

ISSN 0134-9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 34

*Сборник включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук*

Минск
БНТУ
2019

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

Т 34

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Редакционная коллегия:

А.В. Чигарев (председатель, главный редактор), Ю.В. Василевич (зам. председателя),
С.Е. Карпович, В.С. Вихренко, В.А. Чигарев (технический редактор), А.В. Дубовик
(компьютерная верстка), А.В. Глембоцкий (эл. макет)

Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков, В.С. Вихренко
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, В.М. Хвисевич,
А.И. Дудяк, Г.В. Смирнов, В.А. Кукареко

Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, С.А. Чижик, П.Н. Конон

Электромеханика: М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо, В.Т. Минченя

Механика машин: Ю.М. Плескачевский, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег

Мехатроника и интеллектуальные системы: А.В. Гулай, Л.Г. Красневский, С.Е. Карпович, Р.М. Асимов

Биомеханика и роботы: Г.И. Михасев, А.В. Чигарев, С.Е. Карпович, В.Т. Минченя

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), А.А. Буренин (Россия), J. Grabski (Польша),
Р.А. Васин (Россия), G. Gudehus (Германия), Р.И. Непершин (Россия),
В.В. Лобода (Украина), Б.Д. Аннин (Россия), А.Ф. Ревуженко (Россия)
Н.Ф. Морозов (Россия), А.Ф. Ревуженко, Ю.М. Плескачевский (Беларусь),
K. Zimmermann (Германия), А.И. Шашкин (Россия), G.P. Cherepanov (США),
Ю.В. Немировский (Россия), С.В. Харитончик (Беларусь), В.С. Бондарь (Россия)

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Интеллектуальные и мехатронные системы»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 292 22 63, 299 92 52
E-mail: seminar.mechatronics@gmail.com

В сборнике печатаются научные статьи по механике, компьютерному моделированию, мехатронике и смежным научным направлениям. Содержатся научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и исследовательских учреждений. Включены материалы докладов международной конференции «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем».

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа, мехатроника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, дизайн-конструирование мехатронных систем, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Мехатроника», «Механика деформируемых тел», «Техническая механика» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов статей могут не совпадать с позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник полезен для преподавателей высших учебных заведений, научно-инженерных работников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов технических вузов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

© Белорусский национальный
технический университет, 2019

ТЕРМОУПРУГИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ КОЛЬЦЕВЫХ НАГРУЗКАХ

¹Плескачевский Ю.В., ²Журавков М.А., ³Старовойтов Э.И.

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный университет

³Белорусский государственный университет транспорта

Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий. Поэтому создание расчетных моделей подобных элементов конструкций является актуальной проблемой.

На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью учета физически нелинейного деформирования материалов слоев и комплексного термосилового воздействия.

В монографиях [1–3] рассмотрены различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [4–7] исследовано деформирование слоистых балок и пластин при изотермических нагрузках. Работы [8–13] посвящены изучению термосилового нагружения трехслойных оболочек, стержней и пластин. Постановка и методика решения краевой задачи о циклическом нагружении упругопластических композитных тел в нейтронном потоке приведены в [14].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом деформировании трехслойной круговой пластины в температурном поле. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (рисунок 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r , φ , z . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направим ей перпендикулярно вверх (рис. 1). Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

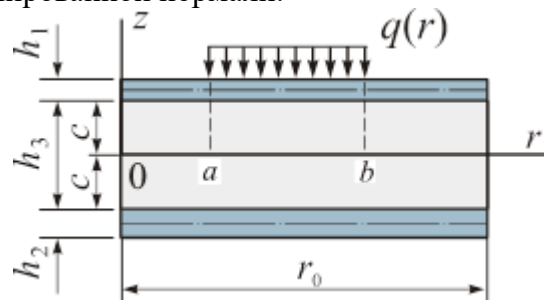


Рис. 1. Схема нагружения

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$ и подводится тепловой поток q_t . Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины теплоизолированными. Это

позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять с достаточной точностью по формуле [1]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k.$$

где λ_{tk} , C_k , ρ_k – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала k -го слоя.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_{\varphi}^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $w = w(r)$, $u = u(r)$, $\psi = \psi(r)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi.$$

После интегрирования этого выражения получим формулы выражающие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (2)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши. Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$ введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} dz, \quad M_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} z dz, \quad (3)$$

$$H_{\alpha} = M_{\alpha}^{(3)} + c(T_{\alpha}^{(1)} - T_{\alpha}^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Для связи деформаций и напряжений воспользуемся термоупругими соотношениями закона Гука в девiatorно-шаровой форме

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1,2,3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$ – девiatorные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; T_k – известная температура (1); α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Уравнения равновесия в усилиях рассматриваемой пластины получены вариационным методом. Температура явным образом в них не входит, поэтому они формально совпадают с аналогичными уравнениями для случая изотермических нагрузок [2]. Выразив во внутренних усилиях напряжения через деформации с помощью закона Гука (4), и далее через перемещения (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым перемещений:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_3 w_{,r}) - 2cG_3 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q .$$

Здесь дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются формулами:

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \quad (6)$$

Коэффициенты a_i определяются интегральными соотношениями, т.к. модули упругости материалов в слоях изменяются по их толщине вместе с температурой:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \quad (7)$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \quad K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Зависимость параметров упругости материалов слоев описывается формулой Белла [1]. Если температурное поле усреднено по толщине k -го слоя пластины, то значения упругих параметров постоянно внутри слоя:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

В этом случае, после интегрирования выражений [7] получим формулы для коэффициентов, формально совпадающие с приведенными в [1], но с пониженными по величине упругими постоянными материалов слоев за счет действия температуры.

Краевая задача определения функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений (5) силовых или кинематических граничных условий:

- при заделке контура пластины

$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \text{ при } r = 1), \quad (8)$$
- при шарнирном опирании пластины

$$(u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1).$$

2. Общее решение краевой задачи. Используя полученное первое и третье уравнения из системы (10), можно исключить из второго уравнения этой же системы радиальное перемещение $u(r)$ и прогиб $w(r)$. В результате получим неоднородное модифицированное уравнение Бесселя для нахождения функции $\psi(r)$:

$$L_2(\psi) - \beta^2\psi = f. \quad (9)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2cb_3G_3}{b_1b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_3^2}{a_1},$$

$$f(r) = \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[\frac{p(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_1b_3} + \frac{b_2}{b_3r} \left(\int qr dr - C_1 \right) \right],$$

где в константу интегрирования C_1 включены числовые множители.

Решение полученного уравнения можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения ψ_r неоднородного уравнения (9). В результате получаем

$$\psi_r = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r,$$

$$\psi_r = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr. \quad (10)$$

где $I_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка; $K_1(\beta r)$ – функция Макдональда; C_2, C_3 – константы интегрирования.

После этого прогиб и радиальное перемещение следуют из оставшихся уравнений системы (5). В итоге

$$w = \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q) dr + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4 b_3} + C_6 \ln r + C_4, \quad (11)$$

$$u = \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi - \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}.$$

Здесь L_2^{-1} , L_3^{-1} – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (6)

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr.$$

Исходя из условия гладкости решения в центре пластины ($r = 0$) для сплошных пластин при непрерывных нагрузках необходимо в выражениях (10), (11) положить $C_1 = C_3 = C_6 = C_8 = 0$. Остальные четыре константы интегрирования определяются из граничных условий (8).

В результате точное решение задачи теории термоупругости о деформировании сплошной круглой трехслойной пластины принимает вид:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) - K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr,$$

$$w = \frac{1}{b_3} \left[b_2 \left(\frac{C_2}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r dr \right) - \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) dr + \frac{C_3 r^2}{4} + C_4 \right], \quad (12)$$

$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q) - \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi + C_7 r \right].$$

Если контур пластинки заделан, то, удовлетворяя условиям (8), получим следующие константы интегрирования:

$$C_2 = - \frac{\psi_r}{I_1(\beta)} \Big|_{r=1}, \quad C_4 = - b_2 \left(\frac{C_2}{\beta} I_0(\beta) + \int \psi_r dr \Big|_{r=1} \right) + \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) dr \Big|_{r=1} - \frac{C_5}{4},$$

$$C_5 = 2 \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}, \quad C_7 = \left(\frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}.$$

В этом случае решение (12) не зависит явно от температуры. Она будет влиять только на значения модулей упругости материалов.

3. Изгиб кольцевой нагрузкой. Рассмотрим деформирование круговой трехслойной пластины кольцевой нагрузкой. Для удобства аналитической записи воспользуемся функцией Хэвисайда нулевого порядка:

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть на пластину действует локальная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу относительного радиуса $a \leq r \leq b$ (см. рисунок 1), перпендикулярно внешнему слою. Тогда ее можно записать так:

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad p = 0. \quad (14)$$

Так, интегральные операторы третьей степени от функций Хэвисайда, входящих в (14) будут:

$$L_3^{-1}(H_0(b-r)) = \left(\frac{r^3}{16} - \frac{b^4}{16r} - \frac{b^2 r}{4} \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r),$$

$$L_3^{-1}(H_0(a-r)) = \left(\frac{r^3}{16} - \frac{a^4}{16r} - \frac{a^2 r}{4} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \quad (15)$$

Сдвиг в заполнителе следует из (10), с учетом (15):

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] - \\
& - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(a-r) \left[\frac{a^2}{r} - r + 2a(K_1(\beta a)I_1(\beta r) - I_1(\beta a)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.
\end{aligned}$$

Прогиб $w(r)$ и радиальное перемещение $u(r)$ круговой трехслойной пластины формально сохраняют вид (12), однако входящие в них интегралы от нагрузки (14) будут:

$$\begin{aligned}
\int L_3^{-1}(q) dr &= q_0 \left[\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right] H(b-r) - \\
& - q_0 \left[\frac{r^4 - 5a^4}{64} - \frac{a^4}{16} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{a^2 r^2}{16} \right] H(a-r), \\
\int \Psi dr &= \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\
& \times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \times \\
& \times H_0(a-r) \left[\frac{a^2 - r^2}{2} + a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{2a}{\beta} (K_1(\beta a)I_0(\beta r) + I_1(\beta a)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right].
\end{aligned}$$

Константы интегрирования при защемленном контуре пластины следующие:

$$C_1 = -\frac{q_0(b^2 - a^2)}{2}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) + aK_1(\beta)I_1(\beta a) \right),$$

$$C_3 = \frac{q_0 \gamma_1}{\beta^2} (bI_1(\beta b) - aI_1(\beta a)),$$

(17)

$$C_4 = -\frac{b_2 \gamma_1 q_0}{b_3 \beta^4 I_1(\beta)} \left(\frac{I_0(\beta) \beta (b^2 - a^2)}{2} - bI_1(\beta b) + aI_1(\beta a) \right) + \frac{q_0(b^4 - a^4)}{32b_3} + \frac{q_0(b^2 - a^2)}{16b_3},$$

$$C_5 = \frac{q_0}{8} (2b^2 - b^4 - 2a^2 + a^4), \quad C_6 = \frac{q_0}{16b_3} (b^4 - a^4), \quad C_7 = \frac{a_3 q_0}{4b_3 a_1} (b^2 - a^2), \quad C_8 = 0.$$

Константы интегрирования при шарнирном опирании контура:

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5),$$

$$C_5 = q_0 \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{4a_1(a_6 + a_7)} \left(b^2 \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) - a^2 \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \right) - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz,$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1(a_6 + a_7)} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 b^2}{4} \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) - \frac{q_0 a^2}{4} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \right).$$

В последнем случае решение явно зависит от температуры через константу C_5 . Константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют вид (17).

Численные результаты получены для круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины шарнирно опертой по контуру, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, соответствующие механические характеристики материалов приведены в [15]. Величина интенсивности нагрузки $q_0 = 1$ МПа, относительные толщины слоев $h_1 = 0,02; h_2 = 0,06; h_3 = 0,4$.

На рис. 2 а, б показано изменение относительного сдвига в заполнителе и прогиба пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных значениях радиуса b пятна локальной равномерно распределенной поверхностной нагрузки ($a = 0$): 1– $b = 0,5$; 2 – $b = 0,75$; без штриха – $T = 293$ К, со штрихом – $T = 323$ К.

С ростом пятна нагрузки экстремум на графике относительного сдвига в заполнителе (см. рис. 2 а) сдвигается к контуру пластины. При нагревании перемещения увеличиваются пропорционально.

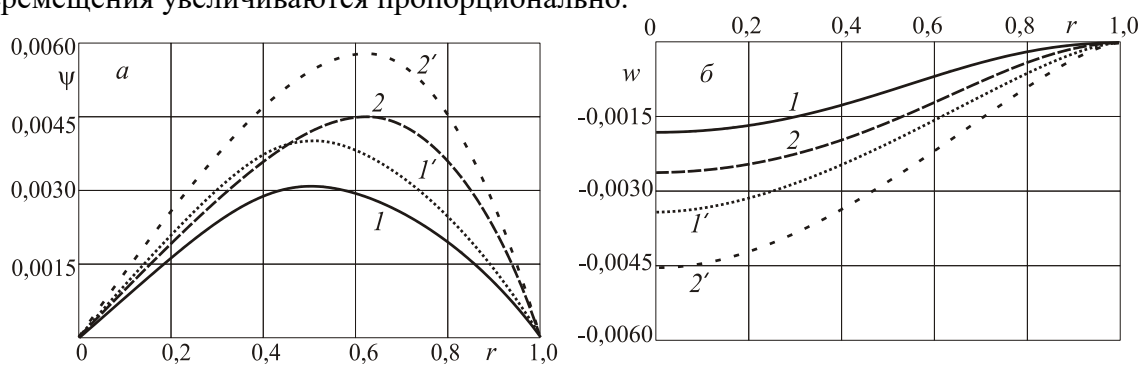


Рис. 2. Зависимость перемещений от радиуса пятна локальной нагрузки

Рис. 3 иллюстрирует зависимость максимального прогиба рассматриваемой пластины от радиуса b пятна поверхностной нагрузки при различных температурах ($a = 0$): 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 323$ К. С увеличением пятна нагрузки прогиб растет нелинейно, достигая максимума при нагрузке, действующей на всю поверхность пластины.

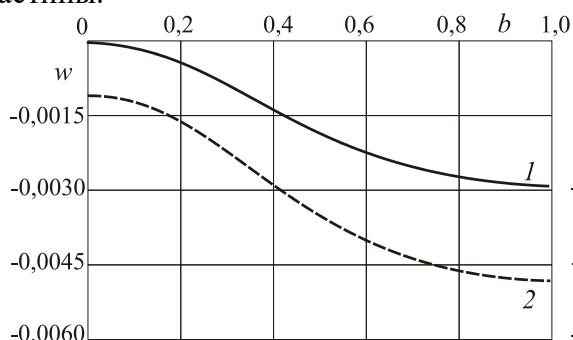


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба от радиуса пятна нагрузки

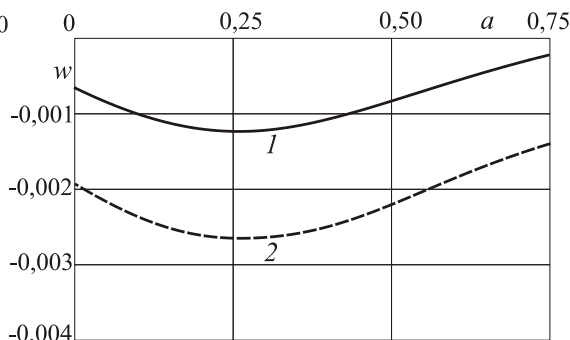


Рис. 4. Зависимость прогиба пластины от положения кольца нагрузки

На рис. 4 показано изменение прогиба пластины в зависимости от положения кольцевого пятна нагрузки постоянной ширины $b - a = 0,25$, при продвижении его к контуру: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 233$ К. При $a = 0$ нагрузка распределена по кругу радиуса b , при $a = 0,75$ кольцо нагрузки примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба наблюдается в случае кольцевой нагрузки при внутреннем радиусе $a = 0,25$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T18P-090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморрадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // – Минск: Бел. наука, 2017. – 275 с.
4. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

5. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
6. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагрузки двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409.
7. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.
8. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 94–103.
9. Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
10. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91-98.
11. Старовойтов, Э. И. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.
12. Плескачевский, Ю. М. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: 2017. – Вып. 32. – С. 5–12.
13. Плескачевский, Ю.М. Локальные нагрузки трехслойной балки со сжимаемым наполнителем в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 12–17.
14. Горшков, А. Г. Циклические нагрузки упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 79–85.
15. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988.– № 4. – С. 11–15.

**О СОТРУДНИЧЕСТВЕ МЕЖДУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМИ
ФАКУЛЬТЕТАМИ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА И БГУ В
ИССЛЕДОВАНИЯХ В ОБЛАСТИ ГИДРОДИНАМИКИ**

¹Конон П.Н., ²Могилевский Е.И.

¹Белорусский государственный университет

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Течения вязкой жидкости со свободной поверхностью являются важной частью многих технологических процессов, например, они используются для организации тепло- и массообмена, встречаются при нанесении покрытий на твердые поверхности. На свободной поверхности возможно образование волн, эволюция возмущений определяется силами инерции, внешними массовыми и поверхностными силами, а также поверхностным натяжением. Для управления процессами волнообразования и неустойчивости необходимо иметь инструмент влияния на указанные силы, например, создание переменного поля массовых сил с помощью вращения, поверхностных сил газовым потоком вдоль поверхности жидкости или переменного поверхностного натяжения с помощью добавления в жидкость поверхностно-активного вещества.

Решению некоторых задач управления процессами неустойчивости и определению фундаментальных механизмов, влияющих на характер течения, посвящены научные проекты: «Гидродинамическая неустойчивость и волны в стекающей пленке при воздействии неравновесной адсорбции-десорбции летучего растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ)» (поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, №18-01-00762, руководитель - проф. В.Я. Шкадов); «Гидродинамические и тепловые процессы производства минеральных и металлических волокон для получения теплоизоляционной ваты, материалов дымоуловителей и фильтров ГРЭС и ТЭЦ, армирующих добавок тормозных колодок большегрузных автомобилей» (ГПНИ «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48», № 20161423, руководитель - проф. М.А. Журавков, отв. исполнитель доц. П.Н. Конон); «Стационарные и волновые капиллярные течения во вращающихся объемах жидкости» (поддержан Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований № Ф18Р-225 и Российским фондом фундаментальных исследований №18-51-00006, соруководители П.Н. Конон и Е.И. Могилевский).

Для координации исследований белорусскими и российскими был организован семинар по динамике вязких жидкости на механико-математических факультетах БГУ и МГУ имени М.В. Ломоносова, проходивший в режиме видеоконференции, под руководством профессора В.Я. Шкадова, доцентов А.Н. Белоглазкина, П.Н. Конона, Е.И. Могилевского, ассистента А.И. Алексюка. Информация о видеосеминаре: программа заседаний, аннотации докладов — размещается в сети Интернет по адресу <http://new.math.msu.su/department/aeromech/research.php?p=viscousfluidsdynamics>.

В конце первого полугодия совместной работы 7-8 декабря 2018 года на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета состоялся Международный семинар по динамике вязких жидкостей, который являлся заключительным в 2018 году заседанием совместного семинара групп БГУ и МГУ имени М.В. Ломоносова. Были заслушаны следующие сообщения:

1. Алексюк А.И. (МГУ им М.В. Ломоносова), Шкадов В.Я. (МГУ им М.В. Ломоносова). Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью.

2. Белоглазкин А.Н. (МГУ им М. В. Ломоносова), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова), Кулаго А.Е. (РЭУ им. Г.В. Плеханова). Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости.

3. Могилевский Е.И. (МГУ им М. В. Ломоносова), Конон П.Н. (БГУ), Кулаго А.Е. (РЭУ им. Г.В. Плеханова), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова). Равновесные формы капель во внешних полях.

4. Конон П.Н. (БГУ), Жук А.В. (БГУ), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова). Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

5. Ермоленко А.И. (БГУ), Конон П.Н. (БГУ). Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил.

В работе семинара принимали участие сотрудники МГУ имени М.В. Ломоносова, Института тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, сотрудники, аспиранты и студенты БГУ (рис. 1).



Рис. 1. Некоторые участники работы семинара

Ниже приводятся аннотации всех сообщений.

Сообщение А.И. Алексюка, В.Я. Шкадова «Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью»

Рассматриваются двухфазные течения неперемешивающихся вязких несжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения в поле силы тяжести. Движение каждой фазы описывается уравнениями Навье-Стокса. Численное решение начально-краевых задач проводится на основе стабилизированного метода конечных элементов (GLS-метод – Galerkin/Least-Squares), который ранее успешно применялся для решения двумерных и трехмерных задач обтекания тел потоком вязкой жидкости (газа) [1, 2]. Пространства пробных и весовых функций дополняются функциями, которые допускают разрывы параметров потока внутри ячеек, содержащих границу раздела (XFEM – Extended Finite Element Method) [3]. Для отслеживания перемещений границы раздела применяется метод функции уровня (level-set method). Используемые

методы позволяют моделировать течения с изменяющейся топологией свободной поверхности на неподвижных расчетных сетках.

Проведено тестирования численных алгоритмов на различных течениях со свободной поверхностью. Получено хорошее соответствие результатов расчетов задач о всплытии “двумерного пузыря” (рис. 2а) и о стекании пленки по плоской вертикальной стенке (рис. 2b) с данными [3, 4]. В качестве примера задачи с изменяющейся топологией границы раздела представлены расчеты развития неустойчивости Рэля-Тейлора из состояния равновесия (рис. 2с): покоящийся слой жидкости находится под слоем более тяжелой жидкости.

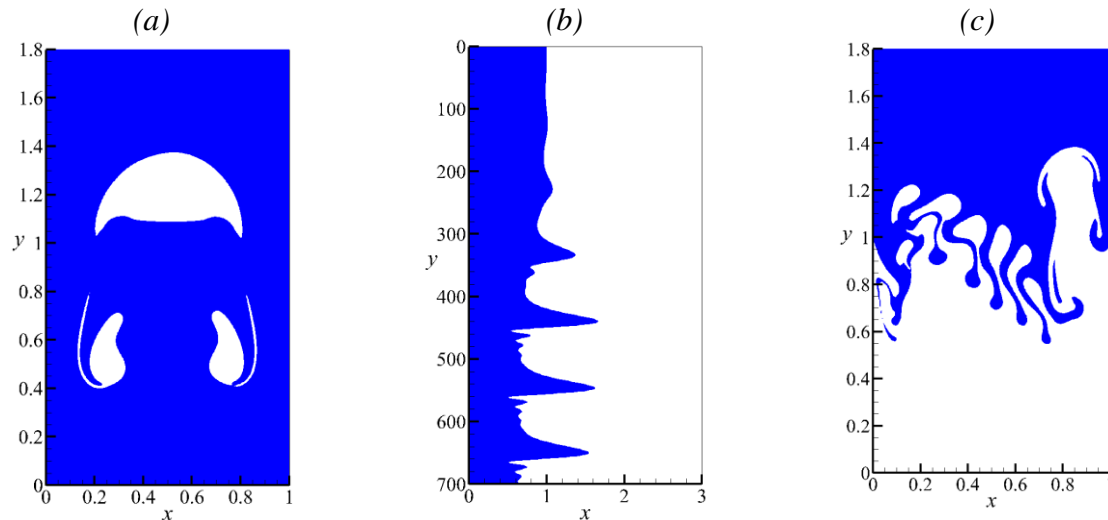


Рис. 2 Примеры тестовых расчетов: (а) всплытие “двумерного пузыря”; (b) стекание пленки по вертикальной стенке; (с) развитие неустойчивости Рэля-Тейлора

Сообщение А.Н. Белоглазкина, В.Я. Шкадова, А.Е. Кулаго «Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости»

Система эволюционных уравнений Капицы-Шкадова [5], описывающая волновое течение жидких пленок, изначально допускает вариации во времени интегральных характеристик течения, будь то средняя толщина или расход. Использование инвариантных свойств эволюционных уравнений позволяет производить расчеты течений пленки, как для режимов постоянной толщины, так и для режимов постоянного расхода, что позволяет установить соответствие между характеристиками регулярной волны, наблюдаемой в эксперименте или при численных расчетах течения для всей числовой оси, и периодическим по пространству предельным решением эволюционной системы уравнений.

На основе анализа глобального аттрактора (множества предельных решений динамической системы, соответствующих периодическим по пространству решениям системы эволюционных уравнения) было проведено сравнение свойств волновых режимов и полученных характеристик регулярных волн с данными экспериментов по возбуждению волн на поверхности пленки жидкости заданной частотой, численного решения соответствующей пространственной краевой задачи [4].

Приведенные расчеты демонстрируют не только хорошее соответствие формы волны и характеристик возникающего пленочного течения, но и позволяют объяснить наблюдаемую в некоторых расчетах и экспериментальных данных перестройку течения вблизи нейтрального значения возбуждаемой частоты. Представлена неединственность характеристик пленки жидкости при ее возбуждении частотой из области промежуточных семейств. Проведено сравнение с экспериментальными данными для тонкой пленки сильновязкой жидкости [6].

Сообщение Е.И. Могилевского, П.Н. Конона, А.Е. Кулаго, В.Я. Шкадова «Равновесные формы капель во внешних полях»

Рассматривается равновесие конечного объема жидкости под действием капиллярных сил и внешних полей: гравитационного, электрического (для модели идеального проводника), поля центробежной силы. Обсуждаются численные методы решения краевой задачи для уравнения Юнга-Лапласа.

На примере задачи о форме висящей капли показана возможность неединственного решения задачи, для выбора физически реализуемого варианта используется критерий устойчивости [7].

При решении задачи о равновесной форме капли идеального проводника в вертикальном постоянном электрическом поле применяется итерационный метод, идея которого заключается в последовательном решении задачи электростатики для данного приближения формы поверхности и задачи о равновесии жидкости под действием гравитационных, капиллярных и максвелловских напряжений, в предположении, что распределение заряда по поверхности — заданная функция [8]. Показано, что неустойчивые равновесные формы не воспроизводятся при таком методе расчета. Обнаружено, что при наличии электрического поля становятся неустойчивыми формы капель, содержащие «шейку»: у которых радиус пятна соприкосновения с твердой поверхностью меньше наибольшего радиуса горизонтального сечения.

Решена задача о равновесии капли на поверхности горизонтального вращающегося диска. Показано, что достаточно большие капли под влиянием центробежной силы форма трансформируются из почти плоского слоя с закруглением на концах в сравнительно узкий обод с тонкой пленкой внутри. Для фиксированного объема жидкости равновесная форма капли существует только для значений угловой скорости, не превосходящих критическое. Определена зависимость критической угловой скорости от объема капли.

Приводятся результаты наблюдений поведения капли вязкой жидкости на вращающемся диске для докритических и сверхкритических угловых скоростей. При превышении критической скорости капли малого объема утекают в одну сторону, причем форма следа, который она оставляет на поверхности диска зависит от вязкости жидкости (определяется значением числа Экмана). При больших значениях объема капля разрывается на некоторое количество ручейков.

Обсуждаются постановки задач, позволяющие предсказать количество ручейков. Получены неосесимметричные стационарные формы капель как возмущения осесимметричной. Показано, что в случае малой кривизны возмущения представляют собой линейную комбинацию функций Бесселя [9]. Выведено выражение для второй вариации энергии в окрестности осесимметричного решения. Предполагается, что возмущения, искажающие форму капли, отвечают наибольшему по модулю уменьшению энергии при фиксированном значении нормы возмущений в пространстве непрерывных функций. Так как возможны равновесные возмущения, выражающиеся через функции Бесселя, именно эту систему функций предлагается использовать в качестве базиса.

Рассматривается постановка задачи для уравнений Стокса, в которой не предполагается равновесие жидкости относительно подвижной вращающейся системы отсчета. Поле течений может быть найдено с помощью теории потенциала [10], а для определения эволюции использован тот же метод, что и при вычислении равновесной формы капли в электрическом поле.

Результаты работы могут применяться для оптимизации процессов нанесения покрытий, а также производства металлических волокон центробежным способом.

Сообщение П.Н. Конона, А.В. Жука, В.Я. Шкадова «Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра»

С целью изучения процессов центробежного литья металлов в работе исследовано неизотермическое плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции.

Решение изотермической задачи рассмотрено в [11-13]. Движение вязкой жидкости рассматривается в относительной полярной системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, и описывается уравнениями Навье-Стокса с переменной вязкостью, энергии, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. В уравнении энергии учтены конвективные составляющие и диссипативные члены. В случае достаточно быстрого вращения цилиндра получены уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Решения полученной системы ищется прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра, отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности и теплообменом по условиям 3-го рода.

В результате исследований получена и численно решена система дифференциальных уравнений в частных производных определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса Re в поле центробежных сил с учетом изменяющегося температурного поля в жидкости (рис. 3). Проведены сравнения с экспериментами и результатами исследования изотермической задачи. Найдена зависимость времени распада слоя на цилиндре от числа Re . Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя. Основной причиной распада слоя на внутренней цилиндрической вращающейся цилиндрической поверхности является гравитационная неустойчивость, вызванная значительным влиянием силы тяжести по сравнению с центробежными силами.

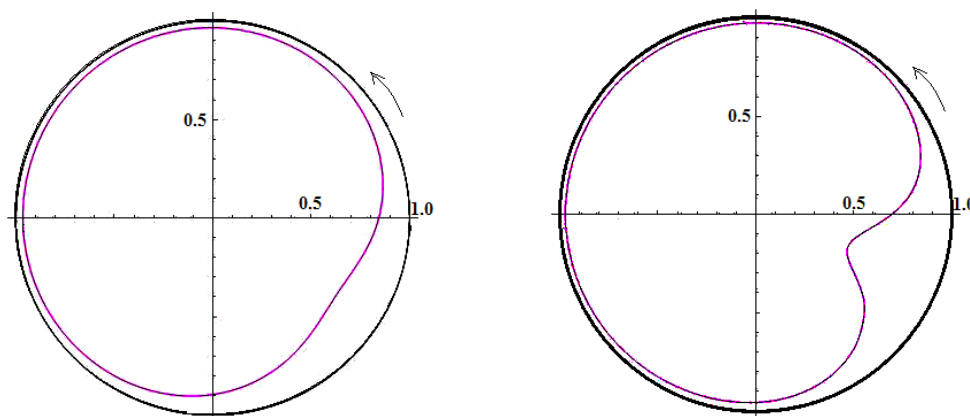


Рис.3. Пример одного из расчетов: поднятие и провисание слоя глицерина в различные моменты времени при заполнении жидкостью в 16,5% объема вращающегося цилиндра

Сообщение А.И. Ермоленко, П.Н. Конона «Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил»

В работе исследовано плоское движение тонких несмешивающихся слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтально расположенного, вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил тяжести и инерции. Подобного рода течения можно использовать при нанесении двухслойных покрытий на цилиндрические поверхности. Используя условие постоянства потока в окружном направлении [14], в работах [15,16] решена задача определения вида поверхностей двух

слоев в случае установившегося движения жидкостей как на внутренней, так и на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки.

В данном исследовании получена общая трехмерная постановка задачи движения двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей в поле центробежных, поверхностных и гравитационных сил.

С помощью основных постулатов теории тонкого слоя [12] система уравнений, представляющая собой постановку двумерной нестационарной плоской задачи, была упрощена. В случае умеренного движения, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье-Стокса, получены окружные и радиальные компоненты скорости, а также взаимосвязанная система уравнений эволюции наружного и внешнего слоев в гравитационном и поверхностном поле. Разработан и реализован численный метод ее исследования, основанный на методе прямых в последующем интегрировании по формулам Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Получены и проанализированы формы раздела слоев и свободной поверхности (рис. 4) от длительного устойчивого состояния при медленном вращении до развития возмущений со временем и распада слоя при увеличении влияния центробежных сил.

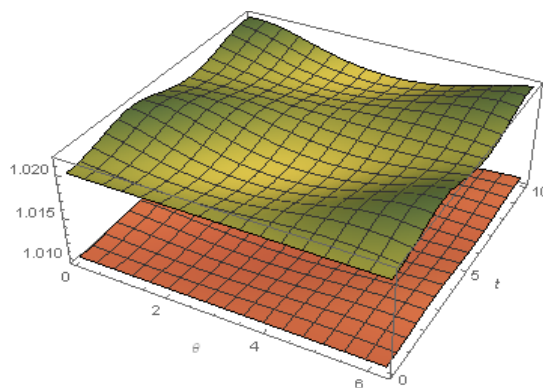


Рис.4. Пример одного из численных расчетов формы раздела двух слоев и свободной поверхности, когда внешний слой меньшей плотности и вязкости

Заключение. В ходе работы семинара были подведены итоги совместной работы групп МГУ имени М.В. Ломоносова и БГУ. Были определены направления дальнейших исследований, обсуждены возможности применения численных методов, представленных в сообщении А.И. Алексюка, В.Я. Шкадова, к решению задач, рассмотренных в докладах П.Н. Конона и др. и А.И. Ермоленко, П.Н. Конона. Результаты, полученные А.Н. Белоглазковым и др. могут использоваться при изучении устойчивости и нелинейных волн, возникающих при движении жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Предполагается совместное экспериментальное исследование устойчивости капли на вращающемся диске в развитие работы Е.И. Могилевского и др.

