

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 3»

МАТЕМАТИКА

Лабораторные работы
для студентов строительных специальностей

В 4 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(076.5)

ББК 22.311

М 34

Составители:

*В.Ф. Бубнов, В.В. Веремеюк,
Е.А. Крушевский, А.А. Кузнецова*

Рецензенты:

В.И. Каскевич, А.Д. Корзников

М 34 Математика: лабораторные работы для студентов строительных специальностей: в 4 ч. / сост.: В.Ф. Бубнов, В.В. Веремеюк, Е.А. Крушевский, А.А. Кузнецова. – Минск: БНТУ, 2011. – Ч. 1. – 74 с.

ISBN 979-985-525-500-1 (Ч. 1).

Издание предназначено для студентов строительных специальностей и содержит необходимые теоретические сведения и указания к решению задач. Приведены примеры и варианты заданий.

Первая часть посвящена применению приближенных методов к решению классических задач – приближенное решение уравнений, приближенное вычисление определенного интеграла, численное интегрирование ОДУ, интерполяция и сплайн-интерполяция, МНК-сглаживание экспериментальных данных.

ISBN 979-985-525-500-1 (Ч. 1)

ISBN 979-985-525-501-8

© БНТУ, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Данный лабораторный практикум предназначен для ознакомления с методами приближенного решения некоторых математических задач. Такие методы имеют важное прикладное значение, т. к. весьма часто найти точное решение задачи невозможно в принципе (например, невозможно найти точное значение интеграла $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$)

или же для этого требуются неоправданно большие затраты времени. Методы приближенного решения называют **численными методами**.

В общих чертах, численный метод – это процедура (алгоритм), позволяющая построить последовательность чисел или функций $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (в зависимости от содержания задачи), которая имеет своим пределом при $n \rightarrow \infty$ точное решение \bar{x} . Такая последовательность называется приближающей. В принципе, каждый элемент приближающей последовательности можно считать приближенным решением. Оценка качества приближенного решения x_n производится с использованием понятия погрешности Δ_n .

Погрешность Δ_n есть мера отклонения приближенного решения x_n от точного решения \bar{x} поставленной задачи. Мера отклонения выбирается своя для каждой задачи. Например, если требуется найти приближенное значение определенного интеграла или корня уравнения $f(x) = 0$, то x_n и \bar{x} – это числа и $\Delta_n = |x_n - \bar{x}|$. Если же надо определить решение дифференциального уравнения на отрезке $[a; b]$, то x_n и \bar{x} – функции, заданные на $[a; b]$, и в этом случае обычно берут $\Delta_n = \max_{t \in [a; b]} |x_n(t) - \bar{x}(t)|$. Возможны и другие способы задания меры отклонения (см. лабораторную работу № 4). С использованием понятия погрешности можно сказать, что последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является приближающей последовательностью для точного решения, если погрешность $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

С понятием погрешности связано понятие точности приближенного решения. Говорят, что приближенное решение x_n найдено

с точностью до $\varepsilon > 0$, если погрешность $\Delta_n \leq \varepsilon$. Численный метод, кроме алгоритма построения приближающей последовательности, должен описывать методику оценки погрешности (или, что то же самое, точности вычисления) для каждого элемента этой последовательности. Вычисления следует прекратить, если для некоторого элемента x_n приближающей последовательности погрешность Δ_n будет меньше заданного заранее числа $\varepsilon > 0$.

Следует отметить, что применение численных методов является эффективным (особенно если требуется достижение высокой точности вычислений) лишь при использовании вычислительной техники. Это связано с тем, что такие методы не позволяют получать общих формул для решения задач и небольшие изменения в начальных данных требуют повторения всей процедуры построения приближающей последовательности.

При выполнении лабораторных работ студенты должны, прежде всего, изучить теоретический материал: математическую постановку задачи, методику построения приближенного решения и методику оценки погрешности. Для контроля усвоения этого материала в конце каждого параграфа имеются вопросы для самопроверки. После этого требуется выполнить конкретное задание по работе с применением вычислительной техники (компьютеров и соответствующих программ) использованием уже имеющихся программ (что, конечно, снимает трудности, связанные с вычислительными аспектами).

Лабораторная работа № 1

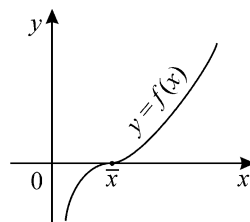
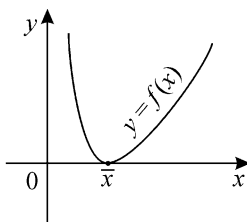
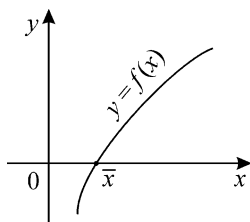
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1.1. Общие сведения

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

называется такое число \bar{x} , что $f(\bar{x}) = 0$. Корень \bar{x} уравнения (1.1) называется кратным, если $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$. Если же $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$, то корень называется простым. Простой корень представляет собой абсциссу точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox (рис. 1.1), а кратный корень – абсциссу точки касания этого графика и оси Ox (рис. 1.2 и 1.3).



Для некоторых классов функций $f(x)$ известны формулы, позволяющие точно определить корни уравнения (1.1) (например, все знают, как найти корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $\sin x - a = 0$ и т. д.). Однако во многих случаях таких формул не существует (в частности, известно, что не существует формул нахождения корней уравнения (1.1) в случае, когда $f(x)$ – многочлен степени выше 4). Такие задачи решают с использованием приближенных методов.

Применение любого из приближенных методов начинается с определения отрезка $[a; b]$, на котором имеется единственный корень уравнения (1.1). Такой отрезок называется **отрезком изоляции корня**. Возможная процедура нахождения отрезков изоляции описана в п. 1.2.

После того, как найден отрезок изоляции корня, проверяются условия применения выбранного метода и, если эти условия выполнены, строятся приближающие последовательности для искомого корня. Если же условия применения метода не выполнены, то следует либо уменьшить отрезок изоляции корня, либо воспользоваться другими методами.

В пп. 1.3 и 1.4 разбираются два метода приближенного решения уравнения (1.1), каждый из которых позволяет строить две приближающие последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, причем одна из них является монотонно неубывающей, а другая - монотонно невозрастающей. В этом случае, если $\varepsilon > 0$ - заданная точность для определения корня, то для нахождения приближенного значения x_0 точного корня \bar{x} с точностью до ε достаточно определить N членов приближающих последовательностей, где N находится из условия

$$|x_n - y_n| \leq 2\varepsilon \quad (1.2)$$

и положить

$$x_0 = \frac{x_N + y_N}{2}, \quad (1.3)$$

что гарантирует выполнение неравенства $\bar{x} \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

Действительно, т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, причем одна последовательность монотонно не возрастает, а другая монотонно не убывает, то корень \bar{x} обязательно лежит на отрезке $[x_N; y_N]$. С другой стороны, длина этого отрезка не превышает 2ε (условие (1.2)), и число x_0 есть середина данного отрезка (условие (1.3)). Таким образом, обязательно будет выполнено условие $|x_0 - \bar{x}| \leq \varepsilon$, т. е. погрешность в определении корня не превысит заданной точности вычислений.

1.2. Отрезки изоляции корней

Определить отрезки изоляции можно графическим методом. Для этого функцию $y = f(x)$ (левую часть уравнения (1.1)) представляют в виде разности $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ жела-

тельно выбирать так, чтобы можно было достаточно точно построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Очевидно, корни уравнения (1.1) являются абсциссами точек пересечения (или касания) этих графиков. Поэтому отрезки изоляции корней можно определить визуально по чертежу. Для аналитического контроля можно использовать следующую теорему.

Теорема 1. Если $y = f(x)$ – дифференцируемая функция на интервале $(a; b)$, а отрезок $[a; b]$ таков, что

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (1.4)$$

и $f'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a; b)$, то $[a; b]$ – отрезок изоляции корня уравнения (1.1).

Пример 1. Указать отрезки изоляции корней уравнения $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$.

Решение. Т.к. $x=0$ не является корнем уравнения, то оно эквивалентно уравнению $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} = 0$.

Положим $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$

и сделаем чертеж (рис. 1.4).

Визуально определяем, что отрезками изоляции корней являются отрезки $[-2; -1]$ и $[1; 2]$. Это легко проверить и с помощью указанной теоремы.

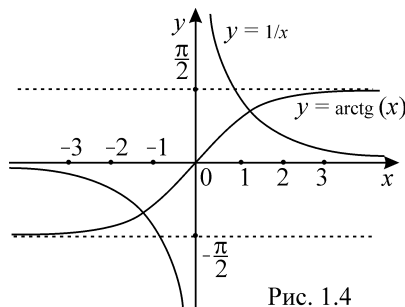


Рис. 1.4

Замечание. В приведенном примере можно было сразу взять $f_1(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = 1$, но в этом случае построить график функции $y = f_1(x)$ было бы сложнее.

Упражнение 1. Проверьте выполнение условий теоремы 1.

Упражнение 2. Можно ли в теореме 1 условие « $f'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a; b)$ » заменить на условие « $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при

любом $x \in (a; b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x) = 0$ »?

1.3. Метод половинного деления (бисекции)

Этот метод приближенного решения базируется на следующей теореме.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ – непрерывная на $[a; b]$ функция и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то на интервале $(a; b)$ имеется не менее одного корня уравнения (1.1).

Вообще говоря, найдя отрезок изоляции корня $[a; b]$, можно в качестве первого приближения точного значения корня \bar{x} взять середину этого отрезка $\frac{a+b}{2}$. Конечно, точность такого приближения будет невелика, а именно, $\frac{b-a}{2}$.

Смысл метода половинного деления (метод бисекции) состоит в уменьшении длины отрезка изоляции корня в 2 раза (а, значит, и увеличение точности в 2 раза). Дело в том, что если мы нашли отрезок изоляции корня $[a; b]$, то, разбив его пополам, мы получим 2 отрезка: $[a; \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}; b]$, причем только один из них (!) содержит корень (редкую удачную ситуацию, когда точное значение корня совпадает с серединой отрезка изоляции можно не рассматривать). Таким образом, проверив условия теоремы 2 для каждого из полученных отрезков, один из них (для которого это условие будет выполнено) мы примем за новый отрезок изоляции корня. Отметим, что, так как при каждом делении пополам длина нового отрезка изоляции корня (а, значит, и погрешность) будет уменьшаться в 2 раза, то процесс деления следует продолжать до достижения заданной точности вычислений.

Алгоритм построения приближающих последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ здесь такой:

1) находим отрезок $[a; b]$ изоляции корня и проверяем условия применения метода: $f(x) \in C[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2) задаем начальные приближения: $x_1 = a$, $y_1 = b$ и приступаем к процессу деления;

3) если элементы x_{n-1} и y_{n-1} определены ($n = 2, 3, \dots$), то полагаем $c = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$ и определяем элементы x_n и y_n по правилу:

если $f(c) = 0$, то $x_n = y_n = c$;

если $f(c) \cdot f(a) > 0$, то $x_n = c$, $y_n = y_{n-1}$;

если $f(c) \cdot f(a) < 0$, то $x_n = x_{n-1}$, $y_n = c$.

Остановка вычислений производится при выполнении условия (1.2), приближенное значение корня определяется по формуле (1.3).

Достоинство метода: простота реализации, что позволяет самостоятельно и быстро запрограммировать алгоритм при использовании вычислительной техники.

Недостаток метода: при высокой заданной точности требуется находить достаточно большое число элементов приближающих последовательностей (хотя это несущественно при использовании компьютера).

Упражнение 1. Сделайте обоснование теоремы 2.

Упражнение 2. Докажите, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будут приближающими, причем первая из них – монотонно убывающая, а вторая – невозрастающая.

Упражнение 3. Покажите, что для данного метода неравенство (1.2) будет выполнено, если $n = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, где квадратная скобка означает взятие целой части числа.

Упражнение 4. Сделайте иллюстрацию для метода половинного деления.

Упражнение 5. Почему данный метод нельзя использовать в ситуации, указанной на рис. 1.2?

Пример 2. Найти все корни уравнения $x^3 + 8x + 10 = 0$ методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Представляя заданное уравнение в виде $x^3 = -8x - 10$, и построив графики функций (сделайте это самостоятельно!) $y = x^3$ и $y = -8x - 10$, убеждаемся, что уравнение имеет только один корень, и он находится на отрезке $[-2; -1]$. Итак, известен отрезок изоляции корня $[-2; -1]$ и задана точность $\varepsilon = 0,01$. Рассматриваемое уравнение имеет вид (1.1) с левой частью $f(x) = x^3 + 8x + 10$. Найдём значения этой функции на концах отрезка:

$$f(a) = f(-2) = (-2)^3 + 8 \cdot (-2) + 10 = -14 < 0,$$

$$f(b) = f(-1) = (-1)^3 + 8 \cdot (-1) + 10 = 1 > 0.$$

Примем $x_1 = -2$, $y_1 = -1$. Проверим выполнение неравенства (1.4):

$$f(x_1) \cdot f(y_1) = f(-2) \cdot f(-1) = -14 \cdot 1 = -14 < 0 \text{ — условие выполняется, значит можно применить метод половинного деления.}$$

Найдём середину отрезка $[-2; -1]$ и вычислим значение функции в полученной точке:

$$c = \frac{-2 + (-1)}{2} = -1,5, \quad f(-1,5) = -5,375 < 0.$$

Так как значения $f(-2)$ и $f(-1,5)$ имеют одинаковые знаки, а $f(-1,5)$ и $f(-1)$ — разные, то, согласно алгоритму метода половинного деления полагаем: $x_2 = -1,5$, $y_2 = y_1 = -1$. Т. е. отрезок $[-1,5; -1]$ примем за новый отрезок изоляции корня, и мы опять находим середину отрезка и вычисляем значение функции в этой точке:

$$c = \frac{-1,5 - 1}{2} = -1,25, \quad f(-1,25) = -1,953125 < 0, \quad x_3 = -1,25,$$

$y_3 = y_2 = -1$ и $[-1,25; -1]$ — новый отрезок изоляции корня. Так как $|-1,25 - (-1)| = 0,25 > 2\varepsilon = 0,02$, то условие (1.2) не выполнено, и мы продолжим вычисления.

$$c = \frac{-1,25 - 1}{2} = -1,125, \quad f(-1,125) \approx -0,4238 < 0, \quad x_4 = -1,125,$$

$$y_4 = y_3 = -1, \quad [-1,125; -1], \quad |-1,125 - (-1)| = 0,125 > 2\varepsilon;$$

$$c = \frac{-1,125 - 1}{2} = -1,0625, \quad f(-1,0625) \approx 0,30005 > 0, \quad x_5 = x_4 = -1,25,$$

$$y_5 = -1,0625, \quad [-1,125; -1,0625], \quad |-1,0625 - (-1,125)| = 0,0625 > 2\varepsilon;$$

$$c = \frac{-1,125 - 1,0625}{2} = -1,09375, \quad f(-1,09375) \approx -0,0584 < 0,$$

$$x_6 = -1,09375, \quad y_6 = y_5 = -1,0625, \quad [-1,09375; -1,0625],$$

$$|-1,0625 - (-1,09375)| = 0,03125 > 2\varepsilon;$$

$$c = \frac{-1,09375 - 1,0625}{2} \approx -1,0781, \quad f(-1,0781) \approx 0,1218 > 0,$$

$$x_7 = x_6 = -1,09375, \quad y_7 = -1,0781, \quad [-1,09375; -1,0781],$$

$$|-1,0781 - (-1,09375)| \approx 0,0156 \leq 2\varepsilon.$$

Итак, условие (1.2) выполнено, и мы по формуле (1.3) полагаем

$$x_0 \approx \frac{x_7 + y_7}{2} = \frac{-1,09375 - 1,0781}{2} = -1,085925.$$

Применив правила округления, можем считать, что приближенное значение корня уравнения $x_0 \approx -1,09$ с точностью до 0,01.

