C$. Построить диаграммы Эйлера.

Решение.

$A \Delta B = \{1,3, 6, 8, 10\}$;

$D = \{3, 6, 8, 10\}$.

Диаграммы Эйлера.



2. Пусть заданы три числовых множества $A = \{2, 3, 4, 10\}$, $B = \{1, 2, 10, 12\}$, $C = \{1, 9, 10\}$. Требуется указать элементы множества.

а) $A \cap B \cup B \cap C = D$; б) $(A \cup C) \setminus (B \cap A) = E$.

а) Множество D есть объединение двух множеств $A \cap B$ и $B \cap C$, что следует из порядка выполнения действий.

$A \cap B = \{2, 10\}$, $B \cap C = \{1, 10\}$ и $D = \{1, 2, 10\}$.

б) Множество E есть разность между объединением $A \cup C$ и пересечением $B \cap A$.

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 10, 12\}$, $B \cap A = \{2, 10\}$ и $E = \{1, 3, 4, 12\}$.

Задания для решения в группе

1. Записать в символической форме следующие множества:

а) множество всех положительных рациональных корней уравнения

$$x^7 - 8 \cdot x^3 - 3 = 0;$$

б) множество всех целых корней уравнения $f(x) = 0$;

в) множество всех равносторонних треугольников;

г) множество всех прямых, параллельных данной прямой.

2. В каких отношениях находятся между собой множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $C = \{x \in Z \mid x \leq 3\}$. Построить диаграмму Эйлера.

4. Составить подмножества из букв, включающих: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{k\}$, $\{g\}$, $\{a, d\}$, $\{a, b, k\}$.

5. Перечислить элементы булеана множества $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Проверить, что A и $B(A)$ имеют общий элемент.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \cap \bar{A} = \varnothing$;

б) $A \setminus B = A \cap B$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid |x| < 1\}$, $Y = \{x \mid x \geq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

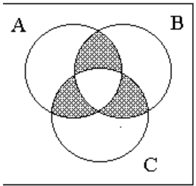
$X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$;

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{3, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $A = \{2, 7\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 2

1. Доказать следующие равенства:

а) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$;

в) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid x < 0\}$, $Y = \{x \mid x^2 \leq 1\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

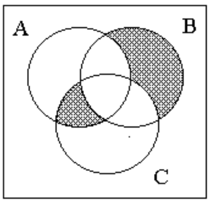
$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{10^n \mid n \in N\}$, А $= \{100^n \mid n \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 3

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$;

в) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid \sin(x) \geq 0\}$, $Y = \{x \mid x^2 - 1 \leq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

а) $X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$;

б) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$;

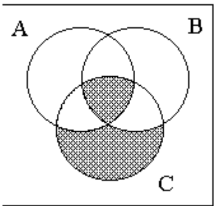
в) $X = \{(x, y) \mid y \geq x^2 + 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{x^2 + x + 1 \mid x \in N\}$, $A = \{x^2 + 5x + 7 \mid x \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 4

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

б) $\mathrm{A} \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid |x| < 1\}$, $Y = \{x \mid x \geq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

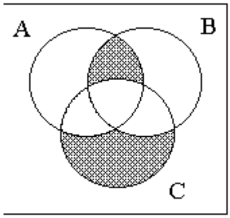
$X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{x^2 + x + 1 \mid x \in N\}$, $A = \{x^2 + 5x + 7 \mid x \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 5

1. Доказать следующие равенства:

а) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid x < 0\}$, $Y = \{x \mid x^2 \leq 1\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

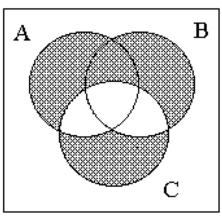
$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{3, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $A = \{2, 7\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 6

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid |x| < 1\}$, $Y = \{x \mid x \geq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

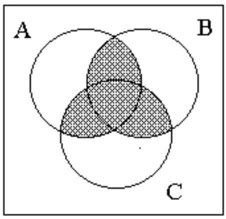
$X = \{(x, y) \mid y \geq x^2 + 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{3x + 1 \mid x \in N\}$, $A = \{3x + 4 \mid x \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 7

1. Какое из множеств $E1 = A \cup (B \backslash C)$ и $E2 = (A \cup B) \backslash C$ есть подмножество другого?

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid |x| < 1\}$, $Y = \{x \mid x \geq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

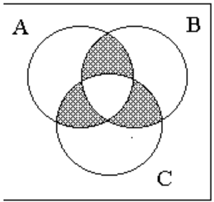
$X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{3, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $A = \{2, 7\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 8

1. Докажите следующие равенства:

а) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$;

в) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid x < 0\}$, $Y = \{x \mid x^2 \leq 1\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

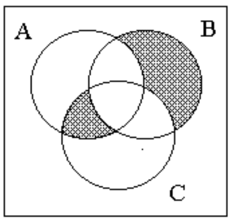
$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{10^n \mid n \in N\}$, $A = \{100^n \mid n \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 9

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$;

б) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid \sin(x) \geq 0\}$, $Y = \{x \mid x^2 - 1 \leq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

а) $X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$;

б) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$;

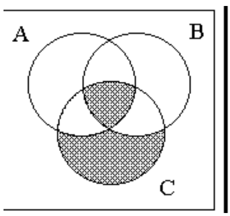
в) $X = \{(x, y) \mid y \geq x^2 + 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{x^2 + x + 1 \mid x \in N\}$, $A = \{x^2 + 5x + 7 \mid x \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Вариант 10

1. Доказать следующие равенства:

а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

$X = \{x \mid |x| < 1\}$, $Y = \{x \mid x \geq 0\}$.

3. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, если:

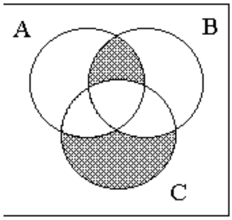
$X = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $Y = \{(x, y) \mid x - y - 1 \leq 0\}$.

Рассмотреть случаи: 1) $X, Y \subset R$; 2) $X, Y \subset Z$.

4. Найти дополнение множества A до множества X.

$X = \{x^2 + x + 1 \mid x \in N\}$, $A = \{x^2 + 5x + 7 \mid x \in N\}$.

5. Записать с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



Практическая работа 5

Отношения на множествах. Отображения. Функции

Краткая теория

Пусть A и B – два множества. **Бинарным отношением** R из множества A в множество B называется подмножество прямого произведения A и B:

$$R \subset A \times B.$$

Для бинарных отношений обычно используется инфиксная форма записи:

$$aRb: == (a, b) \in R \subset A \times B.$$

Если $A = B$, то говорят, что R есть отношение на множестве A.

Введем обобщенное понятие отношения: n-местное (n-арное) отношение R – это множество упорядоченных наборов (кортежей):

$$R \subset A1 \times \ldots \times An = \{(a1, a2, ..., an) \mid a1 \in A1 \,\&...\& an \in An\}.$$

Множества Ai не обязательно различны.

Если даны два отображения $h1$: $X \to Y$ и $h2$: $Y \to Z$, у которых существуют элементы $yk \in Y$, принадлежащие $h1$ и $h2$, то можно найти их **композицию,** формирующую новое отображение:

$$h = (h1 \circ h2) = \{(x, z) |\ \text{если}\ \pi 2(h1) = \pi 1(h2)\},$$

где $\pi 2(h1)$ – проекция первого отображения на вторую компоненту;
$\pi 1(h2)$ – проекция второго отображения на первую компоненту.