Принято решение продолжить работу в течении года в форме видеосеминара, а также провести аналогичный семинар в конце 2019 года.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-01-00762, 18-51-00006), Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18Р-225)

ЛИТЕРАТУРА

1. Aleksyuk A.I. Analysis of three-dimensional transition mechanisms in the near wake behind a circular cylinder/ Aleksyuk A.I., Shkadov V.Ya. // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. - 2018. - V. 72, -P.456–466

2. Aleksyuk A.I. Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder/ Aleksyuk A.I., Osipov A.N.// *International Journal of Heat and Mass Transfer*. - 2018. - V.119. - P. 665–677.
3. Sauerland H. The extended finite element method for two-phase and free-surface flows: A systematic study/ Sauerland H., Fries T.-P. // *Journal of Computational Physics*, 2011. V. 230 (9), P. 3369–3390.
4. Nosoko T. The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film/ Nosoko T., Miyara A. // *Physics of Fluids*. 2004. -V. 16 (4). - P. 1118–1126.
5. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести/ Шкадов В.Я. // *Изв. АН СССР. МЖГ*. - 1967. - № 1. - С. 43-51.
6. Panga M.K.R. Long-wavelength equation for vertically falling films/ Panga M.K.R., Mudunuri R.R., Balakotaiah V. // *Phys. Rev. E*. - 2005.- V.71. - P. 036310.
7. Гидродинамика невесомости/ под ред. А.Д. Мышкиса — М. Наука.- 1976. - 576 с.
8. Могилевский Е.И. Равновесные формы висящей капли в электростатическом поле/ Могилевский Е.И., Шкадов В.Я., Шутов А.А. // *Изв. РАН. МЖГ*. - 2012. - № 5. - С. 23-31.
9. Конон П.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске/ Конон П.Н. и др. // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*.-2016. - Вып. 31.- С. 87-94.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 288 с.
11. Епихин В.Е. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Шкадов В.Я. // *ИФЖ*. -1994. -Т.66. -№6. - С. 689-694.
12. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести/ Пухначев В.В. // *ПМТФ*. -1977.- № 3. - С. 78-88.
13. Конон П.Н. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки частично заполненной жидкостью/ Конон П.Н., Жук А.В.// *Механика машин и механизмов*. 2013.- №4(25). - С.32-37.
14. Hansen E. B. Steady, viscous free-surface flow on a rotating cylinder/ Hansen E. B., Kelmanson M. A. // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1994. - V. 272. - P. 91-107.
15. Конон П.Н. Исследование двухслойного течения пленок вязких жидкостей на внутренней поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Ермоленко А.И. // *Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт*. –2016. –№ 1(32). – С. 334-337.
16. Конон П.Н. Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Ермоленко А.И.// *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*. Минск –2017. – Вып. 32. – С. 46-51.

МЕХАТРОННЫЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ ФОТОЛИТОГРАФИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

проф. ¹Карпович С.Е., маг. ¹Кузнецов В.В., студ. ¹Войтов А.Ю.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Введение. Технической основой средств вычислительной техники, систем управления и связи, бытовой радиоэлектронной аппаратуры и т.п. являются изделия электронной техники, такие как большие (БИС) и сверхбольшие (СБИС) интегральные схемы, гибридные интегральные схемы (ГИС), печатные платы. Развитие электронной техники, в особенности наиболее интенсивно развивающейся ее части – микроэлектроники, влечёт за собой развитие соответствующих областей электронного машиностроения и наоборот, появление оборудования нового уровня позволяет осваивать в производстве новые изделия электронной техники. Каждый этап перехода на новый уровень технических параметров изделий радиоэлектроники и их компонентов – будь то создание нового поколения элементной базы, повышение плотности топологии на печатной плате или улучшение качества изображения телевизионной трубки – сопровождается освоением новых или усовершенствованием существующих технологических процессов и нового или усовершенствованного оборудования.

Основой технологии микроэлектроники, как известно, являются процессы фотолитографии, используемые для формирования изображений оригиналов топологии на фотошаблонах и для проекционного переноса этих изображений на кремниевые пластины и другие подложки [1, 2].

Процесс развития фотолитографии представляет собой последовательный переход к обеспечению производства интегральных схем с топологическими элементами все меньших размеров. Так с шестидесятых годов до нашего времени микроэлектроника в своём развитии прошла путь от схем с минимальным элементом 10 мкм до 0,065 мкм, а в экспериментальном освоении 0,045 мкм.

Проекционные системы высокого разрешения. Показатели назначения проекционных систем высокого разрешения оптико-механического оборудования микроэлектроники определяются точностью изготовления оптических элементов, точностью позиционирования их в оптической системе и стабильностью поддержания этих параметров в течение времени жизни проекционной системы [2, 3]. В настоящее время фирмы-изготовители проекционных систем высокого разрешения используют специальное технологическое оборудование для юстировки положения оптических элементов. Основной принцип наладки проекционных систем с помощью этого оборудования заключается в подгонке размеров оправок оптических элементов для того, чтобы исключить перекосы, заклоны, несовмещение оптических осей, устранение зазоров при установке в основной корпус конструкции проекционной системы. Такая технология может обеспечить наладку изделия в требуемом диапазоне показателей назначения на момент изготовления. При эксплуатации геометрия проекционной системы подвержена тепловому (динамическая составляющая) и временному (постоянная составляющая) дрейфам, при этом координаты позиционирования оптических элементов могут выйти за допустимые пределы, обеспечивающие показатели назначения проекционной системы: разрешающая способность, глубина резкости и контрастности изображения, дисторсия.

Проекционные системы конструктивно очень сложны и содержат весьма дорогие объективы с большим количеством линз. Так, современный объектив фотолитографического оборудования имеет длину до 1 м и вес до 1000 кг.

Только сборочный процесс изготовления фотолитографического объектива включает многоэтапную процедуру сборки и разборки с подгонкой и юстировкой оправок линз по схеме, представленной на рисунке 1.

Дальнейшее совершенствование оптических систем фотолитографического оборудования уже становится практически невозможным только за счет повышения качества и точности изготовления и сборки оправок с линзами. Необходимы новые решения, приводящие к автоматической адаптивной юстировке оптических элементов объектива без выполнения многоэтапной процедуры сборки и разборки с соответствующей подгонкой посадочных мест оправок. Нами предложено решение этой проблемы на основе использования системы перемещений на управляемом многокоординатном кольцевом приводе прямого действия [4] и механизме параллельной кинематики с шестью степенями свободы.

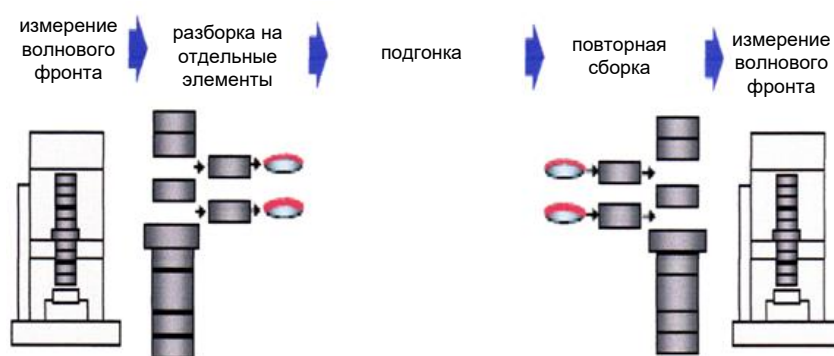


Рис. 1. Схема сборки фотолитографического объектива

Взамен традиционной схемы сборки объектива, описанной выше, нами предлагается все юстировочные операции корректировки положения и ориентации линз осуществлять в автоматическом режиме в собранном объективе за счет использования компьютерно-управляемой системы малых пространственных перемещений в виде двух кинематически связанных колец, встраиваемых в объектив взамен одной оправки [5].

Системы перемещений на кольцевом приводе. Рассмотрим исполнение интегрированной системы многокоординатных перемещений на кольцевом сегментном приводе в проекционных системах фотолитографического оборудования для юстировочных перемещений оправок с линзами. Для этого в конструкцию проекционной системы может быть встроен механизм стабилизации координат позиционирования оптических элементов, позволяющий подстраивать их при сборке и в процессе работы изменении геометрии проекционной системы и расположения оптических элементов вследствие «старения». В результате специальные адаптивные механизмы позиционирования позволят поддерживать на требуемом уровне показатели назначения. При этом для каждого подстраиваемого оптического элемента адаптивный механизм позиционирования предлагается делать на основе исполнительных механизмов с шестью или меньшим числом степеней свободы кольцевого типа с сегментными электромагнитными модулями.

При этом одно кольцо устанавливается неподвижно по отношению к корпусу объектива, а другое с линзой связывается с ним посредством механизма параллельной кинематики на кольцевом многокоординатном синхронном приводе. Такая компоновка объектива позволяет реализовать юстировку оптической системы в автоматическом

режиме в любое время в процессе эксплуатации оборудования. Возможна также реализация адаптивного режима управления многокоординатным приводом по граничным характеристикам глубины резкости, контрастности изображения, дисторсии и разрешающей способности оптической системы. Структурная кинематическая схема такой системы перемещений показана на рисунке 2.

Подвижное кольцо при этом используется для установки на нем оправки с оптическим элементом. В результате конструктивно и кинематически обеспечивается возможность управляемого (в том числе и адаптивного) позиционирования отдельных оптических элементов, в общем случае, с шестью степенями свободы, в небольшом, но достаточном для юстировки оптической системы диапазоне изменения координат как линейных перемещений x, y, z , так и угловых $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, задаваемых в координатной системе конкретного оборудования.

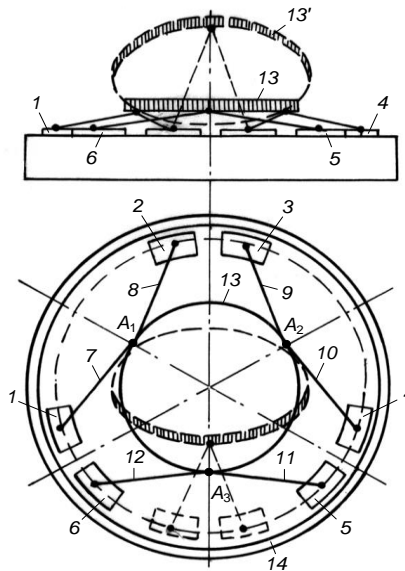


Рис. 2. Система перемещений с шестью степенями свободы

1, 2, 3, 4, 5, 6 – подвижные сегменты; 7, 8, 9, 10, 11, 12 – шатуны; 13 – платформа; 14 – кольцевой статор; A_1, A_2, A_3 – двойные сферические соединения платформы и шатунами

Необходимые малые изменения координат при реализации адаптивной юстировки позволяют легко встраивать исполнительный механизм позиционирования в конструкцию проекционной системы, конфигурируя его в виде двух колец, одно из которых неподвижное в корпусе с электромагнитными модулями движения, а другое подвижное с оправкой для оптического элемента, управляемое через промежуточные кинематические цепи или элементы в виде шатунов со сферическими парами, эксцентров или клиновых преобразователей.

Алгоритмизация и имитационное моделирование системы перемещений. В основе алгоритмов управления исполнительным манипулятором интегрированной системы перемещений лежат аналитические зависимости, связывающие кинематические характеристики задаваемых движений на каждом подвижном сегменте многокоординатного двигателя с тремя линейными x, y, z и тремя угловыми φ, θ, ψ обобщенными координатами перемещаемой каретки в трехмерном пространстве. Такие аналитические зависимости получают при решении прямой и обратной задач кинематики, для которых ранее [4, 6] были предложены математические модели описания топологии и кинематики рассматриваемого манипулятора, обеспечивающего требуемые положение и ориентацию подвижной системы координат каретки по отношению к неподвижной системе координат статора гибридного синхронного двигателя. Как следует из принятой расчетной модели, взаимное положение этих

систем координат зависит одновременно от всех кинематических связей и текущих обобщенных координат.

Разработанный алгоритм решения прямой задачи кинематики основывается на равенстве матрицы M_1 текущего кинематического состояния исполнительного механизма, записываемой в виде:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

матрице M_2 , описывающей положение и ориентацию подвижной каретки:

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & x_0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & y_0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где a_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) – элементы матрицы, рассчитываемые по значениям обобщенных координат привода и конструктивным параметрам механизма, которые определяются по формулам, полученным в работе [4]; $\varphi, \theta, \psi, x_0, y_0, z_0$ – угловые и линейные независимые координаты, задающие положение и ориентацию рабочей каретки в трехмерном пространстве.

На основании условия равенства матриц M_1 и M_2 получены в явном виде формулы решения прямой задачи, состоящей в расчете текущих линейных (x_0, y_0, z_0) и угловых (φ, θ, ψ) координат рабочей каретки в системе координат статора в виде:

$$\begin{aligned} x_0 = a_{14}; \quad y_0 = a_{24}; \quad z_0 = a_{34}; \quad \sin \varphi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}; \\ \sin \theta = -a_{31}; \quad \cos \theta = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}; \quad \sin \psi = \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}; \quad \cos \psi = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что формулы (3) обеспечивают однозначный алгоритм решения прямой задачи кинематики и полностью соответствуют требованиям реализованной системы управления.

Для решения обратной задачи кинематики [7, 8] методами аналитической геометрии нами получены формулы расчета координат положения подвижных сегментов 1, 2, ..., 6 в зависимости от текущего положения каретки, задаваемого координатами точек C_1, C_2, C_3 (рисунок 3).

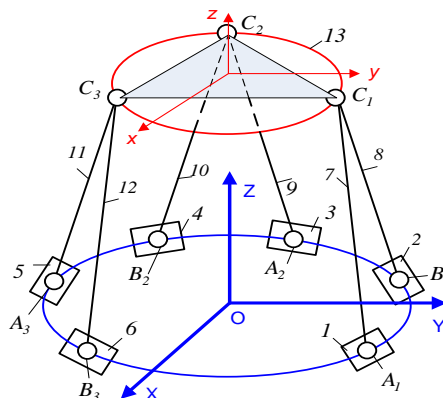


Рис. 3. Расчетная структурно-кинематическая схема исполнительного манипулятора:
1, 2, 3, 4, 5, 6 – сегменты двигателя; 7, 8, 9, 10, 11, 12 – подвижные звенья кинематических цепей; 13 – рабочая каретка

Так, например, для точек $A_1(x_1, y_1)$ и $B_1(x_2, y_2)$ формулы расчета соответствующих координат имеют вид:

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac}; \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{R^2 - x_{1,2}^2}, \quad (4)$$

где a, b, c – параметры, рассчитываемые по формулам:

$$a = 4\left(\left(x^{(C_1)}\right)^2 + \left(y^{(C_1)}\right)^2\right); \quad b = 2Ax^{(C_1)}; \quad c = A^2 - 4\left(y^{(C_1)}\right)^2 R^2, \quad (5)$$

где $x^{(C_1)}, y^{(C_1)}$ – координаты точки C_1 в неподвижной системе координат; A, R – конструктивные параметры механизма.

Координаты точек A_2, B_2 и A_3, B_3 определяются по формулам, аналогичным (4) и (5). При выборе решения учитываются условия бесколлизийной работы подвижных элементов манипулятора.

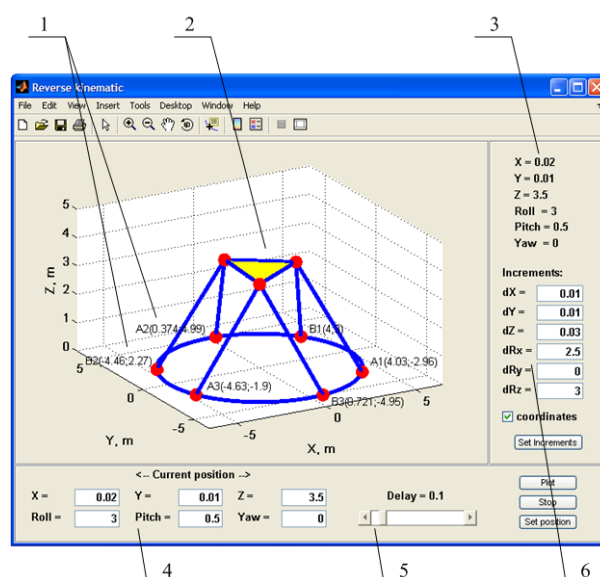


Рис. 4. Интерфейс программы моделирования:

1 – текущие координаты (x, y) привода; 2 – текущее состояние механизма; 3 – текущие координаты каретки; 4 – задаваемые координаты каретки; 5, 6 – параметры визуализации

Для моделирования прямой и обратной задачи кинематики рассматриваемого исполнительного манипулятора в среде MATLAB разработана программа интерактивной визуализации, интерфейс которой представлен на рисунке 4.

Проведенное компьютерное моделирование показало, что для таких систем перемещений с малым осевым размером калибровочные передаточные коэффициенты по всем шести координатам (трем линейным и трем угловым) в диапазонах перемещений: линейных до 1 мм, угловых до 1° , лежат в пределах от 0,01 до 0,02. Это значит, что координатное разрешение по линейным координатам при точности сегментного привода 1 мкм будет равно 10 нм, а угловое разрешение составит $5''$. А это вполне удовлетворяет современным и перспективным требованиям, предъявляемым к проекционной систем фотолитографического оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аваков, С.М. Автоматический контроль топологии планарных структур / С.М. Аваков ; науч. ред. С.Е. Карпович. – Минск : ФУАинформ, 2007. – 168 с.
2. Оптико-механические комплексы бездефектного изготовления фотомасштабов 0,35 мкм и 90 нм / С.М. Аваков // Фотоника. – 2007. – № 6. – С. 35–39.
3. Emilio, M.D.P. Microelectronics / M.D.P. Emilio – Springer Int. Publishing, Switzerland, 2016. – 100 p.

4. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. проф. С.Е. Карповича // Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
5. Huang, Z. *Theory of parallel Mechanisms* / Z. Huang, Q. Li, H. Ding // Springer, 2012 – 419 p.
6. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования : моногр. / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича // Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
7. Жарский, В.В. Системы прямого привода «Рухсервомотор» / В.В. Жарский // Оборудование: рынок, предложение, цены : промышленный журнал. – 2006. – № 02(110). – С. 90–97.
8. Литвинов, Е.А. Компьютерное моделирование прямой и обратной задачи кинематики пространственной системы перемещений с шестью степенями свободы в среде MATLAB/Simulink / Е.А. Литвинов, С.Е. Карпович, В.В. Жарский // Теоретическая и прикладная механика. – 2008. – Вып. 23. – С. 112–117.

ИСКРИВЛЕНИЕ ЛУЧЕЙ ГРАВИТАЦИОННЫХ И ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ МАССИВНЫХ ТЕЛ

¹Чигарев А.В., ²Поленов В.С.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²АНО ВО Автомобильно-транспортный институт, Воронеж

Лучевая кинематика упругих, акустических, электромагнитных волн базируется на принципе Ферма и имеет оптико-механическую аналогию, согласно которой уравнения движения материальных частиц получаются из вариационных принципов механики аналогичных принципам Ферма [1,2].

В однородной изотропной среде лучи прямые линии, вдоль которых происходит перенос энергии в соответствии с законом Пайнтинга-Умова, аналогично тому, как в отсутствие силовых полей частицы движутся равномерно и прямолинейно [2,3]. Неоднородность среды вызывает искривление лучей, аналогично тому, как потенциал гравитационного поля искривляет траекторию материальной частицы [4,5].

Лучи волн, излучаемых с поверхности массивного тела, испытывают в слое атмосферы, прилежащем к поверхности тела, искривления за счет неоднородности и под действием сил гравитации.

1. Уравнения общей теории относительна, описывающие гравитационное поле, создаваемое массой имеют вид [3-5]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = \chi T_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (1.1)$$

где R_{ik} - тензор кривизны, g_{ik} - метрический тензор, T_{ik} - тензор импульса-энергии, R - коэффициент кривизны, λ - малая величина порядка 10^{-23} см^{-2} , χ - универсальная постоянная, зависящая от гравитационной постоянной G порядка $10^{-8} \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$.

Тензор T_{ik} удовлетворяет уравнениям [1-3]:

$$\frac{dT_{ik}}{dx_k} = 0, \quad i, k = 1, \dots, 4. \quad (1.2)$$

Отклонение метрики g_{ik} четырехмерного пространства-времени от евклидовой метрики: $g_{ii} = 1 (i = 1, 2, 3)$, $g_{44} = -1$ проявляется в гравитационных явлениях. Движение материальной точки в гравитационном поле, свободное от воздействия сил (свободная материальная точка) движется по геодезической линии:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Gamma_{rs}^i \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = 0, \quad (1.3)$$

где Γ_{rs}^i - символы Кристоффеля.

$$\Gamma_{rs}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} \right). \quad (1.4)$$

Компоненты метрического тензора играют роль гравитационных потенциалов [4,5].

Как известно, теория скалярного гравитационного потенциала Ньютона следует из общей теории относительности и описывается уравнением, следующим из системы (1.1):

$$\nabla^2 g_{44} = \frac{2\rho}{\chi} - \frac{1}{\chi} g_{44} T. \quad (1.5)$$

Полагая

$$\chi = \frac{c^2}{8\pi f}, \frac{1}{4\pi\chi} = \frac{2f}{c^2}, g_{44} \approx 1. \quad (1.6)$$

Получим

$$\nabla^2 g_{44} = \frac{1}{\chi} \rho. \quad (1.7)$$

Таким образом, в линейном приближении квазистатики компонента R_{44} тензора кривизны R_{ij} вычисляется по формуле:

$$R_{44} = \frac{1}{2} \Delta g_{nr} \quad (1.8)$$

В случае динамики получаются уравнения:

$$\square g_{ik} = \frac{2}{\chi} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right), \quad (1.9)$$

где оператор \square и T имеют соответственно вид:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

$$T = -\chi R, \quad R = g^{ik} R_{ik}$$

Уравнение (1.9) описывает распространение гравитационных волн [3-5].

Рассмотрим нахождение решения уравнения (1.3) в случае, когда реальное пространство, имеющее матрицу g_{ik} мало отличается от эвклидова с метрикой δ_{ik} . Представим g_{ik} в виде:

$$\delta_{ik} = g_{ik} + \varepsilon \varphi_{ik}(x^2) \quad (1.11)$$

где ε – малый параметр.

Тогда в первом приближении из (1.3) получаются уравнения:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.12)$$

Как известно, в ньютоновской механике для потенциальных сил уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \Pi}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

Для точечной массы m_1 с потенциалом взаимодействия:

$$\Pi = -f \frac{mm_1}{r} \quad (1.14)$$

матрица g_{44} имеет вид:

$$g_{44} = 1 - \frac{2fm_1}{c^2} \frac{1}{r} \quad (1.15)$$

Таким образом, в классической механике действие потенциального поля эквивалентно изменению метрики (кривизны) пространства.

2. Искривление лучей вблизи источника гравитации

Координаты луча в гравитационном поле удовлетворяют уравнению (1.3).

Запишем уравнение в сферической системе координат в случае, когда движение происходит в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Уравнения для $r(s)$ и $\varphi(s)$ имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{2m}{r} \left(1 + r^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2}\right) &= c_1 \\ r^2 \frac{d\varphi}{ds} &= c_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m – гравитационная масса, r, φ – полярные координаты, s – параметр.

Отметим, что уравнения, аналогичные (2.1) получаются для плоской задачи о распространении луча в неоднородной среде. Уравнения получаются из принципа Ферма:

$$\delta \int n ds = 0, \quad n = \frac{c}{c(\bar{x})} \quad (2.2)$$

где n – лучевой коэффициент преломления среды, c – скорость в однородной, а $c(\bar{x})$ – скорость в неоднородной среде.

В полярной системе координат уравнение для луча имеет вид:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(n^2 + \left(\frac{dn}{d\varphi}\right)^2\right) \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.1) и (2.3), отметим, что если в (2.1) пренебречь $d^2\varphi/ds^2$, то получим уравнения ньютоновской механики, которые являются следствием законов сохранения энергии и момента количества движения. Будем считать, что материальная точка движется на расстоянии R от массивной точки, по прямой, уравнение которой имеет вид:

$$r \cos \varphi = R \quad (2.4)$$

Соответственно, если положить в (2.3) $\frac{d^2n}{d\varphi^2} = 0$, то луч в среде не искривляется (является прямым).

Таким образом, из вышесказанного следует, что неоднородность и гравитация вызывают искривление траекторий лучей и частиц. При этом траектория частицы всегда искривляется в сторону гравитационной массы, а в случае лучей – искривляется в сторону увеличения коэффициента преломления. Следовательно, гравитационное поле создает неоднородность среды (вакуума).

Эффективный коэффициент преломления эквивалентной неоднородной среды вычисляется методом сопоставления [1-4].

Обозначим через $\Delta\alpha$ изменение угла поворота касательной к лучу на отрезке пути Δx , который в отсутствие притягивающей массы совпадает с осью y .

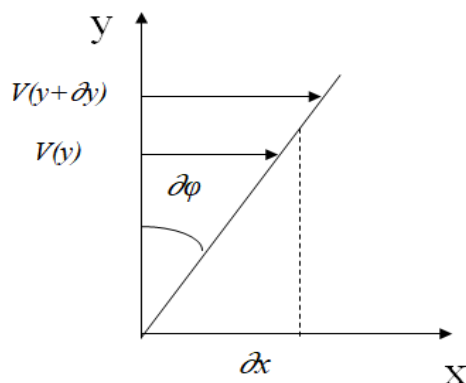


Рис. 1. Схема отклонения луча в направлении притягивающей массы оси x

Простая геометрическая схема для луча имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{V(y+\Delta y) - V(y)}{\Delta y} \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{V} = \frac{n}{c} \Delta x \quad (2.5)$$

что в пределе дает $\Delta\alpha = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \Delta x$.

Для релятивистской частицы:

$$\Delta\alpha = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{ry}{y} \Delta x \approx 2 \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{y}{r} \Delta x \quad (2.6)$$

Сравнивая (2.5), (2.6), получим:

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = -2 \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{y}{r} \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7), получим:

$$n = 1 + 2 \frac{GM}{rc^2} \quad (2.8)$$

где G – константа, M – масса притягивающего тела, c – скорость света.

Рассмотрим распространение луча, излученного с поверхности тела радиуса R , со скоростью V_0 , под углом φ_0 .

Решение имеет вид:

$$r = \frac{h^2}{\left\{1 + e \cos\left(\varphi - \omega - \frac{3M^2}{h^2} \varphi\right)\right\}} \quad (2.9)$$

При $r = R$, $\varphi = \varphi_0$, ставятся начальные условия $\dot{r} = V_0$, из которых определяются постоянные h , ω .

Уравнения для лучей и волновых фронтов в случае $3D$ – пространства рассмотрены в [7] с учетом метрики пространства и геометрии волновых фронтов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кальчевский, Н.А. Курс теоретической механики т.2 / Н.А. Кальчевский // М.: Наука, 1977, 543с.
2. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. Сборник статей, М.: Наука, 1971, 311с.
3. Толмен, Р. Относительность, термодинамика и космология / Р. Толмен // М.: Наука, 1974, 520с.
4. Боулер, М. Гравитация, относительность / М. Боулер // М.: Мир, 1975, 215с.

5. Эйнштейн, А. Теория гравитации / А. Эйнштейн // Сб. статей, М., Мир, 1979, 559с.
6. Паули, В. Теория относительности / В. Паули // М., Наука, 1983, 336с.
7. Чигарев, А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев // Минск, Технопринт, 2000, 425с.

MODELLING AND MAGNETIC FIELD SIMUALTION OF A TACTILE SENSOR BASED ON MAGNETO-SENSITIVE ELASTOMERS

¹Simon Gast, ¹Klaus Zimmermann, ²Vladimir T. Minchenya, ²Victor G. Lysenko

¹*Technische Universität Ilmenau, Germany*

²*Belorussian National Technical University, Minsk, Belarus*

Introduction. Common magneto-sensitive elastomers (MSE) consist of a silicon rubber matrix and ferromagnetic particles. The properties of this smart material are depending on the magnetic field, temperature and mechanical stress and can be influenced by other additives like silicon oil or graphite [1, 2]. Especially the magnetorheological effect (MR-effect), which describes the dependence of mechanical properties on the magnetic field, makes MSE suitable for applications as sensor or actuator [3, 4]. Furthermore, effects and properties like the field-dependent elongation (often called “magnetostriction”) or magneto resistivity of MSE are investigated [5, 10, 11]. Among others, the material is implemented into force-, magnetic field and acceleration sensors [6 - 9].

Kawasetsu et al. [12, 13] developed a tactile sensor using a planar coil and measuring the change of the inductance caused by a deformed and thereby approaching MSE layer. Thus, they measured the force and could differ between shear and compression with the help of multiple coils. They also investigated the planar sensitivity of one coil. In fact, the signal to noise ratio decreases with distance from the center region.

Since the field dependent properties can be tuned with a magneto-static field and the inductance measurement is performed with high frequency tank circuits, both methods may be combined. Considering this, a tactile sensor can be advanced with an adaptive part changing its elasticity.

The goal of this paper is, to present a first approach combining the measurement of change in magnetic permeability and controlling the field-dependent elasticity of the MSE (magneto-rheological-effect, MR-effect). Considering continuous recording of a deformation and a known field-elasticity-correlation, the elasticity of a penetrating object could be determined and recorded. In order to achieve a detailed understanding of this mechanism, the actuator and sensor function is firstly separated into two different layered components. In addition to this, a simple setup and mechanical model is used to create an initial approach for future derivatives and investigations. Taking elasticity estimation and the position dependency of sensitivity into account, an MSE based tactile sensor can be capable of detecting contact force, localizing and estimating the extent of the contact area as well as estimating elasticity of the penetrating object. In future research this sensor principal can be improved as artificial skin with extensive use.

Structure and function of the tactile sensor. In Figure 1, the elements of the tactile sensor are shown. In this setup, both the field stiffening (actuated layer) and the measuring part (sensing layer) are split into two separated components. A rigid spacer connects these parts. Thus, both layers are not affecting each other in an electromagnetic way. Firstly, this setup and the following simulations consider only isotropic MSE samples.

The sensing layer on top of the setup consists of a flexible planar coil as part of a tank circuit driven by its resonance frequency. It is known that changes in magnetic permeability near the flexible planar coil lead to a varying inductance. The LDC1614 EVM (Texas Instrumtens IC Evaluation Module) is measuring the change in resonance frequency of the

electrodynamic system. Since, the capacitance is maintained, the resonance frequency depends on the inductance and the measured frequency corresponds to the deformation.

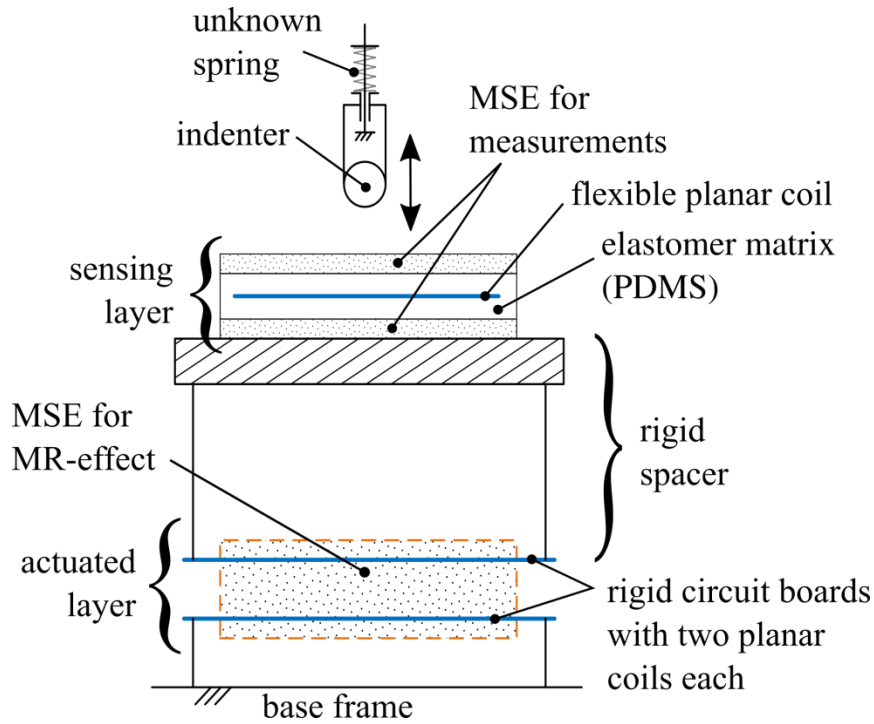


Fig. 1. Structure of the tactile sensor

Hence, the penetrating indenter results in an increase of inductance by pushing the MSE closer to the flexible coil. In contrast to the investigations of Kawasetsu et al. [12], an into the silicon matrix integrated flexible coil is used. On one hand, in this way the signal to noise ratio can be enhanced, since both sides experience an approaching of MSE. On the other hand, this leads to a bending of the coil itself, which lowers the inductance [18].