Отметим, что согласно упражнению 3 необходимое для достижения заданной точности значение числа элементов приближающих последовательностей равно $n = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 = \left[\log_2 100 \right] + 1 = 6 + 1 = 7$.

Это же мы получили в процессе вычислений!

1.4. Комбинированный метод хорд и касательных

Комбинированный метод включает в себя одновременное применение двух независимых методов приближенного решения уравнений: метода касательных (метод Ньютона) и метода хорд, каждый из которых дает алгоритм построения приближающих последовательностей, сужающих отрезок изоляции корня.

В методе хорд за приближенное значение x_0 корня принимаем абсциссу точки пересечения хорды AB с осью Ox (см. рис. 1.5), при этом

$$x_0 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (1.5)$$

а отрезок изоляции корня (в данном случае) сужается в $[\chi_0; b]$. При других вариантах расположения графика функции отрезок изоляции корня может быть другим (а именно, $[a; \chi_0]$).

В методе касательных за приближенное значение χ_0 корня принимаем абсциссу точки пересечения касательной, проведенной к графику функции в точке B с осью Ox (см. рис. 1.6), при этом

$$\chi_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad (1.6)$$

а отрезок изоляции корня (в данном случае) сужается в $[a; \chi_0]$. При других вариантах расположения графика функции касательную следует проводить в точке A , при этом $\chi_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, а отрезок изоляции корня может быть $[\chi_0; b]$. Вообще, касательную проводят в том конце отрезка изоляции корня, где значение функции и ее второй производной имеют одинаковые знаки ($f(c) \cdot f''(c) > 0$, где c – это либо a , либо b).

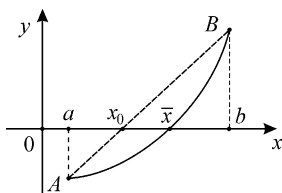


Рис. 1.5

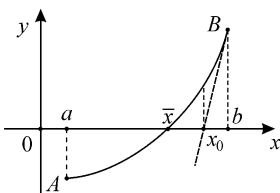


Рис. 1.6

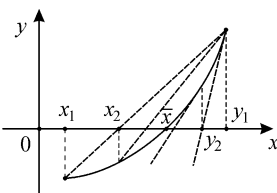


Рис. 1.7

Смысл одновременного применения обоих методов виден на рис. 1.7. При этом отрезок изоляции корня сужается с обеих сторон, что гарантирует высокую эффективность метода.

При этом, если $\{\chi_n\}$ – приближающая последовательность, построенная по методу хорд, а $\{y_n\}$ – по методу касательных, то одна из них будет монотонно возрастающей, а вторая – монотонно убывающей. При других вариантах расположения графика функции последовательности могут меняться местами.

Точный алгоритм построения этих последовательностей следующий:

1) находим отрезок $[a; b]$ изоляции корня и **проверяем условия применимости** комбинированного метода:

а) непрерывность $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ на $[a; b]$;

б) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

в) $f'(x)$ и $f''(x)$ не обращаются в нуль на $[a; b]$.

2) задаем начальные приближения (x_1 – начальное приближение для метода хорд, y_1 – начальное приближение для метода касательных):

а) если выполнено условие $f(b) \cdot f''(b) > 0$, то $x_1 = a$, $y_1 = b$;

б) в противном случае $x_1 = b$, $y_1 = a$.

3) по формулам (1.5) и (1.6) находим другие элементы приближающих последовательностей. А именно:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(y_n - x_n) \cdot f(x_n)}{f(y_n) - f(x_n)}, \quad y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}.$$

Остановка вычислений производится при выполнении условия (1.2), приближенное значение корня определяется по формуле (1.3).

Достоинство метода: быстрое получение результата при заданной точности.

Недостаток метода: относительная сложность при проверке всех необходимых для применения метода условий.

Упражнение 6. Докажите: если $f(b) \cdot f''(b) > 0$, то последовательность $\{y_n\}$ будет монотонно убывающей, а $\{x_n\}$ – монотонно возрастающей.

Упражнение 7. Докажите: если $f(b) \cdot f''(b) < 0$, то последовательность $\{x_n\}$ будет монотонно убывающей, а $\{y_n\}$ – монотонно возрастающей.

Упражнение 8. Сделайте иллюстрации комбинированного метода для случаев:

1) $f(b) < 0, f''(x) < 0$ на $[a; b]$;

2) $f(b) < 0, f''(x) > 0$ на $[a; b]$;

3) $f(b) > 0, f''(x) < 0$ на $[a; b]$.

Упражнение 9. Почему комбинированный метод нельзя использовать в случаях, указанных на рис. 1.2 и 1.3?

Пример 3. Решить уравнение $x^3 + 8x + 10 = 0$ методом хорд и касательных с точностью 0,01, если известен отрезок изоляции корня $[-2; -1]$.

Решение. Как мы знаем из примера 2, это уравнение имеет только один корень, и он находится на отрезке $[-2; -1]$. Вычислим значения функции $f(x) = x^3 + 8x + 10$ на концах отрезка:

$$f(a) = f(-2) = (-2)^3 + 8 \cdot (-2) + 10 = -14 < 0,$$

$$f(b) = f(-1) = (-1)^3 + 8 \cdot (-1) + 10 = 1 > 0.$$

1. Проверим выполнение условия б): $f(a) \cdot f(b) = -14 \cdot 1 < 0$ – условие выполняется.
2. Найдем производные: $f'(x) = (x^3 + 8x + 10)' = 3x^2 + 8$ и $f''(x) = (3x^2 + 8)' = 6x$.
3. На отрезке $[-2; -1]$ производные $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$, т. е. сохраняют знак, следовательно, условие в) выполняется.
4. Т. к. $f''(-2) < 0$ и $f(-2) < 0$, то $x_1 = -1, y_1 = -2$.
5. Найдем следующие приближения корня:

а) по методу касательных:

$$y_2 = y_1 - \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{-14}{3 \cdot (-2)^2 + 8} = -1,3;$$

б) по методу хорд:

$$x_2 = x_1 - \frac{(y_1 - x_1) \cdot f(x_1)}{f(y_1) - f(x_1)} = -1 - \frac{(-2+1) \cdot f(-1)}{f(-2) - f(-1)} = -1 - \frac{1}{14+1} \approx -1,0667 .$$

6. Проверим выполнение условия (1.2):

$$|y_2 - x_2| = |-1,3 - (-1,0667)| \approx 0,2333 > 2\varepsilon = 0,02 \text{ – условие не выполняется, значит нужно продолжить вычисления.}$$

7. Новый отрезок изоляции корня имеет вид: $[-1,3; -1,0667]$.

8. Продолжим сужение отрезка изоляции корня. Для этого найдем значения функции на концах суженного отрезка:

$$f(-1,3) = -2,197 - 10,4 + 10 = -2,597 ,$$

$$f(-1,0667) = -1,2137 - 8,5336 + 10 = 0,2527 .$$

9. Найдем новые значения концов отрезка изоляции корня:

$$y_3 = y_2 - \frac{f(y_2)}{f'(y_2)} = -1,3 - \frac{-2,597}{13,07} \approx -1,1013 ,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(y_2 - x_2) \cdot f(x_2)}{f(y_2) - f(x_2)} = -1,0667 - \frac{(-1,3+1,0667) \cdot (-0,2527)}{-2,5970 - 0,2527} \approx$$

$$\approx -1,0874 . \text{ Проверим выполнение условия:}$$

$$|y_3 - x_3| = |-1,0874 + 1,1013| = 0,0139 < 0,02 \text{ – условие (1.2)}$$

выполняется, значит, цель достигнута.

10. Найдем приближенное значение корня:

$$x_0 = \frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{-1,1013 - 1,0874}{2} \approx -1,0944 .$$

11. По правилам приближения примем $x_0 = -1,09$.

1.5. Сравнительная характеристика методов

Комбинированный метод хорд и касательных имеет более узкую область применения, чем метод половинного деления. Действительно, условия применения метода хорд и касательных требуют, чтобы функция $f(x)$ в уравнении (1.1) имела бы вторую производную; кроме того, этот метод не дает результата при наличии кратного корня (см. рис. 1.2 и 1.3). Метод половинного деления позволяет найти кратный корень и в ситуации, изображенной на рис. 1.3.

С другой стороны, как правило, метод половинного деления имеет более медленную сходимость (т. е. необходимо находить большее количество членов приближающих последовательностей), чем метод хорд и касательных при одной и той же точности (сравните примеры 1 и 2). Хотя при использовании вычислительной техники это обстоятельство не является существенным.

1.6. Метод итераций.

Если каким-либо способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения (1.1), то уточнение корня можно осуществить методом последовательных приближений или методом итераций. Для этого уравнение (1.1) представляют в виде

$$x = \varphi(x) \quad (1.7)$$

Это можно сделать различными способами, например, путем введением параметра $x = x + c \cdot f(x)$, где c – произвольная постоянная.

Пусть в результате подстановки x_0 в правую часть уравнения (1.7) мы получили $x_1 = \varphi(x_0)$. Далее находим $x_2 = \varphi(x_1), \dots$,

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (1.8)$$

и так далее. Таким образом, мы получили последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которая при выполнении определенных условий, может сходиться к точному значению \bar{x} корня уравнения (1.1). Рекуррентный процесс последовательного вычисления чисел элементов последовательности $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) по формуле (1.8) называется методом последовательных приближений или методом итераций.

Итерационный процесс сходится (т.е. существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ и его значение является корнем уравнения), если на некотором отрезке изоляции корня $[a; b]$, который также содержит все элементы приближающей последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, выполнено условие

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (1.9)$$

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства $\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ (это условие в случае использования метода итераций заменяет условие (1.2), применявшееся для методов бисекции и хорд-касательных).

Замечание. Надо отметить, что совпадение двух последовательных приближений, найденных методом итераций, x_n и x_{n-1} с заданной точностью ε (т. е. $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$), вовсе **не гарантирует** выполнение приближенного равенства $\bar{x} \approx x_n$ с той же точностью. Легко показать, что если q близка к 1, то величина $|\bar{x} - x_n|$ может оказаться большой, хотя $|x_n - x_{n-1}|$ весьма мала.

Пример 4. Методом итераций найти меньший положительный корень уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет три действительных корня, лежащих на отрезках $[-3; -2]$, $[0; 1]$, $[2; 3]$. Найдем меньший положительный корень. Он принадлежит отрезку $[0; 1]$. При помощи метода половинного деления сузим отрезок изоляции корня до $[0; 0,5]$. Данное уравнение приведем к виду (1.8) $x = \frac{x^3 + 1}{5}$. Так как

$\varphi'(x) = \left(\frac{x^3 + 1}{5}\right)' = \frac{3}{5}x^2 < 1$ на отрезке $[0; 0,5]$, то итерационный процесс будет сходиться (при этом $q = 0,15$ (очень хорошее значение! Объясните – почему?), $q/(1-q) \approx 0,18$,). Взяв в качестве начального приближения середину отрезка, т. е. $0,25$, вычисление последующих приближений проведем по формуле (1.8). Результаты этих вычислений представлены в таблице, из которой видно, что искомым корень $x_0 = 0,20164$.

Номер итерации	x_n	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$	$0,18 \cdot x_{n+1} - x_n $
1	0,25	0,20313	0,0084366
2	0,20313	0,20168	0,000261
3	0,20168	0,20164	$7,2 \cdot 10^{-6}$
4	0,20164	0,20164	0

Замечание 1. Вычисления можно было бы остановить на 3-ем шаге, приняв в качестве приближенного значения корня $0,5 \cdot (0,20168 + 0,20166) = 0,20167$.

Замечание 2. При нахождении двух других корней исходного уравнения методом последовательных приближений уже нельзя пользоваться формулой $x = \frac{x^3 + 1}{5}$, так как условие (1.9) перестает выполняться. В этом случае данное уравнение следует представить в другом виде. Например, для отрезка [2; 3] это можно сделать так:

$$x = x - \frac{x^3 - 5x + 1}{15}.$$

Задания

Задание 1. Найти число корней уравнения. Методом бисекции найти меньший корень уравнения с точностью до 0,001.

Варианты:

1. $x - \sin x = 0,25$
2. $\operatorname{tg}(0,58x + 0,1) = x^2$
3. $\sqrt{x} = \cos(0,387x)$
4. $\operatorname{tg}(0,4x + 0,4) = x^2$
5. $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$
6. $\operatorname{tg}(0,5x + 0,2) = x^2$
7. $3x - \cos x - 1 = 0$
8. $x + \lg x = 0,5$
9. $\operatorname{tg}(0,5x + 0,1) = x^2$
10. $x^2 + 4\sin x = 0$
11. $\operatorname{ctg} 1,05x - x^2 = 0$
12. $\operatorname{tg}(0,4x + 0,3) = x^2$
13. $x \lg x - 1,2 = 0$
14. $1,8x^2 - \sin 10x = 0$
15. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{4} = 0$
16. $\operatorname{tg}(0,3x + 0,4) = x^2$
17. $x^2 + 6\sin x = 0$
18. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{3} = 0$
19. $\operatorname{tg}(0,4x + 0,2) = x^2$
20. $x^2 + 8\sin x = 0$
21. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{2} = 0$
22. $2x - \lg x - 7 = 0$
23. $\operatorname{tg}(0,44x + 0,3) = x^2$
24. $3x - \cos x = 3$
25. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{10} = 0$
26. $x^2 + 3\sin x = 0$
27. $\operatorname{tg}(0,3x - 0,4) = x^2$
28. $x + \lg x = 1,5$
29. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0$
30. $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$

Задание 2. Найти число корней уравнения. Методом хорд-касательных найти больший корень уравнения с точностью до 0,001.

Варианты:

1. $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
2. $x^3 - 6x - 8 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$
4. $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x = 1,5$
5. $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$
6. $x^3 + x - 5 = 0$

- | | | | |
|-----|---------------------------------|-----|------------------------------|
| 7. | $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$ | 8. | $x^3 + 3x + 1 = 0$ |
| 9. | $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$ | 10. | $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$ |
| 11. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$ | 12. | $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ |
| 13. | $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$ | 14. | $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ |
| 15. | $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$ | 16. | $x^3 + 4x - 6 = 0$ |
| 17. | $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$ | 18. | $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$ |
| 19. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x + 1,2 = 0$ | 20. | $x^3 - 2x + 4 = 0$ |
| 21. | $x^3 + 4x - 6 = 0$ | 22. | $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ |
| 23. | $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$ | 24. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x = 1$ |
| 25. | $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$ | 26. | $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x = -2$ |
| 27. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$ | 28. | $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x = 1,6$ |
| 29. | $x^3 + x - 3 = 0$ | 30. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x = -1,4$ |

Задание 3. Найти число корней уравнения. Методом итераций найти один из корней уравнения с точностью до 0,001 (две задачи).