Если даны отношения $r1{:}X \to X$ и $r2{:}X \to X$, у которых существуют элементы $xk \in X$, принадлежащие $r1$ и $r2$, то можно найти их композицию, формирующую новое отношение:

$$r = (r1 \circ r2) = \{(xi1, xj2) |\ r(xi1, xj2) = k = 1 \vee nr1(xi1, xk1) \cdot r2(xk2, xj2)\}.$$

Пример: даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ и $C = \{c, d, e, f\}$ и отображения $h1 = \{(a; x); (b; x); (c; y); (d; z)\} \subseteq (A \otimes B)$ и $h2 = \{(x; d); (y; c); (z; f)\} \subseteq (B \otimes C)$. Найти $h = (h1 \circ h2)$.

Композицию отображений удобно представлять матрицами, верхние строки которых есть прообразы отображений, а нижние – образы:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & x & y & z \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x & y & z \\ d & c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & d & c & f \end{bmatrix}.$$

Ответ: $h = (h1 \circ h2) = \{(a, d); (b, d); (c, c); (d, f)\} \subseteq (A \otimes C)$.

Свойства отношений

Отношения характеризуются наличием у них следующих свойств:

1) отношение называется **симметричным,** если $\forall a, b \in X$ из aRb следует bRa;

2) отношение называется **антисимметричным,** если $\forall a, b \in X$ из aRb не следует bRa;

3) отношение (X, R) называется **рефлексивным,** если $\forall a \in X$ и справедливо aRa;

4) отношение называется **антирефлексивным,** если $\forall a \in X$ не выполняется aRa;

5) отношение называется **транзитивным,** если из того, что aRb и bRc, следует aRc.

Наиболее известными отношениями являются отношение ***экви-*** **валентности** и **отношение порядка.**

Отношение называется отношением эквивалентности и обозначается символом «≡», если оно рефлексивно ($x \equiv x$), симметрично ($x \equiv y \rightarrow y \equiv x$) и транзитивно ($x \equiv y$ и $y \equiv z \rightarrow x \equiv z$). Отношение эквивалентности на любом множестве M задает разбиение его на подмножества, которые в этом случае называются **классами эквивалентности.** С другой стороны, любое разбиение $M = \{A_1, A_2, ..., Am\}$ задает на этом множестве отношение, которое называется «входить в одно и то же подмножество разбиения». Нетрудно убедиться, что это отношение симметрично, рефлексивно и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Отношение называется отношением **нестрогого порядка** и обозначается символом «≤», если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношение называется отношением **строгого порядка** и обозначается символом «<», если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Для числовых множеств отношениями нестрогого порядка являются известные отношения «меньше или равно», «больше или равно», отношениями строго порядка – «меньше» или «больше».

Понятие «функции» является одним из основополагающих в математике. В данном случае подразумеваются прежде всего функции, отображающие одно конечное множество объектов в другое конечное множество.

Отображение множеств (функции)

Пусть f – отношение из A в B, такое что

$$\forall\, (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c.$$

Такое свойство отношения называется **однозначностью, или функциональностью,** а само отношение называется функцией из A в B и обозначается следующим образом:

$$f : A \rightarrow B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{\ f\ } B\,.$$

Если $f: A \to B$, то обычно используется префиксная форма записи:

$$b = f(a) := (a,b) \in f.$$

Если $b = f(a)$, то a называют аргументом, а b – значением функции.

Пусть $f: A \to B$ тогда:

область определения функции: $f_A := \{a \in A | \exists b \in B b = f(a)\}$;

область значений функции: $f_B := \{b \in B | \exists a \in A b = f(a)\}$.

Если $f(a) = A,$ то функция называется тотальной, а если $f(a \neq A)$ – частичной.

Сужением функции $f: A \to B$ на множество M с A называется функция $f|M$, определяемая следующим образом:

$$f|M := \{(a,b)|(a,b) \in f \ \& \ a \in M\}.$$

Для тотальной функции $f = f|A$.

Функция $f: A_1 \times ... \times A_n \to B$ называется функцией n аргументов, или n – местной функцией.

Свойства функции

Пусть $f: A \to B.$ Тогда функция f называется:

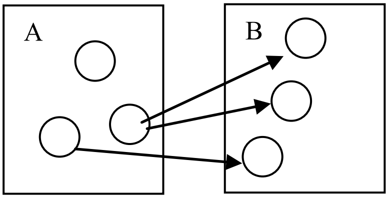
- **инъективной**, или 1–1 функцией, если для любых элементов $x_1 \neq x_2$, следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Записывается так $f: A \xrightarrow{1-1} B$;

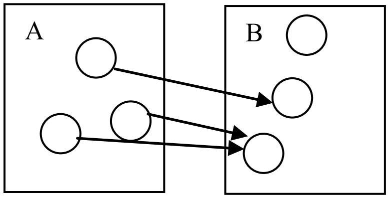
- **сюръективной**, если $\forall b \in B \ \exists a \in A \ b = f(a)$;

Записывается так $f: A \xrightarrow{\text{на}} B$;

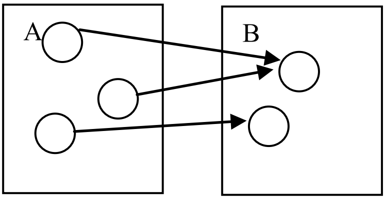
- **биективной**, если она инъективная и сюръективная. Записывается так $f: A \to B$.



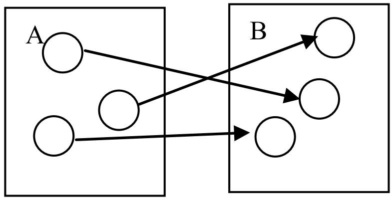
Отношение, но не функция



Инъекция, но не сюръекция



Сюръекция, но не инъекция



Биекция

Примеры для решения в группе

1. Заданы множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Поставим элементы множества X в соответствие элементам множества Y следующим образом:

$x1 \to y3$

$x2 \to y2$

$x3 \to y1$

Будет ли данное соответствие

а) сюръективным отображением X на Y;

б) инъективным отображением X на Y;

в) не будет отображением X на Y.

Ответ: Данное соответствие не будет отображением X в Y, т. к. множество образов элемента $X4$ пусто.

2. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ и $C = \{c, d, e, f\}$ и отображения $h1 = \{(a; x); (b; x); (c; y); (d; z)\} \subseteq (A \otimes B)$ и $h2 = \{(x; d); (y; c); (z; f)\} \subseteq (B \otimes C)$. Найти $h = (h1^\circ h2)$.

Композицию отображений удобно представлять матрицами, верхние строки которых есть прообразы отображений, а нижние – образы:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & x & y & z \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x & y & z \\ d & c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & d & c & f \end{bmatrix}$$

Ответ: $h = (h1 \circ h2) = \{(a, d); (b, d); (c, c); (d, f)\} \subseteq (A \otimes C)$.

3. Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором – 30 штук, а на третьем – 28. Причем на первом и втором станках обработано 5 деталей, на первом и третьем – 10 деталей, на втором и третьем – 8 деталей, на всех трех станках обработано три детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

В качестве универсального выберем множество всех деталей. Число его элементов равно 100. Пусть A – множество деталей, обработанных на первом станке, B – на втором, C – на третьем. Число элементов множества A обозначим $n(A)$. Оно равно 42, т. е. $n(A) = 42$. Аналогично, $n(B) = 30$, $n(C) = 28$. Обратимся к диаграмме (рис. 5.1).