Various types of coils or magnet structures can produce a homogeneous field within the MR-effect actuated part. To obtain a variable flux density with a construction as small as possible, integrated planar coils are used. Therefore, the sensor setup consists of two rigid circuit boards with two parallel spiral coils, respectively, milled out of copper layers. Cast into PDMS and MSE it acts like an adjustable elasticity. In Fact, this arrangement is very similar to a Helmholtz coil couple.

The penetrating indenter at the top of the setup deforms both layers and is coupled elastically with the base frame. Firstly, this setups purpose is to determine the stiffness of a soft unknown spring at the indenter. Experimental investigations can deliver the relation between applied current and elasticity in the actuated layer. Knowing this elasticity-current-correlation and the present deformation in the sensing layer, a mechanical model is needed to estimate the stiffness of the spring. Considering the preferred low energy state of the particles, there should be a sinking current slope leading to a softening of the actuated layer. Since, MSE shows a memory shape effect when it is exposed to a magnetic field, an increasing current would not lead to an elongation of the MSE after deformation [16]. Consequently, a rising current slope would lead to a lower effective stiffening. Moreover, high currents may not cause great heating, when the current peak occurs after contact and is sinking fast in further progress.

Mechanical modelling of the sensor. The structure of the sensor is modelled as series of three springs (see Figure 2). For this simplification, it is assumed that there are only small deformations by the indenter. The elasticity of the two layers are henceforth considered as

springs. The magnetic field of the actuated layer controls the stiffness of the spring with spring rate c_D at the bottom through the MR-effect. The sensor spring (constant spring rate c_S) in the middle measures changes in length caused by the penetrating indenter in the sensing layer. For this model, only a central, uniaxial and collinear load on the spring system is assumed.

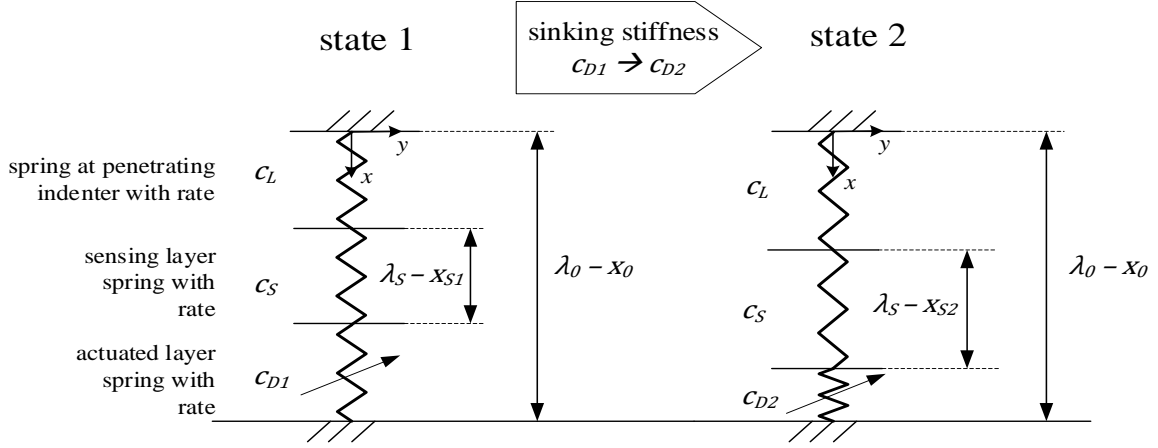


Fig. 2. Mechanical model as spring system

In Figure 2, λ_0 is the sum of all three relaxed spring lengths, λ_S is the relaxed spring length of the sensing layer spring, x_0 initial constant displacement of all springs and x_{S1} and x_{S2} the displacement of the sensor layer spring at different states. Knowing the correlation of stiffness and current in the actuated layer, the stiffness of the unknown spring (c_L) can be estimated. For this model, only quasi-static states and constant overall length $\lambda_0 - x_0$ are assumed. Hence, within the interval of changed spring length $x_{S1} - x_{S2}$, c_L can be determined by the following equations.

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_L} + \frac{1}{c_S} + \frac{1}{c_{D1}} \quad \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_L} + \frac{1}{c_S} + \frac{1}{c_{D2}} \quad (1)$$

$$c_L(x_{S2}) = \frac{c_S c_{D1} c_{D2} \cdot (x_{S1} - x_{S2})}{x_{S2}(c_{D1} c_{D2} + c_S c_{D1}) - x_{S1}(c_{D1} c_{D2} + c_S c_{D2})} \quad (2)$$

Where c_1 and c_2 are the spring rates for the spring system at state one and two. The stiffness of the actuated layer is limited by the maximum current that can be applied which limits the interval $[x_{S1}, x_{S2}]$. The maximum current itself is restricted by the requirement to avoid mechanical influences by heat. However, because of the continuous recording of $x_{S1} - x_{S2}$ and the current, this sensor can detect even nonlinear spring rates. From (1) it is assumed that c_L is of similar magnitude as c_S and c_D . Knowing c_S and c_D for different states, (2) is only depending on the deviation $x_{S1} - x_{S2}$.

Magnetic field simulation (MFS) and optimization of the actuated layer. The restrictions by using planar coils integrated into the actuated layer result generally in low flux densities. Moreover, it is challenging to obtain a homogeneous field with this setup. However, magnetic inhomogeneities or gradients within the MSE cause unwanted additional loads superposing the mechanical one by the indenter and lowering the effective stiffening. Nevertheless, special geometry designs lead to higher flux densities in certain regions. Since the mechanical stress is only applied on the MSE between the circuit boards, the obtained simulations tend to a concentration of the flux within this section.

In this paper, the magnetic field is optimized within the actuated layer of the sensor by enhancing the flux density and obtaining a homogeneous distribution. For all investigations, the ANSYS framework and Maxwell 3D Software is used. Figure 3 and Table 1 define the setup. In the electromagnetic model all coils are simplified by using only seven turns of conductive copper. Thus, the current density and filling ratio of the simulated coil can be maintained in comparison to the spiral planar coil. In all simulations, it is assumed that the MSE has a constant relative magnetic permeability of $\mu_r = 3.7$. Bastola and Schubert et al. [14, 15] have shown that this value corresponds to a CIP volume fraction of about 30%.

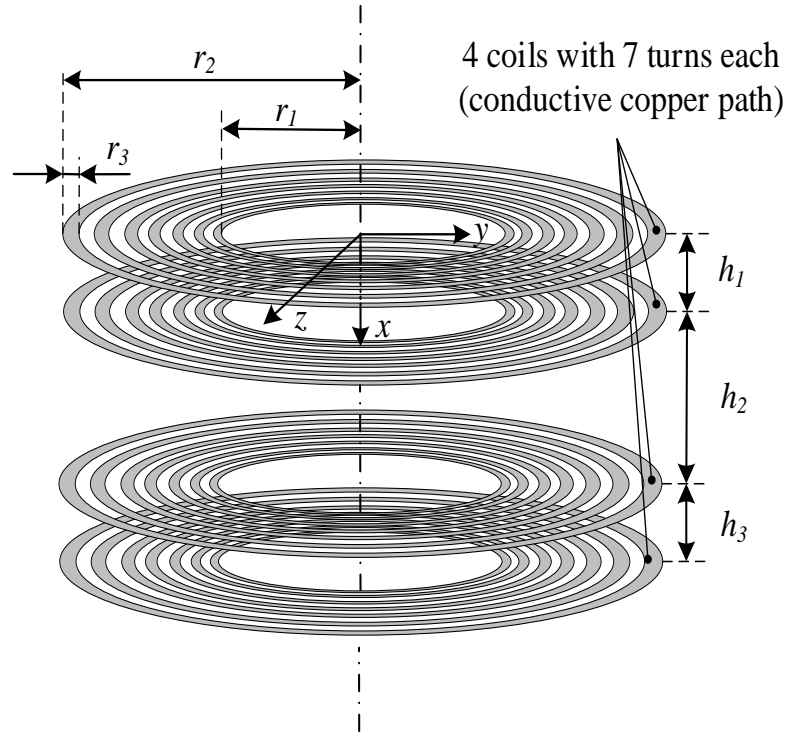


Fig. 3. Modell of the actuated layer for 3D MFS

The magnetic resistance for the volume with the cross section $y^2 + z^2 = R^2$, with $r_1 \leq R \leq r_2$ and the height $0.07\text{mm} \leq x \leq 0.07\text{mm} + h_1$ and $6.71\text{mm} \leq x \leq 6.71\text{mm} + h_3$ is simulated as diamagnetic material (circuit boards). The flux density is always plotted in the x - y -plane since the geometry is axially symmetric. The Figures 4, 5 and 6 show the flux density in case of completely in MSE cast circuit boards. The high flux densities maintain within the core and the adjacent regions. It can be expected that a geometry filling these regions only lead to higher flux densities, since the field is more concentrated. For this setup (completely cast into MSE) there are no sections of homogeneous flux distribution.

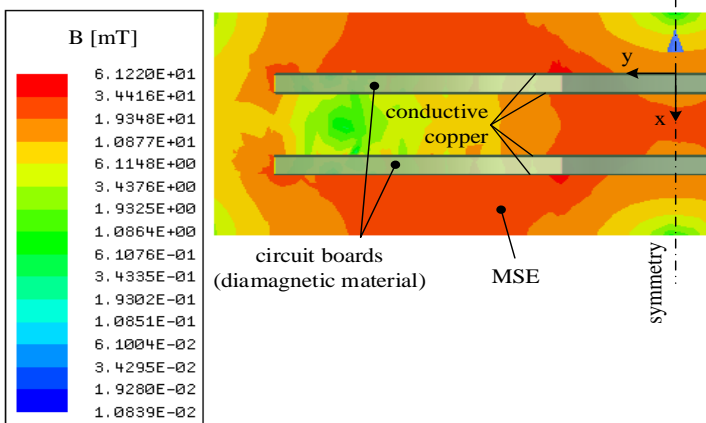


Table 1 – Parameters for MFS

Parameter	Value
r_1 [mm]	8
r_2 [mm]	28
r_3 [mm]	2
h_1 & h_3 [mm]	1.5
h_2 [mm]	70
Thickness	10
Cu [μm]	3.7
Current [A]	
μ_r	

Fig. 4. MFS of the actuated layer completely cast into MSE

As a first step, a geometry variation and its effect on field distribution and flux density for the layer setup is investigated. Figure 8 shows the proposed design that concentrates on the regions with high flux densities. This shape of the sample possesses curved surface parts to gain similarity to an ellipsoid-shaped body. Consequently, a more homogenous field is obtained, due to the boundary conditions of the magnetic field at the edges of a magnetized body. This can be considered as a design rule for MSE specimens. Sharp corners and discontinuities of the surface geometry always lead to inhomogeneous field distributions within the sample [17]. The corresponding chart in Figure 7 proves to have a slightly higher flux density. It also shows a more continuous trend in x-direction.

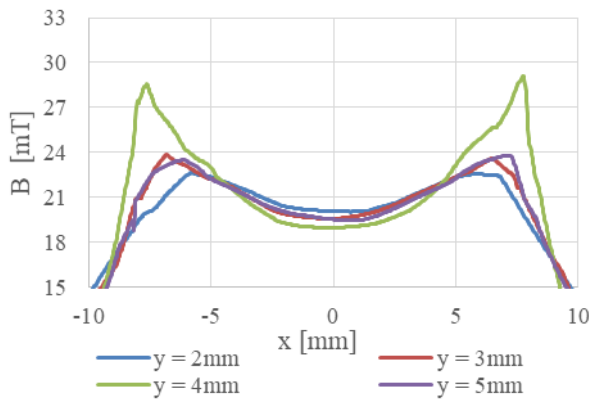


Fig. 5. Flux density plot parallel to y-axis, completely cast in MSE

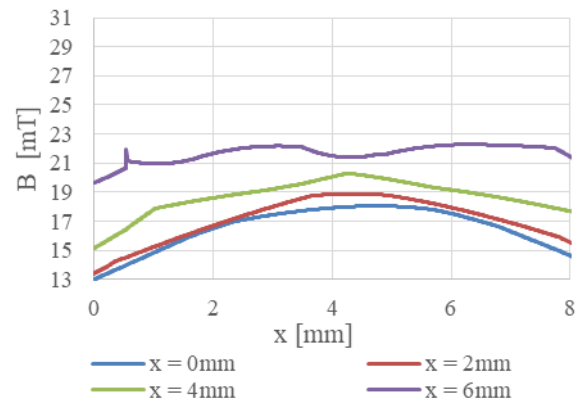


Fig. 6. Flux density plot parallel to x-axis, completely cast in MSE

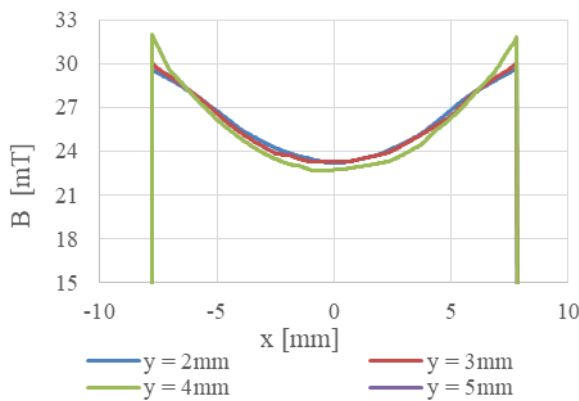


Fig. 7. Flux density plot parallel to y-axis for optimized geometry

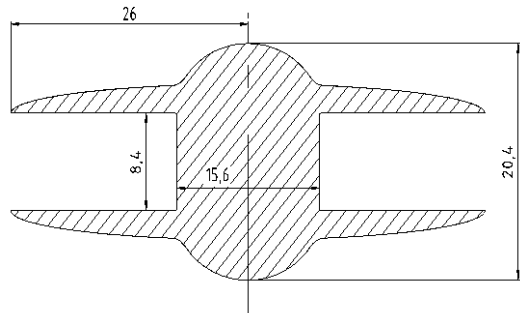


Fig. 8. Optimized geometry of the MSE

As a second step, high permeable plates covering the top and bottom cross section of the core are added to the MFS setup. Figure 11 shows the combination of the design variation and integration of permalloy plates (nickel-iron alloy, relative permeability up to 100 000) with a thickness of 0.3mm. These plates are considered to be cast into the MSE samples. In this way, a homogenization of the field and enhancement of the flux within the core section can be expected, since the magnetic flux is led through cross sections of least magnetic

resistance. As Figure 9 and 10 show, this bundling affects the flux significantly in such manner that a more homogeneous field is obtained.

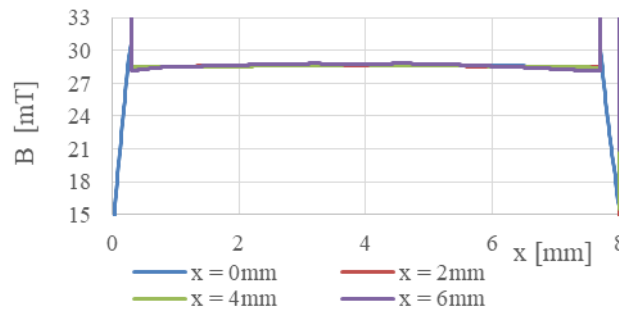


Fig. 9. Flux density plot parallel to x-axis with high permeable thin plates and optimized geometry

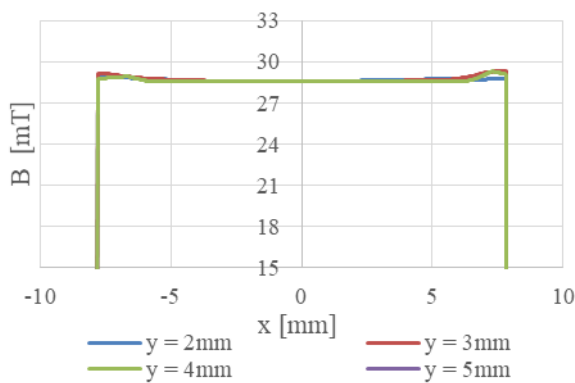


Fig. 10. Flux density plot parallel to y-axis with high permeable thin plates and optimized geometry

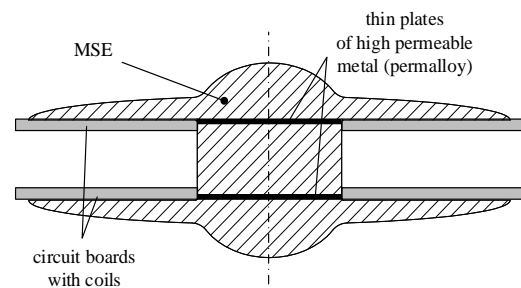


Fig. 11. Setup with high permeable thin plates

Conclusion and outlook. In this paper a concept of a tactile sensor setup is proposed to measure deformation and estimate stiffness of a penetrating object. With restrictions and an analogous spring model, the sensor equation is derived from only two indicators. Thus, it is shown that with a known stiffness-current-correlation and measured deformation, the stiffness of a soft unknown spring can be obtained. Subsequent the range of adjustable stiffness for the actuated layer is of particular interest. Therefore, two different optimization steps for obtaining an enhanced and homogenized flux within the core section of our proposed sensor setup are investigated. The MSE geometry of the simulation is varied and thin plates of permalloy are added. As a result, an improved field distribution within the core section of the actuated layer setup is obtained.

In future research, experimental investigations of this setup are intended. For instance, the unification of the actuated and sensing layer is of particular interest. Considering the proposed sensor as an artificial skin, it is also important to develop a distributed stiffening instead of a regional concentrated one. In addition to that, the sensing layer with its planar sensitivity depending on the contact position offers potential for a localization of the contact within the sensor area. Furthermore, a comparison through experimental investigations may prove the assumption that a constant magnetic field will not affect the alternating one of the resonating circuit. Another investigations could be done, comparing an in MSE enclosed coil with an undeformed one.

REFERENCES

1. K. Zimmermann, V. Boehm, T. Becker, G. Monkman et al., *T "Mechanical Characterization of the Field-Dependent Properties of Magnetoactive Polymers and Integrated Electrets for their Application in Soft Robotics"*, *Problems of mechanics*, vol. 4, pp. 5-17, 2017
2. V. A. Naletova, D. A. Pelevina, et al., *"Bi-stability of the deformation of a body with a magnetizable elastomer in a magnetic field"*, *Magneto hydrodynamics*, vol. 52, pp. 357-368, 2016
3. L. Bodelot, J.-P. Voropaieff, T. Pössinger, *"Experimental investigation of the coupled magneto-mechanical response in magnetorheological elastomers"*, *Experimental Mechanics*, vol. 58, pp. 207–22, 2018
4. T.I. Becker, K. Zimmermann, D.Yu. Borin, G.V. Stepanov, P.A. Storozhenko, *"Dynamic response of a sensor element made of magnetic hybrid elastomer with controllable properties"*, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 449, pp. 77-82, 2018
5. Yancheng Li, Jianchun Li, Weihua Li and Haiping Du, *"A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices"*, *smart materials and structures*, vol. 23, p. 123001, 2014
6. B. Yoo, S. Na, A. B. Flatau and D. J. Pines, *"Evaluation of Magnetorheological Elastomers With Oriented Fe–Ga Alloy Flakes for Force Sensing Applications"*, in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 52, no. 7, pp. 1-4, 2016
7. W. Li, K. Kostidis, Xianzhou Zhang and Yang Zhou, *"Development of a force sensor working with MR elastomers,"* 2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Singapore, pp. 233-238, 2009
8. S. Qi, H. Guo, & J. Chen, et al., *"Magnetorheological elastomers enabled high sensitive self-powered tribo-sensor for magnetic field detecting"*. *Nanoscale*, vol. 10, pp. 4745–4752, 2018
9. I. Tomčíková, M. Bereš, I. Kováčová and V. Melnykov, *"Interaction between magnetic and stress field in ferromagnetic core of magnetoelastic pressure force sensor"*, 2017 International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES), Kremenchuk, pp. 124-127, 2017
10. W. H. Li, T. F. Tian and H. Du, *"Sensing and Rheological Capabilities of MR Elastomers"*, *Smart Actuation Sens. Syst. - Recent Adv. Futur. Challenges*, pp. 249–279, 2012.
11. Y. Han, A. Mohla, X. Huang, et al., *"Magnetostriction and field stiffening of magneto-active elastomers"* *Int. Journal of Appl. Mech.*, Vol. 7, p. 155, 2015
12. T. Kawasetsu, T. Horii, H. Ishihara and M. Asada, *"Size dependency in sensor response of a flexible tactile sensor based on inductance measurement"*, in *IEEE Sensors Journal* 2017, Glasgow, pp. 1-3, 2017
13. T. Kawasetsu, T. Horii, H. Ishihara and M. Asada, *"Flexible Tri-Axis Tactile Sensor Using Spiral Inductor and Magnetorheological Elastomer"*, in *IEEE Sensors Journal*, vol. 18, no. 14, pp. 5834-5841, 2018
14. G. Schubert, P. Harrison, *"Magnetic induction measurements and identification of the permeability of Magneto-Rheological Elastomers using finite element simulations"*, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 404, pp. 205-214, 2016
15. A.K. Bastola, M. Paudel, L. Li, *"Magnetic circuit analysis to obtain the magnetic permeability of magnetorheological elastomers"*, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 29, pp. 2946-2953, 2018
16. J. Chavez Vega, T. Kaufhold, V. Böhm, T. Becker, K. Zimmermann, et al., *"Field-induced plasticity of magneto-sensitive elastomers in context with soft robotic gripper applications"*, *Proc. Appl. Math. Mech.*, vol. 17, pp. 23-26, 2017

17. J. A. Osborn "*Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid*", *Phys. Rev.*, vol. 67, pp. 351-357, 1945
18. G. Fotheringham, F. Ohnimus et. al., "*Parameterization of Bent Coils on Curved Flexible Surface Substrates for RFID Applications*", *59th Electronic Components and Technology Conference, San Diego, CA*, pp. 502-507, 2009

ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ И ЕГО РАЗВИТИЕ

¹Сосновский Л.А., ²Щербаков С.С.¹ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», Гомель²УО «Белорусский государственный университет», Минск

Всякая система, как считается, обладает энергией и энтропией. В основе термодинамики по существу лежат два закона, или начала: одно из них относится к энергии (закон сохранения энергии), другое – к энтропии (закон изменения энтропии)[1]. Впервые Клаузиус [2] определил энтропию (S) как функцию, которая зависит от начального (A) и конечного (B) состояний термодинамической системы

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad \text{или} \quad dS = \frac{dQ}{T} \geq 0, \quad (1)$$

где T – температура, Q – количество тепла. Теплоота – это форма энергии, а температура объекта – мера средней кинетической энергии движения его атомов. Согласно (1), энтропия тела, все части которого имеют одинаковую температуру, равна частному от деления (соотношению) количества тепла, которое выделило бы тело при охлаждении до абсолютного нуля, на его абсолютную температуру.

Таким образом, энтропия S – это мера необратимого рассеяния энергии, которая характеризует состояние термодинамической системы [1, 3].

«Предлагаю величину S называть энтропией от греческого τροπή – преобразование. Я специально подобрал слово энтропия, чтобы оно было созвучно со словом энергия, так как эти две величины настолько сходны по своему физическому значению, что созвучие их названий кажется мне полезным» [2, с. 357, курсив наш].

В самом деле, в общем случае открытой системы изменение dU внутренней энергии U представляется, с учетом (1), в виде взаимосвязи энергии и энтропии

$$dU = dQ + dA + dU_{sub} = TdS - pdV + \sum_1^n \mu_k dN_k, \quad (2)$$

откуда следует, что изменение энтропии может быть описано уравнением

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k \geq 0, \quad (3)$$

в правой части которого отдельные компоненты энергии считаются аддитивными.

Здесь dQ – количество тепла; dA – количество механической энергии; dU_{sub} – количество вещества, которым система обменивалась с окружающей средой за интервал времени dt ; p – давление; μ_k – химические потенциалы; dN_k – изменение числа молей вещества вследствие необратимых химических реакций и обмена веществом с внешней средой. Планк особо подчеркивал [4], что в формуле (2) dU есть бесконечно малая разность, тогда как dQ , dA , dU_{sub} – бесконечно малые количества.

Приращение энтропии (3), по Пригожину (см. [1]) может быть представлено как сумма ее изменения $d_e S$, обусловленного обменом системы энергией и веществом с внешней средой, и изменения $d_i S$, обусловленного необратимыми процессами внутри системы:

$$dS = d_e S + d_i S \geq 0. \quad (4)$$

Хотя *понятие* о термодинамической энтропии является простейшим (см. (1)), оказалось, что оно имеет *фундаментальное значение* для анализа *эволюции* систем во времени

$$dS/dt \geq 0. \quad (5)$$

Отсюда следует предположение, что положительное направление времени *связано* с увеличением энтропии при необратимом процессе (знак неравенства в (5)). Это предположение было образно интерпретировано как знаменитая *стрела времени*, представление о которой затем было востребовано в общей теории относительности.

Таким образом, разные формулировки второго закона термодинамики гласят (см., например, [1]):

- Энтропия Вселенной стремится к максимуму.
- Теплота не может самопроизвольно переходить от более холодного тела к более нагретому.
- Сумма изменений энтропии системы и внешней среды не может убывать.
- Для любого необратимого процесса энтропия должна увеличиваться (знак неравенства в (1), (3)-(5)), тогда как для обратимого процесса она остается постоянной (знак равенства).
- При температуре абсолютного нуля энтропия любого химически однородного твердого или жидкого тела принимает нулевое значение.
- Построить вечный двигатель невозможно и др.

В открытой системе, способной обмениваться энергией и веществом с окружающей средой, *однонаправленный энтропийный поток* (см. (3) и (5)) может отличаться от *производства энтропии во времени*

$$P \equiv \frac{d_i S}{dt} = \sum_k J_k X_k \geq 0, \quad (6)$$

где J_k – поток (или скорость), X_k – обобщенная термодинамическая сила необратимого процесса. Также процессы могут быть *источниками порядка* внутри системы [5]. Пригожин построил *обобщенную термодинамику*, в которой (6) – основное уравнение необратимых состояний. Согласно (3) и (6), *состояние равновесия характеризуется либо минимумом (ноль производства энтропии), либо максимумом энтропии*. Тем самым прогнозируется *тепловая смерть Вселенной*, впервые образно сформулированная Гельмгольцем и позже популяризированная Эддингтоном. Все это означает, что низкий энтропийный порядок постепенно, но неумолимо вырождается в *хаос*, поскольку Вселенная стремится к термодинамическому равновесию.

Необратимость оказалась глубокой концепцией, на базе которой термодинамика пытается построить *космологическую теорию эволюции*. Но она не поддерживалась механикой, так как все законы динамики, напротив, *обратимы*. Чтобы сгладить обратимость механики с необратимостью термодинамики, *Больцман* предложил *статистическую интерпретацию* второго закона термодинамики [6]

$$S = kW, \quad (7)$$

где W – число микросостояний среды, соответствующих тому ее макросостоянию, энтропия которого равна S ; k – постоянная Больцмана.

По формуле (7), чем больше W , тем вероятнее, что это макросистема, которая подчиняется статистическим законам. Следовательно, согласно *статистической механике*, необратимые процессы, происходящие с ростом энтропии, соответствуют эволюции к наиболее вероятным состояниям. Равновесное состояние характеризуется тем, что значение W достигает максимума. Формула (7) справедлива только для замкнутой системы, способной обмениваться с окружающей средой энергией, но не веществом. Она хорошо описывает поведение газов, столкновения частиц (атомов) в которых *статистически независимы*.

В классической динамике делается попытка *встроить* второй закон термодинамики в динамическую систему, в которой возникают некоторые особенности – временные неустойчивости (см., например, [7]). Предложено (в частности, в (7)) это сделать, используя известную переменную (функционал) *Ляпунова* путем введения в гамильтониан динамического оператора M :

$$\int_{\Gamma} d\mu_r M \rho_r. \quad (8)$$

Здесь M играет роль энтропии на микроскопическом уровне. Способен ли этот *энтропийный оператор* описать необратимые состояния? Вопрос остается пока открытым.

Дальнейшее развитие второго закона термодинамики дано в одной из космологических концепций [8, 9]. Бекенштейн выдвинул предположение, которое казалось невероятным: в *черных дырах* может содержаться огромная энтропия.

Есть веские причины полагать, что черные дыры существуют реально. Их нельзя увидеть, однако можно наблюдать то, что происходит в их окрестностях. Так, некоторые черные дыры образуются в результате коллапса очень массивных звезд. Последние могут иметь соседей, которые вращаются вокруг главной звезды. Потoki газа, испускаемые звездой-компаньоном, могут *падать* на черную дыру, образуя вокруг нее аккреционный диск, который, в свою очередь, нагревается до гигантских температур и генерирует мощное рентгеновское излучение. Спутники обнаружили множество источников такого излучения, анализ которого позволяет понять некоторые свойства черных дыр.

Имеются также доказательства существования сверхмассивных черных дыр в центрах галактик – их массы в миллионы раз превышают массу Солнца. На ранних стадиях образования галактик эти гигантские черные дыры *поглощают* все вещество вокруг себя, затягивая его мощнейшими вихрями, которые мы наблюдаем как квазары. Согласно общей теории относительности – это не просто *плотно упакованный объем* исходного материала. Это чистое гравитационное поле. После завершения формирования черной дыры у нее остаются три характеристики, поддающиеся измерению: ее полная масса, скорость вращения и электрический заряд.

Установлена аналогия термодинамики и механики черных дыр (см. [8, 9]: *энергия, температура и термодинамическая энтропия* – характеристики, аналогичные *массе, поверхностной гравитации и площади горизонта событий* для черных дыр. В результате Бекенштейн [8] предложил *обобщенное* второе начало термодинамики, представляющее собой, по сути, обычное второе начало термодинамики, но с добавлением *энтропии черных дыр*. Согласно расчетам Хокинга [9], энтропия черной дыры равна $\frac{1}{4}$ площади ее горизонта, измеренного в единицах планковской площади

$$S_{BH} = \frac{1}{4} \frac{A}{L_p^2}. \quad (9)$$

Нижний индекс BH можно читать как Black Hole (черная дыра), или Bekenstein–Hawking (Бекенштейн–Хокинг).

В (9) площадь A горизонта событий выражается в единицах планковской площади L_p . Планковская длина, равная 10^{-33} см, есть невероятно маленькое расстояние, на котором квантовая гравитация начинает играть заметную роль; планковская площадь – это квадрат планковской длины. Для черной дыры, масса которой сравнима с массой Солнца, площадь горизонта событий составляет около 10^{77} планковских площадей. Это огромное число: энтропия, равная 10^{77} , – это больше, чем энтропия всех звезд, газа и пыли во всей галактике Млечный путь.

Согласно Хокингу [9], хотя и можно уменьшить массу/энергию вращающейся черной дыры, существует величина, которая всегда либо увеличивается, либо остается неизменной – площадь горизонта событий, которая, по сути, характеризует размер

черной дыры. Это *похоже* на то, как ведет себя энтропия согласно второму началу термодинамики. Площадь горизонта зависит от сочетания массы, углового момента и заряда. И всякая конкретная их комбинация никогда не уменьшается. Например, если есть две черные дыры, они могут столкнуться друг с другом и *слиться* в одну черную дыру. Однако *площадь нового горизонта событий всегда больше, чем суммарная площадь двух исходных горизонтов*, а одна большая черная дыра *никогда не может распасться на две меньшие*, так как в этом случае ее площадь пришлось бы уменьшить.

Площадь горизонта событий пропорциональна квадрату массы черной дыры:

$$A = 16\pi G^2 m^2 / c^4, \quad (10)$$

где G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

Задумаемся над изложенной аналогией. Следует признать, что термодинамическая энтропия, которая характеризует *рассеяние энергии* (см. (1) и (3)), все же *далека* от черной дыры, которая характеризуется процессами *поглощения вещества*. Ближе к ней (по содержательному смыслу) оказывается *трибофатическая энтропия* [10, 11], изменение которой дается формулой

$$(d_i S)_{TF} = \frac{\gamma_1^{(w)}}{T_\Sigma} \omega_\Sigma dV_{P_\gamma}. \quad (11)$$

Согласно (11), трибофатическую энтропию порождают *необратимые повреждения* ω_Σ в *опасных объемах* V_{P_γ} движущихся и деформируемых твердых тел, взаимодействующих между собой и/или со средой. Здесь $T_\Sigma \geq T$ – температура, обусловленная всеми источниками (T – температура среды), $\gamma_1^{(w)}$ – давление (напряжение), которое приводит к повреждению опасного объема единичной величины.