Варианты:

- | | | |
|----|-------------------------------|------------------------------------|
| 1. | 1) $\ln x + (x - 0,5)^3 = 0$ | 2) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ |
| 2. | 1) $x \cdot 2^x = 1$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$ |
| 3. | 1) $\sqrt{x+2} = \frac{1}{x}$ | 2) $x^3 + 2x + 1 = 0$ |
| 4. | 1) $x - \cos x = 0$ | 2) $x^3 + 3x + 2 = 0$ |
| 5. | 1) $3x - \cos x + 1,5 = 0$ | 2) $x^3 + 2x + 1 = 0$ |
| 6. | 1) $x + \ln x = 0,5$ | 2) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$ |

- | | | |
|-----|-------------------------------|------------------------------------|
| 7. | 1) $2 - x = \ln x$ | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$ |
| 8. | 1) $(x-1)^2 = 0,5e^x$ | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$ |
| 9. | 1) $(2-x)e^x = 0,5$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$ |
| 10. | 1) $2,2x - 2^x = 0$ | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$ |
| 11. | 1) $x^2 - 4\cos x = 0$ | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1 = 0$ |
| 12. | 1) $2x - \lg x = 7$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ |
| 13. | 1) $5x - 7\ln x = 7$ | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$ |
| 14. | 1) $3x - e^x = 0$ | 2) $x^3 + 2x + 4 = 0$ |
| 15. | 1) $x(x+1)^2 = 1$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$ |
| 16. | 1) $x = (x+1)^3$ | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$ |
| 17. | 1) $x^2 = \sin x$ | 2) $x^3 + 4x - 6 = 1$ |
| 18. | 1) $x^3 = \cos x$ | 2) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$ |
| 19. | 1) $x = \sqrt{\lg(x+2)}$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$ |
| 20. | 1) $x^2 = \ln(x+1)$ | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$ |
| 21. | 1) $2x + \lg x = -0,5$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ |
| 22. | 1) $2x + \cos x = 0,5$ | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$ |
| 23. | 1) $\sin 0,5x + 1 = x^2$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$ |
| 24. | 1) $0,5x + \lg(x-1) = 0,5$ | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$ |
| 25. | 1) $\sin(0,5 + x) = 2x - 0,5$ | 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$ |
| 26. | 1) $\lg(2 + x) + 2x = 3$ | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 1$ |
| 27. | 1) $\lg(1 + 2x) = 2 - x$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$ |
| 28. | 1) $2\sin(x - 0,6) = 1,5 - x$ | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$ |
| 29. | 1) $x + \lg(1 + x) = 1,5$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$ |
| 30. | 1) $x + \cos(x-1) = 1$ | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0$ |

Лабораторная работа № 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Общие сведения

Как известно, если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то для вычисления определенного интеграла может быть использована формула Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Однако во многих задачах первообразную $F(x)$ найти невозможно (так называемые, неберущиеся интегралы) или процедура ее нахождения является слишком сложной. В частности, теория дает алгоритм нахождения первообразной, если подынтегральная функция $f(x)$ есть рациональная дробь. Но в случае, когда многочлен в знаменателе этой рациональной дроби имеет большую степень, данный алгоритм крайне сложно реализовать.

Вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница может быть затруднительным или даже практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично (как результат измерений в процессе опытов), и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому, важное значение имеют приближенные (численные) методы вычисления определенного интеграла.

Обычный прием численного интегрирования состоит в том, что данную подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют **аппроксимирующей (приближающей)** функцией $y(x)$ простого вида, а затем приближенно полагают

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b y(x) dx, \quad (2.1)$$

причем функция $y(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл справа в (2.1) можно было вычислить непосредственно.

2.2. Формула прямоугольников

Самая простая формула численного интегрирования – **формула прямоугольников**. В этом случае аппроксимирующая функция $y(x)$ выбирается кусочно-постоянной: отрезок интегрирования разбивается на n отрезков одинаковой длины точками (узлами)

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

где $x_i = x_{i-1} + h$, $h = \frac{b-a}{n}$ (узлы x_i являются **равноотстоящими**, а число h называется **шагом вычислений**), и на каждом полуинтервале $[x_{i-1}; x_i)$ (либо $(x_{i-1}; x_i]$) значение приближающей функции $y(x)$ полагают постоянным $y(x) \equiv f(\xi_i)$, где ξ_i – фиксированная точка из отрезка $[x_{i-1}; x_i]$. Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) dx = f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)h,$$

и мы получаем

$$\int_a^b y(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = h \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)).$$

Заметим, что, так как приближающая функция зависит от количества отрезков разбиения n , то и приближенное значение интеграла также будет зависеть от n . Таким образом, можно записать формулу прямоугольников в следующей форме:

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad (2.2)$$

Если подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования ($f(x) \in C[a; b]$), то числа I_n (при любом выборе местоположения точек ξ_i) образуют приближающую последовательность для точного значения интеграла, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

Обычно точки ξ_j выбирают по *определенному правилу*. Например, в качестве ξ_j можно брать левые

концы отрезков $[x_{j-1}; x_j]$ (в этом случае получаем **формулу левых прямоугольников**) или правые концы этих отрезков (**формула правых прямоугольников**) или середины отрезков $\xi_j = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$

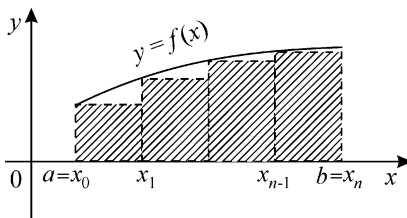


Рис. 2.1

(**формула средних прямоугольников**). В частности, формулу левых прямоугольников можно записать так: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$.

Ее геометрическая интерпретация приведена на рис. 2.1–2.3.

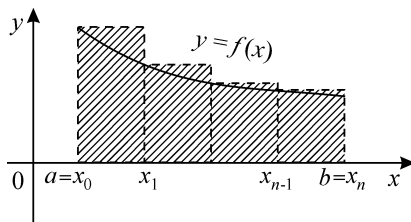


Рис. 2.2

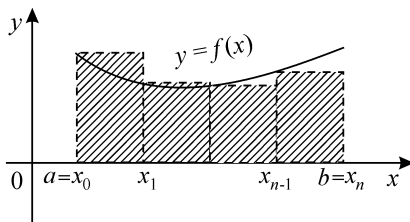


Рис. 2.3

Площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = x_{j-1}$ и $x = x_j$, заменяется на площадь заштрихованных прямоугольников. Из рисунков видно, что для возрастающей функции при любом n значения I_n всегда меньше искомого интеграла, для убывающей – больше.

Упражнение 1. Обоснуйте равенство 2.3.

Упражнение 2. Запишите формулы правых и средних прямоугольников и дайте их геометрическую интерпретацию.

2.2. Формула трапеций и формула Симпсона

Из предельного соотношения (2.3) следует, что теоретически при больших n погрешность в формуле прямоугольников (2.2) будет маленькой. Но в большинстве задач для достижения требуемой точности $\varepsilon > 0$ число разбиений n отрезка $[a, b]$ придется выбирать очень большим. Это может повлечь за собой появление ошибки, связанной с накоплением ошибок округления (если просуммировать 1000 слагаемых, каждое из которых имеет ошибку округления 10^{-6} , то суммарная ошибка может составить величину порядка 10^{-3} , т. е. хотя каждое слагаемое будет иметь только 5 верных знаков после запятой, однако сумма будет иметь только 2 верных знака после запятой). В связи с этим на практике используются более точные формулы: трапеций и Симпсона.

Для формулы трапеций аппроксимирующая функция $y(x)$ выбирается кусочно-линейной: отрезок интегрирования разбивается (как это было указано в п. 2.1) на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, и на

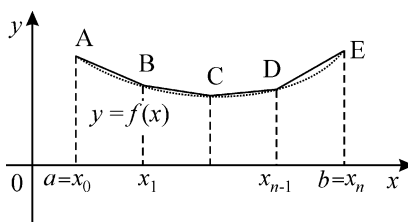


Рис. 2.4

каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $y(x)$ есть линейная функция, график которой соединяет точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$, как это указано на рис. 2.4.

Тогда $\int_a^b y(x) dx$ есть сумма площадей трапеций S_i , $i = \overline{1, n}$, ограниченных осью Ox , прямыми $x = x_j$, $j = \overline{0, n}$ и графиком аппроксимирующей функции $y = f(x)$ (на рис. 2.4 это ломаная ABCDE). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx &= \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot h = \\ &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

Таким образом, **формула трапеций** имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n, \text{ где}$$

$$T_n = \frac{b-a}{2n} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \quad (2.4)$$

Сравнивая рис. 2.4 и рисунки для формулы прямоугольников, можно ожидать, что при одном и том же n формула (2.4) дает меньшую погрешность, чем формула (2.2).

Еще более точной является **формула Симпсона**. Если в методе трапеций используется приближение подынтегральной функции кусочно-линейной функцией, то в формуле Симпсона используется параболы в качестве аппроксимирующих функций (поэтому его еще называют **методом парабол**).

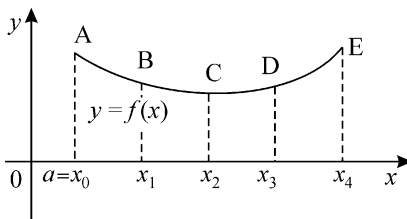


Рис. 2.5

Рассмотрим принцип построения аппроксимации в методе Симпсона по сравнению с методом трапеций (см. рис. 2.5).

Как известно, через любые 3 точки на плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную параболу (если точки лежат на одной прямой, то параболка вырождается в эту прямую). Таким образом, нам следует сначала провести параболу (то есть подобрать коэффициенты квадратичной функции $y = x^2 + px + q$) через точки A, B, C, затем через точки C, D, E и так далее. На рис. 2.5 сами параболы не нарисованы, потому как они будут располагаться очень близко к точкам графика подынтегральной функции $y = f(x)$, чего нельзя сказать про рис. 2.4, где заметна явная разница между графиками подынтегральной и аппроксимирующей кусочно-линейной функции. Таким образом, для применения метода Симпсона отрезок интегрирования следует всегда **разбивать на четное число частей**.

Можно вычислить $\int_{x_0}^{x_2} y(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$ (проверьте!),

$\int_{x_2}^{x_4} y(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$ и т. д. Таким образом,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})). \quad (2.5)$$

Тогда получим формулу Симпсона: $\int_a^b f(x) dx \approx P_n$, где

$$P_n \approx \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)), \quad (2.6)$$

причем n – четное.

Упражнение 1. Записать, как будет определяться функция $y(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для случая формулы трапеций.

Упражнение 2. Записать, как будет определяться функция $y(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ для случая формулы Симпсона.

Упражнение 3. Обосновать равенство (2.5).

Упражнение 4. Получите из (2.5) формулу (2.6).

Упражнение 5. Докажите, что если $f(x) \in C[a, b]$, то последовательность $\{T_n\}$ будет приближающей для точного значения интеграла.

Упражнение 6. Докажите, что если $f(x) \in C^1[a, b]$, то последовательность $\{P_n\}$ будет приближающей для точного значения интеграла.

2.3. Оценка погрешности

Итак, последовательности чисел $\{I_n\}$, $\{T_n\}$ и $\{P_n\}$, вычисленные по формулам (2.2), (2.4) и (2.6) соответственно, являются приближающими для точного значения интеграла $\int_a^b f(x) dx$, т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \int_a^b f(x) dx$. Для оценки погрешностей Δ_n

членов этих последовательностей можно использовать два способа.

Аналитическая оценка погрешностей. Известны следующие оценки погрешностей:

для формулы прямоугольников $\Delta_n \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$;

для формулы трапеций $\Delta_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$;

для формулы Симпсона $\Delta_n \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Используя эти оценки, можно найти минимально необходимое разбиение отрезка $[a, b]$, при котором соответствующий элемент приближающей последовательности будет иметь погрешность, не превышающую заданной заранее точности $\varepsilon > 0$.

Например, требуется найти минимальное n , при которой приближенное значение T_n интеграла $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$, вычисленное по

формуле трапеций, будет иметь погрешность, не превышающую $\varepsilon = 10^{-4}$. Находим $\max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0, 1]} \frac{1}{4(1+x)^{3/2}} = \frac{1}{4}$ и решаем нера-

венство $\frac{1}{12n^2} \cdot \frac{1}{4} \leq 10^{-4}$, отсюда $n^2 \geq \frac{10^4}{48} \approx 188$ и $n \geq 14$. Следова-

тельно, для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$ при использовании формулы трапеций надо разбить отрезок $[0; 1]$ на 14 частей и воспользоваться формулой (2.4).

Упражнение 1. Определите такое n для данного интеграла для случая формул прямоугольников и Симпсона.

Оценка погрешностей по правилу Рунге. Аналитическая оценка погрешностей часто бывает затруднительной, т. к. возникают проблемы с нахождением максимума модуля нужной производной подынтегральной функции. В связи с этим на практике используют

оценку погрешностей по правилу Рунге (которое, вообще говоря, базируется на указанных выше аналитических оценках).

Правило Рунге состоит в следующем. Если $\{J_n\}$ – приближающая последовательность для точного значения интеграла, вычисленная по одной из формул: (2.2), (2.4) или (2.6), то погрешность Δ_{2n} элемента J_{2n} оценивается по формуле

$$\Delta_{2n} \approx \frac{|J_{2n} - J_n|}{\lambda^m - 1}, \quad (2.7)$$

где J_n и J_{2n} – элементы последовательности $\{J_n\}$, вычисленные для разбиения отрезка интегрирования соответственно на n и $2n$ частей, а параметры λ и m определяются из таблицы.

Номер формулы	(2.2)	(2.4)	(2.6)
λ	3	3	2
m	2	2	4

Если $\varepsilon > 0$ – заданная заранее точность вычислений, то начальное число разбиений отрезка интегрирования рекомендуется выбирать, исходя из неравенства $n_0 \geq \sqrt[m]{1/\varepsilon}$. Затем вычисляются элементы приближающей последовательности $J_{n_0}, J_{2n_0}, J_{4n_0}$ до тех пор, пока погрешность, определенная по формуле (2.7), не будет меньше ε .

Следует отметить, что использование правила Рунге увеличивает количество необходимых вычислений по сравнению с тем, если оценивать погрешность аналитически. Поэтому оно эффективно только в случае применения вычислительной техники.

Задания

Задание 1. Вычислить интеграл по формуле трапеций с точностью до 0,001, определив число разбиений n , используя аналитическую оценку погрешности. Найти точное значение интеграла (по формуле Ньютона-Лейбница) и указать абсолютную погрешность вычислений.

Задание 2. Вычислить интеграл, используя формулу Симпсона при $n = 4$ и при $n = 8$. Оценить погрешность результата по правилу Рунге. Указать границы интервала, в котором находится точное значение интеграла.