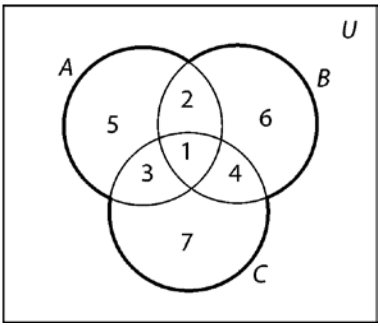


Рис. 5.1. Диаграмма для решения задачи

Обведенное на чертеже жирной линией множество $A \cup B \cup C$ есть множество деталей, обработанных хотя бы на одном из станков. Оно разбито на 7 непересекающихся подмножеств, обозначенных на чертеже цифрами. Область 1 есть множество деталей, прошедших обработку на всех трех станках, т. е. множество $A \cap B \cap C$. По условию задачи $n(A \cap B \cap C) = 3$. Множество деталей, обработанных на первом и втором станках, т. е. $A \cap B$, есть сумма областей, помеченных цифрами 1 и 2. Причем область 2 – множество деталей, обработанных только на первом и втором станках.

По условию задачи $n(A \cap B) = 5$. Следовательно, число деталей, обработанных только на первом и втором станках, равно $5 - 3 = 2$. Аналогично, число элементов множества, обозначенного цифрой 3, есть число деталей, прошедших обработку на первом и третьем станках:

$$n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 10 - 3 = 7.$$

Число деталей, прошедших обработку только на втором и третьем станках (область 4), равно $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 8 - 3 = 5$.

Область, помеченная на чертеже цифрой 5, есть множество деталей, обработанных только на первом станке. Число элементов этого множества получим, если из числа всех обработанных на первом станке деталей вычесть число деталей, обработанных одновременно на первом и втором, а также на первом и третьем станках, в том числе и на всех трех станках, $42 - (3 + 2 + 7) = 30$.

Аналогично можно определить число деталей, обработанных только на втором станке (область 6), $30 - (3 + 2 + 5) = 20$, а также только на третьем (область 7) $28 - (3 + 7 + 5) = 13$. Число всех обработанных деталей, т. е. $n(A \cup B \cup C)$, получим, если сложим число элементов всех областей с 1 по 7. Оно равно 80. Дополнением к нему является множество необработанных деталей

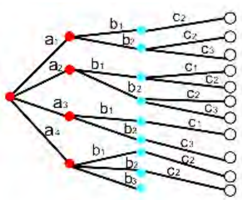
$$U \backslash A \cup B \cup C = A \cup \ \cup B\ C,\ n(A \cup \ \cup B\ C) = 100 - 80 = 20.$$

Тема 3. Комбинаторика

Практическая работа 6

Комбинаторные формулы

Краткая теория

На практике часто возникает необходимость знать возможные наборы объектов множества, удовлетворяющие определенным условиям. Такие задачи называют комбинаторными, а возможные наборы объектов – выборками.

Перестановками называются множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n:

$$P_n = n!\,. \tag{1}$$

Для пустого множества принимается соглашение: пустое множество можно упорядочить только одним способом; по определению полагают $0! = 1$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)\,. \tag{2}$$

Сочетаниями из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n, заданных и отличающиеся хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m обозначают: C_n^m или $\binom{m}{n}$. Это число выражается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \quad (3)$$

По определению полагают $C_n^0 = 1$. Для числа сочетаний справедливы равенства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_{n+1}^{m-1} = C_n^m + C_n^{m+1}. \quad (4)$$

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \quad (5)$$

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае множества с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}, \quad (6)$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Число размещений по *m* элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т. е.

$$(A_n^m)_{\text{повтор}} = n^m. \quad (7)$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n+m-1$ элементов по m элементов, т. е.

$$(C_n^m)_{\text{повтор}} = C_{n+m-1}^m. \quad (8)$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Примеры для решения в группе

1. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение.

Для решения используем формулу

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Треугольники могут быть двух видов. У треугольников первого вида одна вершина на первой прямой, две вершины – на второй. Вершину на первой прямой можно выбрать 10 способами, две вершины на второй прямой можно выбрать $C^2{}_{20}$ способами. Следовательно, всего существует $10\cdot C^2{}_{20}$ треугольников первого вида. У треугольников второго вида одна вершина находится на второй прямой, а две другие вершины – на первой. Число таких треугольников подсчитывается аналогично. Оно равно $20\cdot C^2{}_{10}$. Таким образом, искомое число всех треугольников

$$10\cdot C_{20}^2 + 20\cdot C_{10}^2 = 10\cdot\frac{20\cdot 19}{2} + 20\cdot\frac{10\cdot 9}{2} = 100\cdot(19+9) = 2800.$$

2. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца

и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Решение.

Чтобы найти число способов, которыми могут быть расставлены чашки надо найти число размещений (без повторений) из 4 элементов по 3, блюдца – число размещений из 5 элементов по 3, ложки – число размещений из 6 элементов по 3. В решении используется формула размещений без повторений, т. к. здесь играет роль, какая из ложек (чашек, блюдец) будет выбрана, т. к. все чайные приборы отличаются друг от друга. Число способов, которыми могут быть выбраны 3 чашки, блюдца и ложки находится по правилу произведения: $A^3{}_4 * A^3{}_5 * A^3{}_6 = 4*3*2*5*4*3*6*5*4 = 172800$ способов.

Для решения используем формулу.

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

Задача 1. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

Задача 2. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

Вариант 2

Задача 1. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что эти шары разного цвета.

Задача 2. В партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

Вариант 3

Задача 1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы Л, М, О, О, Т. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово МОЛОТ.

Задача 2. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Вариант 4

Задача 1. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

Задача 2. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие Л)?

Вариант 5

Задача 1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках Л, на остальных трех И. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово ЛИЛИИ.

Задача 2. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Вариант 6

Задача 1. На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова ТАЛАНТ – по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово ТАЛАНТ.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

Вариант 7

Задача 1. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

Задача 2. Из букв слова РОТОР, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекают 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТОР?

Вариант 8

Задача 1. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

Задача 2. Сколькими способами можно переставить буквы слова КОФЕВАРКА так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

Вариант 9

Задача 1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК?

Задача 2. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Вариант 10

Задача 1. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

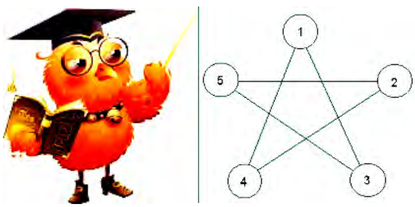
Задача 2. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Тема 4. Теория графов

Практическая работа 7

Способы задания графов. Операции над графами

Краткая теория



Граф может быть задан списком или матричными структурами.

Списки. При описании графа списками используют модели $G = <X; R>$ и $G = <X; H>$.

Первая форма – список отношений – применяется в тех случаях, когда необходимо хранить информацию о весе ребра (протяженность, загрузка, пропускная способность линии связи и т. п.) и поиска инцидентных вершин.

Вторая форма – список смежности – применяется в тех случаях, когда необходимо хранить информацию о весе вершины (время исполнения оператора, надежность контактной площадки или загруженность узла и т. п.) и поиска смежных вершин.