Согласно обобщенным представлениям (см., например, [12-15]), *повреждение* есть *необратимое изменение* состава, строения, структуры, размеров, формы, объема, массы (и т.д.) и, следовательно, соответствующих физико-химических, механических и других свойств объекта; в конечном счете, повреждение связывают с нарушением *сплошности* и *целостности* тела, вплоть до его *разложения* (например, на атомы). Таким образом, повреждаемость трактуется как *фундаментальное свойство* (и обязанность) движущихся и деформируемых систем.

Комплекс (Σ) необратимых повреждений (ω_Σ) определяется *эффективной (поглощенной в системе) энергией* (U_Σ^{eff}), обусловленной силами любой природы:

$$\omega_\Sigma(U_\Sigma^{eff}) = \omega_\Sigma(U_n^{eff}, U_\tau^{eff}, U_T^{eff}, U_{ch}^{eff}, \dots, U_0, t) = \omega_{\Sigma U} \geq 0. \quad (12)$$

В (12) индексы n и τ указывают на нормальные и сдвиговые механические нагрузки, T и Ch – на тепловые и электрохимические нагрузки, которые порождают соответствующие энергетические потоки.

Согласно (12), повреждаемость ω_Σ является *энергетической термомеханической функцией*, поскольку учитывает как любые силовые факторы, так и температуру T_Σ . Это означает, что *трибофатическая энтропия есть мера поглощения энергии, обусловленной всеми источниками*. Методики определения U_Σ^{eff} разработаны (см., например, [12-16]).

Установлено [13] *пространственное условие* физической повреждаемости объектов, которое гласит: развитие процессов *необратимой повреждаемости возможно* и *реализуется* с некоторой вероятностью $P > 0$, когда в объекте возникает конечная область V_{P_γ} с ненулевым уровнем эффективной энергии $U_\Sigma^{eff} > 0$ (внутренней энтропии $S_i > 0$) – *опасный объем*

$$V_{P\gamma} \in V_{P\gamma}(Q_i, U_{\Sigma}^{eff}, S_i) \geq 0, \quad (13)$$

где Q_i – внутренние силовые факторы.

Если $V_{P\gamma} = 0$, то и $\omega_{\Sigma} = 0$ и, следовательно, эволюция объекта по поврежденности невозможна (обратимая система). В необратимой системе $V_{P\gamma} \leq V$ есть *абсолютная величина (мера) ее пространственной поврежденности* (V – ее геометрический объем). Методики расчета и классификация опасных объемов ($V_{P\gamma}$) для типичных материальных объектов (деформируемых твердых тел и систем) в различных условиях разработаны (см., например, [14]) Согласно (13), масштаб повреждаемости системы может быть любым.

Используя понятие о трибофатической энтропии, можно дать *энтропийное толкование повреждаемости*: необратимое повреждение объекта *тождественно* изменению внутренней энтропии в его опасном объеме

$$\omega_{\Sigma}(S_{TF}) \equiv \frac{(d_i S)_{TF}}{dV_{P\gamma}} = \omega_{\Sigma S}. \quad (11a)$$

Теперь рассмотрим *открытую* термодинамическую систему, в которой распределены (рассеяны) повреждаемые твердые или плотные объекты; это – *механотермодинамическая система* (МТД). Как показано в [16, 17], изменение энтропии в такой системе определяется функцией термодинамической (индекс TD) и трибофатической (индекс TF) энтропий:

$$\begin{aligned} dS_{MTD} &= \left[(dS)_{TD} \rightleftharpoons (d_i S)_{TF} \right] = \\ &= \Lambda_{TD\backslash TF} \left[\left(\frac{dU + pdV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu dN_k \right)_{TD} + \left(\gamma_1^{(w)} \frac{\omega_{\Sigma}}{T_{\Sigma}} dV_{P\gamma} \right)_{TF} \right] \uparrow, \Lambda \gg 1. \quad (14) \end{aligned}$$

Уравнение (14) *принципиально отличается* от уравнений (3) и (4) или (11): оно допускает анализ любого (мыслимого) состояния системы. Согласно (11) и (14), именно рост трибофатической энтропии, обусловленный термомеханическим состоянием системы, может привести и к разрушению, и к разложению движущихся и деформируемых объектов и систем; в термодинамических уравнениях (3) и (4) о подобных состояниях речи не идет. Следует обратить особое внимание на то, что уравнение (14) построено с учетом различных механизмов взаимодействия между компонентами энтропии. Таким образом, (14) – это *всеобщий закон возрастания энтропии*, провозглашенный в философии и физике и впервые аналитически записанный в *трибофатике* и *механотермодинамике* [16, 17]. Фактически оно характеризует *объединение* двух великих конкурентов – механики и термодинамики с целью создания *обобщенной теории эволюции систем* [18]. Так был разработан новый раздел физики – механотермодинамика [19].

Согласно *второму принципу механотермодинамики* [16, 19], потоки эффективной энергии (энтропии), и следовательно, повреждений, обусловленных источниками разной природы, *не аддитивны* – они *диалектически взаимодействуют*. Этот принцип указывает *движущую силу* и *основную причину* возникновения и развития процессов внутренней повреждаемости любой системы – это диалектические Λ -*взаимодействия* (рисунок 1) составляющих эффективной энергии (энтропии) и, следовательно, повреждений в поглощающей среде.

Правило взаимодействия повреждений

$$F_{\Lambda} \left[(\omega_p \rightleftharpoons \omega_{\sigma}) \rightleftharpoons \omega_T] = [(\omega_p + \omega_{\sigma}) \Lambda_{\sigma \setminus p} + \omega_T] \Lambda_{M \setminus T} = \omega_{\Sigma}, \quad \Lambda \geq 1$$

Правило взаимодействия составляющих энтропии

$$F_{\Lambda} (S_{TD} \rightleftharpoons S_{TF}) = (S_{TD} + S_{TF}) \Lambda_{TD \setminus TF} = S_{MTD}, \quad \Lambda_{TD \setminus TF} \geq 1$$

Рис. 1. Схема Λ -взаимодействий при необратимых процессах (ω_p , ω_{σ} , ω_T – повреждения, обусловленные контактной (индекс p), механической (индекс σ) и термодинамической (индекс T) нагрузками)

Анализ Λ -взаимодействий в деформируемых объектах и системах выполнен, например, в работах [13-15]. Анализ взаимодействия двух черных дыр описан выше.

Таким образом, из изложенного следует, что эволюция системы в общем случае определяется интенсивностью процессов необратимого изменения энтропии – термодинамической и трибофатической; производство внутренней механотермодинамической энтропии так же вечно, как и движение и повреждение.

Уравнение (14) обладает практически неограниченной общностью: оно применимо для анализа любых явлений и процессов, сопровождающихся возникновением и развитием необратимых повреждений любой природы.

Можно полагать, что в (14) успешно достигнуто примирение механики и термодинамики в описании эволюции любых систем: неорганических и органических. И достигнуто оно путем использования основных идей трибофатики, механотермодинамики и механики повреждений (а не на базе статистической механики и классической динамики, как ранее).

Как видно, в количественном плане анализ изменения состояний систем по поврежденности более информативен, чем, например, исследование их энергетического или энтропийного состояний, поскольку всякое повреждение реально, тогда как материальные носители энергии или энтропии не известны или вовсе отсутствуют [20]. Однако использование фундаментальных понятий энергия и энтропия является весьма эффективным в науке, поскольку они лежат в основе многих физических законов, например, всеобщих законов сохранения. В этой связи анализ энергетического и энтропийного состояний систем оказывается безусловно плодотворным.

Что касается механики черных дыр, то из изложенного ясно, что следует изучить и описать их энтропийное состояние не только по аналогии с термодинамической, но, главным образом, по аналогии с трибофатической энтропией, или, возможно, лучше с механотермодинамической энтропией. Полагаем, что такие исследования впереди.

В заключение надо сказать, что, согласно нашим представлениям [16, 18], Вселенная эволюционирует не во времени, а по необратимым повреждениям (см. уравнения (11)-(14)):

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{\Sigma} (U_{\Sigma}^{eff}) \\ V_{P_f} \\ S_{MTD} \end{array} \right\} \Rightarrow \infty. \quad (15)$$

Согласно (15), рост повреждаемости всего сущего, как и энтропии любой системы, не имеет мыслимых границ, а масштаб повреждаемости простирается от атомного (и меньше) до космического (и больше) уровней. Заметим, что $V_{P_f} = f_P V$, то есть это вероятностная (индекс P) функция f геометрического объема V . Последний нетрудно связать с массой (плотностью) вещества в объектах. А стрела времени

доминирует только в нашем собственном существовании, она есть результат воображения Homo Sapiens [21, 22]: материя не исповедует время, поскольку она вечна и неуничтожима. Изложение этой концепции выходит за рамки нашего доклада. Но следует заметить, что такая точка зрения вполне небесспорна, более того, она весьма дискуссионна. Что ж, будем ожидать дискуссию.

Похоже, что в работах [21-33] мы обращаемся к философской концепции глобального эволюционизма (см., например, [34]), но на новом уровне количественного анализа. Как известно, идею всеобщей эволюции, охватывающей все процессы, начиная с неорганических изменений и заканчивая социальными и нравственными явлениями, была предложена Спенсером еще в XVIII веке. А мы в наше время изучаем их методами количественной диалектики [35].

Таким образом, закон неограниченного возрастания энтропии действительно приобретает вселенское содержание и, соответственно, всеобщее значение.



Рис. 2. Всеобщая А-эволюция как парадигма глобальной науки

На основании изложенного мы думаем, что *мультидисциплинарные исследования* (рисунок 2) фундаментальных закономерностей взаимосвязанных и взаимообусловленных явлений рассеяния и поглощения энергии любой природы в разнообразных средах, в том числе с использованием обобщенной характеристики – механотермодинамической энтропии будут способствовать лучшему пониманию материального мира и его эволюции [16-28 и мн. др.]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kondepudi, D., Prigogine, I. *Modern Thermodynamics (From Heat Engines to Dissipative Structures)*. John Wiley & Sons, 1998. – 486 p., I. Prigogine. *Modern Thermodynamics (From Heat Engines to Dissipative Structures)*. John Wiley & Sons, 1998. – 486 p.
2. Clausius, R. *Mechanical Theory of Heat*. – London : John van Voorst, 1867.
3. *Физический энциклопедический словарь*. – М. : Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
4. Planck, M. *Treatise on Thermodynamics*. – N.Y.: Dover, 3rd ed., 1945.
5. Prigogine, I., Stenger, S. *Order out of Chaos*. – N.Y.: Bantam, 1984. – 108 p.
6. Boltzmann, L. *Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien. Vol. 66, 1872*. – P. 275–370.
7. Peter V. Coveney. *The Second Law of Thermodynamics: Entropy, Irreversibility and Dynamics // Nature. Vol. 333 1988*. – P. 409–415.
8. Bekenstein, J. D. *Black Holes and Entropy // Physical Review, 1973, D 7, p. 2333–2346*.
9. Bardeen, J. M., Carter, B., Hawking, S. W. *The Four Laws of Black Hole Mechanics // Communications in Mathematical Physics, 1973, 31, – P. 161–170*.

10. Sosnovskiy, L. A., Sherbakov, S. S. *Surprises of Tribo-Fatigue. Magic Book*, 2009. – 200 p.
11. Сосновский, Л. А. Об одном виде энтропии как мере поглощения энергии, расходуемой на производство повреждений в механотермодинамической системе // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 6. – С. 100–104.
12. Сосновский, Л. А. Основы трибофатики : учеб. пособие : [доп. Мин-вом образования Респ. Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических высших учебных заведений] / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.; Sosnovskiy, L. A. *Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and Its Prediction* / L. A. Sosnovskiy // *Series : Foundations of Engineering Mechanics*, Springer, 2005. – 424 p.; 摩擦疲劳学 磨损 – 疲劳损伤及其预测. L. A. 索斯洛-夫斯基著, 高万振译 – 中国矿业大学出版社, 2013. – 324 p.
13. Сосновский, Л. А. *Механика износоусталостного повреждения*. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
14. Щербаков, С. С. *Механика трибофатических систем* / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 407 с.
15. Сосновский, Л. А. *Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций* / Л. А. Сосновский, М. А. Журавков, С. С. Щербаков. – Минск : БГУ, 2011. – 488 с.
16. Sosnovskiy, L. A., Sherbakov, S. S. *Mechanothermodynamics*. – Springer, 2016. – 155 p.
17. Sosnovskiy, L. A., Sherbakov, S. S. *Mechanothermodynamical System and Its Behavior // Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2012. – № 24. – P. 239–256.
18. Сосновский, Л. А., Щербаков, С. С., Лазаревич, А. А. *Основы теории эволюции неорганических и органических систем, в том числе живых и разумных // Национальная философия в глобальном мире : материалы Первого белорусского философского конгресса, Минск, 18–20 окт. 2017 г.* – Минск : Беларуская навука, 2018. – С. 155–178.
19. Сосновский, Л. А. *Механотермодинамика (об объединении великих конкурентов: 1850-2015)* / Л. А. Сосновский // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2016. – № 4 (37). – С. 19–41.
20. Фейнман, Р. *Лекции по физике* / Р. Фейнман. – М. : Мир, 1963. – Т. 4. – 261 с.
21. Сосновский, Л. А. *Принципы механотермодинамики : [моногр.]* / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 150 с.
22. Лазаревич, А. А. *На пути к синергии техно- и биоразвития: техносология и трибофатика* / А. А. Лазаревич // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт*. – 2016. – № 1 (32). – С. 39–44.
23. Лойко, А. И. *Трибофатика и философия: стратегия трансдисциплинарных исследований* / А. И. Лойко // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт*. – 2016. – № 1 (32). – С. 45–48.
24. Сороко, Э. М. *Трансдисциплинарность и трибофатика: о новой линии разработки информационных технологий, их эвристических возможностях, инновационном потенциале* / Э. М. Сороко // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт*. – 2016. – № 1 (32). – С. 49–51.
25. Спасков, А. Н. *Генезис, регенерация и нелинейная эволюция сложных систем в механотермодинамической и субстанциально-информационной концепциях* / А. Н. Спасков // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт*. – 2016. – № 1 (32). – С. 52–58.
26. Сосновский, Л. А. *Философия и трибофатика* / Л. А. Сосновский, А. А. Лазаревич // *Тр. VI Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 окт.* – 1

- нояб. 2010 г., Минск (Беларусь) / редкол. : М. А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск : БГУ, 2010. – Т. 2. – С. 591–620.
27. Сосновский, Л. А. О возможности построения общей теории эволюции систем / Л. А. Сосновский // *Философия в Беларуси и перспективы мировой интеллектуальной культуры : материалы Междунар. науч. конф. к 80-летию Института философии НАНБ, Минск, 14–15 апр. 2011 г.* – Минск : Право и экономика, 2011. – С. 152–157.
28. Щербаков, С. С. Обобщенная модель механотермодинамических состояний среды / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // *Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. статей.* – Вып. 29. – Минск : БНТУ, 2014. – С. 29–40.
29. Сосновский, Л. А. Жизнь как особый способ накопления повреждений и золотое сечение / Л. А. Сосновский // *Проблемы гармонии, симметрии и золотой пропорции в природе, науке и искусстве : сб. науч. тр. Винницкого Государственного аграрного университета.* – Винница, 2003. – Вып. 15. – С. 214–221.
30. Youtube – Tribo-Fatigue life – <https://youtu.be/ССЕНик5lkL0>
31. Сосновский, Л. А. Поле судьбы: первое представление / Л. А. Сосновский // *Наука и инновации.* – 2009. – № 10 (80). – С. 29–33.
32. Лазаревич, А. А. О возможности количественного анализа добра и зла в социогуманитарных исследованиях / А. А. Лазаревич, Л. А. Сосновский // *Тр. VI Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 окт. – 1 нояб. 2010 г., Минск (Беларусь) / редкол. : М. А. Журавков (пред.) [и др].* – Минск : БГУ, 2010. – Т. 2. – С. 497–500.
33. Сосновский, Л. А. Человек и общество с позиций трибофатической концепции качества жизни / Л. А. Сосновский, А. А. Лазаревич, Е. С. Таранова // *Довгирдовские чтения III : философская антропология и социальная философия : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 26–27 апр. 2012 г.* – Минск : Право и экономика, 2012. – С. 70–74.
34. Водопьянов, П. А., Мельникова, Л. Л. Синергетика и глобальный эволюционизм: диалог науки и философии // *Проблемы управления.* – № 2(27). – 2008. – С. 225–232.
35. Сосновский, Л. А. Трибофатика : о диалектике жизни. – Изд. 2-е. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 116 с.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАДИАЛЬНОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ИЗ ПРЕПРЕГА

¹Василевич Ю.В., ²Сахоненко В.М., ¹Неумержицкая Е.Ю., ²Федотов Д.А.

¹ УО Белорусский национальный технический университет, Минск

² ОАО «Авангард», Сафоново

Теоретические исследования по определению радиальных перемещений в анизотропном кольце из препрега позволили разработать методику проведения испытаний, которые отслеживают его усадку при нагружении по наружной поверхности равномерно распределенным давлением. Полученные уравнения позволяют путем сравнения с результатами испытаний, найти радиальный модуль упругости. Результаты таких исследований представлены для различных толщин оболочки из препрега.

В процессе тканой намотки многослойных, предварительно напряженных конструкций витки композиционного материала последовательно накладываются друг на друга. Под действием усилия натяжения каждый последующий виток деформирует нижеследующие слои в радиальном направлении. Это приводит к изменению первоначального закона натяжения витков $T_0(r)$.

Для решения вопроса о распределении усилий натяжения в сечении кольца необходимо рассмотреть задачу об определении радиальных перемещений в анизотропном кольце, надетом без зазора и натяга на жесткую оправку и нагруженным по наружной поверхности равномерно распределенным давлением T_0/b , где b – наружный радиус кольца. Решение этой задачи получено в [1 – 3]. Выражение для радиальных перемещений имеет вид

$$u = -\frac{T_0 h}{E_r^0 \beta} \cdot \frac{\rho^\beta - \rho^{-\beta}}{\rho_0^\beta + \rho_0^{-\beta}}, \quad (1)$$

где $T_0 = T_0 \cdot h$ – натяжение при намотке ткани единичной ширины; h – толщина ткани;

$$\beta^2 = \frac{E_\theta^0}{E_r^0}; \rho = \frac{r}{a}; \rho_0 = \frac{b}{a},$$

где E_θ^0 и E_r^0 – кольцевой и радиальный модули упругости материала кольца; b и a – наружный и внутренний радиусы кольца; r – текущий радиус кольца.

Ориентированные стеклопластики в виде ткани используются для намотки и являются существенно анизотропными материалами, свойства которых зависят от параметров формования в процессе намотки и последующей полимеризации.

В таком случае, разработке технологии намотки должен предшествовать обоснованный выбор основных параметров намотки, влияющих на прочностные свойства конструкции. Такой выбор сопровождается проведением расчетов этих параметров с использованием, например, некоторых характеристик препрега (неотвержденного композита). В частности, требуются данные величины модуля упругости препрега в радиальном направлении [4]. Этот параметр невозможно рассчитать путем теоретических исследований. Однако, экспериментальные исследования позволяют провести такую работу. Разработанная методика проведения

испытаний и некоторые результаты испытаний описывают последовательность действий для установления величины модуля упругости кольцевого препрега в радиальном направлении.

Методика проведения таких исследований может быть представлена следующим образом. Воспользуемся зависимостью для радиальных перемещений.

Полагая в (1) $r = b$, $u = \Delta u_R$ представим это соотношение в виде

$$\beta = -\frac{E_{\theta}^0 \Delta u_R}{T_0} \cdot \frac{\rho_0^{2\beta} + 1}{\rho_0^{2\beta} - 1}. \quad (2)$$

Здесь $\Delta u_R < 0$.

Уравнение (2) следует использовать для нахождения параметра β , если путем экспериментальных исследований будут определены величины E_{θ}^0 , T_0^0 и Δu_R .

Решение удобно проводить итерационным методом Зейделя. Для этого (2) представим в виде:

$$\beta_{i+1} = -\frac{E_{\theta}^0 \Delta u_R}{T_0} \cdot \frac{\rho_0^{2\beta} + 1}{\rho_0^{2\beta} - 1}. \quad (3)$$

Начальная точка такого процесса вычисляется по формуле:

$$\beta_0 = -\frac{E_{\theta}^0 \Delta u_R}{T_0}.$$

Вычисления по формуле (3) заканчиваются, если

$$|\beta_{i+1} - \beta_i| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность проведения расчётов.

Если $A = \frac{\rho_0^{2\beta} + 1}{\rho_0^{2\beta} - 1} < 1 + \varepsilon_0$,

где ε_0 - требуемая точность вычисления, то величину A можно положить равной единице. В таком случае параметр β будет равен β_0 , а из (3) найдём

$$2\beta_0 > \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)}{\ln \rho_0}.$$

Выполнение последнего неравенства позволяет положить $\beta = \beta_0$.

После нахождения β модуль упругости E_r^0 определяется путём вычисления по формуле

$$E_{\theta}^0 = \beta^2 E_r^0. \quad (4)$$

Здесь модуль упругости E_{θ}^0 определяется по формуле $E_{\theta}^0 = (1 - m)E_H$, где E_H - модуль упругости, m - относительное содержание связующего в композите.

Для проведения испытаний была выбрана наиболее употребляемая в производстве ткань Т-ВП, пропитанная связующим ЭП-5122. При намотке на оправку диаметром 200мм натяжение ткани составляло $T=1\text{Н/мм}$. Испытания проводились при разной температуре окружающей среды на приспособлении, показанном на рис.1.



Рис.1. Приспособление для проведения испытаний для определения

трансверсального модуля упругости

Для снижения возможных погрешностей измерения деформации на начальной стадии нагружения результаты измерений записывались в виде

$$\Delta u_i = \frac{|\vartheta_i - \vartheta_1|}{2\pi}; \Delta T_i = T_i - T_1,$$

где ϑ_1 – перемещение концов банджа при нагрузке $T_1 = 10$ Н. Такой приём не противоречит условиям поставленной задачи. Результаты испытания в зависимости от температуры $t^\circ\text{C}$ для некоторых толщин намотанного пакета ткани представлены в табл.(1-5).

Таблица 1 - Результаты измерения кольцевого перемещения ϑ_i , мм в зависимости от нагрузки T_i (толщина намотанного препрега $H=10\text{мм}$)

T, Н t, °C	10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	1,3	2,87	3,84	4,73	5,7	6,68	7,57	8,63	9,25
40	1,23	2,35	3,17	4,73	5,47	6,64	7,83	8,37	9,37
60	2,6	4,2	5,2	6,53	7,37	8,5	10,02	10,57	11,9
80	2,9	4,57	5,93	7,3	8,55	9,53	10,56	11,39	12,9
100	1,1	1,9	3,1	4,4	6,05	7,17	8,24	8,74	10,2
130	1,09	2,4	3,86	4,62	5,95	7,44	8,43	8,84	10,1
160	1,18	2,57	4,23	4,9	6,6	7,58	9,12	9,65	11,1

Таблица 2 - Результаты измерения кольцевого перемещения ϑ_i , мм в зависимости от нагрузки T_i (толщина намотанного препрега $H=12\text{мм}$)

T, Н t, °C	10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	2,1	3,2	4,4	5,3	6,7	8,1	9,1	10	11,1
40	1,1	1,9	2,8	3,2	3,7	5	5,6	6,1	6,4
60	1,2	2,2	3,1	4,2	5,1	6,2	6,7	7	8
80	2,75	4,4	5,05	6,1	7,1	7,9	8,83	9,67	10,47
100	0,9	1,84	2,2	3,4	4,1	5,03	5,34	5,97	6,34
130	0,94	2,05	2,7	3,64	4,42	4,84	5,45	5,96	6,62
160	1,8	2,43	2,8	3,35	3,68	3,92	4,2	4,4	4,58

Таблица 3 - Результаты измерения кольцевого перемещения ϑ_i , мм в зависимости от нагрузки T_i (толщина намотанного препрега $H=16$ мм)

T, H $t, ^\circ C$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	1,33	2,7	4,1	5,3	6,54	7,47	9,05	9,87	10,27
40	0,85	1,98	2,77	4,38	5,3	6,6	7,75	8,37	9,07
60	3,2	4,08	5,37	6,5	7,55	8,45	9,8	10,28	11,15
80	2,4	3,7	5,47	6,97	8,35	9,74	11,15	11,94	12,37
100	3,2	4,97	6,69	7,8	9,2	10,8	12,3	13,34	15,1
130	3,8	5,06	6,14	7,3	8,4	10,08	10,98	12,1	13,5
160	1,1	2,05	3,5	4,2	5,1	6,42	6,94	8,06	9,2

Таблица 4 - Результаты измерения кольцевого перемещения ϑ_i , мм в зависимости от нагрузки T_i (толщина намотанного препрега $H=18$ мм)

T, H $t, ^\circ C$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	2,3	4,2	5,9	6,9	8,3	9,5	11	12,5	14
40	2,5	4	5,1	5,5	6,3	8	8,95	9,6	10,4
60	1,9	3,3	4,55	5,55	6,9	7,5	8,35	9,9	10,7
T, H $t, ^\circ C$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
80	2,1	3,5	4,9	6	7,2	8,15	9,2	10,3	11,5
100	3,4	5,2	7,2	9,4	11,1	12,4	14	15	16,1
130	-	-	-	-	-	-	-	-	-
160	2,4	4,4	6,3	8,2	10,1	11,3	-	-	-

Таблица 5 - Результаты измерения кольцевого перемещения ϑ_i , мм в зависимости от нагрузки T_i (толщина намотанного препрега $H=30$ мм)

T_i, H $t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	0,81	1,4	2,08	3,16	3,93	4,42	4,95	5,68	6,14
40	2,6	3,18	3,8	4,82	5,24	5,72	6,08	6,6	7,06
60	0,67	1,87	2,53	3,43	4,06	5,08	5,55	6,35	6,84
80	1,27	2,43	3,84	4,55	5,4	6,28	6,97	8,2	8,82
100	2,12	3,68	4,9	6,57	7,39	8,74	10,1	10,85	11,9
130	1,7	2,73	4,49	6,28	6,75	8,8	10,2	11,5	12,95
160	1,22	2,03	2,52	2,98	3,46	4,07	4,56	4,88	5,15

Анализ таблиц показывает, что в них значения всех строк можно аппроксимировать линейной функцией, которая выражает зависимость между перемещением u_{ij} и нагрузкой T_i , причём

$$\Delta u_{ij} = \Delta u_j^0 + \Delta u_j^1 \Delta T_i. \quad (5)$$

Здесь Δu_j^0 измеряется в мм и представляет собой неупругую составляющую перемещения; Δu_j^1 измеряется в мм/Н и описывает упругую составляющую перемещения.

Природа образования неупругой составляющей Δu_j^0 имеет множество причин. Одной из главных является то, что оболочка не отверждена и поэтому состояние связующего в жидкой фазе позволяет быть ей недоуплотненной. В этой связи при постановке эксперимента, так как намотка оболочки осуществлялась без прикатного вала, материал оболочки может быть недоуплотнён. Можно предположить, что в случае присутствия прикатного вала неупругая составляющая деформации сжатия может существенно уменьшиться. Отметим, что неупругая составляющая имеет место только при сжатии.

Название упругая составляющая – весьма условно. Она представляется величиной $\Delta u_j^1 \Delta T_i$ (см. формулу (5)) и является линейной относительно нагрузки ΔT_i . Такая же зависимость имеет место для упругих твёрдых тел. Однако, имеются и отличия. Для твёрдых упругих тел после снятия нагрузки тела восстанавливают свою форму. Для препрегов восстановление формы может быть только частичным.

Судя по результатам проведённых испытаний, неупругая составляющая деформации сжатия реализуется при достаточно малой нагрузке. На этом основании будем предполагать, что такая деформация происходит мгновенно. Сделанное предположение не отразится сильно на результатах исследований, однако позволит намного упростить их проведение.

Так как неупругая составляющая деформации не влияет на модуль упругости оболочки в радиальном направлении, то при вычислении последнего с использованием формулы (2) следует положить

$$\Delta u_R = \Delta u_j^1 \Delta T_i.$$

Влияние неупругой деформации на изменение напряжённого состояния в оболочке препрега можно отождествить с усадкой связующего при полимеризации на стадии, когда оно ещё жидкое.

Таким образом, процесс намотки сопровождается появлением напряжений, вызванных неупругими деформациями Δu_j^0 и упругими $\Delta u_j^1 \Delta T_i$, рассчитываемыми по формуле (5).

Коэффициенты Δu_j^0 и Δu_j^1 из (5), будем определять методом наименьших квадратов. В таком случае

$$\Delta u_j^0 = \frac{D_1}{D}; \Delta u_j^1 = \frac{D_2}{D},$$

где

$$D = m \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k \right)^2;$$

$$D_1 = \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m u_{kj} \right) - \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k \right) \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k \Delta u_{kj} \right);$$

$$D_2 = m \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k \Delta u_{kj} \right) - \left(\sum_{k=1}^m \Delta T_k \right) \left(\sum_{k=1}^m u_{kj} \right),$$

где m – количество точек, в которых производился замер результатов испытания (в нашем случае $m=9$).

На (рис. 2а, 3а, 4а, 5а, 6а) показаны графики экспериментальных исследований результатов, представленных в (табл. 1-5) (рис. 2б, 3б, 4б, 5б, 6б) выражают соответствующие теоретические зависимости. Коэффициенты Δu_j^0 и Δu_j^1 с учётом толщины намотки и температуры окружающей среды представлены в (табл. 6). Здесь же в таблице приведены результаты расчётов модуля упругости $(E_r)_j$.

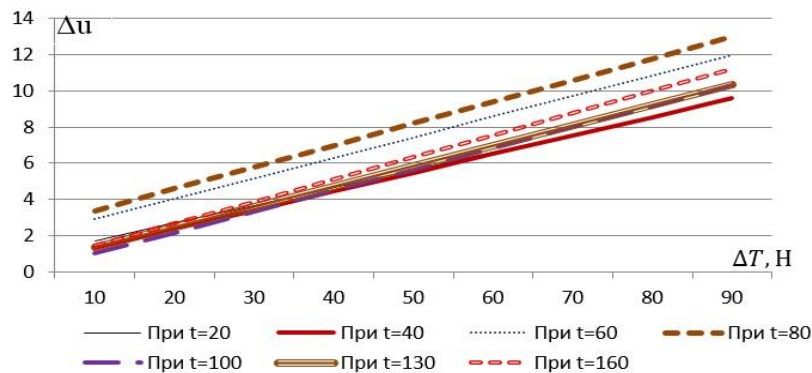


Рис.2. Графики зависимости перемещения Δu от нагрузки ΔT для разных температур окружающей среды ($H=10$ мм)

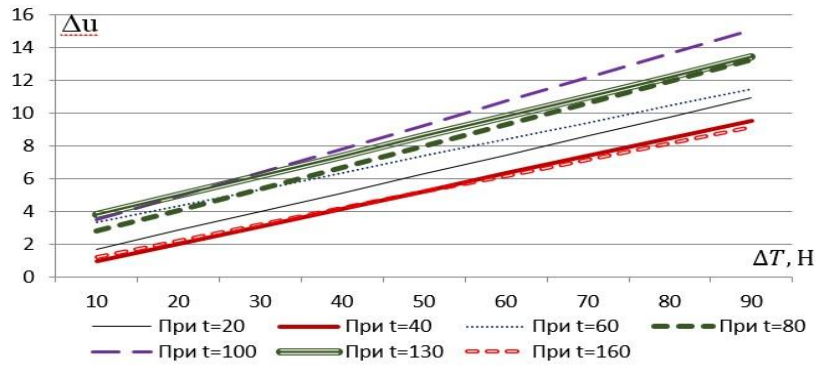


Рис.3. Графики зависимости перемещения Δu от нагрузки ΔT для разных температур окружающей среды ($H=16\text{мм}$)

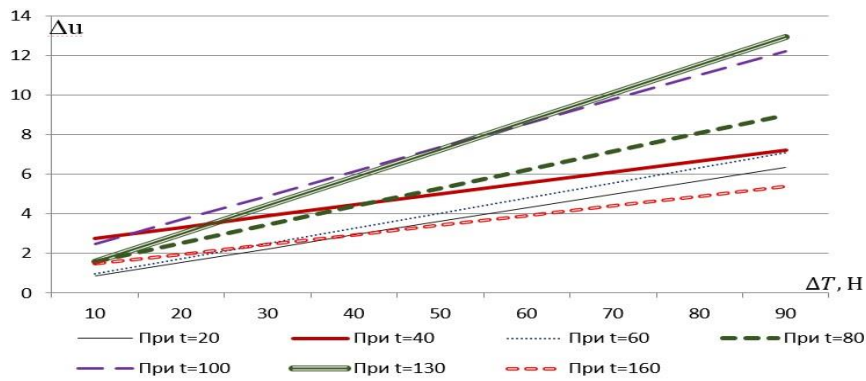


Рис.4. Графики зависимости перемещения Δu от нагрузки ΔT для разных температур окружающей среды ($H=30\text{мм}$)

Таблица 6 - Значения Δu_j^0 , Δu_j^1 и $(E_r)_j$

$H, \text{М}$ М	$H = 10$			$H = 12$			$H = 16$			$H = 18$			$H = 30$		
	Δu_j^0 , мм	Δu_j^1 , мм/ Н	$(E_r)_j$, МПа	Δu_j^0 , мм	Δu_j^1 , мм/ Н	$(E_r)_j$, МПа	Δu_j^0 , мм	Δu_j^1 , мм/ Н	$(E_r)_j$, МПа	Δu_j^0 , мм	Δu_j^1 , мм/ Н	$(E_r)_j$, МПа	Δu_j^0 , мм	Δu_j^1 , мм/ Н	$(E_r)_j$, МПа
$t, \text{°C}$															
20	0,1	0,74	0,52	0,11	0,45	0,58	0,12	0,51	0,37	0,14	1,25	0,65	0,07	0,19	0,49
40	0,1	0,31	0,46	0,07	0,54	0,72	0,11	0,62	0,43	0,10	0,82	0,52	0,06	0,21	0,58
60	0,11	0,77	0,39	0,08	0,62	0,69	0,1	1,27	0,47	0,11	1,14	0,43	0,08	0,22	0,65
80	0,12	0,31	0,34	0,1	0,83	0,81	0,13	1,45	0,29	0,11	1,25	0,38	0,09	0,68	0,58
100	0,12	0,32	0,36	0,07	0,40	1,0	0,14	1,02	0,23	0,16	1,36	0,19	0,52	0,52	0,33
130	0,11	0,25	0,39	0,07	0,64	1,05	0,12	1,56	0,34	---	---	---	0,14	0,16	0,24
160	0,12	0,21	0,33	0,03	0,68	0,94	0,1	1,21	0,5	0,18	0,77	0,15	0,05	0,54	0,23

Анализируя графики на рисунках и данные табл. 6 можно сделать следующие выводы.