Варианты:

1. 1) $\int_{0,8}^{3,2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

2) $\int_{1,2}^2 \frac{\lg(x+2)}{x} dx$

2. 1) $\int_{1,2}^{5,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$

2) $\int_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x dx$

3. 1) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$

2) $\int_{0,2}^1 \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2+1} dx$

4. 1) $\int_{0,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1} dx$

5. 1) $\int_{0,8}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

2) $\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x} \cos(x^2) dx$

6. 1) $\int_{0,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$

2) $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$

7. 1) $\int_{1,4}^{4,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

2) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$

8. 1) $\int_{1,2}^{4,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,5}}$

2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+3} dx$

9. 1) $\int_{0,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

2) $\int_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin x dx$

10. 1) $\int_{0,6}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ 2) $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\operatorname{tg}(x^2+0,5)}{1+2x^2} dx$
11. 1) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 2) $\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1} dx$
12. 1) $\int_{0,5}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 2) $\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1} \cos(x^2) dx$
13. 1) $\int_{1,2}^{5,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$ 2) $\int_{1,4}^3 x^2 \lg x dx$
14. 1) $\int_{1,4}^{4,4} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ 2) $\int_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1} dx$
15. 1) $\int_{0,8}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$
16. 1) $\int_{1,6}^{4,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ 2) $\int_{0,8}^{1,6} (x^2+1) \sin(x-0,5) dx$
17. 1) $\int_{0,6}^{3,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$ 2) $\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x dx$
18. 1) $\int_{1,2}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$ 2) $\int_{1,2}^2 \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$
19. 1) $\int_{1,4}^4 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$ 2) $\int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1} dx$
20. 1) $\int_{3,2}^8 \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$ 2) $\int_{0,5}^{1,2} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x+1} dx$
21. 1) $\int_{0,8}^{3,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$ 2) $\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$
22. 1) $\int_{1,2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$ 2) $\int_{0,2}^1 (x+1) \cos(x^2) dx$
23. 1) $\int_{2,1}^{7,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 2) $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2} dx$

24. 1) $\int_{1,3}^5 \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$ 2) $\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1} \lg(x+3) dx$
25. 1) $\int_{0,6}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$ 2) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1} dx$
26. 1) $\int_{1,3}^{4,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$ 2) $\int_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x}+1) \operatorname{tg} 2x dx$
27. 1) $\int_{1,4}^{5,2} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$ 2) $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$
28. 1) $\int_{0,15}^{2,15} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,6}}$ 2) $\int_{1,2}^{2,8} (\frac{x}{2}+1) \sin \frac{x}{2} dx$
29. 1) $\int_{0,1}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 2) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$
30. 1) $\int_{0,3}^{4,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,3}}$ 2) $\int_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2} \lg(\frac{x^2}{2}) dx$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Общие сведения

Многие научные и технические задачи приводят к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В курсе дифференциальных уравнений изучаются методы интегрирования некоторых типов этих уравнений. К сожалению, ОДУ, которые можно проинтегрировать известными методами, встречаются сравнительно редко (хотя некоторые учебники создают впечатление, что это – не так!). Поэтому, важное значение имеют приближенные методы решения ОДУ (которые получили широкое применение в середине прошлого века в связи с развитием компьютерной техники).

Приближенные методы решения ОДУ делятся на приближенные аналитические методы (в частности, использующие степенные ряды) и численные методы. Надо отметить, что все эти методы *не позволяют найти общее решение* ОДУ (которое, как известно, зависит от произвольных постоянных). Эти методы дают только *приближенные решения задачи Коши*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Вопрос об отыскании приближенных решений задачи (3.1) можно ставить, *если выполнено условие теоремы существования и единственности* этого решения, а именно в рассматриваемой области функция $f(x, y)$ непрерывна и ее частная производная $\partial f/\partial y$ ограничена.

Прежде всего, надо понимать, что есть такое приближенное решение дифференциального уравнения. А именно: требуется найти такую функцию $\tilde{y}(x)$, что для некоторого числа $b > x_0$ погрешность

$$\delta = \max_{x \in [x_0, b]} |\tilde{y}(x) - y(x)| < \varepsilon, \quad (3.2)$$

где $Y(x)$ – точное решение задачи (3.1), ε – заданная точность вычислений. В данной работе мы рассматриваем **численные методы** интегрирования ОДУ.

Суть численных методов интегрирования ОДУ состоит в следующем. Интересующий нас отрезок $[x_0; b]$ числовой оси точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ разбивается на мелкие части, при этом точки $x_i, i = \overline{0, n}$ называют *узлами разбиения*. Как правило, величины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h_i$ выбирают одинаковыми, равными $h = \frac{b - x_0}{n}$ (величина h называется *шагом разбиения*). Тогда узлы разбиения находим по формуле $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}$. Численные методы дают алгоритм нахождения чисел $y_i, i = \overline{0, n}$, которые мало отличаются от значений $Y(x_i), i = \overline{0, n}$, точного решения задачи (3.1), а также правило оценки погрешности (3.2) (подразумевается, что найденные числа y_i – значения приближенного решения $\tilde{Y}(x)$ в узлах x_i).

Из численных методов мы рассмотрим метод Эйлера, его модификации и метод Рунге–Кутты.

3.2. Метод Эйлера

Метод Эйлера прост. Он используется тогда, когда надо получить примерное представление о решении задачи Коши (3.1) причем на небольшом промежутке $[x_0; b]$, так как этот метод дает довольно грубое приближение (об этом см. ниже).

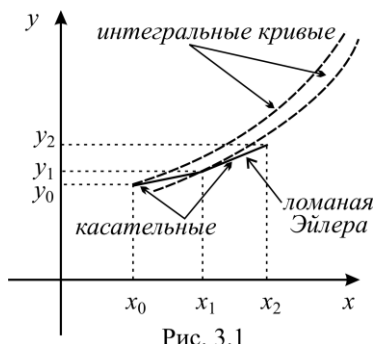
Метод Эйлера состоит в непосредственной замене производной по приближенной формуле $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y'$, т. е. дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ заменяется на так называемое конечно-разностное уравнение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$.

В узлах разбиения x_i и x_{i+1} имеем $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta x = h$, а это уравнение примет вид $\Delta y_i = f(x_i, y_i) \cdot h$, или

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h, \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (3.3)$$

Полученная формула является **расчетной формулой метода Эйлера**. Зная $y(x_0) = y_0$, по формуле (3.3) последовательно можно вычислить значения y_1, y_2, y_3, \dots .

С геометрической точки зрения, равенство (3.3) является уравнением касательной к интегральной кривой в точке (x_i, y_i) . Это означает, что движение от точки (x_i, y_i) к точке (x_{i+1}, y_{i+1}) происходит не по интегральной кривой задачи (3.1), а по касательной к ней в точке (x_i, y_i) . Т. к. на каждом шаге мы



проводим свою касательную (каждый раз к новой интегральной кривой! – поясните, почему?), то интегральная кривая заменяется ломаной линией. Поэтому этот метод называют методом ломаных Эйлера (см. рис. 3.1).

Для выяснения вопроса о погрешности метода Эйлера разложим искомое решение $y(x)$ задачи Коши (3.1), (3.2) в узле сетки x_i по формуле Тейлора:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)h + 0,5y''(\xi)h^2, \quad \xi \in (x_i, x).$$

Полагая здесь $x = x_{i+1}$, получим $y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + 0,5y''(\xi)h^2$. Если $y''(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ ограничена, то сравнение этой формулы с формулой (3.3), определяющей метод Эйлера, показывает, что погрешность метода Эйлера возникает от отбрасывания члена $0,5y''(\xi)h^2$. Этот член при малых h является величиной порядка h^2 . Следовательно, **локальная погрешность** метода Эйлера есть величина порядка h^2 .

Если говорить о **суммарной погрешности** метода Эйлера, то на k -ом шаге она зависит не только от замены интегральной кривой

на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ касательной, но и от ошибок, допущенных при вычислении предыдущих значений y_1, y_2, \dots, y_k .

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими первыми производными в области изменения своих аргументов, то приближенное решение задачи (3.1), найденное методом Эйлера, при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению равномерно на отрезке $[x_0; x_n]$ с суммарной погрешностью $O(h)$ (т.е. порядок погрешности совпадает с первой степенью шага).

Таким образом, метод Эйлера имеет *первый порядок точности*.

3.3. Модификации метода Эйлера

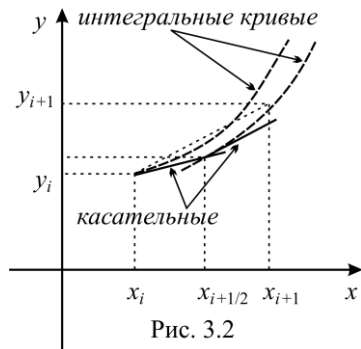
Фактически, метод Эйлера получен из разложения решения дифференциального уравнения (3.1) в ряд по степеням h с отбрасыванием членов, содержащих h в степени выше первой. Для получения более точной формулы можно использовать еще и член, содержащий h^2 . На практике более широкое применение получали следующие два улучшенных метода Эйлера.

Модифицированный метод Эйлера

Расчетная формула модифицированного метода Эйлера имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)), i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Смысл этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляем приближенное значение решения при $x_i + \frac{h}{2}$ (то есть сдвигаемся не на шаг h , а на полшага) обычным методом Эйлера (эту точку обычно обозначают $x_{i+\frac{1}{2}}$, чтобы показать промежуточный характер вычислений), а за-



тем в найденной точке определяем наклон интегральной кривой $y'_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$ и по этому наклону определяем y_{i+1} (рис. 3.2).

Остаточный член модифицированного метода Эйлера (т. е. локальная погрешность) на каждом шаге имеет порядок $O(h^3)$.

Метод Эйлера–Коши

Расчетная формула метода Эйлера–Коши имеет вид:

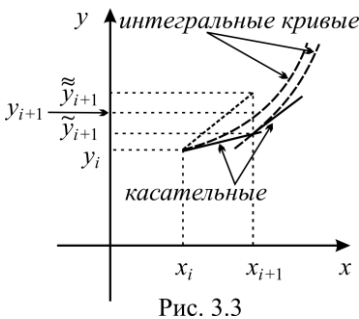
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Здесь мы сначала определяем «грубое приближение» по методу Эйлера

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (3.7)$$

и наклон интегральной кривой в новой точке (рис. 3.3)

$\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, а затем находим величину $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \tilde{y}_i)$ (как бы усредняем наклон на данном шаге $\frac{y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2}$) и уточняем значение



$$y_{i+1} = \frac{1}{2} (\tilde{y}_{i+1} + \tilde{y}'_{i+1}) \quad (3.8)$$

Остаточный член метода Эйлера-Коши имеет на каждом шаге порядок $O(h^3)$.

3.4. Метод Рунге–Кутты

Метод Рунге–Кутты является одним из наиболее употребительных методов повышенной точности. Большинство компьютерных программ, предназначенных для численного интегрирования ОДУ, основаны именно на этом методе.

Пусть по-прежнему требуется найти численное решение уравнения $y = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, на отрезке $[x_0; b]$.

Обозначим приращение решения $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$, где $y(x+h)$ как раз и надо вычислить. Представим приращение $\Delta y(x)$ в виде суммы некоторых «поправок» k_j с некоторыми коэффициентами p_j : $\Delta y(x) = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_r k_r$. Общие формулы для этих поправок и коэффициентов мы здесь приводить не будем. Укажем лишь на то, что они получаются при сравнении разложений $\Delta y(x)$ и k_j по степеням h .

Здесь мы ограничимся рассмотрением наиболее распространенного «четырёхточечного метода Рунге–Кутты». Итак, при $r = 4$, $\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, где

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x+h, y+k_3).$$

С помощью этих формул находим сначала $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Далее, все последующие значения приближенного решения: $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, $y_3 = y_2 + \Delta y_2$, ..., $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, Этот процесс можно представить геометрически. В точке (x, y) вычисляется тангенс угла наклона касательной k_1/h ; используя его, мы идем на половину шага вперед и смотрим тангенс угла наклона здесь k_2/h . Используем его, мы опять начинаем из точки (x, y) , идем вперед на половину шага и находим тангенс угла наклона k_3/h . Взяв этот последний тангенс, мы опять начинаем из точки (x, y) , идем вперед на полный шаг и находим тангенс угла наклона k_4/h . Найденные четыре тангенса наклона усредняем с весами $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ и, беря этот средний тангенс, делаем окончательный шаг от (x, y) к $(x+h, y+\Delta y)$.

Таким образом, по методу Рунге–Кутты вычисление приближенного значения y_{i+1} в точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.9)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \text{ где}$$

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \quad (3.10)$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).$$

Известно, что локальная погрешность формул Рунге–Кутты имеет порядок $O(h^4)$, значит, в данном «четырёхточечном» методе она составляет $O(h^4)$.

Как видно, с алгоритмической точки зрения метод Рунге–Кутты не имеет принципиальных различий от метода Эйлера. Разница лишь в объеме вычислений: для получения нового значения y на каждом шаге необходимо проделать все действия, предусмотренные формулами выше.

На практике применяется следующий способ контроля точности для метода Рунге–Кутты (аналогичный правилу Рунге оценки точности при вычислении определенного интеграла, см. лабораторную работу №2) – двойной счет. Если $y_i, i = \overline{0, n}$, – вычисленные значения с шагом $2h$, а $\tilde{y}_i, i = \overline{0, 2n}$ – вычисленные значения с шагом h , то для ориентировочной оценки погрешности δ численного решения (в качестве его значений берутся \tilde{y}_i) можно использовать формулу:

$$\delta \approx \max_{i=\overline{1, n}} \frac{|\tilde{y}_{2i} - y_i|}{15}. \quad (3.11)$$

3.5. Численное интегрирование систем ОДУ и уравнений старших порядков

Рассмотрим задачу Коши для системы n уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases}$$

Саму систему и начальные условия запишем в векторной форме

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{F}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

где $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $\bar{F}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \bar{y}) \\ f_2(x, \bar{y}) \\ \dots \\ f_n(x, \bar{y}) \end{pmatrix}$ и $\bar{y}^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$ – искомая век-

тор-функция скалярного аргумента x , заданная вектор-функция скалярного аргумента x и векторного аргумента \bar{y} и вектор начальных значений соответственно. Для решения задачи (3.12) можно использовать расчетные формулы (3.3) (метод Эйлера), (3.4) (модифицированный метод Эйлера), (3.6) (метод Эйлера–Коши) и (3.9)–(3.10) (метод Рунге–Кутты), только применять их надо в векторной форме. Например, формулы (3.4) будут иметь вид

$$\bar{y}^{(i+1)} = \bar{y}^{(i)} + h \cdot \bar{F}(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(i)}) + \frac{h}{2} \cdot \bar{F}(x_i, \bar{y}^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.4)'$$

где $\bar{y}^{(i)} = \bar{y}(x_i)$ – значения искомой вектор-функции в узлах x_i . В формулах (3.9)–(3.10) тоже используются векторные величины:

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} + \Delta y^{(j)}, \quad \Delta y^{(j)} = \frac{1}{6}(\bar{k}_1^{(j)} + 2\bar{k}_2^{(j)} + 2\bar{k}_3^{(j)} + \bar{k}_4^{(j)}) \quad (3.9)'$$

$$\bar{k}_1^{(j)} = h \cdot \bar{F}(x_j, y_j), \quad \bar{k}_2^{(j)} = h \cdot \bar{F}\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{\bar{k}_1^{(j)}}{2}\right),$$

$$\bar{k}_3^{(j)} = h \cdot \bar{F}\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{\bar{k}_2^{(j)}}{2}\right), \quad \bar{k}_4^{(j)} = h \cdot \bar{F}(x_j + h, y_j + \bar{k}_3^{(j)}). \quad (3.10)'$$

Чтобы применить разобранные методы для численного решения задачи Коши для уравнения старших порядков, а именно

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (3.13)$$

задачу (3.13) путем замены следует свести к задаче (3.12): полагаем $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$. В результате получаем задачу (3.12),

где правая часть векторного уравнения $\bar{F}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$

(проверьте!), а вектор начальных значений $\bar{y}^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Пример. Рассмотрим подробнее, что мы должны делать в случае численного решения задачи Коши для уравнения 2-го порядка:

$$\begin{cases} y'' = \frac{2xy'}{x^2 + 1} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Решение. Путем замены $y_1 = y, y_2 = y'$ получаем задачу (3.12), где

правая часть векторного уравнения $\bar{F}(x, \bar{y}) = \bar{F}\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{2xy_2}{x^2 + 1} \end{pmatrix}$, а

вектор начальных значений $\bar{y}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ниже приведены расчеты для двух узлов с шагом $h=0,1$ для каждого из методов (из условия $x_0 = 0$).

1. Самый простой метод – **метод Эйлера** (используем векторный вариант формул (3.3)).

$$1\text{-й шаг: } \bar{y}^{(1)} = \bar{y}^0 + h \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) = \bar{y}^0 + 0,1 \cdot \bar{F}\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда $y(0,1) = 0,1$, $y'(0,1) = 1$.

$$2\text{-й шаг: } \bar{y}^{(2)} = \bar{y}^{(1)} + h \cdot \bar{F}(x_0 + h, \bar{y}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 1}{0,1^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,0198 \end{pmatrix},$$

тогда $y(0,2) = 0,2$, $y'(0,2) = 1,0198$.