При описании графа матрицами прежде всего используют матрицы инциденции и матрицы смежности

Матрица инциденции. Поскольку инциденция есть отношение принадлежности элемента одного множества другому, то для графа $G = <X, R>$ матрица инциденции $\|q\|$ фиксирует эту принадлежность элемента множества R элементу множества X на множестве $\{0, 1\}$. Строки матрицы есть элементы множества R, а столбцы – элементы множества X. Элементы матрицы инциденции неориентированного графа определяются по формуле

$$G(i,j)=\begin{cases}1, \text{если } r_i=(x_i,x_j) \text{ инцидентно } x_j,\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В каждой строке матрицы количество единиц равно двум, а в каждом столбце – степени вершины – σi.

При задании ориентированного графа с петлями рекомендуется расщеплять вершину с петлей на две вершины: вершину-исток и вершину-сток,

В каждом столбце матрицы число +1 равно полустепени исхода вершины x_i, т. е. σi +, а число –1 равно полустепени захода вершины x_i, т. е. σi –.

Матрица смежности. Поскольку смежность есть отношение между элементами одного множества, то матрица смежности R есть квадратная матрица, число строк и столбцов которой равно мощности множества $|X| = n$.

Элементы матрицы смежности определяются соотношением

$$R(i, j) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \text{ смежна } x_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица весов. Матрица весов вершинно-взвешенного графа есть матрица-столбец, число строк которой равно числу вершин n, а позициями являются значение веса вершины:

$$P(G) = \begin{Vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{Vmatrix}.$$

Матрица весов реберно-взвешенного графа есть квадратная матрица, число строк и столбцов которой равно числу вершин графа. Позиции матрицы весов $P(x_i, x_j)$ при $i \neq j$ определяются соотношением

$$P(i,j) = \begin{cases} 0, \text{ если } i = j, \\ li, j, \text{ если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j \text{ и вес ребра } l_i, j, \\ \infty, \text{ если вершина } x_i \text{ несмежна вершине } x_j. \end{cases}$$

Матрица достижимости. Поскольку $H(xi)$ есть множество вершин, которые смежны вершине x_i, или «окрестность» вершины x_i, или достижимы из x_i за «один шаг», то отображение $h(h(xi)) = h2(xi)$ есть вершины графа, достижимые из xi за «два шага» через вершины, сформированные на «первом шаге». Отображение $h(h(h(xi))) = h3(xi)$ есть вершины, достижимые из вершины xi за «три шага» через вершины, сформированные на втором шаге. Так как любая вершина связного графа должна быть достижима за $p \le n$ «шагов», то множество вершин, достижимых из вершины xi за это число «шагов», может быть представлено в виде

$$qp(x_i) = I \cup h(x_i) \cup h2(x_i) \cup \ldots \cup hp(x_i),$$

где I –диагональ матрицы.

Для построения матрицы достижимости удобно использовать матрицу смежности, т. е.

$$\|qp\| = I \cup \|r\| \cup \|r2\| \cup \|r3\| \cup \ldots \cup \|rp\|.$$

Для возведения в степень матрицы смежности используют правило умножения булевых матриц:

$$ri, j2 = k = 1 \vee n\ (ri,\ k \cdot rk, j),$$

$$ri, j3 = k = 1 \vee n\ (ri,\ k \cdot rk, j2) \text{ и т. д.}$$

Матрица разрезов. Если можно построить множество разрезов в виде совместимых кортежей, то можно оформить матрицу разрезов B, строками которой являются индексированные разрезы bi, а столбцами – ребра графа rj, одни из концевых вершин которых принадлежат множеству X', а другие – множеству $(X \backslash X')$. Элементы матрицы разрезов вычисляют по формуле

$$B(i,j) = \begin{cases} 1, \text{если } j\text{-е ребро участвует в } i\text{-м разрезе,} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица циклов. Если в графе существует несколько циклов, то их описание удобно сосредоточить в матрице циклов C, каждая строка которой есть индексированный цикл c_i, а каждый столбец – ребро, включаемое в цикл.

Элементы матрицы циклов вычисляют по формуле

$$C(i,j) = \begin{cases} 1, \text{если } j\text{-е ребро участвует в } i\text{-м цикле}, \\ 0, \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Операции над графами

1. Дополнение графа (рис. 7.1)

Дополнение графа $G(X, E)$ до полного графа

$$\overline{G} = (X, \overline{E} = \{e \in X \times X \mid e \notin E\}).$$

Обратите внимание на стрелки !!!

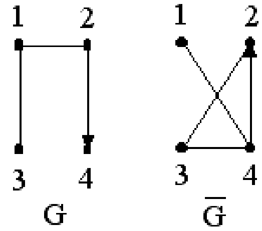


Рис. 7.1. Дополнение графа

2. Объединение (рис. 7.2)

$$G1 \cup G2 = G(X1 \cup X2, E1 \cup E2).$$

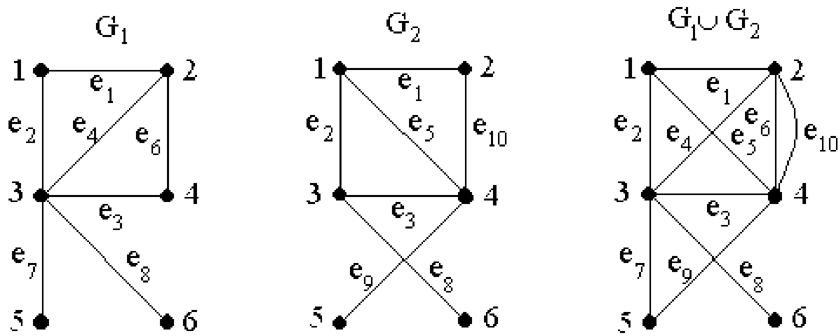


Рис. 7.2. Объединение графов

Обратите внимание – ребра e_6 и e_{10} – это разные связи вершин 2 и 4 (разные дороги между пунктами 2 и 4).

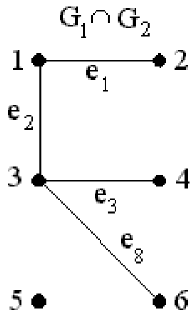


Рис. 7.3. Пересечение графов

3. Пересечение (рис. 7.3)

$$G1 \cap G2 = G(X1 \cap X2, E1 \cap E2)$$

при условии

$$X_1 \cap X_2 \neq \varnothing,\ \ E_1 \cap E_2 \neq \varnothing.$$

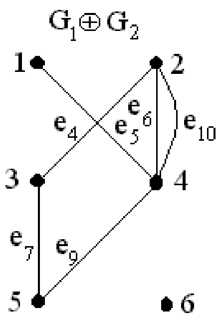


Рис. 7.4. Кольцевая сумма

4. Кольцевая сумма

$$G1 \oplus G2 = G(X = X1 \cup X2,$$

$$E = E1 \oplus E2 = E1 \backslash E2 \cup E2 \backslash E1).$$

Замечание. Операции 2–4 коммутативные бинарные операции, но могут быть расширены на большее число графов.

5. Произведение (рис. 7.5)

$$G_1 \times G_2 = G(X, E),$$

где $X = X_1 \times X_2$,

$$E = \{(a_1 b_1, a_2 b_2) \in E, \forall (a_1 = a_2) \wedge (b_1, b_2) \in E_2 \vee \forall (b_1 = b_2) \wedge (a_1, a_2) \in E_1\}.$$

В произведении графов вершины обозначаются парами ab, где символы a и b – обозначения вершин в G_1 и G_2 соответственно.