1. Радиальные перемещения и вызывающая их нагрузка находятся в линейной зависимости. Таким образом, гипотеза, выраженная формулой (5), является справедливой для любых толщин намотанного препрега.

2. Можно считать, что модуль упругости препрега в радиальном направлении не зависит от температуры препрега.

3. Неупругая составляющая радиального перемещения оболочки не зависит от температурного градиента и от толщины намоточного препрега.

4. Предложенный метод экспериментальных исследований по определению модуля упругости цилиндрической оболочки из препрега может быть использован для практических исследований деформационных характеристик в процессе изготовления изделий из композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией // Уч.зап. Саратовск. гос. ун-та. Сер.физ.-мат. наук, т.1, вып.2, 1938. С. 154-157.
2. Комков М.А. Формование отверстий в композитных конструкциях методом прокалывания неотвержденного материала / М.А.Комков, А.В. Колганов // Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы: материалы 2-й международной научной конференции. Москва, 2003, МГТУ, 18-21 ноября 2003 г.
3. Болотин В.В., Болотина К.С. Механика полимеров. 1967, №1. С. 136-141.
4. Устранение начальных термических напряжений в намоточных изделиях из композитов изменением угла намотки по толщине /Бейль А.И. [и др.] // Механика композитных материалов. 1980, № 6. С. 1068-1075.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ СВМПЭ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ПРОНИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ КРАТКОСРОЧНЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ НА СЖАТИЕ

¹Гавриленко С.Л., ¹Шилько С.В., ²Панин С.В.

¹Государственное научное учреждение «Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси», Гомель

²Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

Введение. Прогнозирование формостабильности изделий из термопластичных полимерных материалов в процессе переработки, например, методами 3D печати, а также при их длительной эксплуатации под действием силовых воздействий предполагает определение их реологических параметров путем испытаний на релаксацию или ползучесть [1-5]

Для описания вязкоупругого поведения наиболее часто используют линейные модели в виде интегрального оператора с разностным ядром. Относительно простой и при этом достаточно информативной является линейная вязкоупругая модель Прони с ядром в виде суммы экспонент [6-8]. В частности, модель Прони заложена в конечноэлементные расчеты конструкций с помощью программных продуктов ANSYS, MARC, SOLIDWORKS, WORKBENCH и др. В работах авторов показана возможность определения реологических параметров вязкоупругих моделей на основе ограниченного объема данных, получаемых при испытаниях на кратковременную релаксацию [9-11].

Целью настоящего исследования являлось определение вязкоупругих характеристик сверхвысокомолекулярного полиэтилена (СВМПЭ) и дисперсно-наполненных композитов на его основе путем идентификации 2-х экспоненциальной вязкоупругой модели Прони по результатам релаксационных испытаний на сжатие.

Методы, оборудование, материалы и результаты исследования. В предположении линейной вязкоупругости справедливы следующие соотношения между девиаторами напряжений и деформаций [1,2]:

$$2G\dot{\gamma}_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \tilde{A}(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau, \quad K\theta(t) = \sigma(t).$$

Здесь $\theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема, $\sigma = \sigma_{kk}/3$ – среднее (гидростатическое) напряжение, G – мгновенный модуль сдвига, K – мгновенный модуль объемной деформации. $\tilde{A}(t)$ – ядро (функция) ползучести.

Для связи тензора напряжений и деформации можно использовать определяющие соотношения вязкоупругой модели Прони [1–5]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Здесь

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^G}}, \quad K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^K}},$$

$$G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i = \mu, \quad K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i = K.$$

Имеем также известные зависимости для модулей упругости [2]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

При постоянстве коэффициента Пуассона материала $\nu = \text{const}$ записываются следующие соотношения [1]:

$$ER_E(t - \tau) = 2(1 + \nu)G'_\tau(t - \tau),$$

$$K'_\tau(t - \tau) = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}G'_\tau(t - \tau),$$

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon(t) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t) \right] - \frac{E}{1 + \nu} \int_0^t R_E(t - \tau) \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon(\tau) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(\tau) \right] d\tau.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени при испытании призматического образца на релаксацию при сжатии [9,10]:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left(1 - \frac{2(1 + \nu)}{E} (G(0) - G(t)) \right).$$

Здесь $G(t)$ – функция сдвиговой релаксации. Применяя метод наименьших квадратов, получим систему алгебраических уравнений, из которой можно найти параметры функции сдвиговой релаксации. Для вышеприведенной функции сдвиговой релаксации выражение для сжимающего усилия примет вид [9,10]:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left(1 - \frac{2(1 + \nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right).$$

Исследовались дисперсно-наполненные термопластичные композиты на основе СВМПЭ двух марок: СВМПЭ₂₁₂₂ и СВМПЭ₄₁₂₀ – в общей сложности двенадцать составов: 1) СВМПЭ₂₁₂₂ (материал 1), 2) СВМПЭ₄₁₂₀ (материал 2), 3) 90 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 10 вес. % углеволокна 70 мкм (материал 3), 4) 90 вес. % СВМПЭ₄₁₂₀, 10 вес. % углеволокна 70 мкм (материал 4), 5) 90 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 10 вес. % углеволокна 200 мкм (материал 5), 6) 90 вес. % СВМПЭ₄₁₂₀, 10 вес. % углеволокна 200 мкм (материал 6), 7) 90 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 10 вес. % углеволокна 2 мм (материал 7), 8) 90 вес. % СВМПЭ₄₁₂₀, 10 вес. % углеволокна 2 мм (материал 8), 9) 99,5 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 0,5 вес. % наноуглеволокна (материал 9), 10) 99,5 вес. % СВМПЭ₄₁₂₀, 0,5 вес. % углеродные нановолокна (материал 10), 11) 90 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 10 вес. % частицы базальта 5-10 мкм (материал 11), 12) 90 вес. % СВМПЭ₂₁₂₂, 10 вес. % волокна базальта 200 мкм (материал 12).

Вязкоупругие свойства вышеперечисленных материалов изучали на машине для механических испытаний Инстрон 5567 (ИММС НАН Беларуси) на образцах высотой 20 мм и квадратным поперечным сечением площадью 100 мм² в условиях релаксации при одноосном сжатии и комнатной температуре 22 °С. Исходя из предельной упругой деформации предварительно испытанных на прочность матричного материала (СВМПЭ), задавались 3 уровня кинематического нагружения $\varepsilon = 1, 2$ и 3 %. Релаксационные зависимости двух марок СВМПЭ и композитов на их основе №№ 1–12, полученные при длительности нагружения 180 мин, имеют вид, показанный на рисунке.

Для определения параметров вязкоупругой модели Прони использовали минимизацию невязки отклонения теоретической зависимости усилия при релаксации от экспериментальных значений. Использовали 20 экспериментальных значений в характерные моменты времени в стадии начальной и установившейся релаксации.

Результаты идентификации модели Прони при значении коэффициента Пуассона для всех видов материалов, равном $\nu = 0,45$, представлены в Таблице. Для идентификации модели Прони. Относительная погрешность определения модуля Юнга не превышала 12 %. Средняя невязка между экспериментальными и теоретическими значениями усилия при релаксации не превышала 5 %.

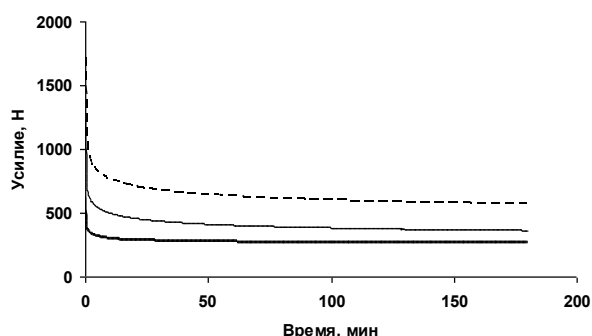


Рис. 1. Характерные релаксационные кривые для композитов на основе СВМПЭ. Нижняя кривая – $\varepsilon_0 = 1,0\%$, сплошная тонкая линия $\varepsilon_0 = 2,0\%$, пунктирная тонкая линия $\varepsilon_0 = 3,0\%$.

Таблица 1 – Параметры модели Прони для СВМПЭ-композитов

Материал	E , МПа	G_{∞} , МПа	G_1 , МПа	λ_1 , мин	G_2 , МПа	λ_2 , мин
№ 1	614	65,9	114,5	1,6	26,5	2,51
№ 2	557	56,6	103,5	1,6	32,0	28,5
№ 3	772	85,2	122,0	1,6	59,0	28,5
№ 4	643	89,7	80,0	1,6	52,0	25,5
№ 5	462	67,8	48,5	1,6	43,0	27,0
№ 6	775	71,2	120,0	0,1	76,0	13,6
№ 7	1265	255,2	87,0	1,6	94,0	28,5
№ 8	1113	167,8	150,0	1,6	66,0	28,5
№ 9	555	59,4	94,0	1,6	38,0	28,5
№ 10	600	67,9	101,0	1,6	38,0	25,5
№ 11	720	81,3	115,0	1,6	52,0	28,5
№ 12	637	73,7	101,0	1,6	45,0	28,5

Заключение

Рассматривается возможность ускоренной аттестации вязкоупругих свойств экструдированных полимерных композитов для аддитивных технологий. С этой целью разработана методика определения параметров вязкоупругой модели Прони путем ее идентификации по результатам релаксационных испытаний на сжатие 2-х марок сверхвысокомолекулярного полиэтилена и 10-ти СВМПЭ композитов.

С использованием 2-х экспоненциального варианта модели Прони определены значения модулей и времен релаксации, на основании которых найдены параметры

функции ползучести, что позволяет прогнозировать формостабильность элементов конструкций при длительном нагружении.

Работа выполнена в рамках проекта Т18Р-286.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. *Механика полимерных и композиционных материалов: учебное пособие* / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев – М.: Наука, 1985. – 303 с.
2. Старовойтов Э.И. *Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебное пособие* / Э.И. Старовойтов – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
3. Москвитин, В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов* / В.В. Москвитин – М.: Наука, 1972. – 327 с.
4. Колтунов М.А. *Ползучесть и релаксация: учебное пособие* / М.А. Колтунов – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
5. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости* / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1974. – 340 с.
6. Исаев К.В. *Активная идентификация дифференциальных моделей вязкоупругого поведения материалов* / К.В. Исаев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 82–88.
7. Образцов И.Ф. *Применение метода минимакса для уравнений состояния вязкоупругих сред* / И.Ф. Образцов, Ю.А. Басистов, Ю.Г. Яновский // ДАН РАН. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 455–458.
8. Басистов, Ю.А. *Модифицированный метод регуляризации вычисления релаксационных функций вязкоупругих сред* / Ю.А. Басистов, Ю.Г. Яновский, И.Ф. Образцов // Механика композитных материалов. – 1994. – Т. 30, № 4. – С. 482–493.
9. Гавриленко С.Л. *Идентификация линейных вязкоупругих моделей антифрикционных полимерных композитов по результатам ускоренных испытаний на релаксацию при сжатии* / С.Л. Гавриленко, С.В. Шилько // Актуальные вопросы машиноведения: Сб. статей. – 2016. – Вып. 5. – С. 326–328.
10. Шилько, С.В. *Определение реологических параметров полимерных материалов на основе идентификации вязкоупругой модели Прони по результатам статических и динамических испытаний* / С.В. Шилько, С.Л. Гавриленко, С.В. Панин, О.В. Алексенко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2017. – № 3. – С. 33–38.
11. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения* / Б.А. Люшин, С.В. Шилько, С.В. Панин и др. – Новосибирск, Изд.-во СО РАН. – 2017. – 311 с.

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА БЕДРЕННУЮ КОСТЬ С АРМИРУЮЩИМ ИМПЛАНТОМ В ПРОКСИМАЛЬНОМ ОТДЕЛЕ

¹ Босяков С.М., ¹Николайчик М.А., ² Матвеев А.Л.

¹ УО «Белорусский государственный университет», Минск

² Новокуйбышевская центральная городская больница, Новокуйбышевск

Введение. Патологические переломы, локализованные в проксимальном отделе бедренной кости, часто вызваны опухолеподобными поражениями и/или уменьшением минеральной плотности костной ткани при остеопорозе [1]. Одной из методик предотвращения перелома является внедрение в кость металлических имплантов. Для повышения несущей способности бедренной кости используются различные типы имплантов: эндопротезы, винтовые и блокирующие импланты. Стендовые испытания показали, что винтовые импланты обеспечивают значительное повышение предельной нагрузки, соответствующей возникновению патологического перелома, по сравнению с бедренной костью без импланта [2]. Армирование кости с опухолеподобным поражением повышает ее несущую способность [3, 4]. Целью данной работы является оценка предельной нагрузки, соответствующей возникновению патологического перелома в проксимальном отделе бедренной кости, для интактной (неимплантированной) кости и кости с внедренными в нее имплантами. Конструкции имплантов разработаны в Новокуйбышевской центральной городской больнице [5–7].

Конечно-элементное моделирование. Твердотельная модель бедренной кости была получена на основании компьютерной томографии взрослого человека (46 лет, мужчина).

Для описания анизотропных упругих свойств бедренной кости разработана регрессионная функция с использованием метода наименьших квадратов на основании значений модуля упругости в 20 точках, расположенных в кортикальной костной ткани диафиза и приблизительно между губчатой и кортикальной костными тканями в разных частях бедренной кости.

Узлы интерполяции $A_k, L_k, P_k, M_k, k=\overline{1,4}$, и $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}, M_n^{(0)}, n=1,2$, расположенные на уровнях l_1, l_2, l_3 и m_1, m_2 соответственно. MN – анатомическая ось бедренной кости. Уровни l_1, l_2, l_3 и m_1, m_2 , и узлы интерполяции показаны на рисунке 1.

Величины модуля упругости в узлах A_k, L_k, P_k и $M_k, k=\overline{1,4}$ приведены в таблице 1 [8]. В таблице 1 индексы 1, 2 и 3 соответствуют радиальному, окружному и продольному направлениям. Продольное направление совпадает с анатомической осью MN бедренной кости.

Таблица 1 – Величина модуля упругости в узлах интерполяции.

Узлы интерполяции	Модуль упругости, ГПа
A_2, L_2, P_2, M_2	11,70
$A_k, L_k, P_k, M_k, k=1,3$	3,00
$A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}, M_n^{(0)}, n=1,2$	1,75

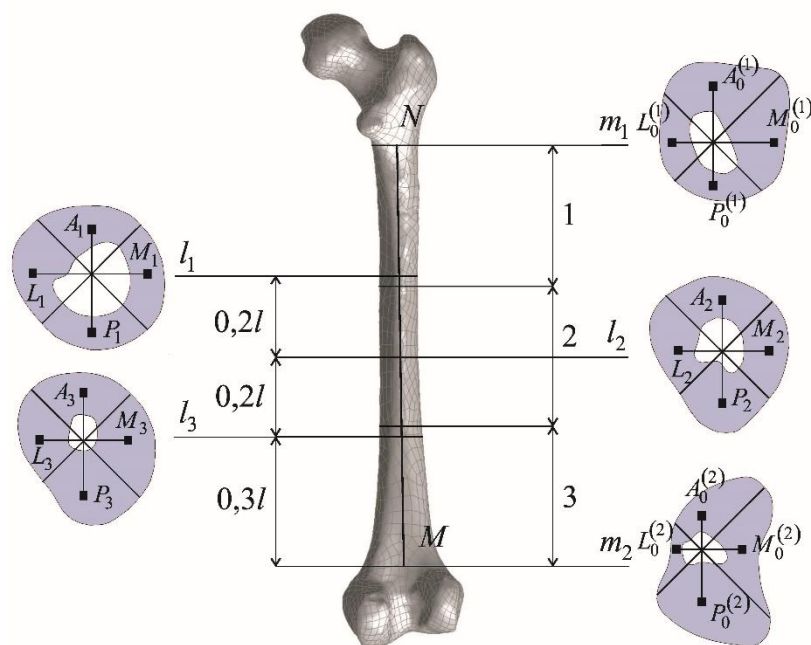


Рис.1. Уровни l_1, l_2, l_3 диафиза бедренной кости с узлами интерполяции A_k, L_k, P_k и M_k ; уровни m_1, m_2 между губчатой и кортикальной частью бедра с узлами интерполяции $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}, M_n^{(0)}, n=1,2$; MN – анатомическая ось; l – длина части кости примерно соответствующая кортикальной части; 1 – верхняя треть; 2 – средняя треть; 3 – нижняя треть.

Минимальное значение модуля упругости для дистальной и проксимальной частей бедренной кости составило 0,5 ГПа.

На основании данных таблицы 1 получена регрессионная функция, описывающая изменение модуля упругости вдоль анатомической оси бедренной кости.

$$E(z) = 0,5 + 157,257z - 4262,6z^2 + 43,047z^3 - 179320z^4 + 327056z^5 - 218037z^6, \quad (1)$$

где z – координата, изменяющаяся вдоль анатомической оси бедренной кости.

Величина коэффициента Пуассона была принята равной 0,33 для всей кости [9].

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала имплантов – 200 ГПа и 0,3 соответственно.

Положение имплантов в проксимальной части бедра показано на рисунке 2.

Твердотельные модели имплантов были разработаны на основании патентов [5 – 7] в пакете SolidWorks.

Конечно-элементная сетка генерировалась в полуавтоматическом режиме. Размер элемента в проксимальном отделе составил 3 мм [10], в области предполагаемого начала патологического перелома – 0,5 мм, а в остальной части бедренной кости – 10 мм. Типом конечного элемента является тетраэдрический элемент Solid 185 [10].

Для имитации действия собственного веса на бедренную кость, нижняя часть кости жестко закреплялась по всем степеням свободы. К верхней трети головки бедра прикладывалась распределенная нагрузка. Линия действия нагрузки проходила через середину отрезка, соединяющего нижние мышечки. Контакт между бедренной костью и имплантами был задан типа Bonded («склейка»). Конечно-элементная модель бедренной кости и граничные условия приведены на рисунке 3.

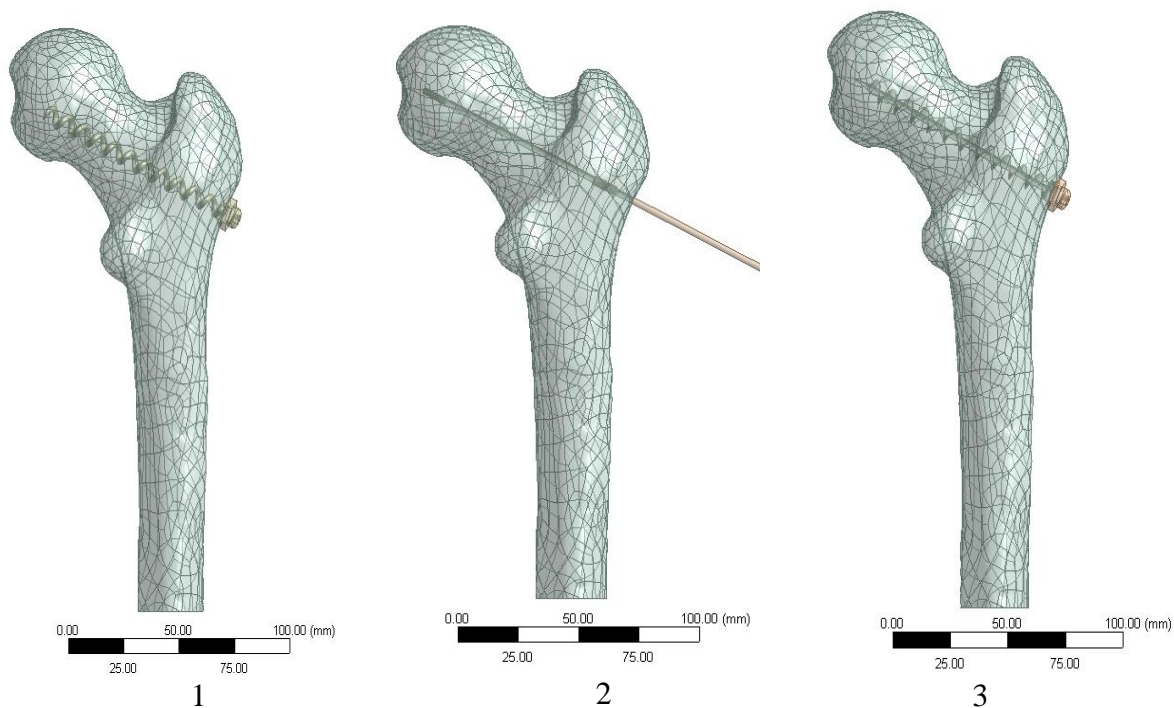


Рис. 2. Положение имплантов в проксимальном отделе: 1 – штопор, 2 – спица, 3 – шпек

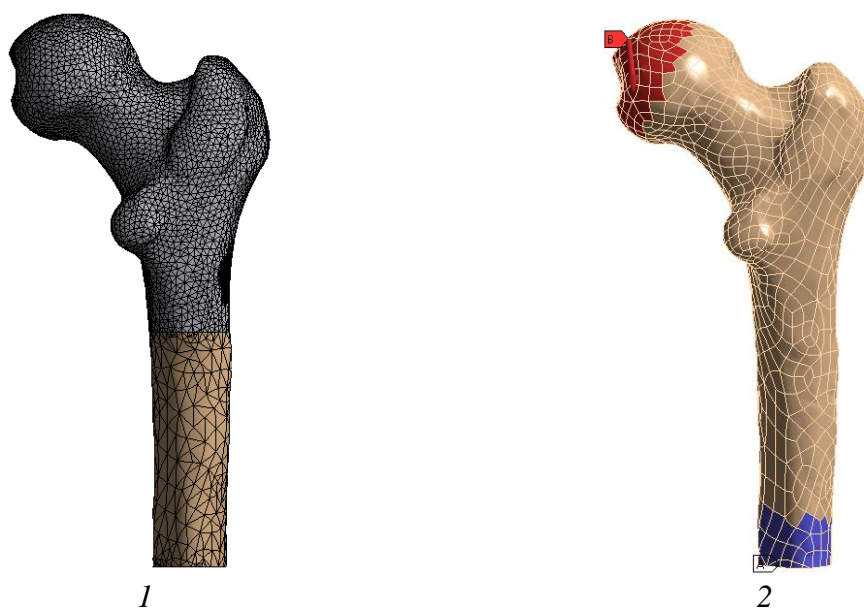


Рис. 3. Конечно-элементная модель бедренной кости: 1 – конечно-элементная модель бедренной кости, 2 – граничные условия, соответствующие действию собственного веса человека (маркер А – область жесткого закрепления, маркер В – область приложения распределенной нагрузки)

При оценке несущей способности интактной бедренной кости и бедренной кости с имплантатами использован подход, основанный на определении параметра поврежденности $f = \varepsilon_1 / \varepsilon_c$ элемента [11] (ε_1 - максимальная главная деформация, ε_c – предельная деформация, значение которой было принято равным 0,0165 [11]) . Если

для какого-либо элемента параметр поврежденности превышал 1, то модуль упругости этого элемента полагался равным 1 МПа [11]. Нагрузка является предельной, если при ее действии возникает связная область из 15 элементов с пониженной жесткостью [10].

Локализация области элементов со сниженной жесткостью при действии критической нагрузки на бедренную кость показана на рисунке 4.

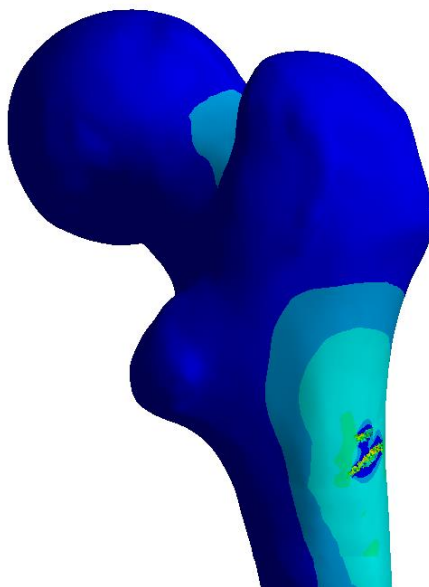


Рис. 4. Локализация области элементов со сниженной жесткостью

Соотношения величин предельных нагрузок, соответствующих образованию патологического перелома интактной кости и кости с внедренным имплантом показаны в таблице 2

Таблица 2 – Величины предельных нагрузок

Тип импланта, устанавливаемого в проксимальный отдел	Предельная нагрузка (изменение предельной нагрузки на кость с имплантом по отношению к интактной кости), Н
Интактная бедренная кость	7800 (100%)
Бедренная кость с шнеком	8767 (110,4%)
Бедренная кость с штопором	9336 (119,7%)
Бедренная кость со спицей	8568 (109,85 %)

Заключение. Оценка предельной нагрузки под действием собственного веса человека интактной бедренной кости и бедренной кости с армирующими имплантами, установленными в проксимальном отделе, была выполнена на основе конечно-элементной модели с нелинейным распределением модуля упругости костной ткани. Нелинейная зависимость модуля упругости от координаты вдоль анатомической оси бедренной кости была получена с использованием экспериментальных данных большого количества образцов. Для вычисления предельной нагрузки использовалась техника деградации конечных элементов. Трещина в интактной бедренной кости и кости с армирующими имплантами наблюдается в области большого вертела. Предельная нагрузка на бедренную кость может увеличиться на 10-20% после установки армирующих имплантов. Предельная нагрузка увеличивается примерно на 10% после установки шнека или спицы и на 20% после установки штопора. Поэтому использование штопора в качестве армирующего импланта является оптимальным

(предпочтительным).

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.8.01.1 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ossendorf C., Scheyerer M., Wanner G., Simmen H-P., Werner C. *Treatment of femoral neck fractures in elderly patients over 60 years of age - which is ideal modality of primary joint replacement // Patient Safety in Surgery. 2010, Vol. 4, P. 16-27.*
2. Lazarev I.A., Guk Yu.M., Oliynik Yu.V., Skiban M.V. *Stress-deformed state of the proximal branch of the cell of fibrous dysplasia under conditions of osteosynthesis by different types of clamps // Trauma. 2015, Vol. 16, P. 49-56.*
3. Jehn C., Diel I, Overkamp F., Kurth A., Schaefer R., Miller K., Luftner D. *Management of metastatic bone disease, algorithms for diagnostics and treatment // International Journal of Cancer Research and Treatment. 2016, Vol. 36, P. 2631-2637.*
4. Nishida Y., Tsukushi S., Hosono K., Nakashima H., Yamada Y., Urakawa H., Ishiguro N. *Surgical treatment for fibrous dysplasia of femoral neck with mild but prolonged symptoms: a case series // Journal of Orthopaedic Surgery and Research. 2015, Vol. 10, P. 63-70.*
5. Матвеев А.Л., Нехожин А.В. *Устройство для армирования шейки бедренной кости и превентивной профилактики переломов: Патент РФ на изобретение № 98901 от 10.11.2010.*
6. Матвеев А.Л., Нехожин А.В., Минасов Т.Б., Фролов А.В. *Устройство для армирования шейки бедренной кости и превентивной профилактики переломов ее при остеопорозе: Патент РФ на изобретение № 121725 от 10.11.2012.*
7. Матвеев А.Л., Нехожин А.В., Минасов Т.Б., Степанов О.Н., Дубров В.Э. *Устройство для профилактического армирования и предупреждения переломов проксимального отдела бедра: Патент РФ на изобретение № 136703 от 20.01.2014.*
8. Rho J. *An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone // Ultrasonics. 1996, Vol. 34, P. 777-783.*
9. Duda G., Heller M., Albinger J., Schulz O., Schneider E., Claes L. *Influence of muscle forces on femoral strain distribution // Journal of Biomechanics. 1998. Vol. 31. P. 841-846.*
10. Keyak J. *Improved prediction of proximal femoral fracture load using nonlinear finite element models // Medical Engineering & Physics. 2001. Vol. 23. P. 165-173.*
11. Marco M., Giner E., Larrainzar-Garijo R., Caeiro J., Miguelez M. *Modelling of femur fracture using finite element procedures // Engineering Fracture Mechanics. 2018, Vol. 196, P. 157-167.*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА БУКСОВАНИЯ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ И КОЛЕСА

¹Скойбеда А.Т., ¹Жуковец В.Н.

¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Современный колесный транспорт предназначен в основном для передвижения по ровной твердой дороге. Уступ высотой в радиус колеса непреодолим для большинства колесных машин [1]. Неэффективен колесный транспорт и при движении по слабым грунтам. Необходимость создания транспортных средств высокой проходимости потребовала разработки машин, перемещающихся с помощью нетрадиционных движителей, к которым относятся и шагающие системы. Известно, что животные и люди могут передвигаться по большинству поверхностей, непроходимых для колесного и гусеничного транспорта. При этом передвижение по принципу колеса в живой природе практически не используется [1].

Проведем сравнительный теоретический анализ буксования ходовой системы на основе колесно-шагающего движителя, образец которого создан в БНТУ [2], и классической колесной ходовой системы. Будем рассматривать тихоходный режим движения, поэтому сопротивлением воздуха следует пренебречь. Режим движения установившийся, у колесной системы полностью отсутствуют ускорения. В ходовой системе на основе колесно-шагающего движителя из-за конструктивных особенностей действуют периодически повторяющиеся ускорения, итоговое влияние которых по окончании каждого цикла движения равно нулю.

Выдвинем теоретическое предположение, которое должно быть подтверждено экспериментально, что при одинаковых массово-габаритных параметрах транспортных средств, на одинаковой естественной опорной поверхности, коэффициент буксования классического колеса равен коэффициенту буксования опорного башмака колесно-шагающего движителя с таким же рисунком протектора.

Исходя из работ [2, 3], горизонтальное перемещение оси ступицы колесно-шагающего движителя выражается формулой:

$$X_{01} = (a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + \int_0^{\varphi} \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Вертикальное положение оси ступицы:

$$Y_{01} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (2)$$

Учитывая выражение $\frac{dY_2}{d\varphi} = -\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \cos \varphi$ [3], проведем дифференцирование.

Аналог скорости центральной оси ступицы по горизонтали:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (3)$$

Аналог ускорения центральной оси ступицы по горизонтали:

$$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (4)$$

Аналог скорости центральной оси ступицы по вертикали:

$$\frac{dY_{01}}{d\varphi} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (5)$$

Аналог ускорения центральной оси ступицы по вертикали:

$$\frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2} = -\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi - (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (6)$$

Толкающая реакция почвы по горизонтальной оси:

$$X_K = \frac{j}{i} \cdot G_{KK} \cdot \psi + \frac{m_{TC}}{i} \cdot \omega^2 \cdot \frac{d^2X_{01}}{d\varphi^2}. \quad (7)$$

Вертикальная реакция почвы:

$$Y_K = m_{KШД} \cdot \left(g + \omega^2 \cdot \frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2} \right). \quad (8)$$

Масса транспортного средства: $m_{TC} = i \cdot m_{KШД} + j \cdot m_{KK}$.