2. **Модифицированный метод Эйлера** (используем формулы (3.4)').

$$1\text{-й шаг: } \bar{y}^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(0)} + h \cdot \bar{F}\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)})\right) = \bar{y}^{(0)} + 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,05, \begin{pmatrix} 0,05 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 1}{0,05^2 + 1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,00997 \end{pmatrix}, \text{ тогда } y(0,1) = 0,1, \quad y'(0,1) \approx 1,01.$$

$$2\text{-й шаг: } \bar{y}^{(1)} + \frac{h}{2} \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,00997 \end{pmatrix} + 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 1,00997 \\ \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 1,00997}{0,01 + 1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,1505 \\ 1,02 \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}^{(2)} = \bar{y}^{(1)} + h \cdot \bar{F}\left(x_1 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(1)} + \frac{h}{2} \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)})\right) = \bar{y}^{(1)} + 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,15, \begin{pmatrix} 0,1505 \\ 1,02 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,00997 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1,02 \\ \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,02}{0,15^2 + 1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,202 \\ 1,0399 \end{pmatrix}, \text{ тогда } y(0,2) = 0,202,$$

$y'(0,2) \approx 1,0399$.

3. **Метод Эйлера–Коши** (используем векторный вариант формул (3.6)).

$$1\text{-й шаг: } \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) = \bar{F}\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}^{(0)} + h \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(0)} + h \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)})) &= \bar{F}\left(0,1, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 0,1 \cdot 1 \\ 0,01 + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,198 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(0)} + \\ + \frac{h}{2} \cdot (\bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) + \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(0)} + h \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}))) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0,198 \end{pmatrix}\right) = \\ = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0099 \end{pmatrix}, \text{ тогда } y(0,1) = 0,1, \quad y'(0,1) \approx 1,0099. \end{aligned}$$

$$2\text{-й шаг: } \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}) = \bar{F}\left(0,1, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0099 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,0099 \\ 2 \cdot 0,1 \cdot 1,0099 \\ 0,01 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0099 \\ 0,19998 \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}^{(1)} + h \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0099 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1,0099 \\ 0,19998 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,201 \\ 1,0299 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}(x_2, \bar{y}^{(1)} + h \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)})) = \bar{F}\left(0,2, \begin{pmatrix} 0,201 \\ 1,0299 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,0299 \\ 2 \cdot 0,2 \cdot 1,0299 \\ 0,04 + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,0299 \\ 0,3962 \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}^{(2)} = \bar{y}^{(1)} + \frac{h}{2} \cdot (\bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}) + \bar{F}(x_2, \bar{y}^{(1)} + h \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}))) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0099 \end{pmatrix} +$$

$$+ 0,05 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1,0099 \\ 0,19998 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,0299 \\ 0,3962 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,202 \\ 1,0397 \end{pmatrix}, \text{ тогда } y(0,2) = 0,202,$$

$$y'(0,2) \approx 1,0397.$$

4. **Самый эффективный из рассмотренных методов – метод Рунге–Кутта** (используем формулы (3.9)' - (3.10)').

$$1\text{-й шаг: } \bar{k}_1^{(0)} = h \cdot \bar{F}(x_0, \bar{y}^{(0)}) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{k}_2^{(0)} = h \cdot \bar{F}\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(0)} + \frac{\bar{k}_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,05, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 0,05 \cdot 1 \\ 0,05^2 + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \end{pmatrix},$$

$$\bar{k}_3^{(0)} = h \cdot \bar{F}\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(0)} + \frac{\bar{k}_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,05, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,005 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 0,1 \cdot \left(\frac{1,005}{0,05^2 + 1} \right) \approx \begin{pmatrix} 0,1005 \\ 0,01 \end{pmatrix}, \quad \bar{k}_4^{(0)} = h \cdot \bar{F}(x_0 + h, \bar{y}^{(0)} + \bar{k}_3^{(0)}) = \\
&= 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1005 \\ 0,01 \end{pmatrix}\right) = 0,1 \cdot \left(\frac{1,01}{0,1^2 + 1} \right) = \begin{pmatrix} 0,101 \\ 0,02 \end{pmatrix}, \quad \Delta \bar{y}^{(0)} = \frac{1}{6}(\bar{k}_1^{(0)} + \\
&+ 2\bar{k}_2^{(0)} + 2\bar{k}_3^{(0)} + \bar{k}_4^{(0)}) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0,10025 \\ 0,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,101 \\ 0,02 \end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix} 0,10025 \\ 0,01 \end{pmatrix}, \\
&\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(0)} + \Delta \bar{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,10025 \\ 0,01 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } y(0,1) \approx 0,1003, \\
&y'(0,1) = 1,01.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2-й шаг: } \bar{k}_1^{(1)} &= h \cdot \bar{F}(x_1, \bar{y}^{(1)}) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,1, \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix}\right) = 0,1 \cdot \left(\frac{1,01}{0,1^2 + 1} \right) = \begin{pmatrix} 0,101 \\ 0,02 \end{pmatrix}, \\
\bar{k}_2^{(1)} &= h \cdot \bar{F}\left(x_1 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(1)} + \frac{\bar{k}_1^{(1)}}{2}\right) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,15, \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0505 \\ 0,01 \end{pmatrix}\right) = \\
&= 0,1 \cdot \left(\frac{1,02}{0,1^2 + 1} \right) \approx \begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,0202 \end{pmatrix}, \quad \bar{k}_3^{(1)} = h \cdot \bar{F}\left(x_1 + \frac{h}{2}, \bar{y}^{(1)} + \frac{\bar{k}_2^{(1)}}{2}\right) = \\
&= 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,15, \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,051 \\ 0,01 \end{pmatrix}\right) = 0,1 \cdot \left(\frac{1,02}{0,15^2 + 1} \right) \approx \begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,0299 \end{pmatrix}, \\
\bar{k}_4^{(1)} &= h \cdot \bar{F}(x_1 + h, \bar{y}^{(1)} + \bar{k}_3^{(1)}) = 0,1 \cdot \bar{F}\left(0,2, \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,0299 \end{pmatrix}\right) = \\
&= 0,1 \cdot \left(\frac{1,0399}{0,2^2 + 1} \right) = \begin{pmatrix} 0,104 \\ 0,04 \end{pmatrix}, \quad \Delta \bar{y}^{(1)} = \frac{1}{6}(\bar{k}_1^{(1)} + 2\bar{k}_2^{(1)} + 2\bar{k}_3^{(1)} + \bar{k}_4^{(1)}) = \\
&= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 0,101 \\ 0,02 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,0202 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,0299 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,104 \\ 0,04 \end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix} 0,1022 \\ 0,0267 \end{pmatrix} \\
\bar{y}^{(2)} &= \bar{y}^{(1)} + \Delta \bar{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1003 \\ 1,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1022 \\ 0,0267 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,2025 \\ 1,0367 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } y(0,2) \approx 0,2025, \\
&y'(0,2) = 1,0367.
\end{aligned}$$

Ниже приведены данные компьютерного расчета для данного уравнения для отрезка $[0, 1]$. При этом указаны результаты для точного

решения задачи $y = \frac{x^3}{3} + x$ (проверьте, что это действительно решение указанной задачи). Небольшое расхождение приведенных выше данных и данных в таблице объясняется тем, что компьютерная программа при расчетах учитывает 18 знаков после запятой, а здесь мы учитывали только 4 знака.

x_j	Метод Эйлера		Модиф. метод Эйлера		Метод Эйлера–Коши		Метод Рунге–Кутта		Точное решение	
	y_j	y'_j	y_j	y'_j	y_j	y'_j	y	y'_j	y_j	y'_j
0,1	0,1	1	0,1	1,01	0,1	1,0099	0,100333	1,01	0,100333	1,01
0,2	0,2	1,0198	0,202	1,0399	0,202	1,0397	0,202667	1,04	0,202667	1,04
0,3	0,302	1,059	0,308	1,0898	0,308	1,0894	0,309	1,09	0,309	1,09
0,4	0,4079	1,1173	0,42	1,1596	0,4199	1,159	0,421333	1,16	0,421333	1,16
0,5	0,5196	1,1944	0,5399	1,2494	0,5398	1,2486	0,541666	1,250001	0,541667	1,25
0,6	0,6391	1,2899	0,6699	1,3591	0,6697	1,358	0,672	1,360001	0,672	1,36
0,7	0,768	1,4037	0,8118	1,4888	0,8114	1,4873	0,814333	1,490001	0,814333	1,49
0,8	0,9084	1,5356	0,9676	1,6385	0,9672	1,6366	0,970666	1,64	0,970667	1,64
0,9	1,062	1,6855	1,1395	1,808	1,1388	1,8057	1,142999	1,81	1,143	1,81
1	1,2305	1,8531	1,3293	1,9976	1,3284	1,9948	1,3333	2	1,3333	2
δ_{\max}	$\approx 0,1$	$\approx 0,147$	$\approx 0,004$	$\approx 0,0024$	$\approx 0,005$	$\approx 0,0052$	10^{-6}	10^{-6}		

В последней строке таблицы указаны максимальные погрешности вычислений для каждого метода (следует заметить, что при вычислениях по методу Рунге–Кутта для шага $h=0,1$ следует проводить вычисления с 6-ю знаками после запятой).

Данный пример наглядно демонстрирует, какой из методов эффективней при данном шаге h интегрирования (а именно, метод Рунге–Кутта, хотя он и требует большего количества вычислений).

Задания

Задание 1. Найти численное решение задачи Коши для ДУ-1 (по методу Эйлера) на отрезке $[x_0; x_0 + 1]$ с шагом $h = 0,1$. Построить ломаную Эйлера и интегральную кривую точного решения. Указать максимальную погрешность.

Варианты:

1. $y' = x + \frac{y}{2}, y(1,8) = 2,6$

2. $y' = x + \frac{y}{3}, y(1,6) = 4,6$

3. $y' = x + \frac{y}{4}, y(0,6) = 0,8$

4. $y' = x - \frac{y}{2}, y(0,5) = 0,6$

5. $y' = x - \frac{y}{3}, y(1,7) = 5,3$

6. $y' = x - \frac{y}{4}, y(1,4) = 2,2$

7. $y' = x + \frac{y}{5}, y(1,4) = 2,5$

8. $y' = x + \frac{y}{8}, y(1,2) = 2,1$

9. $y' = x + \frac{y}{10}, y(1,2) = 2,1$

10. $y' = x - \frac{y}{5}, y(2,1) = 2,5$

11. $y' = x - \frac{y}{8}, y(1,8) = 2,6$

12. $y' = x - \frac{y}{10}, y(1,6) = 4,6$

13. $y' = \frac{x}{2} + y, y(0,6) = 0,8$

14. $y' = \frac{x}{3} + y, y(0,5) = 0,6$

15. $y' = \frac{x}{4} + y, y(1,7) = 5,3$

16. $y' = \frac{x}{2} - y, y(1,4) = 2,2$

17. $y' = \frac{x}{3} - y, y(1,4) = 2,5$

18. $y' = \frac{x}{4} - y, y(0,8) = 1,3$

19. $y' = \frac{x}{5} + y, y(1,1) = 1,5$

20. $y' = \frac{x}{8} + y, y(0,6) = 1,2$

21. $y' = \frac{x}{10} + y, y(0,5) = 1,8$

22. $y' = \frac{x}{5} - y, y(0,2) = 1,1$

23. $y' = \frac{x}{8} - y, y(0,1) = 0,8$

24. $y' = \frac{x}{10} - y, y(0,5) = 0,6$

25. $y' = x^2 + y, y(1,2) = 1,4$

26. $y' = x^2 + \frac{y}{2}, y(0,4) = 0,8$

27. $y' = x^2 + \frac{y}{3}, y(0,3) = 0,9$

28. $y' = x^2 - y, y(0,7) = 2,1$

29. $y' = x^2 - \frac{y}{2}, y(0,7) = 2,1$

30. $y' = x^2 - \frac{y}{3}, y(0,9) = 1,7$

Задание 2. Найти численное решение задачи Коши для ДУ-1 с нулевым начальным условием $y(0) = 0$ (по методу Эйлера-Коши) на отрезке $[0; 2]$ с шагом $h = 0,2$. Изобразить графически приближенное решение и указать порядок погрешности.

Варианты:

1. $y' = 1 + 0,2y \sin x - y^2$

2. $y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y)$

3. $y' = \frac{\cos y}{1 + x} - 0,5y^2$

4. $y' = (1 - y^2) \cos x + 0,6y$

5. $y' = 1 + 0,4y \sin x - 1,5y^2$

6. $y' = \frac{\cos y}{2 + x} + 0,3y^2$

7. $y' = \cos(1,5x + y) + (x - y)$

8. $y' = 1 - \sin(y + x) + \frac{0,5y}{x + 2}$

9. $y' = \frac{\cos y}{1,5 + x} + 0,1y^2$

10. $y' = 1 + 0,6 \sin x - 1,25y^2$

11. $y' = \cos(2x + y) + 1,5(x - y)$

12. $y' = 1 - \frac{0,1y}{x + 2} \sin(2x + y)$

13. $y' = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,1y^2$

14. $y' = 1 + 0,8y \sin x - 2y^2$

15. $y' = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y)$

16. $y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x + 2}$

17. $y' = \frac{\cos y}{1,75 + x} - 0,5y^2$

18. $y' = 1 + (1 - x) \sin y - (2 + x)y$

19. $y' = (0,8 - y^2) \cos x + 0,3y$

20. $y' = 1 + 2,2 \sin x + 1,5y^2$

21. $y' = \cos(x + y) + 0,75(x - y)$

22. $y' = \cos(1,5x + y) - 2,25(x - y)$

23. $y' = \frac{\cos y}{2 + x} - 0,3y^2$

24. $y' = 1 - \sin(1,75x + y) + \frac{0,1y}{x + 2}$

25. $y' = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,5y^2$

26. $y' = 1 - \sin(1,25x + y) + \frac{0,5y}{x + 2}$

27. $y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y)$

28. $y' = 1 - (x - 1) \sin y + 2(x + y)$

29. $y' = 1 - \sin(0,75x - y) + \frac{1,75y}{x + 1}$

30. $y' = \cos(x - y) + \frac{1,25y}{1,5 + x}$

Задание 3. Найти численное решение задачи Коши для ДУ-2 (по модифицированному методу Эйлера и методу Рунге-Кутты) на отрезке $[x_0; x_0 + 1]$ с шагом $h=0,25$. Изобразить на одном чертеже приближенные решения и интегральную кривую точного решения. Оценить абсолютную погрешность вычислений для обоих методов.