Пример.

Ребро $(1x,\ 1y) \subset E$, так как первые символы совпадают ($1 = 1$), а в G_2 есть ребро (x, y). Аналогично и для других ребер.

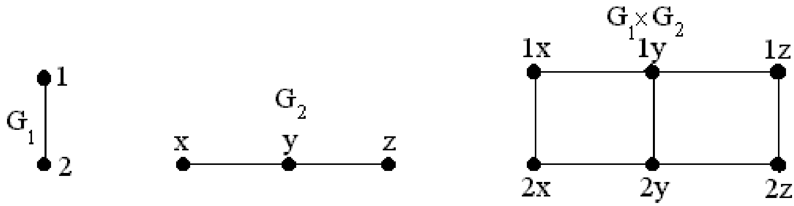


Рис. 7.5. Пример произведения графов

Замечание. Произведение $G_1 \times G_2$ означает, что каждая вершина G_1 заменяется на копию $G_a = G_2$, а каждая вершина G_2 заменяется на копию $G_b = G_1$.

6. Композиция (рис. 7.6)

$$G_1[G_2] = G(X = X_1 \times X_2, E = \{(a_1 b_1, a_2 b_2) \in E, \forall (a_1 = a_2) \wedge (b_1, b_2) \in$$

$$\in E_2 \vee \forall (a_1, a_2) \in E_1\}.$$

В композиции графов, как и в произведении графов, вершины обозначаются парами ab, где символы a и b – обозначения вершин в G_1 и G_2 соответственно.

Пример.

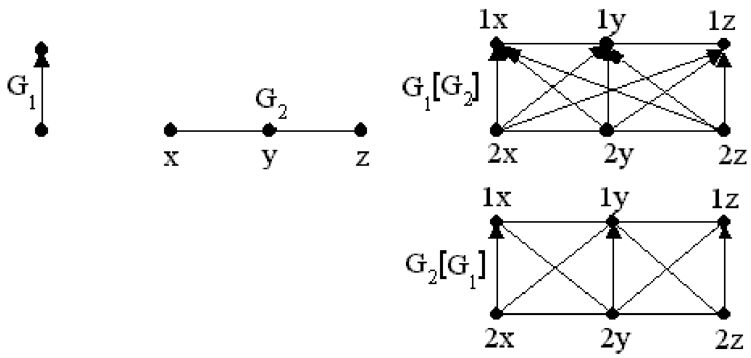


Рис. 7.6. Композиция графов

Замечание. Композиция $G_1[G_2]$ означает, что каждая вершина G_1 заменяется на копию $G_a = G_2$, а затем, если $(a1, a2) \in E1$, то между любыми вершинами b_1 из Ga_1 и b_2 из Ga_2 проводится ребро (дуга) (b_1, b_2).

7. Разность

$$G_1 \backslash G_2 = G(X_1 \backslash X_2, E),$$

где E = $\{[x_1, x_2] | x_1, x_2 \in X1 \backslash X2 \wedge [x_1, x_2] \in E1 \wedge [x_1, x_2] \notin E2\}$.

8. Удаление вершины

$$G(X, E) \backslash \{xi\}.$$

В результате получается подграф, содержащий все ребра, инцидентные множеству $X \backslash \{xi\}$.

9. Удаление ребра (рис. 7.7)

$$G \backslash \{ei\}.$$

Удаляется ребро, но при этом сохраняются концевые вершины, получается частный подграф.

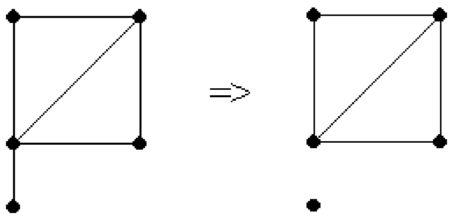


Рис. 7.7. Удаление ребра графа

10. Добавление вершины

$$G(X1, E1) + \{x\} = G(X1 \cup \{x\}, E = E1), \quad \{x\} \notin X1.$$

11. Добавление ребра

$$G(X1, E1) + \{e\} = G(X, E = E1 \cup \{e\}), \quad \{e\} \notin E1.$$

Радиус и диаметр графа

Обозначим через $d(a, b)$ длину кратчайшего маршрута между вершинами a и b.

Для $d(a, b)$ справедливы следующие утверждения:

1) $d\,(a, a) = 0$;

2) $d\,(a, b) \geq 0$;

3) $d\,(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

для неорграфа расстояния симметричны:

4) $d\,(a, b) = d\,(b, a)$,

5) $d\,(a, b) \leq d\,(a, c) + d\,(c, b)$.

Пример (рис. 7.8).

Рассмотрим вершину $x1$:

$d(x1, x2) = d(x1, x4) = d(x1, x5) = 1$,

$d(x1, x3\,) = 2$,

$\max d(x1, xi) = d(x1, x3) = 2$.

$xi \in X$.

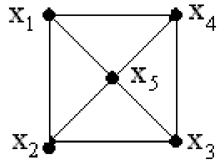


Рис. 7.8. Пример графа

Для каждой вершины x_i существует максимальный кратчайший маршрут до некоторой вершины xj, он называется **эксцентриситетом** вершины и обозначается $e(xi)$.

Максимальный из всех эксцентриситетов графа – это **диаметр** графа

$$D(G) = \max e(xi).$$

Пример для решения в группе

Рассчитать радиус и диаметр для графа, построенного на основе карты Республики Беларусь (рис. 7.9).

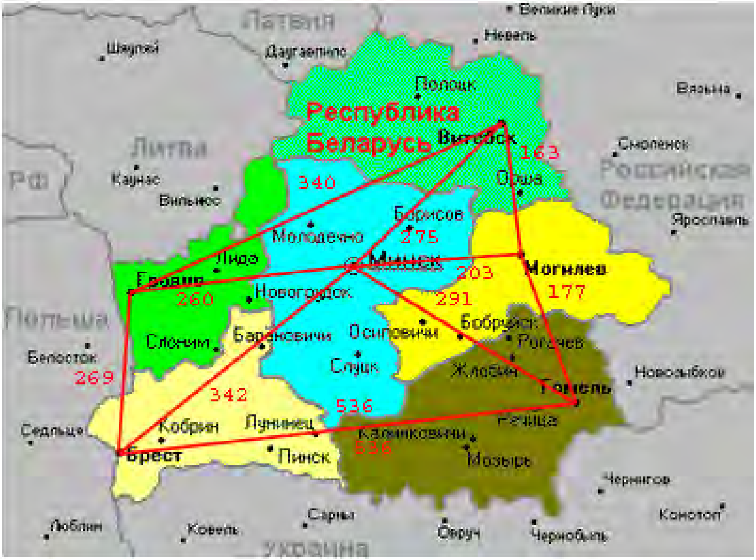


Рис. 7.9. Карта Республики Беларусь

По карте можно построить граф, а по графу можно построить матрицу смежности, а затем рассчитать нужные параметры.