Учитывая, что: $G_{TC} = m_{TC} \cdot g$; $G = m_{KШД} \cdot g$; $G_{KK} = m_{KK} \cdot g$; вес транспортного средства будет равен:

$$G_{TC} = i \cdot G + j \cdot G_{KK}. \quad (9)$$

Здесь m_{TC} – общая масса транспортного средства, кг; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; i – число ведущих колесно-шагающих движителей; $m_{KШД}$ – приведенная масса транспортного средства на один ведущий колесно-шагающий движитель, кг; j – число ведомых колес; m_{KK} – приведенная масса транспортного средства на одно ведомое круглое колесо, кг.

Ведущий момент обеспечивает вращение ступицы колесно-шагающего движителя, которое обеспечивает движение транспортного средства [2, 4]:

$$M_{BED} = M_{ПП} + M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi}.$$

Момент на преодоление внутренних потерь в редукторе движителя:

$$M_{ПП} = \frac{1 - \eta_p}{\eta_p} \cdot \left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi} \right).$$

Здесь η_p – механический КПД редуктора движителя.

Момент сопротивления качению

$$M_K = Y_K \cdot \psi \cdot R_K. \quad (10)$$

Радиус кривизны профиля опорного башмака находится как [3, 5]:

$$R_K = Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi. \quad (11)$$

Здесь ψ – безразмерный коэффициент трения качения.

Тогда ведущий момент будет равен:

$$M_{BED} = \frac{1}{\eta_p} \cdot \left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi} \right). \quad (12)$$

Касательная сила тяги, действующая на опорную поверхность:

$$P_K = M_{BED} / \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right). \quad (13)$$

Максимальная величина касательной силы тяги P_K , возможная по условиям сцепления с опорной поверхностью, выражается уравнением [4]:

$$P_K \leq P_\phi = \phi \cdot Y_K; \quad (14)$$

где ϕ – коэффициент сцепления с опорной поверхностью.

Определим общий КПД движителя с учетом потерь в редукторе, на трение качения, на буксование. Поскольку в течение цикла происходит изменение ряда параметров, будем использовать средние значения за цикл.

$$\eta_{КШД} = \frac{\eta_p \cdot \left(X_{K\text{факт}} \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} \right)_{\text{ср}}}{\left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} + Y_K \cdot \frac{dY_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{ср}}}; \quad (15)$$

где $X_{K\text{факт}}$ – фактическая толкающая реакция почвы по горизонтальной оси с учетом буксования; $\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}}$ – аналог скорости с учетом буксования.

Эффективный момент, совершающий полезную работу:

$$M_{\text{ЭФФ}} = X_{K\text{факт}} \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}}. \quad (16)$$

Особенность колесно-шагающего движителя заключается в том, что горизонтальное перемещение оси ступицы обеспечивается двумя составляющими [3]:

1) Перемещение за счет поворота ноги и кривошипов, равное:

$$X_I = (a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi. \quad (17)$$

2) Перемещение за счет прокатывания башмака по поверхности, равное длине линии профиля башмака, которая определяется интегралом [6]:

$$X_{II} = \int_0^\varphi \sqrt{X'^2 + Y'^2} \cdot d\varphi = \int_0^\varphi \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi. \quad (18)$$

Полное горизонтальное перемещение составит:

$$X_{01} = X_I + X_{II} = (a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + \int_0^\varphi \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot d\varphi. \quad (19)$$

Таким образом, аналог скорости за счет поворота ноги и кривошипов:

$$\frac{dX_I}{d\varphi} = \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (20)$$

Аналог скорости за счет прокатывания башмака:

$$\frac{dX_{II}}{d\varphi} = Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi. \quad (21)$$

Коэффициент буксования δ – безразмерный коэффициент, определяемый как отношение суммарного проскальзывания движителя на пройденном пути к теоретически возможному перемещению на том же участке [4]:

$$\delta = (L_{\text{ТЕОР}} - L) / L_{\text{ТЕОР}}. \quad (22)$$

Здесь L и $L_{\text{ТЕОР}}$ – соответственно фактический путь, пройденный транспортным средством, и теоретически возможный путь при отсутствии проскальзывания движителя. При отсутствии буксования $\delta = 0$, а при полном буксовании $\delta = 1$.

У колесно-шагающего движителя процесс буксования должен затрагивать только составляющую скорости за счет прокатывания башмака. Потери скорости на буксование классического колеса учитываются кинематическим коэффициентом полезного действия η_{δ} , вычисляемым как отношение фактической скорости, на которую оказало влияние буксование, к теоретически возможной скорости. В свою очередь, коэффициент буксования будет равен $\delta = 1 - \eta_{\delta}$.

В дальнейшем, общий коэффициент буксования колесно-шагающего движителя будет обозначаться как $\delta_{КШД}$. Кинематический коэффициент полезного действия для колесно-шагающего движителя:

$$\eta_{\delta_{КШД}} = 1 - \delta_{КШД}. \quad (23)$$

При этом коэффициенты δ и η_{δ} для колесно-шагающего движителя будут учитывать лишь составляющую скорости за счет прокатывания башмака, который в своем движении аналогичен классическому колесу. Тогда:

$$\eta_{\delta_{КШД}} = (X_I + \eta_{\delta} \cdot X_{II}) / (X_I + X_{II}). \quad (24)$$

Фактический аналог скорости движителя с учетом буксования башмака:

$$\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} = \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi \right) + \left(Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \eta_{\delta}. \quad (25)$$

Фактический аналог ускорения движителя с учетом буксования:

$$\left(\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} \right)_{\text{факт}} = \left(\frac{d^2 Y_1}{d\varphi^2} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \cos \varphi - (a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi \right) + \left(-\frac{d^2 Y_1}{d\varphi^2} \cdot \sin \varphi - 2 \cdot \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \cos \varphi \right) \cdot \eta_{\delta}. \quad (26)$$

Существующие башмаки круглого профиля имеют постоянные параметры, равные $Y_1 = 0,073$ м; $Y_2 = 0,192$ м.

Аналоги скорости и ускорения с учетом буксования башмаков равны:

$$\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} = ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi) + Y_2 \cdot \eta_{\delta}; \quad (27)$$

$$\left(\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} \right)_{\text{факт}} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (28)$$

Фактическая толкающая реакция почвы:

$$X_{К\text{факт}} = \frac{j}{i} \cdot G_{КК} \cdot \psi + \frac{m_{ТС}}{i} \cdot \omega^2 \cdot (-(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi). \quad (29)$$

Момент трения качения при радиусе кривизны $R_K = Y_2 = 0,192$ м:

$$M_K = Y_K \cdot \psi \cdot R_K. \quad (30)$$

Рассмотрим колесно-шагающий движитель с опорными башмаками рационального профиля, который описывается системой уравнений [3, 5]:

$$\begin{cases} X = Y_2 \cdot \sin \varphi; \\ Y = Y_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (31)$$

Радиус-вектора профиля описываются уравнениями:

$$Y_1 = 4 \cdot b \cdot \cos \varphi - a; \quad (32)$$

$$Y_2 = a - 2 \cdot b \cdot (1 + \cos^2 \varphi) + c. \quad (33)$$

Длина стойки ноги c вычисляется по формуле:

$$c = \left(\frac{10}{\pi} + 1 \right) \cdot b - a. \quad (34)$$

При соблюдении данного требования, 75 % перемещения движителя будет осуществляться за счет поворота ноги и кривошипов, а 25 % перемещения – за счет прокатывания башмака. Таким образом, в четыре раза сокращаются затраты энергии на смятие грунта. Также при опоре на башмаки рационального профиля исчезают вертикальные колебания центральной оси ступицы.

Учитывая формулу (26), запишем выражение для фактической толкающей реакции почвы с учетом влияния буксования:

$$X_{K\text{факт}} = \frac{j}{i} \cdot G_{KK} \cdot \psi + \frac{m_{TC}}{i} \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} \right)_{\text{факт}}. \quad (35)$$

Аналоги скорости и ускорения с учетом буксования башмаков равны:

$$\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} = (a - b + c - 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi) \cdot \eta_{\delta} + 6 \cdot b \cdot \cos 2\varphi; \quad (36)$$

$$\left(\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} \right)_{\text{факт}} = 6 \cdot b \cdot \sin 2\varphi \cdot \eta_{\delta} - 12 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (37)$$

Фактическая толкающая реакция почвы:

$$X_{K\text{факт}} = \frac{j}{i} \cdot G_{KK} \cdot \psi + \frac{m_{TC}}{i} \cdot \omega^2 \cdot (6 \cdot b \cdot \sin 2\varphi \cdot \eta_{\delta} - 12 \cdot b \cdot \sin 2\varphi). \quad (38)$$

Радиус кривизны рационального профиля опорного башмака:

$$R_K = a - b + c - 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (39)$$

Момент трения качения:

$$M_K = Y_K \cdot \psi \cdot (a - b + c - 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi). \quad (40)$$

Общий КПД движителя с рациональным профилем опорного башмака:

$$\eta_{KШД} = \frac{\eta_p \cdot \left(X_{K\text{факт}} \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} \right)_{\text{ср}}}{\left(M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{ср}}}. \quad (41)$$

Далее опишем параметры колесного движителя для классической ходовой системы. Динамический радиус ведущего колеса $R = 0,315$ м. Движение является установившимся без ускорений и торможений. Вертикальная координата центральной оси ступицы постоянна и равна $Y_{01} = R$.

Аналог скорости по горизонтали с учетом буксования равен:

$$\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}} = R \cdot \eta_{\delta}. \quad (42)$$

Момент трения качения при радиусе кривизны $R_K = R = 0,315$ м:

$$M_K = Y_K \cdot \psi \cdot R. \quad (43)$$

Толкающая реакция почвы по горизонтальной оси:

$$X_K = \frac{j}{i} \cdot m_{KK} \cdot g \cdot \psi. \quad (44)$$

Вертикальная реакция почвы:

$$Y_K = m_{KD} \cdot g. \quad (45)$$

Здесь $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; i – число ведущих колесных движителей; m_{KD} – приведенная масса транспортного средства на один ведущий колесный движитель, кг; j – число ведомых колес; m_{KK} – приведенная масса транспортного средства на одно ведомое круглое колесо, кг.

Общий КПД колесного движителя:

$$\eta_{KD} = \frac{X_K \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)_{\text{факт}}}{M_K + X_K \cdot \frac{dX_{01}}{d\varphi}}.$$

С учетом формул (42-45), после преобразований получаем выражение:

$$\eta_{KD} = \frac{j \cdot m_{KK} \cdot \eta_{\delta}}{i \cdot m_{KD} + j \cdot m_{KK}}. \quad (46)$$

Тогда ведущий момент будет равен:

$$M_{BED} = M_K + X_K \cdot R. \quad (47)$$

Касательная сила тяги, воздействующая на опорную поверхность:

$$P_K = \frac{M_{BED}}{R}. \quad (48)$$

Рассмотрим движение по плотно слежавшемуся гравию, коэффициент буксования для классического колеса и опорных башмаков $\delta = 0,1$. Вычислим значения основных тягово-сцепных характеристик ходовой системы на основе колесно-шагающего движителя для величин угла поворота ступицы $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$. Выполним расчеты по формулам (3-16, 27-30) для движителя с круглым профилем башмака при значениях основных параметров: межосевое расстояние $a = 0,1 \text{ м}$; длина кривошипа $b = 0,05 \text{ м}$; длина стойки башмака $c = 0,265 \text{ м}$. Расчет характеристик ходовой системы колесно-шагающего движителя с опорными башмаками рационального профиля выполняется по формулам (3-16, 25-26, 32-41) при тех же значениях параметров, кроме длины кривошипа и длины стойки башмака, которые будут соответственно равны $b = 0,1 \text{ м}$; $c = 0,315 \text{ м}$.

Сосредоточенная масса на один ведущий движитель $m_{KШД} = 125 \text{ кг}$; сосредоточенная масса на одно ведомое колесо $m_{KK} = 350 \text{ кг}$; общая масса транспортного средства $m_{ТС} = i \cdot m_{KШД} + j \cdot m_{KK} = 2 \cdot 125 \text{ кг} + 2 \cdot 350 \text{ кг} = 950 \text{ кг}$; коэффициент трения качения $\psi = 0,05$; КПД редуктора движителя $\eta_p = 0,95$; коэффициент буксования башмака $\delta = 0,1$; частота вращения ступицы колесно-шагающего движителя $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 10 \text{ об/мин}}{30} = 1,047 \text{ рад/с}$.

Затем определим средние значения основных тягово-сцепных характеристик колесно-шагающего движителя для двух типов опорных башмаков.

Для башмаков круглого профиля:

$$M_{ВЕД.ср} = 86,56 \text{ Н}\cdot\text{м}; P_{К.ср} = 210,9 \text{ Н}; M_{ЭФФ.ср} = 67,22 \text{ Н}\cdot\text{м}; \eta_{КШД} = 0,777.$$

Для башмаков рационального профиля:

$$M_{ВЕД.ср} = 99,28 \text{ Н}\cdot\text{м}; P_{К.ср} = 199,7 \text{ Н}; M_{ЭФФ.ср} = 84,56 \text{ Н}\cdot\text{м}; \eta_{КШД} = 0,852.$$

Расчет характеристик классической ходовой системы с обычными колесными движителями выполняется по формулам (42-48). Данные к расчету: $i = 2$ – число ведущих колес; $m_{КД} = 125$ кг – приведенная масса транспортного средства на один ведущий колесный движитель; $j = 2$ – число ведомых колес; $m_{КК} = 350$ кг – приведенная масса транспортного средства на одно ведомое колесо; $\psi = 0,05$ – коэффициент трения качения; $\delta = 0,1$ – коэффициент буксования; $\eta_{\delta} = 1 - \delta = 0,9$ – кинематический КПД. Результаты вычислений заносятся в таблицу 1.

Таблица 1– Характеристики колесного движителя при движении по гравию

$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$, м	$\left(\frac{dX_{01}}{d\varphi}\right)_{\text{факт}}$, м	$M_{ВЕД}$, Н·м	$P_{К}$, Н	$M_{ЭФФ}$, Н·м	$\eta_{КД}$
0,3150	0,2835	73,32	232,8	48,62	0,663

Можно сделать вывод, что при одинаковых массово-габаритных характеристиках ходовой системы и полезной нагрузки, применение колесно-шагающего движителя позволяет приложить к ведущим полуосям транспортного средства больший крутящий момент, чем у классической колесной ходовой системы. При этом среднее значение касательной силы тяги $P_{К.ср}$, воздействующей на почву, у колесно-шагающего движителя оказывается меньше, чем у обычного колеса. Процесс буксования оказывает меньшее влияние на скорость колесно-шагающего движителя, чем для обычного колеса. Эти факторы обеспечивают большее значение общего КПД для исследуемого нетрадиционного движителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер М.Г. Введение в теорию систем местность–машина. – М., «Машиностроение», 1973. – 520 с.
2. Скойбеда А.Т., Комяк И.М., Жуковец В.Н. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26 – 28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – Стр. 138-144.
3. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.
4. Чудаков Д.А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля. – М.: Колос, 1972. – 384 с.
5. Жуковец В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. – С. 76–86.
6. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 380 с.

О СОЗДАНИИ КОМПЛЕКСНОГО ИНДЕКСА ДЛЯ ПРОГНОЗА ПЕРСПЕКТИВНОСТИ ОБЛАСТЕЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

д.ф.-м.н. ¹Щербаков С.С.

¹ Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Прогноз научно-технического прогресса (технологический форсайт) во многих странах стал основой для формирования стратегии социально-экономического развития [1-4]. Для Республики Беларусь подобный прогноз имеет особое значение, поскольку наша страна развивается в условиях высокой политико-экономической конкуренции. Для нас, как и для других стран с ограниченным доступом к ресурсам природным, основным ресурсом является научно-технический задел в наиболее перспективных областях исследований и разработок.

В настоящее время завершается подготовка Комплексного прогноза научно-технического прогресса Республики Беларусь на 2021-2025 годы и на период до 2040 года для последующего совершенствования национальной научно-технической политики. Целью данного прогноза является выделение приоритетных направлений научного и научно-технического развития, а также определение перспективных инновационных продуктов, продуктовых групп и прорывных технологий.

Подготовка Комплексного прогноза основана на работе широкого круга экспертов соответствии с методом Дельфи [4], количественном и качественном библиометрическом и патентном анализе динамики международных и отечественных публикаций и заявок, а также маркетинговых исследованиях.

Эти традиционные подходы к созданию технологического прогноза могут быть эффективно дополнены созданием индекса перспективности научно-технической деятельности на основе анализа работ, зарегистрированных в Государственном реестре НИОК(Т)Р. Использование данного индекса позволит значительно сократить трудоемкость и время прогноза. Также индекс может быть полезен при мониторинге реализации Комплексного прогноза.

Динамика отечественных публикаций и НИОК(Т)Р. Рассмотрим такие области научно-технической деятельности как математическое моделирование, вычислительную математику, некоторые традиционные и сравнительно новые области механики для прогноза их перспективности. Данные области были выбраны в соответствии с рубриками Государственного рубрикатора научно-технической информации (ГРНТИ), представленными в табл. 1.

Прогноз перспективности указанных областей научно-технической деятельности будем делать на основе исследования динамики отечественных публикаций, фундаментальных (ФНИР), прикладных (ПНИР), опытно-конструкторских и технологических (ОКТР) работ, зарегистрированных в Государственном реестре НИОК(Т)Р, а также объемов их финансирования (см. табл. 1 и 2, рис. 1 и 2).

Таблица 1 – Количество зарегистрированных с 2007 по 2017 гг. работ в Государственном реестре НИОК(Т)Р и соответствующих публикаций

Рубрики	Количество работ				Публикации
	всего	ФНИР	ПНИР	ОКТР	
27.35 Математические модели естественных наук и технических наук. Уравнения математической физики;	201	49	151	1	553
27.41 Вычислительная математика;	77	37	40	0	41
30.51.41 Трибология;	34	6	25	3	111
30.51.43 Биомеханика.	28	9	19	0	87
30.17 Механика жидкости и газа;	242	65	159	18	165
30.19 Механика деформируемого твердого тела;	183	41	133	9	44
Трибофатика (ТФ)	60	2	52	6	623

Таблица 2 – Объемы финансирования работ, зарегистрированных с 2007 по 2017 гг. в Государственном реестре НИОК(Т)Р в млн. долл. США

Рубрики	объем финансирования			
	всего	ФНИР	ПНИР	ОКТР
27.35 Математические модели естественных наук и технических наук. Уравнения математической физики;	7,33	2,53	4,74	0,06
27.41 Вычислительная математика;	4,10	2,08	2,03	0
30.51.41 Трибология;	2,7	0,487	1,73	0,49
30.51.43 Биомеханика.	0,56	0,195	0,36	0
30.17 Механика жидкости и газа;	20,5	4,46	13,9	2,1
30.19 Механика деформируемого твердого тела;	6,51	1,20	4,17	1,1
Трибофатика (ТФ)	1,86	0,08	1,46	0,32

Из табл. 1 видно, что за десятилетний период в каждой из рубрик 27.35, 30.17 и 30.19 было зарегистрировано от 183 до 242 работ. Это может свидетельствовать о стабильной востребованности работ в широких традиционных областях математического моделирования и механики сплошных сред.

В рубриках 27.41, 30.51.41, 30.51.43 и по трибофатике [5,6] было зарегистрировано значительно меньше работ: от 28 до 77. Указанная разница отчасти может быть обусловлена тем, что такие популярные области как трибология биомеханика остаются сравнительно узкой нишей исследований в республике. При этом следует отметить относительно большое количество работ по трибофатике – новому по сравнению с остальными направлению, зародившемуся лишь в середине

восьмидесятых годов прошлого века. Также следует отметить небольшое количество работ по такому традиционно важному направлению как вычислительная математика.

Почти во всех рубриках преобладают прикладные работы, составляя от 65 до 75% от общего количества. Данных работ примерно в 2–4 раза больше чем фундаментальных, что свидетельствует о практическом значении большинства проводимых исследований. Исключение составляют рубрика 27.41 вычислительная математика, в которой количества ПНИР и ФНИР примерно равны, и трибофатика. Количество ПНИР в данной области составляет около 87%.

ОКТР для рубрик по механике за исключением биомеханики составляют примерно 7–8% от общего числа работ. С учетом превалирования ПНИР в общем количестве работ низкий процент ОКТР по механике может свидетельствовать о слабой связи с производством. При этом по трибофатике количество ОКТР составляет наибольшее значение: 10 %.

На рис. 1 и 2 отчетливо виден зигзагообразный характер динамики регистрации работ. Это обусловлено периодичностью (2, 3 и 5 лет) формирования государственных научных и научно-технических программ и подпрограмм. Максимумы 2011, 2014 и 2016 гг. соответствуют началу приема заявок для участия в программах, а минимумы 2010, 2013, 2015 и 2017 гг. соответствуют годам завершения заданий. Особый интерес представляет трибофатика, по которой значительное количество ПНИР было реализовано в интересах промышленных предприятий (холдинг «Гомсельмаш», ОАО «Гомельтранснефть Дружба») независимо от периодичности программ.

За последние десять лет количество регистрируемых работ по большинству областей научно-технической деятельности уменьшается или остается примерно постоянным. Исключение составляют только работы по трибофатике, трибологии и отчасти по биомеханике.

Слабая динамика исследований может быть объяснена сокращением внутренних затрат на научные исследования и разработки в республике (см. табл. 3). С 2007 по 2016 гг. наукоемкость *валового внутреннего продукта* (ВВП), определяемая как отношение данных затрат к ВВП, упала почти вдвое. В денежном выражении она сократилась за указанный период примерно на 40%.

Таблица 3 – Внутренние затраты на научные исследования и разработки в Республике Беларусь

Год	Наукоемкость ВВП	Долл. США (млн.)
2007	0,96	436
2016	0,50	262
2017	0,59	292

Что касается публикационной активности, то из табл. 1 и рис. 2 видно, что наибольшее число работ было опубликовано по трибофатике и математическому моделированию.

Несмотря на уменьшение с 2007 по 2017 гг. количества исследовательских работ и их финансирования, число публикаций росло практически по всем областям. Это свидетельствует о сохранившемся потенциале отечественных ученых и научных школ, который может быть применен для развития отечественных науки и технологий.

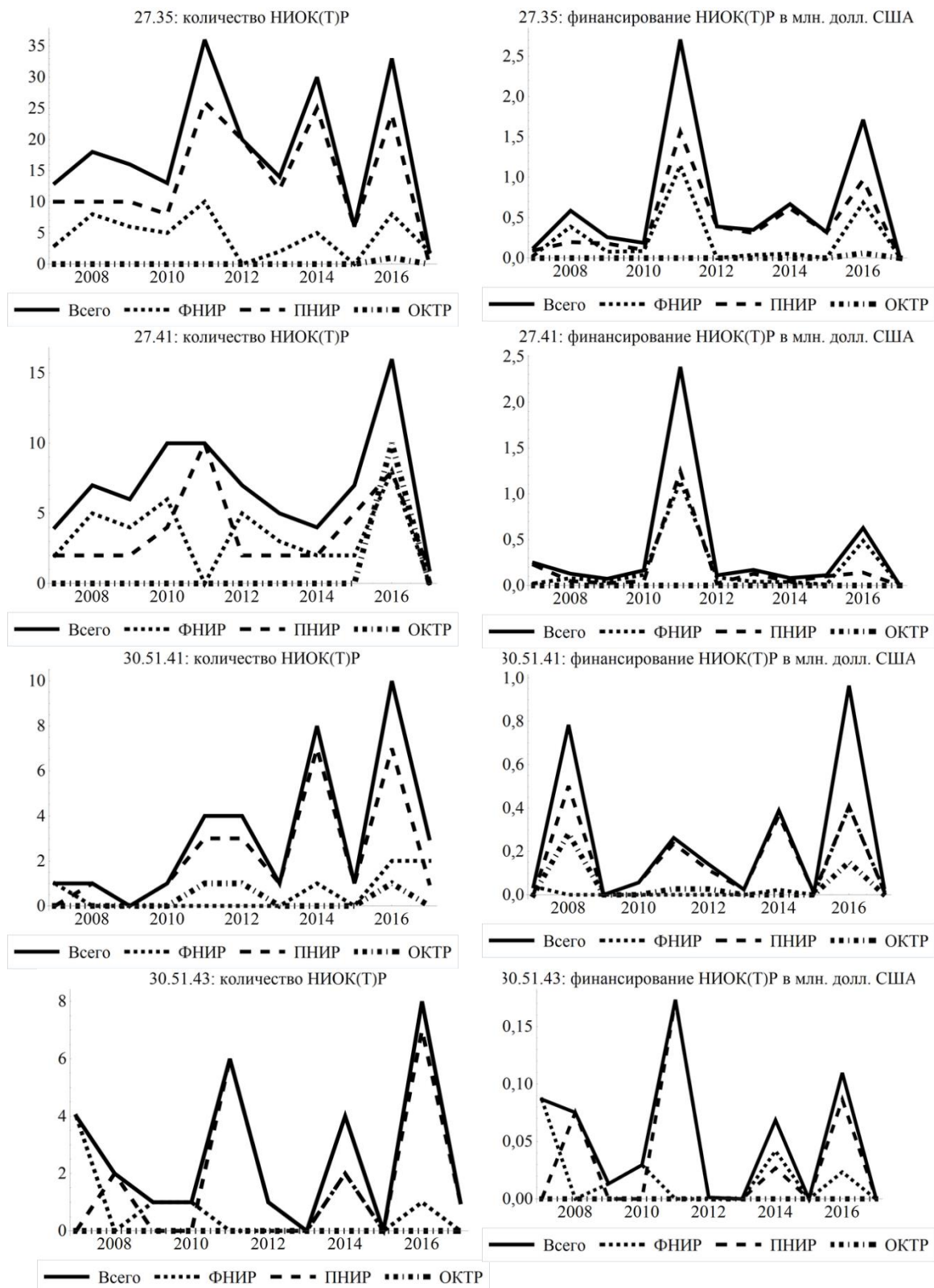


Рис. 1. Изменение во времени количества НИОК(Т)Р и их финансирования для областей 27.35, 27.41, 30.51.41, 30.51.43

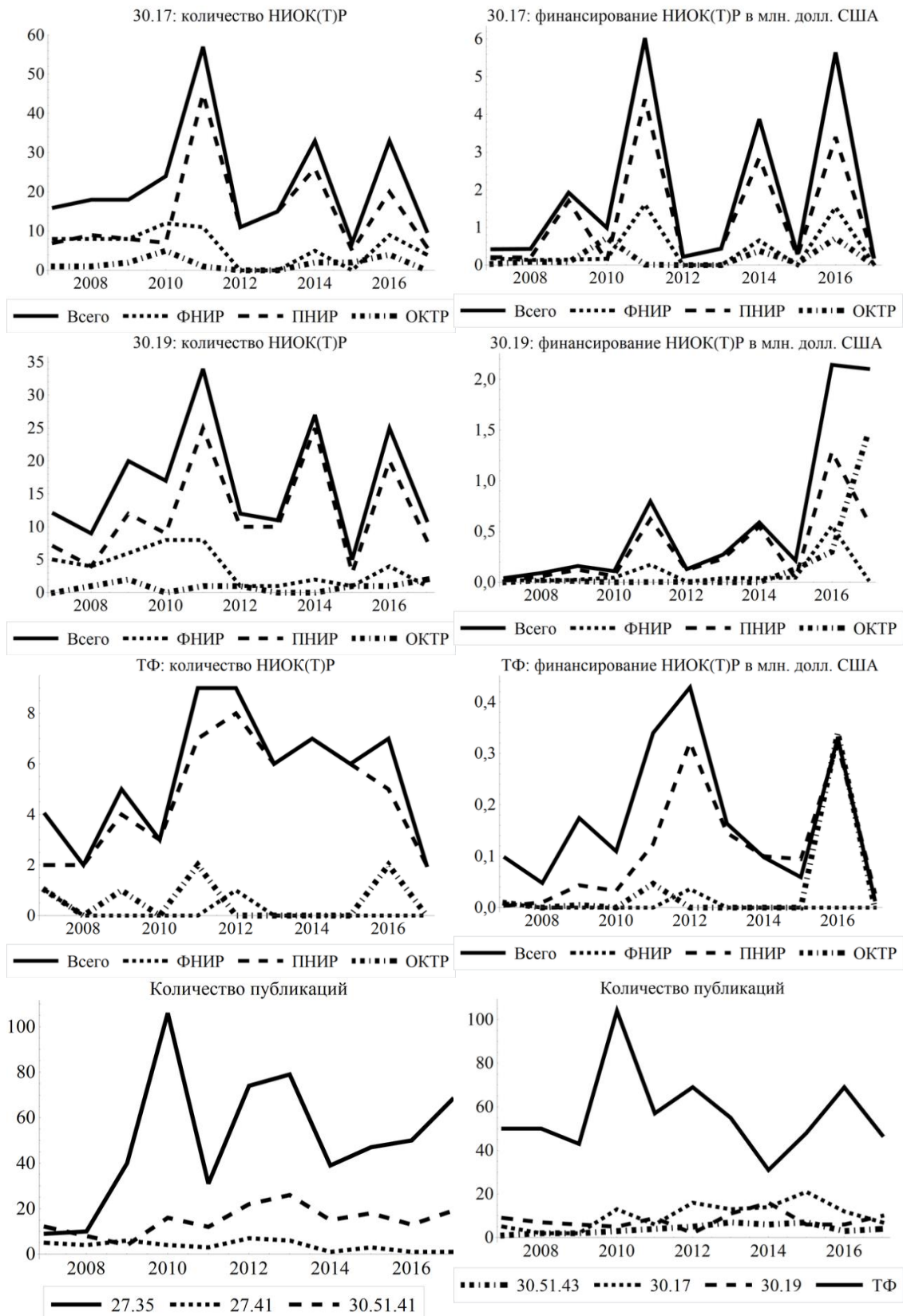


Рис. 2. Изменение во времени количества НИОК(Т)Р и их финансирования для областей 30.17, 30.19, ТФ, а также публикаций для всех областей

Комплексный S-индекс перспективности области научно-технического развития. Выбор наиболее перспективных областей научно-технического развития целесообразно проводить на основе комплексного показателя, учитывающего различные характеристики исследований и разработок.

Формирование комплексного S-индекса перспективности областей научно-технического развития будем проводить на основе показателей трех уровней и соответствующих моделей (см. табл. 4,5 и рис. 3,4).

Таблица 4 –Первичные показатели (1-го уровня)

Обозначение	Расчет	Описание
$M_k, k = R, F, L$	$M_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_j, j = 1, \dots, m$	Среднее за m лет значение величины k : количества работ (R), объема финансирования (F), числа публикаций (L).
$D_k, k = R, F, L$	$D_k = \frac{M_k}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (k_j - M_k)^2}}$	Отношение среднего за m лет значения величины k к ее среднеквадратическому отклонению
$a_k, k = R, F, L$	Тангенс угла наклона, прямой аппроксимирующей временной ряд величины k	Характеризует рост (падение) величины k во времени
$AB_k, k = R, F$	Отношение общего числа ПНИР k^A к ФНИР k^B $AB_k = k^A / k^B$	Характеризует переход от фундаментальных к прикладным исследованиям
$OA_k, k = R, F$	Отношение общего числа ОКР k^O к ПНИР k^A $OA_k = k^O / k^A$	Характеризует переход от прикладным исследований к опытно-конструкторским работам
E_{FR}	Отношение полного объема финансирования F_{sum} к общему количеству НИОК(Т)Р $R_{sum} E_{FR} = F_{sum} / R_{sum}$	Средний объем финансирования работы по области исследований и разработок
E_{LF}	Отношение общего количества публикаций к полному объему финансирования $E_{LF} = L_{sum} / F_{sum}$	Количество публикаций на 1 доллар США
E_{LR}	Отношение общего количества публикаций к общему количеству НИОК(Т)Р $E_{LR} = L_{sum} / R_{sum}$	Количество публикаций на 1 работу

В таблице 4 нормировка значения отдельного показателя f_i для i -й области проводилась путем отнесения его к своему максимальному значению среди всех анализируемых n направлений:

$$f_i^N = \frac{f_i}{\max_{1 \leq i \leq n}(f_i)}$$

Таблица 5 – Промежуточные показатели (2-го уровня)

Обозначение	Расчет	Описание
$I_k, k = R, F$	$I_k = \frac{1}{5}(M_k^N + D_k^N + a_k^N + AB_k^N + OA_k^N)$	Среднее нормированных показателей первого уровня для количества работ и объемов их финансирования
I_L	$I_k = \frac{1}{3}(M_k^N + D_k^N + a_k^N)$	Среднее нормированных показателей для количества публикаций
E	$E = \frac{1}{3}(E_{FR}^N + E_{LF}^N + E_{LR}^N)$	Среднее нормированных показателей для относительных показателей E_k

Расчет комплексного S -индекса перспективности области научно-технического развития (показателя 3-го уровня) проводился по следующей формуле

$$S = \frac{100}{4}(I_R^N + I_F^N + I_L^N + E^N) \quad (1)$$

Таким образом, S -индекс может принимать значения от 0 до 100.