Варианты:

- | | |
|--|---|
| 1. $y'' + y' - 2y = x, \begin{cases} y(0,7) = 0,5 \\ y'(0,7) = 1,2 \end{cases}$ | 2. $y'' - 2y' + 2y = x + 1, \begin{cases} y(0,9) = 2, \\ y'(0,9) = 1 \end{cases}$ |
| 3. $y'' + 2y' + y = x + 1, \begin{cases} y(0,5) = 1, \\ y'(0,5) = 1 \end{cases}$ | 4. $y'' + 2y' - 3y = 3, \begin{cases} y(0,2) = 1, \\ y'(0,2) = 2 \end{cases}$ |
| 5. $y'' + 2y' - 8y = x^2, \begin{cases} y(0,6) = 1, \\ y'(0,6) = 0,7 \end{cases}$ | 6. $y'' - 4y' + 4y = x + 4, \begin{cases} y(1,4) = 2, \\ y'(1,4) = 4 \end{cases}$ |
| 7. $y'' - 3y' + 2y = 1, \begin{cases} y(0,4) = 0,7, \\ y'(0,4) = 2 \end{cases}$ | 8. $y'' + 3y' - 4y = x + 1, \begin{cases} y(1,2) = 0,5, \\ y'(1,2) = 1 \end{cases}$ |
| 9. $2y'' - y' - 3y = 2x^2, \begin{cases} y(1,3) = 0,6, \\ y'(1,3) = 1 \end{cases}$ | 10. $2y'' + 3y' - 5y = 0,5, \begin{cases} y(1,6) = 1, \\ y'(1,6) = 3 \end{cases}$ |
| 11. $y'' + 2y' - 3y = 4, \begin{cases} y(0,6) = 1, \\ y'(0,6) = 2 \end{cases}$ | 12. $y'' - 2y' + y = 2, \begin{cases} y(0,4) = 1,4, \\ y'(0,4) = 1,2 \end{cases}$ |
| 13. $y'' + y' - 6y = 2, \begin{cases} y(0,8) = 3, \\ y'(0,8) = 1,5 \end{cases}$ | 14. $y'' + 2y' + y = x, \begin{cases} y(0,8) = 1, \\ y'(0,8) = 3 \end{cases}$ |
| 15. $y'' - 3y' + 2y = 5, \begin{cases} y(0,7) = 1,3, \\ y'(0,7) = 2 \end{cases}$ | 16. $y'' + 2y' - 8y = 6, \begin{cases} y(2) = 1, \\ y'(2) = 1 \end{cases}$ |
| 17. $y'' + y' - 2y = 2x, \begin{cases} y(0,9) = 0,6, \\ y'(0,9) = 1,7 \end{cases}$ | 18. $y'' - y' - 2y = x, \begin{cases} y(2) = 2, \\ y'(2) = 1 \end{cases}$ |
| 19. $y'' - 3y' - 4y = 2, \begin{cases} y(1,1) = 1, \\ y'(1,1) = 1,6 \end{cases}$ | 20. $y'' + 8y' - 9y = 4, \begin{cases} y(1) = 1,7, \\ y'(1) = 0,5 \end{cases}$ |
| 21. $y'' + 2y' - 8y = x, \begin{cases} y(0,9) = 1, \\ y'(0,9) = 0,8 \end{cases}$ | 22. $y'' - 4y' - 5y = x, \begin{cases} y(1,3) = 0,6, \\ y'(1,3) = 0,3 \end{cases}$ |
| 23. $y'' - 5y' - 6y = 2x, \begin{cases} y(1,3) = 2, \\ y'(1,3) = 0,5 \end{cases}$ | 24. $y'' + 2y' - 3y = 2x, \begin{cases} y(0,8) = 1, \\ y'(0,8) = 1 \end{cases}$ |
| 25. $y'' + 2y' = x + 1, \begin{cases} y(1,4) = 2, \\ y'(1,4) = 2,5 \end{cases}$ | 26. $y'' - 2y' = 2x - 1, \begin{cases} y(5) = 1,5, \\ y'(5) = 0,4 \end{cases}$ |
| 27. $y'' + 6y' = 1 - 3x, \begin{cases} y(1,8) = 3, \\ y'(1,8) = 0,6 \end{cases}$ | 28. $y'' - 2y' - 3y = x, \begin{cases} y(0,6) = 1, \\ y'(0,6) = 1,3 \end{cases}$ |
| 29. $y'' - 5y' = x^2, \begin{cases} y(1,9) = 0,8, \\ y'(1,9) = 2 \end{cases}$ | 30. $y'' + 3y' + 2y = 8, \begin{cases} y(1,5) = 1, \\ y'(1,5) = 2 \end{cases}$ |

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

4.1. Основные понятия и определения

Вначале рассмотрим задачу интерполирования в общем виде. В точках $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ (эти точки называют узлами интерполяции) заданы значения некоторой заранее неизвестной функции $y_i = f(x_i)$ (так называемые экспериментальные значения). Требуется найти такую приближающую функцию $y = S(x)$ (аппроксимирующую функцию), чтобы $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ значения функций $f(x)$ и $S(x)$ были близкими между собой. При малом числе экспериментальных значений для решения задачи интерполяции можно использовать один из методов построения интерполяционных многочленов (например, интерполяционный многочлен Лагранжа). Однако при большом числе узлов интерполяционные многочлены становятся практически непригодными. Это связано с тем, что степень интерполяционного многочлена лишь на единицу меньше числа экспериментальных значений функций. А графики многочленов большой степени в общем случае имеют весьма сложный характер с большим количеством точек экстремумов и участков с различным направлением выпуклости, что, естественно, может не соответствовать реальным физическим процессам. Можно, конечно, отрезок, на котором определена функция $f(x)$, разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные многочлены. Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где ее производная терпит разрыв. Это означает, что график функции $S(x)$ будет содержать точки «излома», т. е. не будет достаточно гладким. Это тоже, как правило, не соответствует физическому содержанию изучаемых процессов.

Кубические сплайны лишены этого недостатка. Во-первых, здесь используются многочлены всего лишь третьей степени, а во-вторых, мы имеем возможность получить достаточно гладкую аппроксими-

рующую функцию (по меньшей мере, дважды непрерывно дифференцируемую). Это означает, что функция $S(x)$ и ее производные $S'(x)$ и $S''(x)$ будут непрерывными на отрезке $[a, b]$, а, значит, кривизна и радиус кривизны кривой будут меняться непрерывно.

Перейдем к точным определениям и формулам.

4.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Прежде, чем привести общую формулу, заметим (общеизвестный факт!), что через 2 точки (на плоскости) (x_0, y_0) и (x_1, y_1) можно провести только одну прямую. С точки зрения построения интерполяционного многочлена мы получаем следующую формулу:

$$S(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad (4.1)$$

которая является ни чем иным, как уравнением прямой, проходящей через 2 заданные точки, записанном в несколько специфическом виде, принятом в теории интерполяции.

Не менее известный факт, что через 3 точки на плоскости (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно провести единственную параболу (вспомните метод Симпсона!), дает нам формулу:

$$S(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2. \quad (4.2)$$

Сравнивая формулы (4.1) и (4.2), можно заметить определенную закономерность образования коэффициентов. В общем виде интерполяционный многочлен Лагранжа для $(n+1)$ точки на плоскости (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) имеет n -ю степень и имеет вид:

$$S(x) = \omega(x) \sum_{j=0}^n \frac{y_j}{(x - x_j) \omega'(x_j)}, \quad (4.3)$$

где $\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ – произведение $(n+1)$

скобок, а значение ее производной в точке $x = x_j$

$$\omega'(x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n) \quad (\text{проверьте!}).$$

4.3. Определение кубического сплайна

Кубическим интерполяционным сплайном, соответствующим данным узлам интерполяции x_i и данным экспериментальным значениям $y_i = f(x_i)$, называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, функция $S(x)$ является многочленом третьей степени;

2) функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на всем отрезке $[a, b]$;

$$3) S(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Из указанных требований вытекают следующие свойства кубической сплайн-интерполяции: во-первых, график кусочно-полиномиальной аппроксимирующей функции проходит точно через узловые точки; во-вторых, в узловых точках нет разрывов и резких перегибов функции; в-третьих, связь между числом узловых точек и степенью полинома отсутствует.

4.4. Отыскание коэффициентов кубического сплайна

Введем обозначения $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Значения h_i есть расстояния между соседними узлами интерполяции.

Согласно данному выше определению на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, будем искать функцию $S(x)$ в виде полинома третьей степени, т.е. $S(x) = S_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, где

$$S_i(x) = \frac{a_i \cdot (x_i - x) + b_i \cdot (x - x_{i-1})}{h_i} + \frac{m_{i-1} \cdot (x_i - x)^3 + m_i \cdot (x - x_{i-1})^3}{6h_i}. \quad (4.4)$$

Здесь a_i, b_i и m_i – коэффициенты, которые необходимо найти согласно требованиям определения кубического сплайна.

Такой «экзотический» вид многочленов выбран в связи с тем, что так мы автоматически добиваемся выполнения условия непрерывности второй производной функции $S(x)$ во внутренних узлах интерполяции (в остальных точках отрезка $[a, b]$ она, очевидно, непрерывна). Действительно, для этого необходимо выполнение равенств $S''_{i+1}(x_i) = S''_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\text{Так как } S''_i(x) = \frac{m_{i-1} \cdot (x_i - x) + m_i \cdot (x - x_{i-1})}{h_i} \quad \text{и} \quad S''_{i+1}(x) = \frac{m_i \cdot (x_{i+1} - x) + m_{i+1} \cdot (x - x_i)}{h_{i+1}}, \text{ то } S''_{i+1}(x_i) = m_i = S''_i(x_i).$$

Теперь найдем значения a_i и b_i , исходя из условия, что график функции $S(x)$ должен проходить через заданные точки (x_i, y_i) . Это значит, что для всех $i = 1, 2, \dots, n$ должны быть выполнены равенства $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ и $S_i(x_i) = y_i$. С учетом равенства (1) получаем соотношения:

$$a_i = y_{i-1} - \frac{m_{i-1} \cdot h_i^2}{6}, \quad b_i = y_i - \frac{m_i \cdot h_i^2}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

И, наконец, учтем требование непрерывности первой производной функции $S(x)$ во внутренних узлах интерполяции (опять же отметим, что в остальных точках отрезка $[a, b]$ она, очевидно, непрерывна). Для этого мы должны добиться выполнения равенств $S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\text{Так как } S'_i(x) = \frac{-a_i + b_i}{h_i} + \frac{-m_{i-1} \cdot (x_i - x)^2 + m_i \cdot (x - x_{i-1})^2}{2h_i}, \quad \text{то}$$

$$S'_i(x_i) = \frac{-a_i + b_i}{h_i} + \frac{m_i \cdot h_i}{2}.$$

Аналогично получаем $S'_{i+1}(x_i) = \frac{-a_{i+1} + b_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{m_i \cdot h_{i+1}}{2}$. Приравнивая значения производных и подставляя соотношения (2), получаем равенство

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(m_{i-1} - m_i) + \frac{m_i \cdot h_i}{2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6}(m_i - m_{i+1}) - \frac{m_i \cdot h_{i+1}}{2}.$$

Используя это равенство, получаем систему линейных уравнений, связывающую неизвестные коэффициенты m_i при $i=1, 2, \dots, n-1$:

$$h_i \cdot m_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \cdot m_i + h_{i+1} \cdot m_{i+1} = 6 \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right). \quad (4.6)$$

На данном этапе мы имеем $n+1$ неизвестных и $n-1$ уравнений. Следовательно, для однозначного определения коэффициентов m_0, m_1, \dots, m_n необходимо найти еще два уравнения.

Здесь есть определенная свобода действий. Можно, например, задать условие, что касательная к графику $y = S(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = a$ образует с осью Ox угол α , а в точке с абсциссой $x_n = b$ – угол β . Тогда, используя геометрический смысл производной, будем иметь, что $S'_1(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ и $S'_n(x_n) = \operatorname{tg} \beta$. В результате получим два недостающих уравнения

$$\frac{-a_1 + b_1 - \frac{m_0 \cdot h_1}{2}}{h_1} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \frac{-a_n + b_n + \frac{m_n \cdot h_n}{2}}{h_n} = \operatorname{tg} \beta,$$

что с учетом соотношений (2) дает:

$$m_0 = -\frac{1}{2}m_1 + \frac{3}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \operatorname{tg} \alpha \right) \quad \text{и} \quad m_n = -\frac{1}{2}m_{n-1} + \frac{3}{h_n} \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right). \quad (4.7)$$

При другом подходе можно приравнять к нулю кривизну линии $y = S(x)$ в точках $x_0 = a$ и $x_n = b$. Это будет означать, что в этих точках радиус кривизны равен ∞ , а значит, в окрестностях этих точек график функции $y = S(x)$ будет практически совпадать с прямой. Посмотрим, какие дополнительные уравнения мы можем получить с учетом этого условия.

Т. к. кривизна линии $y = S(x)$ в точке с абсциссой x находится по формуле

$$\kappa(x) = \frac{|S''(x)|}{(1 + (S'(x))^2)^{3/2}}, \quad (4.8)$$

то из условий равенства нулю кривизны на концах отрезка $[x_0; x_n]$ следуют равенства нулю вторых производных в этих точках: $S''(x_0) = S''_1(x_0) = 0$ и $S''(x_n) = S''_n(x_n) = 0$. Это дает нам два дополнительных уравнения для коэффициентов кубического сплайна:

$$m_0 = m_n = 0. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.6), (4.9) (или (4.7)) составляют систему $n + 1$ линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов m_0, m_1, \dots, m_n . Определив из системы эти коэффициенты, по формулам (2) находим значения коэффициенты a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots, n$. В результате мы определим все функции $S_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (см. равенства (4.4)). Таким образом, мы найдем искомую функцию $y = S(x)$ – кубический сплайн.

Заметим, что мы можем, например, на левом конце $x_0 = a$ задавать условия типа (4.9), а на правом – типа (4.7) (или наоборот).

И в заключение этого пункта надо отметить, что матрица системы (4.6), (4.9) – **трехдиагональная**. Это значит, что ненулевые элементы этой матрицы могут находиться лишь на главной диагонали и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. Для решения таких систем разработан специальный метод – **метод прогонки**.

4.5. Метод прогонки.

Метод прогонки применяется для решения систем линейных уравнений с матрицей специального вида – **трехдиагональной матрицей**. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} A_i \cdot m_{i-1} - C_i \cdot m_i + B_i \cdot m_{i+1} = -F_i, i=1,2,\dots,n-1 \\ m_0 = k_0 \cdot m_1 + \mu_0 \\ m_n = k_n \cdot m_{n-1} + \mu_n \end{cases}, \quad (4.10)$$

где A_i, B_i, C_i и F_i , $i=1,2,\dots,n-1$, – заданные числа. Заданными также считаются значения коэффициентов k_0, μ_0, k_n и μ_n .

Суть метода прогонки состоит в выполнении следующих четырех действий (отметим, что излагаемый ниже вариант носит название *метод левой прогонки*).

Вначале находят вспомогательные коэффициенты:

$$\begin{aligned} 1) \alpha_n &= k_n \text{ и } \beta_n = \mu_n; \\ 2) \alpha_i &= \frac{A_i}{C_i - \alpha_{i+1} \cdot B_i}, \beta_i = \frac{B_i \cdot \beta_{i+1} + F_i}{C_i - \alpha_{i+1} \cdot B_i}, i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

Затем находят неизвестные величины:

$$\begin{aligned} 3) m_0 &= \frac{\mu_0 + k_0 \cdot \beta_1}{1 - k_0 \cdot \alpha_1}; \\ 4) m_i &= \alpha_i \cdot m_{i-1} + \beta_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Для корректного применения метода прогонки (т.е. чтобы знаменатели в указанных формулах не обращались в ноль) необходимо проверить, что для коэффициентов системы (4.10) выполняются требования:

$$\begin{aligned} 1) A_i \neq 0, B_i \neq 0, |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, i = 1, 2, \dots, n-1; \\ 2) |k_0| \leq 1, |k_n| \leq 1, |k_0| + |k_n| < 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для системы (4.6), (4.9), которая позволяет определить коэффициенты кубического сплайна, условия корректного применения метода прогонки выполнены. Но они не будут выполнены, если уравнения (4.9) заменить на уравнения (4.7) (т.е. потребовать, чтобы на концах отрезка интерполяции касательные к графику имели заданные углы наклона), т.к. будем иметь равенство $|k_0| + |k_n| = 1$. В этом случае систему можно решить методом Гаусса.