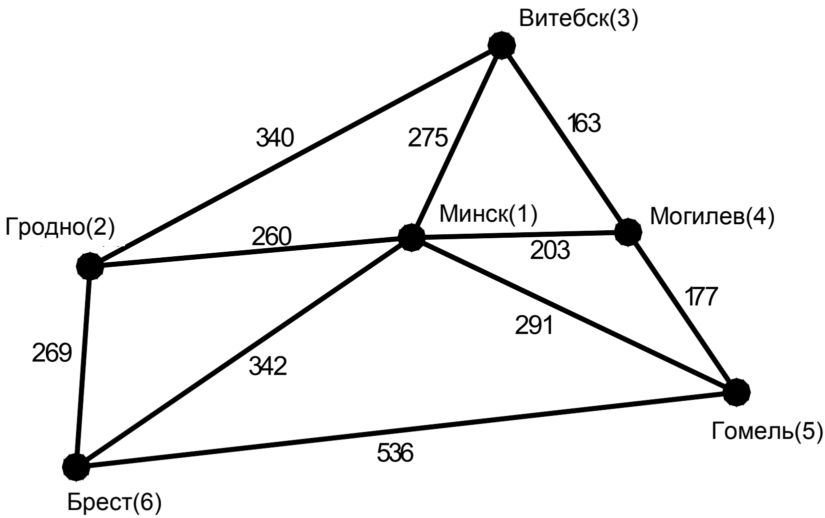


Рис. 7.10. Граф, построенный по карте Республики Беларусь

Таблица расстояний

Название города	Минск	Гродно	Витебск	Могилев	Гомель	Брест
Минск	∞	260	275	203	291	342
Гродно	260	∞	340	463	551	269
Витебск	275	340	∞	163	340	617
Могилев	203	463	163	∞	177	545
Гомель	291	551	340	177	∞	536
Брест	342	269	617	545	536	∞

$$\begin{pmatrix} \infty & 260 & 275 & 203 & 291 & 342 \\ 260 & \infty & 340 & 463 & 551 & 269 \\ 275 & 340 & \infty & 163 & 340 & 617 \\ 203 & 463 & 163 & \infty & 177 & 545 \\ 291 & 551 & 340 & 177 & \infty & 536 \\ 342 & 269 & 617 & 536 & 536 & \infty \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e(1) &= 342; \\ e(2) &= 551; \\ e(3) &= 617; \\ e(4) &= 545; \\ e(5) &= 551; \\ e(6) &= 617. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d(G) &= 617; \\ r(G) &= 342. \end{aligned}$$

Рис. 7.11. Матрица расстояний

Практическая работа 8

Числа графа

Функции, заданные на множестве графов $\{G = <X; R>\}$ и принимающие значения на множестве целых чисел, называют **числовыми характеристиками** или просто **числами.** Наиболее очевидными и простыми числами являются: число вершин – n, число ребер – m, степени вершин – σi(или σi+/σi–). Остальные числа графа требуют вычисления их значений.

Число компонент связности графа $G = <X; R>$.

Граф называют связным, если любая пара его вершин связана цепью или путем.

Если множество вершин графа разбить на попарно непересекающиеся, непустые подмножества $X = \{X_1', X_2', ..., X_k'\}$, т. е. $X_i' \cap X_j' = \varnothing$

для $i \neq j$ и $Xi \neq \varnothing$, то формируемые с помощью инцидентных $X'i$ ребер $r'i \subseteq r$ подграфы $G_1 = <X_1'; R_1'>$, $G_2 = <X_2'; R_2'>$, …, $Gk = <Xk'; rk'>$ являются связными, а между собой – несвязными, т. е. $Gi \cap Gj = \varnothing$. Связный подграф Gi называют **компонентой связности,** а их количество – **числом компонент связности** $k(G)$.

Для поиска числа компонент связности $k(G)$ используют механизм вычисления **матриц достижимости** (рис. 8.1).

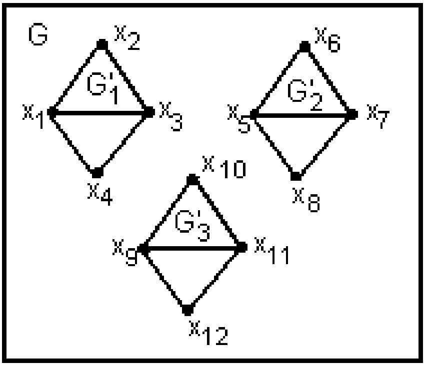


Рис. 8.1. Граф и его три компоненты связности

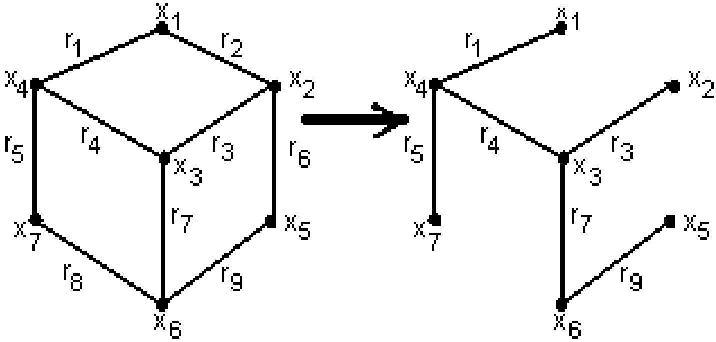
$G = <X; R>$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$,
$G_1 = <X_1; R_1>$, где $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$G_2 = <X_2; R_2>$, где $X_2 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$,
$G_3 = <X_3; R_3>$, где $X_3 = \{x_9, x_{10}, x_{11}\}$.

Цикломатическое число графа $G = <X; R>$.

Для исследования циклов в графе используют цикломатическую матрицу $C(G)$, столбцы которой есть ребра графа, а строки $c(I, j)$ – возможные циклы.

$$C(i, j) = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-е ребро входит в } i\text{-й цикл}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Например, для графа, приведенного на рис. 8.2, ниже представлена цикломатическая матрица, описывающая все циклы. Таких циклов – семь.



C(G)	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8	r9
c1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
c2	1	1	0	1	0	1	1	0	1
c3	1	1	1	0	1	0	1	1	0
c4	1	1	0	0	1	1	0	1	1
c5	0	0	0	1	1	0	1	1	0
c6	0	0	1	0	0	1	1	0	1
c7	0	0	1	1	1	1	0	1	1

Рис. 8.2. Граф, остов, цикломатическая матрица

Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к графу без циклов и петель, называют **цикломатическим числом** и обозначают **$\lambda(G)$.** Цикломатическое число можно определить по формуле $\lambda(G) = m - n + k(G)$, где m – число ребер, n – число вершин, $k(G)$ – число компонент связности графа. Для графа G, приведенного на рис. 8.2, имеем $n = 7$, $m = 9$, $k(G) = 1$. Следовательно, $\lambda(G) = 9 - 7 + 1 = 3$.

Связный граф, не содержащий ни одного цикла, называют **деревом.**

Для устранения всех циклов достаточно удалить три ребра: $\{r_1, r_7, r_8\}$, $\{r_1, r_6, r_7\}$, $\{r_2, r_6, r_8\}$ и т. п. Всего возможно тридцать трехэлементных подмножеств для устранения всех циклов (см. матрицу циклов). Остов на рис. 8.2 получен в результате удаления $\{r_2, r_6, r_8\}$.

Хроматическое число графа $G = \langle X; R \rangle$.