Следует отметить, в S -индексе по аналогии с показателями 1 и 2-го уровня могут быть также учтены динамика и количество патентов, а также иные первичные показатели, позволяющие содержательно дополнить оценку перспективности.

Из рис. 3 и 4 видно, что для рассмотренных областей исследований и разработок наибольшие значения большинства частных показателей и S -индекса у следующих трех областей в порядке убывания: трибофатика ($S=97$), трибология ($S=74$), механика жидкости и газа ($S=71$).

Заключение. В работе рассмотрено построение комплексного S -индекса перспективности области научно-технического развития.

При построении S -индекса как комплексного показателя использовались количество и динамика фундаментальных, прикладных и опытно-конструкторских работ, их финансирования и публикаций. Учитывались влияние государственных программ, переходы от фундаментальных к прикладным и от прикладных к опытно-конструкторским работам, соотношения публикаций к количеству работ и объему их финансирования.

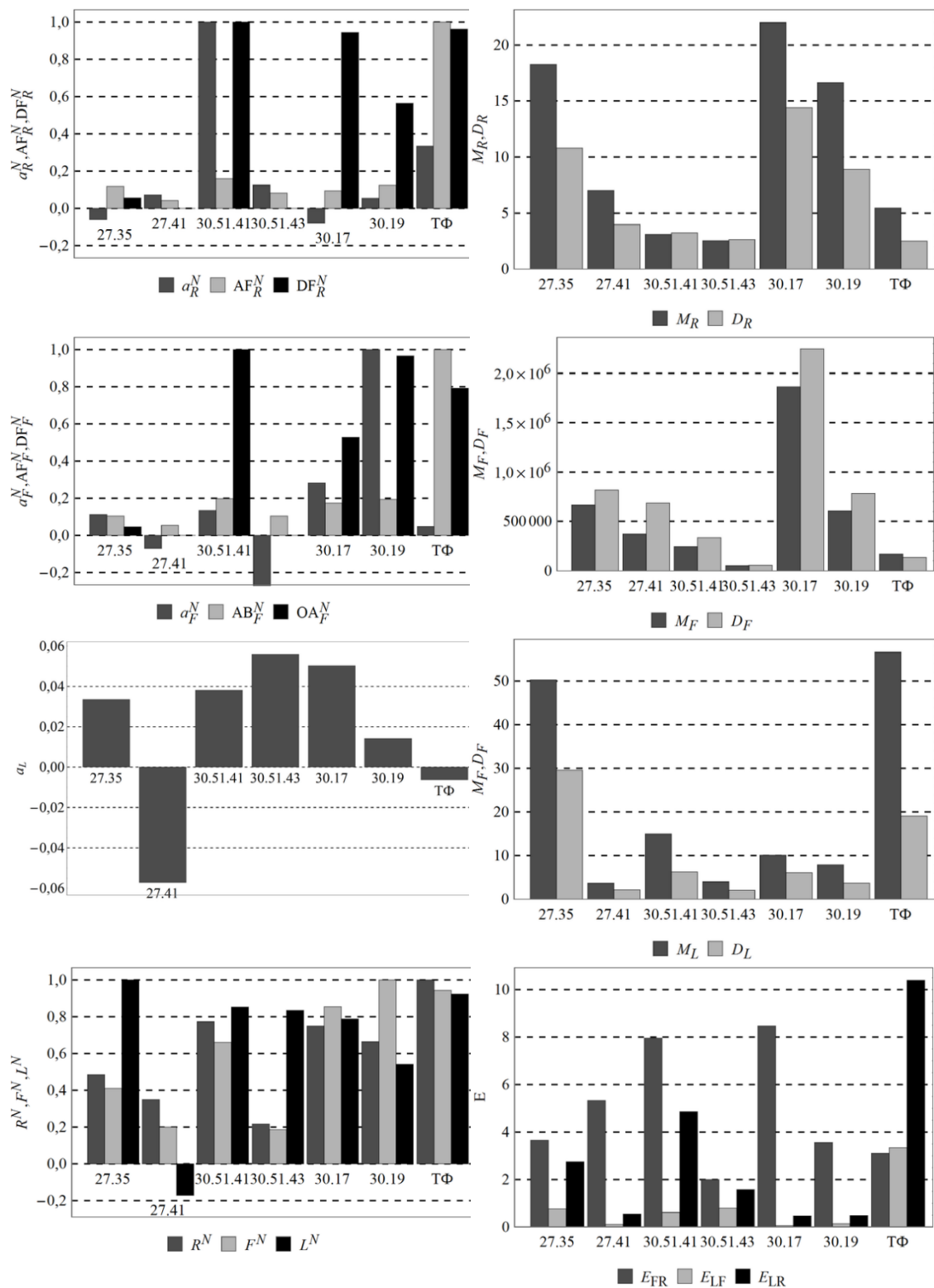


Рис. 3. Значения показателей 1-го уровня и 2-го уровня для различных областей научно-технического развития.

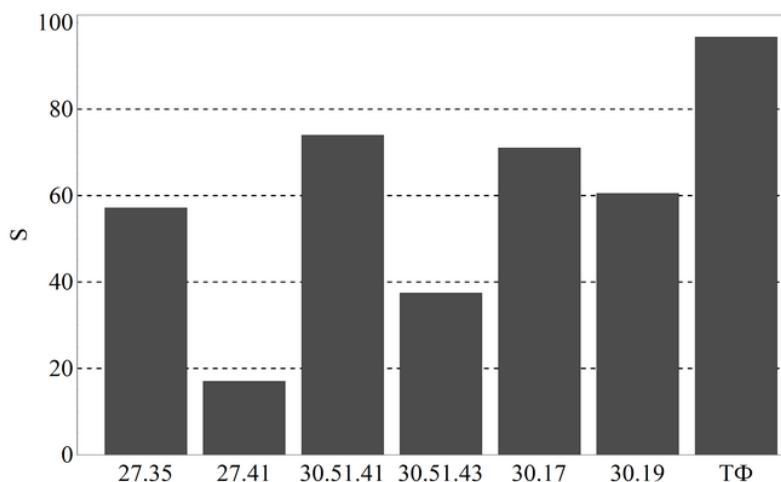


Рис. 4. Значения комплексного S-индекса перспективности для различных областей научно-технического развития.

Данный индекс был применен для прогноза перспективности исследований в некоторых областях математического моделирования, вычислительной математики и механики. Наибольшие значения большинства частных показателей и S-индекса у следующих трех областей в порядке убывания: трибофатика, трибология, механика жидкости и газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Georghiou, L. The Handbook of Technology Foresight: Concepts and Practice/ L. Georghiou, J. Cassingena Harper, M. Keenan, I. Miles, R. Popper– Cheltenham: Edward Elgar Publishing, 2008, 456.*
2. *Прогноз научно-технологического развития России: 2030 / под ред. Л.М. Гохберга. – Москва : Министерство образования и науки Российской Федерации, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 2014. – 244 с.*
3. *Соколов, А.В. Долгосрочный прогноз научно-технологического развития России на период до 2030 года: ключевые особенности и первые результаты/ А.В. Соколов, А.А. Чулок // Форсайт. Т. 6. № 1. 2012. С. 12–25.*
4. *Соколов, А.В. Будущее науки и технологий: результаты исследования Дельфи/ А.В. Соколов // Форсайт. Т. 3. № 3. 2009. С. 40–58.*
5. *Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.*
6. *Щербаков, С.С. Механотермодинамика и трибофатика: достижения и перспективы / С.С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения. 2018 –№7. –С.18–26.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СДВИГОВОЙ ПРОЧНОСТИ НАПРАВЛЕННО-АРМИРОВАННЫХ УГЛЕПЛАСТИКОВ

¹Шилько С.В., ¹Рябченко Т.В. ²Романович С.И., ³Чоэ Н.

¹Государственное научное учреждение «Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого Национальной академии наук Беларуси», Гомель

²ООО «Гидромания», Минск

³Koomin University, Seoul, South Korea

Введение. Среди конструкционных композиционных материалов рекордными характеристиками прочности и модуля упругости, в особенности, их удельными (отнесенными к плотности) значениями, обладают направленно-армированные композиты. К ним относятся углепластики (УП), получаемые послойным формованием волокнистых препрегов на термореактивном полимерном связующем [1,2]. Уникальные деформационно-прочностные свойства и широкие технологические возможности получения равнопрочных конструкций делают указанные композиты незаменимыми при создании ответственных изделий аэрокосмического назначения, где требуется высокая жесткость и формостабильность, статическая, усталостная и ударная прочность, а также способность длительного надежного функционирования в экстремальных условиях эксплуатации. Но такие возможности реализуются лишь при оптимальном выборе наполнителя в виде углеродных волокон (тканей) и связующего, схем армирования и соответствующих технологических режимов формования с учетом известных «слабых мест» направленно-армированных материалов – низкой межслоевой прочности и выраженной неравномерности передачи напряжений от армирующих волокон к матричному материалу [3] (аналогичная проблема имеет место при сдвиговом нагружении клеевых соединений композитных элементов конструкций).

Таким образом, для реализации рекордной прочности направленно-армированных углепластиков КМ необходимы систематические научные исследования, направленные на определение параметров процесса разрушения, включая определение сдвиговой прочности, что являлось **целью** настоящей работы.

Материалы и методы исследования. С учетом рекомендаций существующих стандартов [4-7], исследование сдвиговой прочности углепластиков, отличающихся объемным соотношением наполнителя и связующего, производилось в условиях растяжения по ГОСТ 14759, 25717 и трехточечного изгиба (ГОСТ 32659) (рисунок 1).

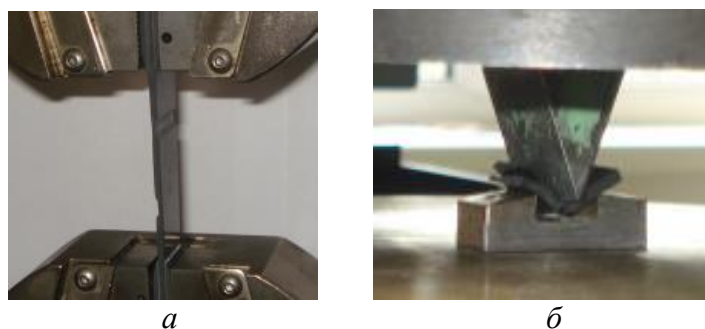


Рис. 1. Размещение образца в захватах машины для механических испытаний.

При испытании на растяжение использовались образцы в виде пластин ступенчатой формы (рисунок 1а) размерами 1,0×20,0×160,0 мм (УП 34, УП 35) и

2,0×20,0×160,0 мм (УП 41) с длиной ожидаемой зоны разрушения, равной 20 мм. Для испытаний углепластиков УП 48 и УП 49 на трехточечный изгиб (рисунок 16) применялись короткие пластины размером 2,0×10,0×20,0 мм. Статическое нагружение на машине Инстрон 5567 (ИММС НАН Беларуси) производилось со скоростью 0,5 мм/мин. Для надежной фиксации в захватах машины при испытании на растяжение на пластины наклеивались накладки из ортогонально армированного углепластика с усилением получаемых адгезионных соединений двумя штифтами, выполненными также из углепластика.

Результаты и их обсуждение. Результаты испытаний образцов углепластиков УП 34, 35, 41 в виде фотографий поверхности разрушения и диаграмм деформирования показаны на рисунках 2 и 3 соответственно.

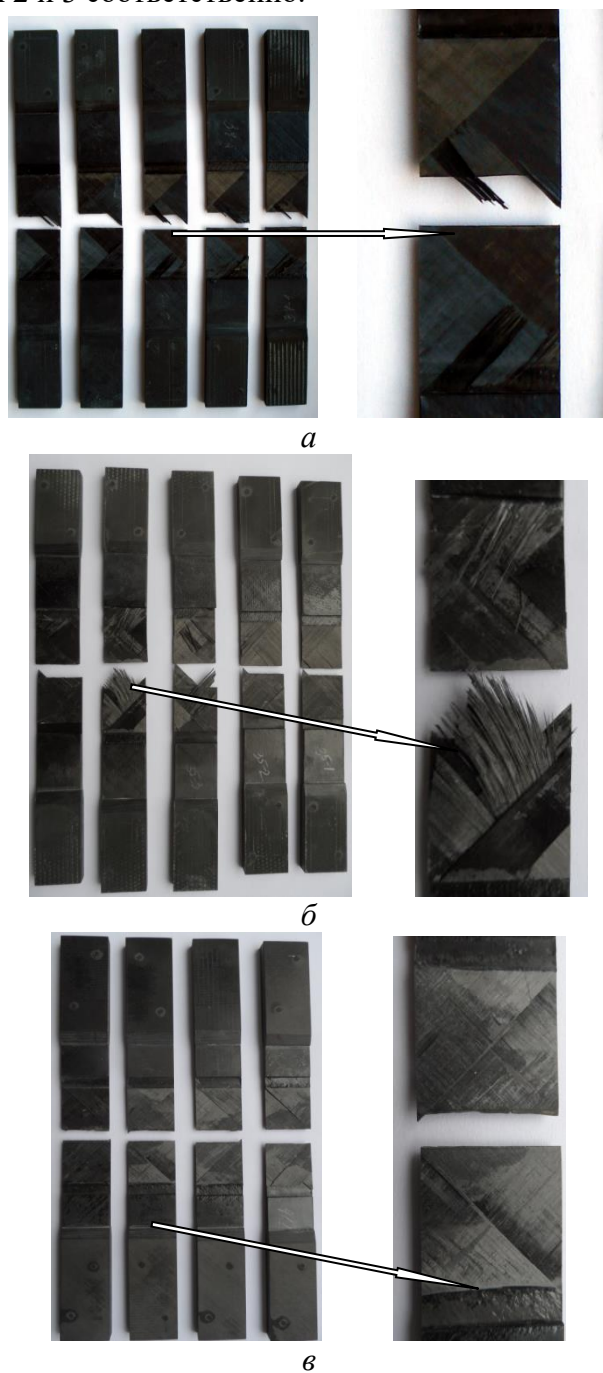


Рис. 2. Поверхность разрушения УП 34 (а), УП 35 (б), УП 41 (в)

Фрактографический анализ свидетельствует, что в зависимости от объемного содержания связующего меняется характер разрушения композита. В частности,

материал УП 34 расслаивается по плоскостям армирования (рис. 2а), а при разрушении углепластика УП 35 наряду с расслаиванием в ряде случаев наблюдается фрагментация на уровне волокон (рис. 2б). Образец материала УП 41 разрушается в плоскости поперечного сечения без расслаивания (рис. 2в).

Эти особенности проявляются при рассмотрении диаграмм растяжения исследованных углепластиков (рисунок 3), что выражается в нелинейности кривой «напряжение – деформация» и появлении характерных пиков напряжения при деформировании материала УП34 (рисунок 3б). Можно отметить хорошую повторяемость результатов и весьма высокие значения прочности изучаемых материалов.

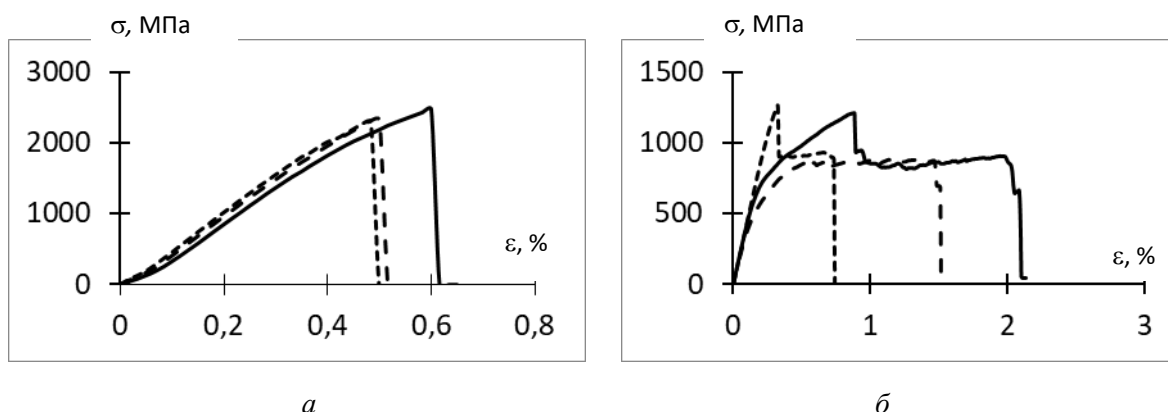


Рис. 3. Зависимости «напряжение – деформация» при растяжении УП 34 (а), УП 35 (б)

Характеристики сдвиговой прочности углепластика УП № 41 показаны в таблице 2.1, где напряжение σ_a соответствует появлению акустических предвестников разрушения (щелчков), причиной которых является частичное расслаивание материала, предшествующее полной потере несущей способности. Низкие значения разрушающего напряжения σ_p обусловлены относительно слабыми поперечными связями этого композитного материала.

Таблица 1 – Геометрические параметры образцов и механические характеристики при растяжении углепластика № 41

№	σ_p , МПа	$\bar{\sigma}_p$, МПа	s_2 , МПа	$\sigma_{пр}$, МПа	$\bar{\sigma}_{пр}$, МПа	s_3 , МПа	σ_a , МПа (акуст.)	$\bar{\sigma}_a$, МПа	s_4 , МПа
41.1	5,5	5,63	0,22	4,0	3,88	1,03	4,3	4,63	0,50
41.2	5,7			2,5			4,1		
41.3	5,9			4,0			5,1		
41.4	5,4			5,0			5,0		

Определение деформационно-прочностных характеристик углепластиков при межслоевом сдвиге в условиях трехточечного изгиба. В связи с методическими трудностями испытания материалов при растяжении в поперечном направлении, в том числе возможностью повреждения образцов при фиксации в клиновых захватах, отмеченными авторами в [8,9], деформационно-прочностные характеристики направленно-армированных углепластиков при межслоевом сдвиге целесообразно определять по ГОСТ 32659 в условиях трехточечного изгиба на коротких образцах, показанных на рисунке 4 и 5. В ходе таких испытаний было установлено, что образцы 48а и 49а расслаиваются на несколько пластинок (рисунок 4а,в), а образцы серий 48в и 49в претерпевают излом с разделением по длине на 2 равные части (рисунок 4б,г).

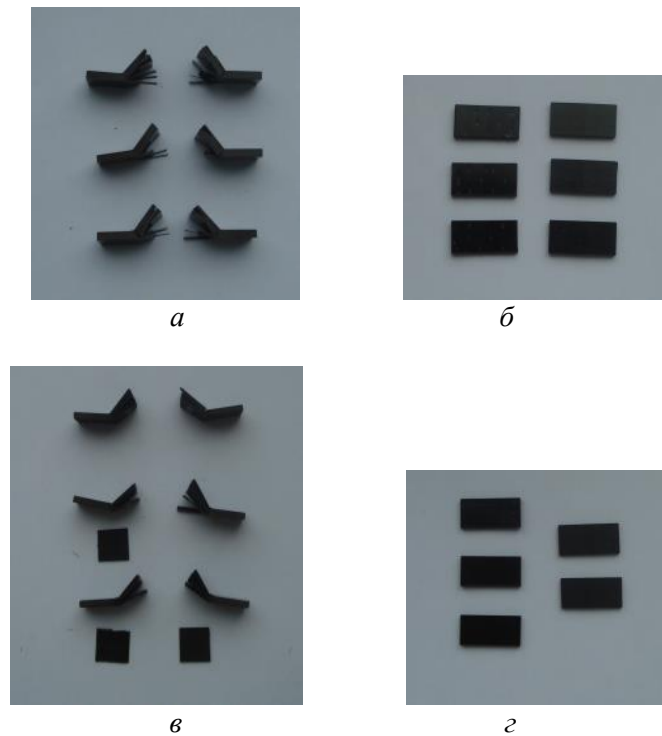


Рис. 4. Характер разрушения образцов № 48 (а, б) и № 49 (в, г) при испытании на изгиб при продольном (а, в) и поперечном расположении волокон (б, г)

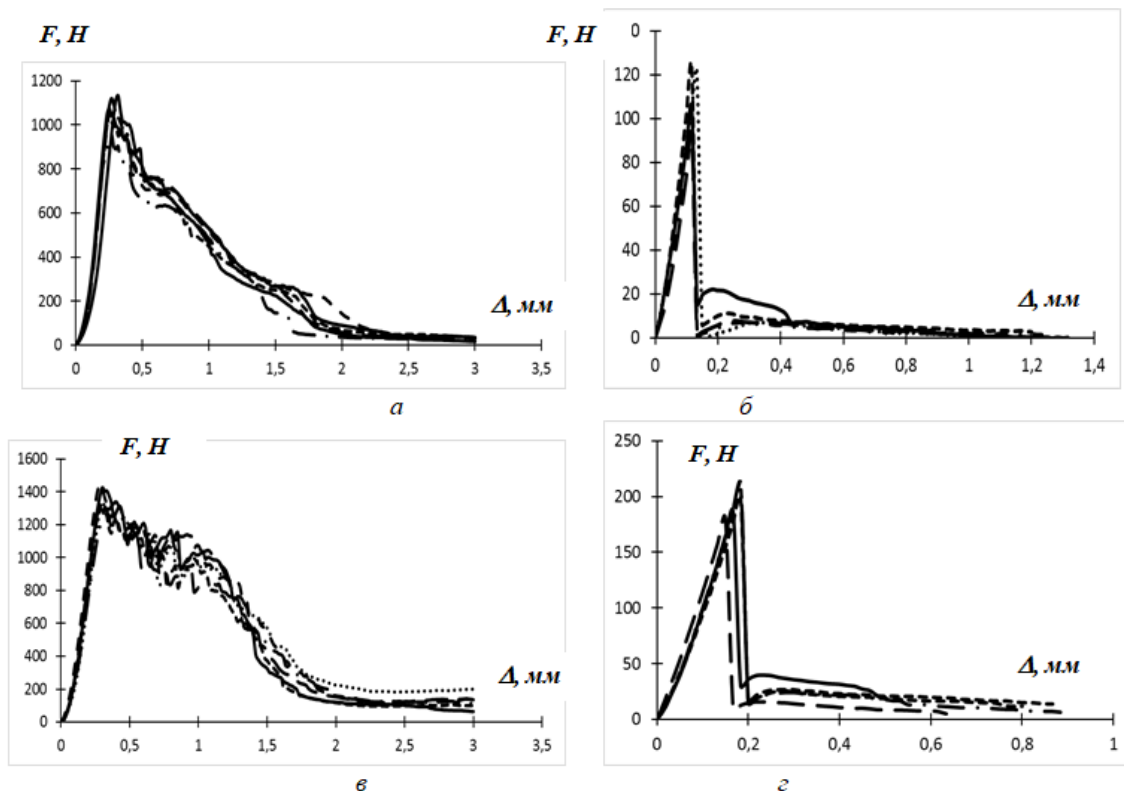


Рис. 5. Зависимость $F(\Delta)$ для образцов углепластика 48 (а, б) и 49 (в, г) при направлении нагружающего клина поперек (а, в) и вдоль волокон (б, г)

Таблица 2 – Геометрические параметры образцов и сдвиговая прочность материала УП 48 при нагружении по схеме трехточечного изгиба

№	<i>b</i> , мм	<i>h</i> , мм	<i>F</i> , Н	τ , МПа	$\bar{\sigma}_{np}$, МПа	s_3 , МПа
48a.1	10,10	2,25	1132	37,36	35,22	1,39
48a.2	10,10	2,25	1052	34,72		
48a.3	10,00	2,05	959	35,09		
48a.4	10,10	2,30	1032	33,32		
48a.5	10,10	2,30	1120	36,16		
48a.6	10,10	2,30	1074	34,67		
48в.1	10,00	2,10	104	3,71	3,77	0,46
48в.2	10,00	2,25	124	4,13		
48в.3	10,00	2,25	–	–		
48в.4	10,00	2,20	93	3,17		
48в.5	10,00	2,10	121	4,32		
48в.6	10,00	1,95	92	3,54		

Таблица 3 – Геометрические параметры образцов и сдвиговая прочность материала УП 49 при нагружении по схеме трехточечного изгиба

№	<i>b</i> , мм	<i>h</i> , мм	<i>F</i> , Н	τ , МПа	$\bar{\sigma}_{np}$, МПа	s_3 , МПа
49a.1	10,00	1,90	1324	52,26	52,37	2,45
49a.2	10,00	1,95	1299	49,96		
49a.3	10,00	1,90	1423	56,17		
49a.4	10,00	1,90	1303	51,43		
49a.5	10,00	2,00	1336	50,10		
49a.6	10,00	2,00	1448	54,30		
49в.1	9,90	2,05	186	6,87	7,31	0,46
49в.2	9,90	2,05	211	7,80		
49в.3	9,90	2,05	198	7,32		
49в.4	9,90	2,00	180	6,82		
49в.5	9,90	2,05	209	7,72		

Результаты испытаний характеризуются хорошей повторяемостью и позволяют определить кажущийся предел прочности при межслоевом сдвиге образцов серий 48а и 49а (35,22/52,37 МПа) и 48в и 49в (3,77/7,31 МПа) соответственно.

Можно заметить сходный характер начальных участков диаграмм нагружения $F(\Delta)$ углепластика УП 48 при продольном и поперечном расположении нагружающего клина, как показано на рисунках 5а, 5б. Но в первом случае после достижения максимума наблюдается плавное снижение изгибающей нагрузки, обусловленное эффектом живучести материала вследствие перераспределения нагрузки между волокнами в процессе разрушения в соответствии с рисунком 5а. При ориентации линии клина в направлении волокон прочность однонаправленного углепластика на порядок меньше из-за низкой прочности слабых поперечных связей между волокнами,

причем исчерпание несущей способности происходит весьма быстро, так как перераспределение нагрузки между волокнами не происходит (рисунок 5б, 5г).

Заключение

Для обоснованного использования высокопрочных направленно-армированных материалов в ответственных технических приложениях актуально определение их прочностных характеристик при межслоевом сдвиге.

Стандартизованными методами механических испытаний исследованы сдвиговые деформационно-прочностные свойства направленно-армированных углепластиков. Проанализированы диаграммы деформирования и особенности разрушения, определены прочностные характеристики указанных композиционных материалов при сдвиге.

Работа выполнена в рамках проекта Т18КОРГ-2018.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев, 1985. – 588 с.*
2. *Берлин А.А. Баженов С.Л., Кульков А.А., Ошмян В.Г. Полимерные композиционные материалы. Прочность и технология / Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2009. – 352 с.*
3. *Композиционные материалы: В 8 т. Пер с англ. / под. ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 6: Поверхности раздела полимерных композитов / под ред. Е.П. Плюдемана. – 295 с.*
4. *Шах В. Справочное руководство по испытаниям пластмасс и анализу причин их разрушения / Пер. с англ. под ред. Малкина А.Я. СПб: Научные основы и технологии, 2009. – 732 с.*
5. *ГОСТ 32659-2014 Композиты полимерные. Методы испытаний. Определение кажущегося предела прочности при межслойном сдвиге методом испытания короткой балки.*
6. *ГОСТ 14759-69. Клеи. Метод определения прочности при сдвиге.*
7. *ГОСТ 25717-83. Клеи. Методы определения модуля сдвига клея в клеевом соединении.*
8. *Шилько С.В., Рябченко Т.В., Ермолкевич И.В., Романович С.И., Федосенко Н.Н. Аттестация физико-механических свойств направленно-армированных полимерных композитов для элементов конструкций, эксплуатируемых в экстремальных условиях // Актуальные вопросы машиноведения: Сб. научн. тр. ОИМ. – Минск, 2017. – Вып. 6. – С. 329–333.*
9. *Шилько С.В., Рябченко Т.В., Романович С.И., Чоэ Неетан, Федосенко Н.Н. Методические особенности испытаний высокопрочных направленно-армированных полимерных композитов для экстремальных условий эксплуатации // Актуальные вопросы машиноведения. – 2018. – Вып. 7. – С. 88–93.*

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКИ

¹ Яровая А.В.

¹ Белорусский государственный университет транспорта

Трехслойные элементы конструкций широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета при квазистатических и динамических нагрузках. В монографиях [1, 2] приведены постановки и решения ряда задач статики и динамики трехслойных стержней и пластин. Резонансные колебания круговых трехслойных пластин при равномерно распределенной нагрузке изучены в [3]. Результаты, связанные с колебаниями трехслойных элементов конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, получены в работах [4–8]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных стержней, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрено в статьях [9–14].

Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной круговой пластины, возбужденные резонансной поверхностной кольцевой нагрузкой.

1. Постановка начально-краевой задачи

Постановка задачи и ее решение приводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении. Нумерация слоев показана на рис. 1.

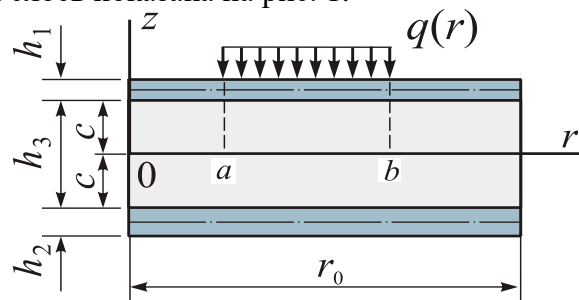


Рис. 1.

Внешняя вертикальная нагрузка произвольной формы осесимметрична: $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Для изотропных несущих слоёв стержня приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы в поперечном направлении. В легком, не сопротивляющемся тангенциальному сдвигу несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе Z , нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу r_0 .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned}$$

где z – координата от рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая малые вынужденные поперечные колебания рассматриваемой круговой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона [10]:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= 0; \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3)r_0^2$; $h_1, h_2, h_3 = 2c$ – толщины несущих слоев и заполнителя; ρ_k плотность материала k -го слоя; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2\right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+\right), \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1\right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \end{aligned}$$

где G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации материала; две точки вверху – вторая производная по времени t .

Задача нахождения функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к (1) граничных

- при заделке контура пластины

$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1),$$

- при шарнирном опирании пластины

$$(u = \psi = w = M_r = 0 \quad \text{при } r = 1);$$

и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r),$$

где $w(r, 0), \dot{w}(r, 0)$ – начальные прогиб и скорость пластины.

2. Общее решение задачи

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки следует из (1) при $q = 0$. В [21] приведено ее решение и построена система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (2)$$

где J_n, I_n – функции Бесселя n -го порядка от действительного и комплексного аргументов; β_n – собственные числа; d_n – коэффициенты, нормирующие систему (2)

$$d_n^2 = \int_0^1 \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)] -$$

$$- \frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n I_0(\beta_n)} [J_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + J_0(\beta_n) I_1(\beta_n)] + \frac{J_0^2(\beta_n)}{2I_0^2(\beta_n)} [I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)].$$

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t),$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad (3)$$

где

$$\phi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)) \right],$$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr; \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения β_n следуют из граничных условий. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0.$$

Удовлетворяя два последние из них с помощью представления (3), получим трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел

$$I_1(\beta) J_0(\beta) = -J_1(\beta) I_0(\beta).$$

После этого частоты колебаний ω_n получим из соотношения:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}. \quad (4)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (3) и использования линейной связи функций v_n, ϕ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (5)$$

Общее решение этого уравнения можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t). \quad (6)$$

где $y_n(t)$ – частное решение уравнения (5).

Задача исследования вынужденных, в том числе резонансных, колебаний сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$ для каждого вида динамической нагрузки (прямоугольная, синусоидальная, параболическая).

3. Круговая и кольцевая нагрузки

На внешнюю поверхность несущего слоя действует резонансная поверхностная гармоническая нагрузка, *равномерно распределенная по кругу* относительного радиуса $b \leq 1$:

$$q(r, t) = q_0 H_0(b - r) (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)) \quad (q_0, D, E, k - \text{const}). \quad (7)$$

Здесь $H_0(r)$ – функция Хевисайда нулевого порядка, обращающаяся в ноль при отрицательном аргументе, и равная единице на остальной числовой оси; частота

внешней возмущающей силы ω_k совпадает с одной из собственных частот ω_n колебаний круговой трехслойной пластины.