4.6. Пример построения интерполяционного многочлена Лагранжа и кубического сплайна

Рассмотрим задачу нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа и кубического сплайна по пяти экспериментальным точкам: (0, 0), (1, 2), (3, 3), (4, 1) и (6, 2). Для определения кубического сплайна на концах отрезка интерполирования потребуем равенство нулю кривизны кривой, т. е. выполнение уравнений (4.9).

Сначала запишем по формуле (4.3) интерполяционный многочлен Лагранжа для данной задачи. Здесь

$$\begin{aligned}\omega(x) &= x(x-1)(x-3)(x-4)(x-6), & \omega'(0) &= (-1) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-6) = 72, \\ \omega'(1) &= 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-5) = -30, & \omega'(3) &= 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 18, \\ \omega'(4) &= 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -24, & \omega'(6) &= 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 180.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}S(x) &= \omega(x) \cdot \left(\frac{0}{72x} - \frac{2}{30(x-1)} + \frac{3}{18(x-3)} - \frac{1}{24(x-4)} + \frac{2}{180(x-6)} \right) = \\ &= x \cdot \left(\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{15} + \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{6} - \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{24} + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{90} \right) = \\ &= \frac{17}{12}x + \frac{83}{72}x^2 - \frac{23}{36}x^3 + \frac{5}{72}x^4 \approx 1,4167x + 1,1528x^2 - 0,6389x^3 + 0,0694x^4.\end{aligned}$$

Здесь вычисления дробей проведены с точностью до 4 знаков после запятой. Однако, как будет видно далее из таблицы, этой точности оказывается не совсем достаточно!

Теперь займемся кубическими сплайнами. Вначале определяем коэффициенты системы (4.6) (и, следовательно, системы (4.10)). Имеем: $n=4$, $h_1=1$, $h_2=2$, $h_3=1$, $h_4=2$, $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=1$, $B_1=2$, $B_2=1$, $B_3=2$, $C_1=C_2=C_3=-6$. Находим правую часть системы (4.6) (ср. с правой частью системы (4.10)).

Т. к. $F_i = -6 \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$, то $F_1=9$, $F_2=15$, $F_3=-15$. Из уравнений (4.9) следует, что $k_0 = k_n = \mu_0 = \mu_1 = 0$.

Находим вспомогательные коэффициенты: $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, $\alpha_3 = -\frac{1}{6}$, $\beta_3 = \frac{5}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{12}{35}$, $\beta_2 = -3$, $\alpha_1 = -\frac{35}{186}$, $\beta_1 = -\frac{35}{62}$. Теперь определяем неизвестные m_i : $m_0 = 0$, $m_1 = -\frac{35}{62}$, $m_2 = -\frac{87}{31}$, $m_3 = \frac{92}{31}$, $m_4 = 0$.

Осталось, используя соотношения (4.5) и (4.4), вычислить компоненты кубического сплайна:

$$1) a_1 = 0, b_1 = \frac{779}{372}, S_1(x) = \frac{779}{372}x - \frac{35}{372}x^3 \approx 2,0941x - 0,0941x^3;$$

$$2) a_2 = \frac{221}{93}, b_2 = \frac{453}{93}, S_2(x) = \frac{221 \cdot (3-x) + 453 \cdot (x-1)}{186} - \frac{35 \cdot (3-x)^3 + 174 \cdot (x-1)^3}{62 \cdot 12} \approx 0,0927 + 1,8159x + 0,2782x^2 - 0,1868x^3;$$

$$3) a_3 = \frac{215}{62}, b_3 = \frac{47}{93}, S_3(x) = \frac{645 \cdot (4-x) + 94 \cdot (x-3)}{186} + \frac{92 \cdot (x-3)^3 - 87 \cdot (4-x)^3}{186} \approx -30,9355 + 32,8441x - 10,0645x^2 + 0,9624x^3;$$

$$4) a_4 = -\frac{91}{93}, b_4 = 2, S_4(x) = \frac{186 \cdot (x-4) - 91 \cdot (6-x)}{186} + \frac{23 \cdot (6-x)^3}{93} \approx 46,4839 - 25,2204x + 4,4516x^2 - 0,2473x^3.$$

Здесь замечания по точности приближенного вычисления дробей те же, что и в случае интерполяции по Лагранжу.

На рис. 4.1 представлены графики найденных интерполяционного многочлена Лагранжа (ИМЛ, пунктир) и кубического сплайна (сплошная линия). Видно, что на отрезке $[0; 4]$ графики практически совпадают (что вовсе не обязательно, а, скорее, случайно), однако, далее появляются существенные различия. На крайних участках поведение интерполяционного многочлена Лагранжа однозначно определяется исходными данными, а поведение кубического сплайна – дополнительными условиями (4.9), наложенными на его поведение в начальной и конечной точке.

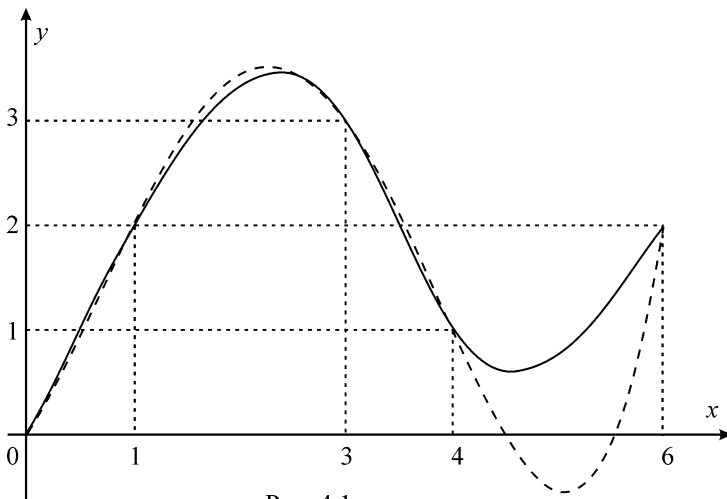


Рис. 4.1

Приведем также сравнительную таблицу значений найденных аппроксимаций между значениями ИМЛ и кубического сплайна):

x	ИМ Лагранжа (десятич. коэфф.)	Кубический сплайн	Модуль разности
0	0,00000	0,00000	0,00000
0,5	0,92103	1,03529	0,11426
1	2,00000	2,00000	0,0000
1,5	2,91390	2,81205	0,10185
2	3,44380	3,34290	0,10090
2,5	3,47488	3,45245	0,02243
3	2,99640	3,00060	0,00420
3,5	2,10175	1,99162	0,11013
4	0,98840	1,00070	0,01230
4,5	-0,04207	0,60179	0,64386
5	-0,58400	0,75940	1,34340
5,5	-0,12760	1,28806	1,41566
6	1,94100	2,00230	0,06130

Расхождение значений в узлах интерполяции объясняется не погрешностью метода, а погрешностью округления дробей.

Задания

По заданным экспериментальным данным найти интерполяционный многочлен Лагранжа и кубический сплайн (на концах отрезка интерполирования потребовать равенство нулю кривизны кривой). Построить графики, привести таблицу значений и погрешностей не только в узлах интерполяции, но и в промежуточных значениях. Вычисления проводить с округлениями до четырех знаков после запятой.

Варианты:

1.	x	4	5	6	7	9
	y	-1	1	2	1	3

2.	x	2	8	12	17	20
	y	10	14	12	11	12

3.	x	2	4	5	6	8
	y	3	1	2	1	2

4.	x	4	5	6	7	9
	y	3	2	2	2	1

5.	x	6	7	8	9	12
	y	-1	0	2	5	8

6.	x	1	2	4	5	6
	y	9	2	7	3	5

7.	x	-3	-1	0	1	4
	y	4	6	5	6	4

8.	x	2	4	6	7	8
	y	9	7	8	7	8

9.	x	-5	-3	-2	2	3
	y	8	6	6	5	1

10.	x	-2	0	1	2	3
	y	56	49	54	50	53

11.	x	1	3	5	6	8
	y	48	43	47	44	46

12.	x	0	2	3	4	6
	y	19	20	18	15	17

13.	x	5	10	17	25	36
	y	15	37	21	25	17

14.	x	1	3	6	7	8
	y	2	0	2	3	0

15.	x	3	5	6	7	11
	y	10	13	15	17	10

16.	x	1	4	5	6	8
	y	19	17	23	23	18

17.	x	2	8	10	17	30
	y	10	14	2	10	12

18.	x	1	4	9	10	13
	y	5	3	6	3	4

19.	x	2	4	6	7	9
	y	5	3	6	4	4

20.	x	1	4	7	8	10
	y	8	15	6	13	12

21.	x	1	5	15	19	30
	y	9	2	4	3	5

22.	x	0	4	5	6	8
	y	20	28	41	58	56

23.	x	1	5	6	7	8
	y	9	7	9	7	8

24.	x	1	4	5	6	9
	y	21	24	30	27	22

25.	x	5	7	9	10	11
	y	10	5	10	12	9

26.	x	0	6	8	9	10
	y	15	19	23	18	22

27.	x	-5	10	15	20	24
	y	18	19	29	19	15

28.	x	0	1	2	3	8
	y	-15	-37	-20	-25	-17

29.	x	-6	-3	0	1	2
	y	2	0	3	5	0

30.	x	3	5	7	8	10
	y	3	5	3	4	7

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

5.1. Общие сведения

В этой лабораторной работе рассматривается один из наиболее распространенных методов решения задачи, поставленной в предыдущей лабораторной работе. Пусть проводится некоторый эксперимент, в результате которого получены наборы значений x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n некоторых параметров этого эксперимента, причем значению x_i соответствует значение y_i , $i=1, 2, \dots, n$. Требуется исследовать зависимость параметра (y) от параметра (x), т. е. получить аналитическое выражение (*эмпирическую формулу*) $y = f(x)$, которая достаточно точно отражала бы эту зависимость.

Эта задача решается по-разному, в зависимости от того, какой смысл вкладывается в слова «достаточно точно». Если выдвигается требование, чтобы кривая $y = f(x)$ прошла через все точки (x_i, y_i) , то мы приходим к методам интерполяции и сплайн-интерполяции, рассмотренным в предыдущей лабораторной работе.

Однако, требование прохождения кривой $y = f(x)$ в точности через все точки (x_i, y_i) можно ослабить и заменить его на требование, чтобы искомая кривая проходила достаточно близко к этим точкам (т. е. $y_i \approx f(x_i)$). Это связано с тем, что всякий эксперимент *имеет свою погрешность измерений* (зависящую от качества измерительной аппаратуры и других априорных обстоятельств), и, поэтому нельзя утверждать, что значения найдены абсолютно точно.

При такой постановке задачи можно (хотя и не всегда) получить достаточно простое аналитическое выражение для эмпирической формулы $y = f(x)$. Оценку качества формулы можно провести, придерживаясь условия, чтобы величина $\max_{i=\overline{1, n}} |y_i - f(x_i)|$ не пре-

вышала погрешности эксперимента. Методику определения эмпирической формулы можно разделить на 3 основных этапа:

- а) определение вида функциональной зависимости: линейная,

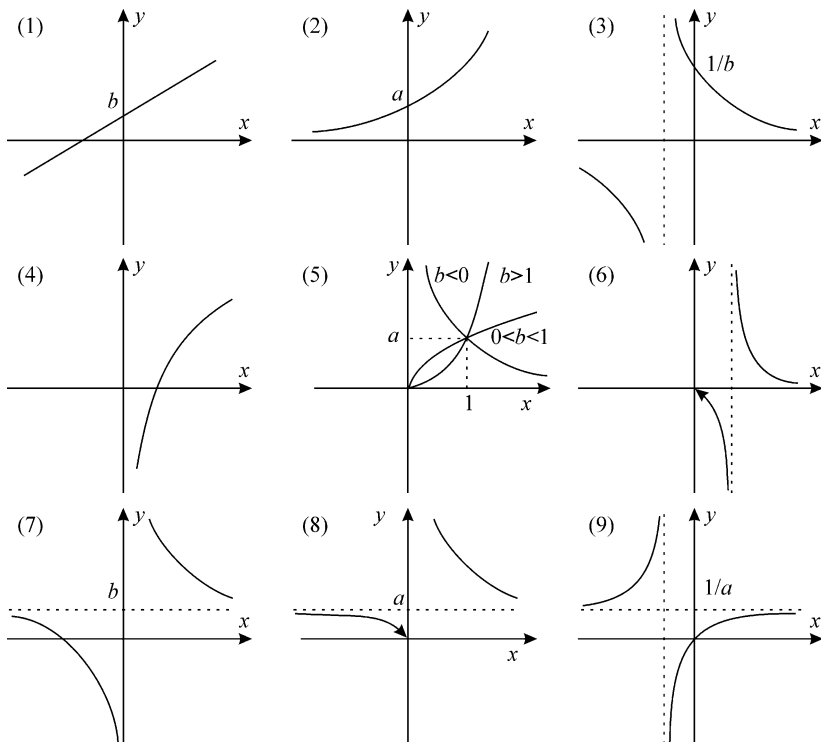
- степенная, показательная, логарифмическая и т.д.;
- б) вычисление коэффициентов эмпирической формулы по методу наименьших квадратов;
- в) оценка погрешности найденной формулы.

5.2. Выбор эмпирической формулы

В качестве основных будем рассматривать следующие девять формул, содержащих по два параметра:

- (1) $y = ax + b$, (2) $y = a \cdot b^x$, (3) $y = 1/(ax + b)$,
 (4) $y = a \ln x + b$, (5) $y = a \cdot x^b$, (6) $y = \frac{a}{\ln x + b}$,
 (7) $y = \frac{a}{x} + b$, (8) $y = a \cdot \sqrt[b]{x}$, (10) $y = \frac{x}{ax + b}$.

Графики указанных зависимостей имеют вид:



Для выбора наиболее подходящей (одной или нескольких) формулы можно поступить следующим образом. Нанесем на координатную плоскость все точки (x_i, y_i) из исходной таблицы значений и соединим их плавной (насколько это возможно) линией. Сравнивая полученную линию с девятью эталонными графиками, выберем один или несколько наиболее похожих.

После того, как мы определили вид эмпирической формулы, находим коэффициенты a и b в этой формуле и проводим оценку погрешности. Для этого могут служить величины:

$\max_{i=\overline{1,n}} |y_i - f(x_i)|$ – максимальная абсолютная погрешность;

$\max_{i=\overline{1,n}} \left| \frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \right| \cdot 100\%$ – максимальная относительная погрешность.

В технических задачах используется, как правило, максимальная относительная погрешность.

Пользуясь этими величинами, можно сравнить качество нескольких подходящих зависимостей по принципу минимизации максимальной погрешности.

5.3. Метод наименьших квадратов для двухпараметрической зависимости

Итак, мы будем искать такую формулу $y = f(x)$ по таблице значений (x_i, y_i) , которая обеспечивала бы наименьшее (в определенном роде) отклонение кривой от точек (x_i, y_i) . Так как параметры a и b пока неизвестны, то можно записать, что $y = \varphi(x, a, b)$.

Определим отклонение в i -й точке как величину $d_i(a, b) = (y_i - \varphi(x_i, a, b))^2$. Видно, что отклонение в данном случае есть функция 2-х переменных.

Упражнение 1. Укажите на графике расстояния, соответствующие отклонениям.

Для того чтобы найти значения параметров a и b , при которых суммарные отклонения $S(a, b) = \sum_{j=1}^n d_j(a, b)$ **были бы наименьшими**,

следует исследовать на экстремум функцию 2-х переменных. Как известно, для этого надо решить систему уравнений относительно

$$a \text{ и } b: \begin{cases} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = 0 \end{cases}. \text{ В случае, когда функция } y = \varphi(x, a, b) \text{ зависит}$$

от параметров a и b нелинейно, данная система (даже для 2-х параметров) представляется весьма сложной для анализа. Поэтому более *подробно мы рассмотрим случай линейной зависимости* от параметров.