Если множество вершин связного графа разбить на подмножества попарно несмежных вершин, т. е. сформировать подмножества

$X = \{X1'; X2'; \ldots; X\gamma'\}$, то $Xi' \cap Xj' = \varnothing$ для $i \neq j$ и $1 \leq i, j \leq \gamma$ и $xi \cap hxi = \varnothing$ для $xi \in X'i$, тогда каждому подмножеству Xi может соответствовать особый цвет и никакие две смежные вершины не будут окрашены в одинаковый цвет. Наименьшее число $\gamma(G)$, при котором никакие две смежные вершины графа не могут быть окрашены в один цвет, называют **хроматическим числом** графа.

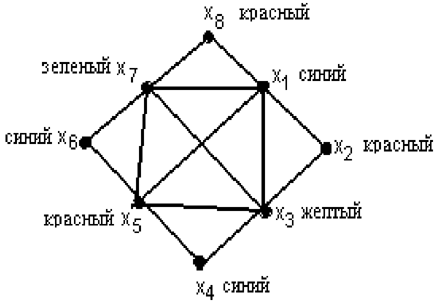


Рис. 8.3. Пример графа

Поиск хроматического числа – достаточно трудоемкая задача. Существуют оценки этого числа. Так хроматическое число полного n-вершинного графа равно n, пустого графа – 1, графа с циклом четной длины – 2, графа с циклом нечетной длины – 3, графа типа дерево – 2.

Чаще может быть рекомендована оценка числа красок по формуле

$$\gamma(G) \leq \max i\{\delta i + 1\}.$$

Например, для графа на рис. 8.3 $\gamma(G) = 4$. Так как $\gamma(G) \leq$ $\leq \max i\{\delta i + 1\} = 6$ и граф содержит взаимосвязанные циклы четной и нечетной длины, то следует сделать выбор из числа красок. $\gamma(G) =$ $= 4, 5, 6$. Наименьшее число красок 4 определяет хроматическое число данного графа.

Плотность графа $G = \langle X; r\rangle$. Наибольшее число вершин полного подграфа $G' = \langle X'; r'\rangle$ связного графа $G = \langle X; r\rangle$, между всеми вершинами которого есть отношение смежности, называется **плотностью** графа и обозначается

$$\rho(G) = \max i\{|X'i|\}.$$

Для графа на рис. 8.3 множества вершин, формирующих полные подграфы есть $\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_5, x_6, x_7\}, \{x_1, x_7, x_8\}, \{x_1, x_3, x_5, x_7\}\}$.

Следовательно, $\rho = \max i\{|X'i|\} = 4$.

Неплотность графа $G = <X; r>$. Наибольшее число вершин пустого подграфа $G' = <X'; r'>$ связного графа $G = <X; r>$, между всеми вершинами которого нет смежности, называют неплотностью графа G и обозначают $\varepsilon(G) = \max i\{|X'i|\}$. Очевидно, что $\varepsilon(G) = \rho(\urcorner G)$ и $\rho(G) = \varepsilon(\urcorner G)$.

Для графа на рис. 8.3 множества вершин, формирующих пустые подграфы есть $\{\{x_2, x_4, x_6, x_8\}, \{x_1, x_4, x_6\}, \{x_3, x_6, x_8\}, \{x_2, x_5, x_8\}, \{x_2, x_4, x_7\}\}$.

Следовательно, $\varepsilon(G) = \max i\{|X'i|\} = 4$.

Число внутренней устойчивости графа $G = <X; r>$. Наибольшее число попарно несмежных вершин связного графа G формирует число внутренней устойчивости, которое обозначают $\varphi(G)$. Для поиска этого числа следует воспользоваться формулой

$$\forall xi(q(xi) \cap S = \varnothing),$$

где $xi \in S$, $q(xi)$ – множество вершин, смежных вершине xi.

Таких подмножеств в графе G может быть несколько. Выбор из множества $\{Si\}$ подмножества с наибольшим числом вершин определяет число внутренней устойчивости, т. е.

$$\varphi(G) = \max i\{|Si|\}.$$

На рис. 8.3 множества попарно несмежных вершин есть $S = \{\{x_2, x_4, x_6, x_8\}, \{x_1, x_4, x_6\}, \{x_3, x_6, x_8\}, \{x_2, x_5, x_8\}, \{x_2, x_4, x_7\}\}$. Следовательно, $\varphi(G) = \max i\{|Si|\} = 4$.

Число внешней устойчивости графа $G =<X; r>$. Наименьшее число вершин графа G, смежных со всеми остальными вершинами связного графа, формирует число внешней устойчивости, которое обозначают $\phi(G)$.

Для поиска этого числа следует воспользоваться формулой

$$\forall xi(q(xi) \cap T \neq \varnothing),$$

где $xi \in X \backslash T$, $q(xi)$ – множество вершин, смежных вершине xi.

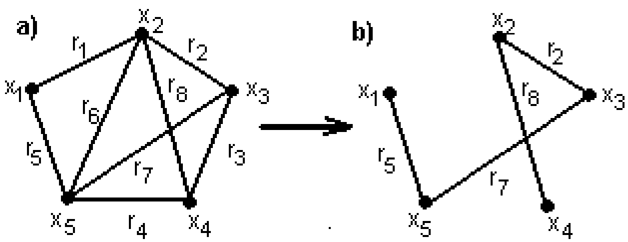
Таких подмножеств в графе G может быть несколько. Выбор из множества $\{Ti\}$ подмножества с наименьшим числом вершин определяет число внешней устойчивости, т. е.

$$\phi(G) = \min i\{|Ti|\}.$$

На рис. 8.3 подмножества вершин, смежных с остальными вершинами графа, есть $T = \{\{x_1, x_4, x_6\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_4, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \{x_3, x_6, x_8\}, ...\}$.

Следовательно, $\phi(G) = \min\{|Ti|\} = 2$. Это $T = \{\{x_1, x_5\}, \{x_3, x_7\}\}$.

Пример: на рис. 8.4 представлен граф. Составить матрицу циклов и найти цикломатическое число.



c	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
c_1	1	0	0	0	1	1	0	0
c_2	1	1	0	0	1	0	1	0
c_3	1	0	0	1	1	0	0	1
c_4	1	1	1	1	1	0	0	0
c_5	0	0	0	1	0	1	0	1
c_6	0	1	1	1	0	1	0	0
c_7	0	1	0	0	0	1	1	0
c_8	0	1	1	0	0	0	0	1
c_9	0	0	1	1	0	0	1	0
c_{10}	0	0	0	1	0	1	0	1

Рис. 8.4. Граф, остов и матрица циклов

Интересно отметить, что операция ($ci \oplus cj$) формирует вектор-строку другого цикла.

c1 = 10001100c1 = 10001100 c6 = 01110100

$\oplus \qquad \oplus \qquad \oplus$

c2 = 11001010c4 = 11111000c8 = 01100001

c7 = 01000110c6 = 01110100c10 = 00010101 и т. д.

В данном графе четыре базовых цикла: $\{r_1, r_5, r_6\}$, $\{r_4, r_6, r_8\}$, $\{r_2, r_3, r_8\}$, $\{r_3, r_4, r_7\}$. Если удалить четыре ребра в каждом базовом цикле, то будут устранены в графе все циклы. Например, $\{\mathrm{r}_1, r_3, r_4, r_6\}$.

Если $k(G) = 1$, то $\lambda(G) = m - n + k(G) = 4$.

Прежде чем определять число красок для раскрашивания вершин по числу ребер в циклах, следует найти клику графа, содержащую наибольшее число вершин полного подграфа.

Если клика содержит $n \geq 3$, то хроматическое число должно быть $\gamma(G) = n$. В противном случае можно оценивать $\gamma(G)$ числу ребер в цикле.