В этом случае система имеет вид: $\begin{cases} s_2 a + s_1 b = t_1 \\ s_1 a + s_0 b = t_0 \end{cases}$, где $s_k = \sum_{j=1}^n x_j^k$,

$t_k = \sum_{j=1}^n x_j^k y_j$. Эта система всегда имеет решение (например, с использованием формул Крамера):

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}, \quad \text{где } \Delta = s_0 s_2 - s_1^2, \\ \Delta_a = t_1 s_0 - t_0 s_1, \quad \Delta_b = t_0 s_2 - t_1 s_1.$$

Упражнение 2. Докажите, что последняя система всегда имеет единственное решение.

Упражнение 3. Докажите, что решение последней системы доставляет минимум для функции $S(a, b)$

5.4. Сведение некоторых нелинейных зависимостей к случаю линейной зависимости (метод линеаризации)

В 4.3 мы подробно остановились на линейной эмпирической формуле, так как в этом случае формулы для нахождения параметров a и b имеют простой вид. Оказывается, что любую из приведенных в 4.2 зависимостей можно свести к линейной путем несложных преобразований.

Например, логарифмируя формулу (5), получим $\ln y = \ln a + b \ln x$. Теперь, вводя новые неизвестные $Y = \ln y$, $X = \ln x$ и переобозначив параметры $A = b$, $B = \ln a$, приходим к линейной зависимости $Y = AX + B$. После нахождения коэффициентов A и B описанным в 4.3 методом, исходные параметры найдем по обратным формулам $a = e^B$, $b = A$.

Упражнение 4. Покажите, как остальные зависимости из 4.2 можно свести к линейной зависимости.

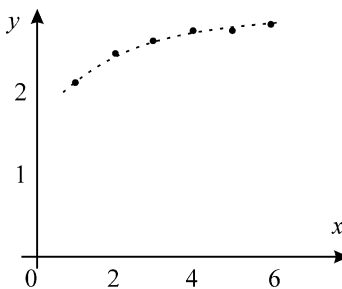
5.5. Пример нахождения коэффициентов эмпирической формулы в случае двухпараметрической зависимости

Пусть дана таблица экспериментальных данных:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81

Изобразим точки (x_i, y_i) на координатной плоскости и соединим их плавной линией:

Остановим свой выбор на формуле (9). Проведем преобразования переменных $Y = 1/y$, $X = 1/x$ и переобозначим коэффициенты $A = b$, $B = a$. Получим новую таблицу данных (округления проведем с точностью до четырех знаков после запятой):



X_i	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667
Y_i	0,4739	0,4082	0,3831	0,3663	0,3636	0,3559

Для нахождения коэффициентов линейной зависимости $Y = AX + B$ проведем необходимые вычисления коэффициентов

системы s_k и t_k : $s_0 = 6$, $s_1 = 2,45$, $s_2 = 1,4914$, $t_0 = 2,3510$, $t_1 = 1,0293$. Получили систему линейных алгебраических уравнений

$$\text{для нахождения коэффициентов } A \text{ и } B: \begin{cases} 1,4914 \cdot A + 2,45 \cdot B = 1,0293 \\ 2,45 \cdot A + 6 \cdot B = 2,3510 \end{cases}$$

Решая ее, получим: $A = 0,1412$, $B = 0,3342$, или $Y = 0,1412 \cdot X + 0,3342$. Переходя к «старым» переменным, получим

$$\text{окончательный вид эмпирической формулы: } y = \frac{x}{0,3342 \cdot x + 0,1412}$$

Попробуем теперь провести вычисления для формулы (5) (случай $0 < b < 1$). Прологарифмируем соотношение (5) и проведем преобразования переменных $Y = \ln y$, $X = \ln x$ и переобозначим коэффициенты $A = b$, $B = \ln a$. Получим новую таблицу данных (округления проведем с точностью до четырех знаков после запятой):

X_i	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918
Y_i	0,7467	0,8961	0,9594	1,0043	1,0116	1,0332

Для нахождения коэффициентов линейной зависимости $Y = AX + B$ проведем необходимые вычисления коэффициентов системы s_k и t_k : $s_0 = 6$, $s_1 = 6,5793$, $s_2 = 9,4099$, $t_0 = 5,6512$, $t_1 = 6,5467$. Получили систему линейных алгебраических уравнений

$$\text{для нахождения коэффициентов } A \text{ и } B: \begin{cases} 9,4099 \cdot A + 6,5793 \cdot B = 6,5467 \\ 6,5793 \cdot A + 6 \cdot B = 5,6512 \end{cases}$$

Решая ее, получим: $A = 0,1594$, $B = 0,7671$, или $Y = 0,1594 \cdot X + 0,7671$. Переходя к «старым» переменным, получим окончательный вид эмпирической формулы:

$$y = 2,1535 \cdot x^{0,1594}$$

Замечание. Если мы имеем дело с нелинейной зависимостью вида (2)–(9), параметры которой мы находим, используя метод линеаризации, то мы не находим именно ту функцию, $y = f(x, a, b)$, для которой величина $\max_{i=\overline{1, n}} |y_i - f(x_i)|$ является минимальной, а

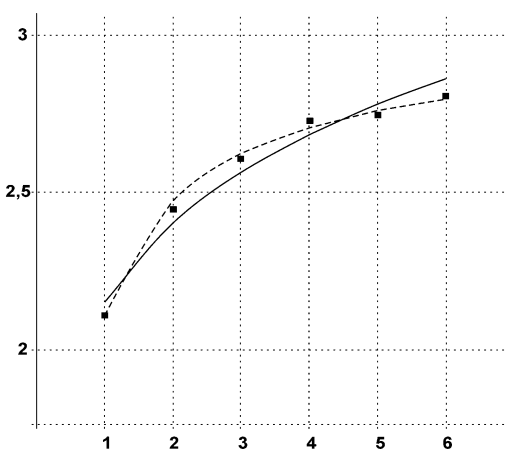
получаем только функцию, близкую к данной. Следует учесть в данном аспекте, что мы выбираем нужную зависимость весьма

субъективно (используя эмпирические точки) и не всегда можем «угадать». Тогда следует поступать следующим образом: сделать расчеты для нескольких наиболее приемлемых зависимостей, а затем выбрать именно ту, для которой величина $\max_{i=1,n} |y_i - f(x_i)|$ будет наименьшей. Конечно, данный процесс будет эффективным только при использовании компьютерной техники.

Следуя этому замечанию, составим таблицу:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81
$y_i^{(1)} = \frac{x_i}{0,3342 \cdot x_i + 0,1412}$	2,1035	2,4704	2,6228	2,7064	2,7591	2,7954
$y_i^{(2)} = 2,1535 \cdot x_i^{0,1594}$	2,1525	2,4040	2,5645	2,6848	2,7820	2,8640
$ y_i - y_i^{(1)} $	0,0065	0,0204	0,0128	0,0236	0,0091	0,0146
$ y_i - y_i^{(2)} $	0,0425	0,0460	0,0455	0,0452	0,0320	0,0540

Изобразим полученные данные на диаграмме. Из таблицы видно, что максимальная абсолютная погрешность для первой формулы составила $\delta^{(1)} = 0,0236$, а для второй формулы $\delta^{(2)} = 0,0540$ (что намного больше). Таким образом, аппроксимация формулой



$y = \frac{x}{0,3342 \cdot x + 0,1412}$ (на диаграмме – пунктирная линия) более точная.

5.6. Метод наименьших квадратов для многопараметрической зависимости

Будем считать, что эмпирическая модель зависит от k параметров и имеет вид $y = \varphi(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. По методу наименьших квадратов для определения параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, которые доставляют минимум функции k переменных $S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k))^2$ (здесь как обычно, n – количество пар экспериментальных точек), необходимо решить систему $\frac{\partial S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial \beta_j} = 0, j=1, 2, \dots, k$.

Довольно простому анализу поддается только случай, когда эмпирическая формула зависит от параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ линейно, а именно: $y = \sum_{j=1}^k \beta_j a_j(x)$, где $a_j(x)$ – известные функции. Еще более прозрачной задача становится, когда $a_j(x) = x^{j-1}$.

В частности, для случая $k=3$ эмпирическая формула будет иметь вид $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$ (квадратичная зависимость), а система

для нахождения коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:
$$\begin{cases} \beta_3 s_4 + \beta_2 s_3 + \beta_1 s_2 = t_2 \\ \beta_3 s_3 + \beta_2 s_2 + \beta_1 s_1 = t_1 \\ \beta_3 s_2 + \beta_2 s_1 + \beta_1 s_0 = t_0 \end{cases},$$

где обозначения те же, что и в п. 4.3.

5.7. Пример нахождения коэффициентов эмпирической формулы в случае многопараметрической зависимости

Пусть дана таблица экспериментальных данных:

x_i	5	10	15	20	25
y_i	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

Считая, что зависимость между этими переменными имеет вид $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$, найти значения параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ по методу наименьших квадратов.

Здесь имеет смысл *провести преобразование переменных*, так как непосредственное составление системы приведет к очень большим числам (например $s_4 = 611875$), что в дальнейшем может значительно повлиять на точность нахождения решения этой системы.

Переобозначим: $X = \frac{x-15}{5}$, $Y = 10(y-60)$. Таблица примет вид:

X_i	-2	-1	0	1	2
Y_i	-7	-2	1	49	102

Так как зависимость между старыми и новыми переменными линейная, то вид эмпирической функции останется прежним, а именно квадратичная функция $Y = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2$ (хотя, чтобы найти связь между старыми и новыми переменными стоит потрудиться). Система для нахождения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ примет вид:

$$\begin{cases} 34\alpha_3 + 10\alpha_1 = 427 \\ 10\alpha_2 = 269 \\ 10\alpha_3 + 5\alpha_1 = 143 \end{cases} \quad \text{Решая ее, получим функцию}$$

$Y = 8,457 + 26,9 \cdot X + 10,07 \cdot X^2$, или, после возвращения к «старым переменным»: $y = 61,84 - 0,67 \cdot x + 0,04 \cdot x^2$.

Задания

Задание 1. Подобрать подходящий вид двухпараметрической зависимости (1)-(9) (взять несколько видов зависимости) и найти значения параметров a и b методом наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным:

Варианты	x	1	2	3	4	5	6
1	y	-2,245	0,288	2,878	5,298	7,845	10,776
2	y	0,800	1,392	2,400	4,266	6,768	12,313
3	y	0,539	0,408	0,373	0,344	0,321	0,274
4	y	-4,889	-3,918	-3,315	-2,423	-2,280	-2,036
5	y	0,484	1,584	3,319	5,178	7,271	10,454
6	y	1,790	1,269	1,120	1,138	1,043	1,015
7	y	4,940	3,945	3,367	3,353	2,898	3,370
8	y	3,509	2,437	1,202	0,742	0,473	0,257
9	y	0,521	0,818	1,124	1,371	1,657	1,661
10	y	-2,175	0,345	2,719	4,806	7,628	11,912
11	y	0,910	1,580	2,572	3,956	7,084	11,303
12	y	0,518	0,467	0,364	0,374	0,332	0,280
13	y	-4,719	-3,798	-2,976	-2,827	-2,414	-1,906
14	y	0,543	1,709	3,127	5,086	8,445	10,194
15	y	2,040	1,260	1,139	0,971	0,913	0,993
16	y	4,751	4,751	4,751	4,751	4,751	4,751
17	y	3,898	2,468	1,318	0,735	0,442	0,254
18	y	0,507	0,869	1,207	1,250	1,616	1,574
19	y	-2,291	0,304	2,928	5,628	7,820	10,300
20	y	0,809	0,304	2,928	5,628	7,820	10,300
21	y	0,507	0,392	0,386	0,349	0,339	0,284
22	y	-4,622	-3,749	-2,763	-2,463	-2,503	-2,064
23	y	0,503	1,742	3,446	4,961	7,661	10,449
24	y	1,970	1,328	1,111	1,090	1,059	0,875
25	y	5,056	4,076	3,343	3,041	3,310	3,101
26	y	3,565	2,340	1,276	0,829	0,456	0,269
27	y	0,490	0,884	1,226	1,416	1,552	1,877
28	y	-2,382	0,322	2,951	5,265	7,459	9,426
29	y	0,800	1,475	2,481	4,496	6,798	11,774
30	y	0,469	0,453	0,410	0,327	0,320	0,294

Изобразить данные графически. Указать максимальную абсолютную погрешность для каждого вида формулы и выбрать наилучшую зависимость.

Задание 2. Для квадратичной зависимости $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$ найти значения параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ методом наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным:

Варианты	x	2	3	4	5	6
1	y	-0,835	-1,408	-0,861	0,457	2,945
2	y	-0,841	-1,418	-0,868	0,460	2,967
3	y	-0,847	-1,428	-0,874	0,463	2,989
4	y	-0,853	-1,439	-0,880	0,467	3,010
5	y	-0,860	-1,449	-0,886	0,470	3,032
6	y	-0,866	-1,459	-0,893	0,473	3,054
7	y	-0,872	-1,470	-0,899	0,477	3,075
8	y	-0,878	-1,480	-0,905	0,480	3,097
9	y	-0,884	-1,490	-0,912	0,484	3,119
10	y	-0,890	-1,501	-0,918	0,487	3,140
11	y	-0,896	-1,511	-0,924	0,490	3,162
12	y	-0,902	-1,521	-0,931	0,494	3,184
13	y	-0,909	-1,532	-0,937	0,497	3,205
14	y	-0,915	-1,542	-0,943	0,500	3,227
15	y	-0,921	-1,552	-0,950	0,504	3,249
16	y	-0,927	-1,563	-0,956	0,507	3,270
17	y	-0,933	-1,573	-0,962	0,510	3,292
18	y	-0,939	-1,583	-0,969	0,514	3,314
19	y	-0,945	-1,594	-0,975	0,517	3,335
20	y	-0,952	-1,604	-0,981	0,520	3,357
21	y	-0,958	-1,614	-0,988	0,524	3,379
22	y	-0,964	-1,625	-0,994	0,527	3,400
23	y	-0,970	-1,635	-1,000	0,531	3,422
24	y	-0,976	-1,646	-1,007	0,534	3,444
25	y	-0,982	-1,656	-1,013	0,537	3,465
26	y	-0,988	-1,666	-1,019	0,541	3,487
27	y	-0,995	-1,677	-1,026	0,544	3,509
28	y	-1,001	-1,687	-1,032	0,547	3,530
29	y	-1,007	-1,697	-1,038	0,551	3,552
30	y	-1,013	-1,708	-1,045	0,554	3,574

Изобразить данные графически, указать максимальную абсолютную погрешность.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
<i>Лабораторная работа № 1</i> ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ	5
<i>Лабораторная работа № 2</i> ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	22
<i>Лабораторная работа № 3</i> ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	33
<i>Лабораторная работа № 4</i> ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ	49
<i>Лабораторная работа № 5</i> ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	62

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Лабораторные работы
для студентов строительных специальностей

В 4 частях

Часть 1

Составители:

БУБНОВ Владимир Федорович
ВЕРЕМЕНЮК Валентин Валентинович
КРУШЕВСКИЙ Евгений Александрович
КУЗНЕЦОВА Александра Алексеевна

Компьютерная верстка Д.А. Исаева

Подписано в печать 05.05.2011.

Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 4,30. Уч.-изд. л. 3,36. Тираж 200. Заказ 1142.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.