Если число ребер в цикле есть четное число, то $\gamma(G) = 2$, если нечетное – $\gamma(G) = 3$.

Пример: на рис. 8.4 дан граф. Определить его хроматическое число.

Проверим число красок по трем основаниям:

1) граф содержит циклы четной и нечетной длины, т. е. число красок должно быть $\gamma(G) \geq 3$;

2) наибольшая степень вершин x_2 и x_5 равна 4, т. е. число красок должно быть $\gamma(G) < 5$;

3) плотность графа $\rho(G) = 4$ (см. таблицу ниже), т. е. полный подграф содержит четыре вершины.

Следовательно, число красок должно быть $\gamma(G)4$.

r	x	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	1
x_4	0	1	1	0	1
x_5	1	1	1	1	0

q	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	0	1	1	1	1
x_4	0	1	1	1	1
x_5	1	1	1	1	1

Варианты индивидуальных заданий

Задачи

1. Граф задан списком отношений:

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
$(x_i; x_j)$	$(x_1; x_3)$	$(x_2; x_4)$	$(x_2; x_5)$	$(x_3; x_4)$	$)x_3; x_5)$	$(x_4; x_5)$

а) нарисуйте граф;
б) укажите разрез для $X' = \{x_1, x_2, x_4\}$ и $X \backslash X' = \{x_3, x_5, x_6\}$;
в) нарисуйте частичный граф на рёбрах $\{r_2, r_4, r_6\}$;
г) нарисуйте суграф на ребрах $\{r_1, r_3, r_5, r_7\}$;
д) нарисуйте подграф на вершинах x_2, x_4, x_5, x_6;
е) составьте матрицу инциденции и матрицу смежности.

2. Граф задан списком отображений:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
hX_i	x_2	x_1, x_4	x_4	x_2, x_3, x_5, x_6	x_4	x_4

а) нарисуйте граф;
б) укажите маршрут и переход из вершины x_3 в вершину x_6;
в) укажите разрез для $X' = \{x_1, x_2, x_4\}$ и $X \backslash X' = \{x_3, x_5, x_6\}$;
г) составьте матрицу инциденции и матрицу смежности.

3. Реберно-взвешенный граф задан списком отношений:

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
$(x_i; x_j)$	$(x_1; x_3)$	$(x_2; x_4)$	$(x_2; x_5)$	$(x_3; x_4)$	$(x_3; x_5)$	$(x_4; x_5)$
l_i	4	8	6	10	2	5

а) нарисуйте граф;
б) составьте матрицу весов.

4. Найдите число компонент связности графа (рис. 8.5).

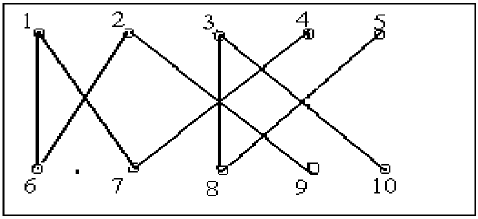


Рис. 8.5

5. Найдите цикломатические и хроматические числа (рис. 8.6). Изоморфны ли графы?

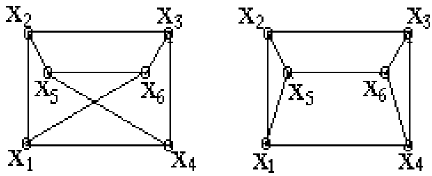


Рис. 8.6

6. Для четырех графов (рис. 8.7) найдите: дополнение, объединение графов а) и г), пересечение графов б) и г), композицию графов в) и г).

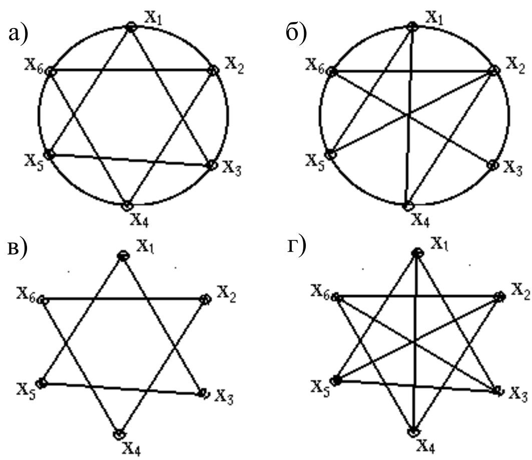


Рис. 8.7

7. Найдите основные числа графа (рис. 8.8) (n, m, k, δ, λ, γ, ρ, ε, φ, ϕ).

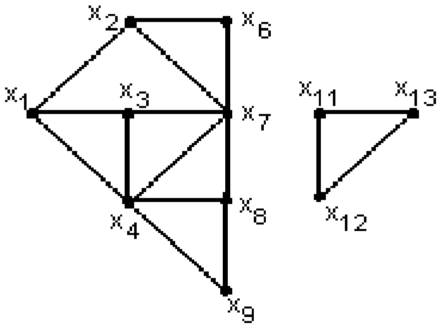


Рис. 8.8

Литература

Основная

1. Горбатов, В.А. Основы дискретной математики: учебное пособие / В.А. Горбатов. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Евстигнеев, В.А. Применение теории графов в программировании / В.А. Евстигнеев. – М.: Наука, 1985.
3. Иванов, Б.Н. Дискретная математика / Б.Н. Иванов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
4. Кузнецов, О.М. Дискретная математика для инженера / О.М. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
5. Лихтарников, Л.М. Математическая логика: курс лекций / Л.М. Лихтарников, В.М. Сукачева. – СПб.: Лань, 1998.
6. Никольская, И.Л. Знакомство с математической логикой / И.Л. Никольская. – М.: Флита, 1998.
7. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2000.
8. Пономарев, В.Ф. Дискретная математика для информатиков-экономистов: учебное пособие / В.Ф. Пономарев. – Калиниград: КГТУ и КИМБ, 2002.
9. Редькин, Н.П. Дискретная математика: курс лекций для студентов-механиков / Н.П. Редькин. – СПб.: Лань, 2003.
10. Сачков, В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. – М.: Наука, 1982.
11. Судоплатов, С.В. Элементы дискретной математики: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М, Изд-во НГТУ, 2002.
12. Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – Мир, 1977.
13. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – М.: Наука, 1986.

Дополнительная

1. Грей, П. Логика, алгебра и базы данных / П. Грей; пер. с англ. Х.И. Килова. – М.: Машиностроение, 1989.
2. Иванов, Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б.Н. Иванов. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
3. Кириллов, В.И. Логика / В.И. Кириллов, А.А. Старченко. – М.: Высшая школа, 1987.
4. Кук, Д. Компьютерная математика: пер. с англ. / Д. Кук, Г. Бейз. – М.: Наука, 1990.
5. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлиз, 2001.
6. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – Наука, 1984.
7. Непейвода, Н.Н. Прикладная логика: учебное пособие / Н.Н. Непейвода. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000.
8. Новиков, Ф.А. Дискретная математика / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2001.
9. Сачков, В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. – Наука, 1982.
10. Харари, Ф. Теория графов: пер. с англ. / Ф. Харари; под ред. Г.П. Гаврилова. – Мир, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПАРМОН Светлана Ивановна
БОХАН Сергей Гаврилович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
по выполнению практических работ
для студентов специальностей
1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 06.12.2011.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,91. Тираж 50. Заказ 388.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.