Решение соответствующей начально-краевой задачи предполагаем в виде (3), т. е., раскладываем в ряд по системе собственных ортонормированных функций $v_n(r, \beta_n)$. Тогда параметры $q_n(t)$ разложения в ряд нагрузки (7) будут

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t), \quad (8)$$

$$D_n = \frac{q_0 D b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right),$$

$$E_n = \frac{q_0 E b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right).$$

При $b = 1$ следуют коэффициенты для пластины, у которой резонансная нагрузка распределена по всей поверхности внешнего слоя.

Частное решение дифференциального уравнения (5) для определения функции времени (6) следующее:

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k^2} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k^2} t \sin(\omega_k t), & n = k \end{cases}. \quad (9)$$

Обозначим начальные прогиб и скорость пластины $w(r, 0)$ и $\dot{w}(r, 0)$. Подставив в них выражение для прогиба (3), с учетом функций (6), (9) и ортонормированности системы функций $v_n(r, \beta_n)$, получим следующие константы интегрирования

$$A_n = \int_0^1 w(r, 0) v_n r dr = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases},$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \left[\int_0^1 \dot{w}(r, 0) v_n r dr = \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k^2}, & n = k \end{cases} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, поперечные колебания круговой трехслойной пластины под действием резонансной нагрузки (7) описываются перемещениями (3), в которых функция времени $T_n(t)$ и константы интегрирования определяются формулами (6), (8)–(10), а частоты колебаний рассчитываются по формулам (4).

Нагрузка, *равномерно распределенная по кольцу*. Пусть поверхностная равномерно распределенная гармоническая *резонансная* нагрузка воздействует локально на кольцевую поверхность трехслойной пластины $a \leq r \leq b$. Тогда ее можно записать

$$q(r, t) = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)). \quad (11)$$

Параметры разложения нагрузки (11) в ряд по системе собственных ортонормированных функций (2) будут

$$D_n = \frac{q_0 D}{M_0 d_n \beta_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right),$$

$$E_n = \frac{q_0 E}{M_0 d_n \beta_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right). \quad (12)$$

После этого соответствующая функция времени $T_n(t)$ следует из выражения (6), где константы интегрирования A_n, B_n определяются формулами (10) с учетом (12).

4. Численные результаты.

Численная адаптация решений проведена для заземленной по контуру пластины со слоями из материалов Д16Т–фторопласт–16Т, механические характеристики которых приведены в [15]. Собственные числа взяты из работы [4], частоты колебаний ω_n вычислялись для пластины с толщинами слоев $h_1 = h_2 = 0,01, h_3 = 0,1$. Нагрузка действует на всю поверхность внешнего слоя пластины. Начальные условия движения нулевые $w(r, 0) = \dot{w}(r, 0) = 0$, что соответственно упрощает нахождение констант интегрирования (10). При вычислении прогибов суммировались первые 14 членов ряда (3), т. к. дальнейшее увеличение количества слагаемых (до 100) результат практически не изменяет.

На рис. 2 показана зависимость прогиба в центре пластины от радиуса *пятна* резонансной нагрузки с амплитудой интенсивности $q_0 = 10^4$ Па. Кривые рассчитаны в моменты $t_k = \pi/\omega_k$ и соответствуют различным значениям резонансных частот: 1 – $\omega_k = \omega_0$, 2 – $\omega_k = \omega_1$, 3 – $\omega_k = \omega_2$, 4 – $\omega_k = \omega_3$. Максимальный прогиб наблюдается при резонансе по частоте основного тона ω_0 . В этом случае увеличение радиуса пятна нагрузки вызывает нелинейный рост прогиба в центре пластины. Остальные прогибы гораздо меньше по амплитуде.

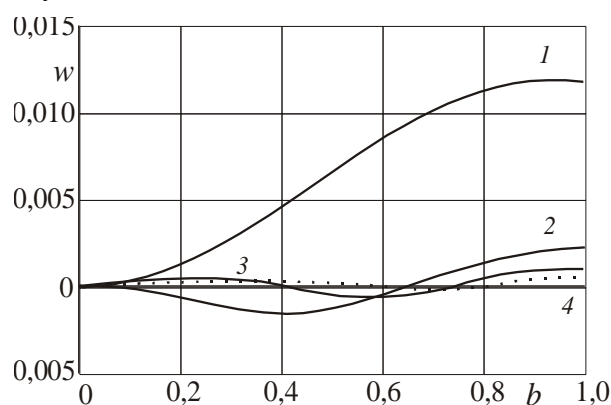


Рис. 2. Зависимость амплитуды прогиба от радиуса пятна нагрузки

Рис. 3 иллюстрирует прогиб в центре пластины в момент времени $t = \pi/\omega_0$ при частоте резонансной нагрузки ($q_0 = 10^5$ Па), совпадающей с частотой основного тона $\omega_k = \omega_0$, в зависимости от места расположения силового кольца шириной $d = b - a = 0,25$. Перемещение этого кольца от центра к контуру сначала увеличивает прогиб до максимума, затем он уменьшается до своего минимального значения.

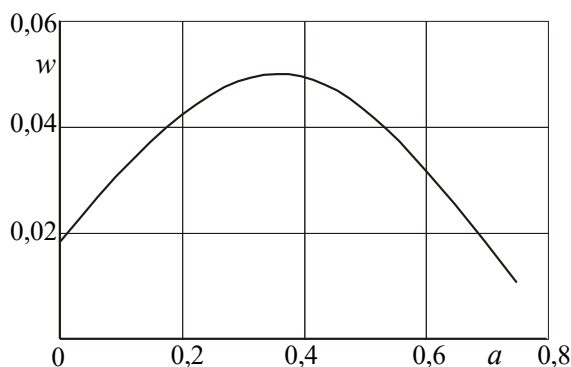


Рис. 3. Изменение максимального прогиба в зависимости от места расположения кольца нагрузки

Изменение прогиба (a) и относительного сдвига в заполнителе (b) вдоль радиуса пластины в тот же момент времени, при той же *кольцевой* нагрузке и частоте показаны на рис. 4. Кривые соответствуют различному положению кольца нагрузки: 1 – $a = 0$, $b = 0,25$, 2 – $a = 0,25$, $b = 0,5$, 3 – $a = 0,5$, $b = 0,75$, 4 – $a = 0,75$, $b = 1$. Здесь прогиб и относительный сдвиг максимальны, когда кольцо нагрузки внешним контуром касается срединного радиуса пластины (2).

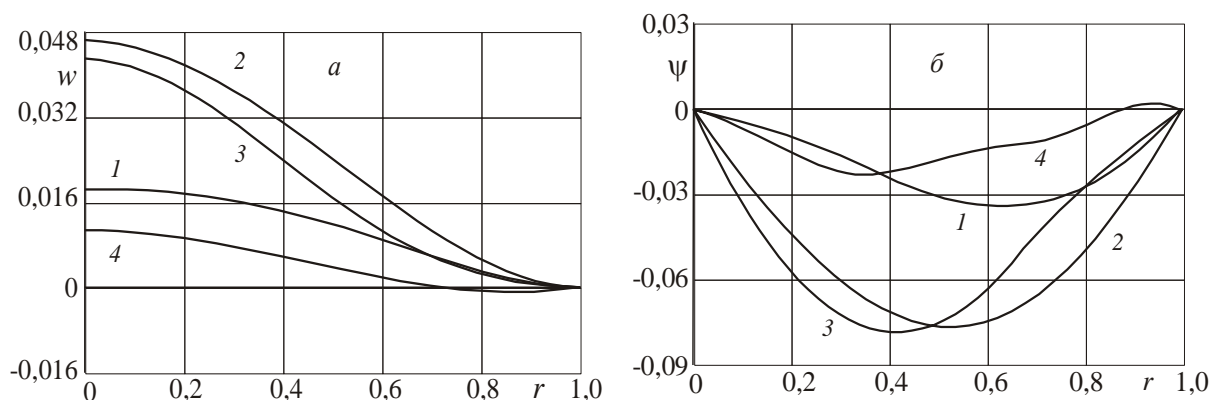


Рис. 4. Изменение прогиба и относительного сдвига вдоль радиуса пластины

Следует подчеркнуть, что приведенные решения справедливы в области малых упругих деформаций. Резонансные явления описываются подобной моделью только на начальной стадии нарастания амплитуды колебаний, пока деформации не стали конечными или не начались в пластине процессы пластического деформирования и расслаивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.
2. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем. / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. 342 с.
3. Яровая, А.В. Резонансные воздействия на круговые трехслойные пластины / А.В. Яровая // Проблемы машиностроения и автоматизации. № 4, 2003. С. 62–66.
4. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. 2003. Vol. 35. N 4. P. 346-352.
5. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45–52.
6. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E.I. Starovoitov, V.D. Kubenko, D.V. Tarlakovskii // Russian Aeronautics. 2009. Vol. 52. N 2. P. 151–157.
7. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47, N. 5. P. 580–589.
8. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47, N. 1. P. 111–118.
9. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. I. Мат. Мех. 1980. № 2. С. 92–96.

10. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
11. Горшков, А. Г. Циклические нагрузки упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 79–85.
12. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2001. № 4. С. 37–40.
13. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.
14. Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 3. С. 91–99.
15. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // Пробл. прочности. 1988. № 4. С. 11–15.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕНИЙ МАТРИЦ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭНДО- И ЭКЗОСКЕЛЕТА ПО УРАВНЕНИЯМ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

¹Борисов А.В., ²Чигарев А.В.

¹ Филиал ГОУ ВО НИУ «Московский энергетический институт
(Технический университет)» в г. Смоленске

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение

Моделирование движений антропоморфных механизмов и экзоскелетов является важной фундаментальной задачей, имеющей при этом много практических приложений, что определяет актуальность данного исследования. Научная новизна исследования заключается в том, что в отличие от имеющихся моделей механизмов с абсолютно твердыми звеньями, модели со звеньями переменной длины позволяют приблизить их движения к реальным процессам происходящих в опорно-двигательном аппарате человека во время движения. Значимость исследования заключается в увеличении количества степеней свободы в модели антропоморфного механизма и открываемых этим возможностей для синтеза новых алгоритмов управления движением. Управление осуществляется в шарнирах с помощью управляющих моментов и в стержнях за счет изменения длины под действием управляющей продольной силы. Перемещение реализуется при помощи сил трения, обеспечивающих связь с опорной поверхностью, по которой движется антропоморфный механизм и изменения конфигурации механизма под действием внутренних управляющих усилий.

Цель исследования – разработать метод получения систем дифференциальных уравнений движения для пространственной стержневой системы, составленной из звеньев переменной длины с сосредоточенными массами по дифференциальным уравнениям движения плоской механической системы аналогичной структуры.

1. Описание модели звена с массами в шарнирах-суставах и между ними и составление дифференциальных уравнений движения.

Рассмотрим модель одного подвижного звена длиной $AB = l_1(t)$ с управлением в точке шарнирного крепления в виде одного невесомого стержня переменной длины и трех точечных масс, две из которых размещены на стержне в шарнирах-суставах A и B на концах стержня, третья масса C расположена между точками A и B (рис. 1). Массами в шарнирах-суставах, кроме самих подвижных соединений, может моделироваться сустав или электродвигатель, установленный на оси шарнира, имеющий значительную массу и создающий управляющий момент [1].

Положение звена однозначно определяется углом $\varphi_1(t)$ между горизонталью и звеном, отсчитываемым от горизонтали против хода часовой стрелки, и длиной стержня $l_1(t)$. Система имеет две степени свободы. Пусть M_1 – момент, развиваемый в шарнире. Продольную силу, приложенную на конце стержня и действующую вдоль стержня, обозначим F_1 . Так как в дальнейшем будем рассматривать многозвенные системы, введем двухиндексные обозначения: первый индекс – номер звена, второй – номер точечной массы на этом звене. В точке A расположена масса m_{10} , в точке C – масса m_{11} , в точке B – масса m_{12} . Положение массы в точке C , не совпадающей с концом стержня, будем задавать с помощью постоянного множителя n_{11} ($0 < n_{11} < 1$). Тогда

длина $AC = n_{11}l_1(t)$ – функция времени, т.е. точечная масса, находящаяся на стержне между его концами, совершает сложное движение: вращательное вокруг нижней точки A и поступательное вдоль AB . Такое же движение совершает и точечная масса, расположенная в точке B .

Так как теоретическая модель невесомого стержня переменной длины с сосредоточенными массами на нем при практическом создании экзоскелета может быть реализована, например, в виде телескопического стержня, то продольная сила $F_1(t)$ может быть реализована в виде двигателей, обеспечивающих поступательное движение одной части звена относительно другой. Управляющий момент $M_1(t)$ можно реализовать в виде двигателя, обеспечивающего вращательное движение звена [1].

Требуется получить дифференциальные уравнения движения для однозвенной и многозвенных систем, выявить их структуру и представить в векторно-матричном виде, установить закономерности построения матриц и получить обобщения выражений элементов матриц для создания эффективного матричного и рекуррентного алгоритмов записи дифференциальных уравнений движения для многозвенных систем.

Учитывая выражение для кинетической энергии звена (сумма кинетических энергий каждой сосредоточенной на звене массы) и для потенциальной энергии

$$T = \frac{1}{2} \zeta_1 (\dot{l}_1^2 + l_1^2 \dot{\phi}_1^2), \quad \Pi = \eta_1 g l_1 S_1, \quad \zeta_1 = m_{11} n_{11}^2 + m_{12}, \quad \eta_1 = m_{11} n_{11} + m_{12}, \quad (1)$$

запишем используя уравнения Лагранжа второго рода, систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемой стержневой модели:

$$l_1^2 \zeta_1 \ddot{\phi}_1 + g l_1 \eta_1 C_1 + 2 l_1 \zeta_1 \dot{l}_1 \dot{\phi}_1 = M_1, \quad -l_1 \zeta_1 \dot{\phi}_1^2 + g \eta_1 S_1 + \zeta_1 \ddot{l}_1 = F_1 \quad (2)$$

и начальные условия $t = 0$: $\phi_1 = \phi_{1_0}$, $\dot{\phi}_1 = \omega_{1_0}$, $l_1 = l_{1_0}$, $\dot{l}_1 = \dot{l}_{1_0}$,

где: $C_1 = \cos \phi_1$, $S_1 = \sin \phi_1$.

Моделирование опорно-двигательного аппарата человека имеет особенность, отличающую его от других механизмов: звенья соединяются не только последовательно, но и с ветвлением. **Точкой ветвления** называется точка механизма в виде шарнира, из которой выходит более одного звена или после нее изменяется способ отсчета угла. Например, опорная нога и переносимая, корпус и руки. Проведем анализ влияния ветвления звеньев на дифференциальные уравнения движения. Для этого рассмотрим две модели с двумя подвижными звеньями переменной длины (рис. 2). Они различаются тем, что на левой части (рис. 2 а) звенья соединены последовательно, а на правой части (рис. 2 б) имеется точка ветвления B . Расположение масс и моментов в обеих моделях одинаково: масса m_{22} в обеих моделях находится в точке C , момент M_2 создается в точке B . Различия заключаются только в способе отсчета угла ϕ_2 .

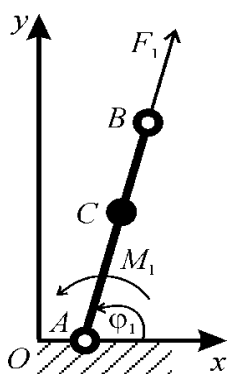


Рис. 1. Модель одного подвижного звена экзоскелета с массами в шарнирах-суставах и между ними

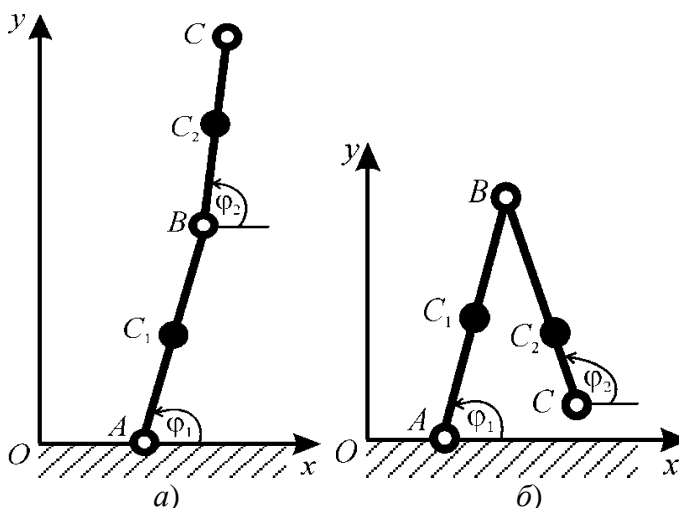


Рис. 2. Модель экзоскелета с двумя подвижными звеньями

В точке A стержня AB сосредоточена масса m_{10} , в точке C_1 – m_{11} , в точке B масса m_{12} . Стержень BC в точке A имеет массу m_{20} , в точке C_2 массу m_{21} , в точке C массу m_{22} .

Кинетическую энергию звена будем вычислять, подсчитывая кинетическую энергию каждой сосредоточенной на звене массы и затем суммируя их.

$$T = \frac{1}{2} [(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + m_{20})(\dot{l}_1^2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2) + m_{21}((\dot{l}_1S_1 \pm \dot{l}_2n_{21}S_2 + l_1C_1\dot{\varphi}_1 \pm \dot{l}_2n_{21}C_2\dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{l}_1C_1 \pm \dot{l}_2n_{21}C_2 - l_1S_1\dot{\varphi}_1 \mp l_2n_{21}S_2\dot{\varphi}_2)^2) + m_{22}((\dot{l}_1S_1 \pm \dot{l}_2S_2 + l_1C_1\dot{\varphi}_1 \pm l_2C_2\dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{l}_1C_1 \pm \dot{l}_2C_2 - l_1S_1\dot{\varphi}_1 \mp l_2S_2\dot{\varphi}_2)^2)], \quad (3)$$

где: $C_j = \cos\varphi_j$, $S_j = \sin\varphi_j$, ($j = 1, 2$).

Система дифференциальных уравнений движения моделей соответствующих (рис. 2) имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\zeta_1 + \theta_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 \pm l_1l_2\eta_2C_{12}\ddot{\varphi}_2 \pm l_1l_2\eta_2S_{12}\dot{\varphi}_2^2 + (\eta_1 + \theta_2)gl_1C_1 + \\ & + 2(\zeta_1 + \theta_2)l_1\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 \pm 2l_1\eta_2C_{12}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 \mp l_1\eta_2S_{12}\ddot{l}_2 = M_1 - M_2, \\ & \pm l_1l_2\eta_2C_{12}\ddot{\varphi}_1 + \zeta_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 \mp l_1l_2\eta_2S_{12}\dot{\varphi}_1^2 \pm \eta_2gl_2C_2 + \\ & \pm 2l_2\eta_2C_{12}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + 2\zeta_2l_2\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 \pm l_2\eta_2S_{12}\ddot{l}_1 = M_2, \\ & \pm l_2\eta_2S_{12}\ddot{\varphi}_2 - (\zeta_1 + \theta_2)l_1\dot{\varphi}_1^2 \mp l_2\eta_2C_{12}\dot{\varphi}_2^2 + (\eta_1 + \theta_2)gS_1 + \\ & \pm 2\eta_2S_{12}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 + (\zeta_1 + \theta_2)\ddot{l}_1 \pm \eta_2C_{12}\ddot{l}_2 = F_1, \\ & \mp l_1\eta_2S_{12}\ddot{\varphi}_1 \mp l_1\eta_2C_{12}\dot{\varphi}_1^2 - \zeta_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \pm \\ & \pm \eta_2gS_2 \mp 2\eta_2S_{12}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 \pm \eta_2C_{12}\ddot{l}_1 + \zeta_2\ddot{l}_2 = F_2, \\ & C_j = \cos\varphi_j, \quad S_j = \sin\varphi_j, \quad (j = 1, 2), \quad C_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad S_{12} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ & \zeta_1 = m_{11}n_{11}^2 + m_{12}, \quad \zeta_2 = m_{21}n_{21}^2 + m_{22}, \\ & \eta_1 = m_{11}n_{11} + m_{12}, \quad \eta_2 = m_{21}n_{21} + m_{22}, \quad \theta_2 = m_{20} + m_{21} + m_{22}. \end{aligned} \quad (4)$$

Верхние знаки соответствуют модели, представленной на левой части рис. 2 *a*), нижние – на правой части рис. 2 *б*). Различия заключаются во всех уравнениях в знаках перед слагаемыми в тригонометрических функциях стоящих после точки ветвления. В первом уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при тригонометрической функции \sin для координаты стоящей после точки ветвления. Во втором уравнении, знаки не изменяются. В третьем уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при тригонометрической функции \cos для координаты стоящей после точки ветвления. В четвертом уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при функциях \cos и \sin для координаты стоящей перед точкой ветвления.

2. Обобщения дифференциальных уравнений движения на случай модели с n подвижными звеньями

Рассматривая модели с тремя и более подвижными звеньями, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости уравнений, получаем обобщения для механизма с n подвижными звеньями переменной длины.

На рис. 3 схематично изображен фрагмент n -звенного экзоскелета в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Уравнения движения элементов n -звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно записать в векторно-матричной форме. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $k = 1, 2$, где 1 соответствует обобщенной координате φ , 2 – обобщенной координате l .

$$A_k(\varphi, l)\ddot{\varphi} + \Lambda_k(\varphi, l)\ddot{l} + D_k(\varphi, l)\dot{\varphi}\dot{\varphi} + 2H_k(\varphi, l)(\dot{\varphi}\dot{l}) + gP_k(\varphi) = M_k(\varphi, l), \quad (5)$$

где: $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор угловых обобщенных координат; $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ – вектор обобщенных координат, описывающих изменения длин звеньев; $\dot{\varphi}$ – вектор угловых

скоростей; $\ddot{\phi}$ – вектор угловых ускорений; $\Phi = \text{diag}(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n)$ – диагональная матрица; A_k, D_k – матрицы, учитывающие инерционные свойства; P_k – матрицы, определяемые моментами силы тяжести; H_k, Λ_k – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев; M_k – векторы обобщенных сил.

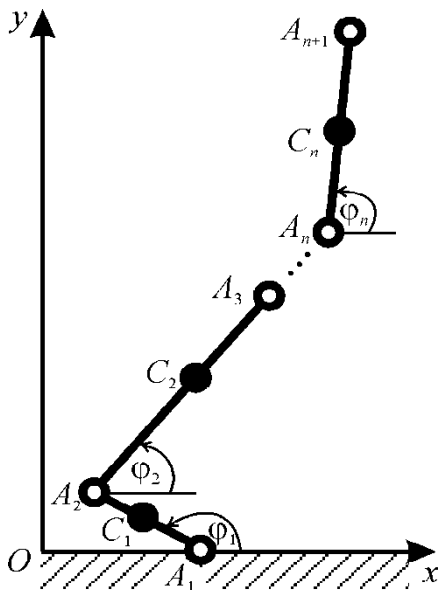


Рис. 3. Модель экзоскелета с n подвижными звеньями переменной длины

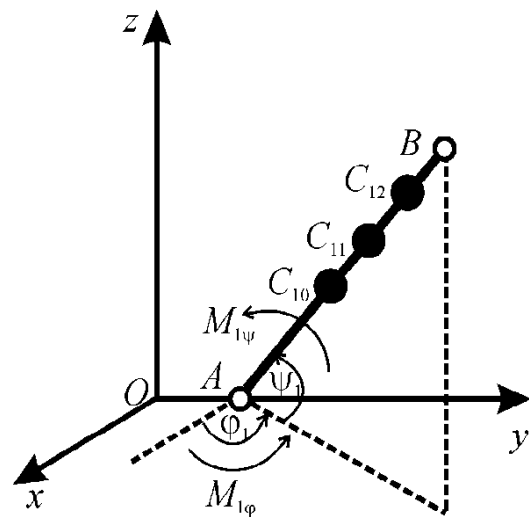


Рис. 4. Модель трехмерной механической системы с одним подвижным звеном переменной длины для моделирования звена опорно-двигательного аппарата человека

Матричная форма записи уравнений движения (5) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета с любым количеством звеньев. Структура матриц при этом останется такой же, только изменится их размерность и количество масс, длин звеньев и т.п. в каждом элементе матрицы [2].

Нами были получены обобщения по индукции матриц для произвольной n -звенной системы подобного вида [3,4]. Приведем в качестве примера обобщающую формулу для матрицы A , которая является симметрической. Поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, \dots, n$, при этом $j \geq i$.

Элементы для симметрической матрицы A_ϕ при $j \geq i$ имеют вид:

$$a_{ij}^\phi = (\delta_{ij}\zeta_i + (1 - \delta_{ij})\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k) l_i l_j \cos(\phi_i - \phi_j), \quad (6)$$

где: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2$, $\eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}$, $\theta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}$.

Остальные элементы: $a_{ji}^\phi = a_{ij}^\phi$.

Множители, определяющие положение масс на стержне задаются следующим

$$\text{образом: } n_{j\beta} = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ n_{j1}, & \beta = 1, \\ 1, & \beta = 2. \end{cases}$$

3. Описание пространственной модели звена переменной длины

В предыдущих параграфах данной главы была рассмотрена двумерная модель экзоскелета, движение которого являлось плоским. Подобные модели имеют важное теоретическое значение, но непосредственно в практику не могут быть внедрены.

Необходимо рассмотрение трехмерных моделей, которые можно практически реализовать. Простой переносимости результатов двумерной модели не получается, поэтому изучение трехмерных моделей представляет самостоятельное направление в исследовании стержневых систем.

Пусть стержень переменной длины имеет конструкцию, показанную на рис. 1. Рассмотрим трехмерную модель механической системы с одним подвижным звеном данной конструкции (рис. 4).

Положение центра масс звена определяется двумя углами: φ_1 – углом между осью OX и проекцией звена AB на плоскость XOY , отсчитываемым от оси OX против часовой стрелки; ψ_1 – углом между звеном AB и его проекцией на плоскость XOY , отсчитываемым от проекции звена AB на плоскость XOY против часовой стрелки и изменением его длины l_1 . Рассматриваемые углы и длину звена считаем функциями времени: $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $l_1 = l_1(t)$. Следовательно, модель имеет три параметра, однозначно определяющих ее положение. Вращение происходит в жестко закрепленном шарнире O . Продольную силу, действующую вдоль стержня, обозначим F_1 . Массы считаем сосредоточенными: в точке C_{10} масса m_{10} , в точке C_{11} масса m_{11} , в точке C_{12} масса m_{12} . Их положение на стержне задается постоянными множителями n_{10} , n_{11} и n_{12} соответственно. Как и ранее, первый индекс обозначает номер звена, второй – номер массы на звене.

Координаты сосредоточенных на звене масс записываются так:

$$x_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi, \quad y_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi, \quad z_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} S_1^\psi, \quad (7)$$

где: $\beta = 0, 1, 2$ – номер сосредоточенной на звене массы, $C_1^\varphi = \cos\varphi_1$, $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\varphi = \sin\varphi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$.

Проекции скорости сосредоточенных масс на звене равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi - \dot{\varphi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi - \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} S_1^\psi C_1^\varphi, \\ \dot{y}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi + \dot{\varphi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi - \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} S_1^\psi S_1^\varphi, \\ \dot{z}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} S_1^\psi + \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Квадраты скорости сосредоточенных на звене масс равны:

$$v_{C1\beta}^2 = \dot{x}_{C1\beta}^2 + \dot{y}_{C1\beta}^2 + \dot{z}_{C1\beta}^2 = \dot{l}_1^2 n_{1\beta}^2 + l_1^2 n_{1\beta}^2 \dot{\psi}_1^2 + l_1^2 n_{1\beta}^2 \dot{\varphi}_1^2 (C_1^\psi)^2. \quad (9)$$

Угловые скорости звена:

$$\omega_{\psi 1} = \dot{\psi}_1, \quad \omega_{\varphi 1} = \dot{\varphi}_1 C_1^\psi. \quad (10)$$

Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \zeta_1 [\dot{l}_1^2 + l_1^2 (\dot{\varphi}_1^2 (C_1^\psi)^2 + \dot{\psi}_1^2)], \quad \zeta_1 = \sum_{\beta=0}^2 m_{1\beta} n_{1\beta}^2. \quad (11)$$

Потенциальная энергия звена имеет вид.

$$\Pi = g \eta_1 l_1 S_1^\psi, \quad \eta_1 = \sum_{\beta=0}^2 m_{1\beta} n_{1\beta}. \quad (12)$$

Составляя уравнения аналогично двумерному случаю с использованием уравнений Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для экзоскелета с одним подвижным звеном в трехмерном пространстве:

$$\zeta_1 l_1^2 (C_1^\psi)^2 \ddot{\varphi}_1 + 2\zeta_1 l_1 (C_1^\psi)^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2\zeta_1 l_1^2 C_1^\psi S_1^\psi \dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 = M_{1\varphi}, \quad (13)$$

$$\zeta_1 l_1^2 \ddot{\psi}_1 + \zeta_1 l_1^2 C_1^\psi S_1^\psi \dot{\varphi}_1^2 + 2\zeta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + g \eta_1 l_1 C_1^\psi = M_{1\psi}, \quad (14)$$

$$\zeta_1 \ddot{l}_1 - \zeta_1 l_1 (C_1^\psi)^2 \dot{\varphi}_1^2 - \zeta_1 l_1 \dot{\psi}_1^2 + g \eta_1 S_1^\psi = F_1. \quad (15)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений движения зависит от 6 произвольных констант, чтобы определить движение, зададим начальные условия.

$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_{1_0}, \dot{\varphi}_1|_{t=0} = \dot{\varphi}_{1_0}, \psi_1|_{t=0} = \psi_{1_0}, \dot{\psi}_1|_{t=0} = \dot{\psi}_{1_0}, l_1|_{t=0} = l_{1_0}, \dot{l}_1|_{t=0} = \dot{l}_{1_0}. \quad (16)$$

Также были рассмотрены стержневые модели экзоскелетов с двумя и тремя подвижными звеньями переменной длины в пространстве и составлены системы дифференциальных уравнений движения для таких экзоскелетов в форме уравнений Лагранжа второго рода, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости.

4. Матричная форма записи дифференциальных уравнений движения для пространственной модели экзоскелета

Анализируя уравнения движения стержневых механических систем в трехмерном пространстве, видно, что они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений вектора угловых переменных, которые можно записать в векторно-матричной форме. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $k = 1, 2, 3$, где 1 соответствует обобщенной координате φ , 2 – ψ , 3 – l .

$$A_k(\varphi, \psi, l) \ddot{\varphi} + B_k(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + \Lambda_k(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + D_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{\varphi} + E_k(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{\psi} + \quad (17)$$

$$+ 2G_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{\psi} + 2H_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{l} + 2K_k(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{l} + gP_k(\psi) = M_k(\varphi, \psi, l),$$

где: φ, ψ – угловые обобщенные координаты сосредоточенных масс $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ – векторы углов; l – обобщенные координаты, связанные с изменениями длин звеньев $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ – вектор длин звеньев переменной длины; $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ – векторы угловых скоростей; $\ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$ – векторы угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \text{diag}(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n)$, $\dot{\Psi} = \text{diag}(\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)$ – диагональные матрицы; M_k – векторы обобщенных сил; $A_k(\varphi, \psi, l)$, $B_k(\varphi, \psi, l)$, $D_k(\varphi, \psi, l)$, $E_k(\varphi, \psi, l)$, $G_k(\varphi, \psi, l)$ – матрицы, учитывающие инерционные свойства; $\Lambda_k(\varphi, \psi, l)$, $H_k(\varphi, \psi, l)$, $K_k(\varphi, \psi, l)$ – матрицы, учитывающие переменность длин звеньев; $P_k(\psi)$ – матрицы, определяемые моментами силы тяжести.

Реальное максимальное количество звеньев, из которого может быть составлен экзоскелет, ограничено только вычислительными мощностями, т.к. из-за геометрии системы сложность уравнений возрастает нелинейно, это видно по матрицам, соответствующим уравнениям для однозвенной, двухзвенной и трехзвенной механических систем с деформируемыми звеньями в трехмерном пространстве.

5. Построение матриц уравнений для трехмерных моделей стержневых систем по соответствующим матрицам для плоских моделей

Проведем сравнительный анализ двухмерных и трехмерных уравнений. Аналогично однозвенной модели добавляются множители, содержащие тригонометрические функции аргумента ψ , возникают новые слагаемые для нового аргумента. Отметим, что для трехмерного случая большинство матриц потеряли свойство симметрии. Однако, они, как показано выше, допускают представление в обобщенном виде. Благодаря этому становится возможной запись уравнений без трудоемкой процедуры составления для любого n -звенного механизма подобной структуры. В случае ветвления звеньев, например на переносимую ногу, после точки ветвления, у соответствующих элементов матриц, индексы которых больше или равны индексам звеньев после разветвления, следует сменить знак на противоположный.

Сравнивая уравнения движения на плоскости и в пространстве, можно получить закономерность записи уравнений трехмерного движения по соответствующему дифференциальному уравнению для двумерной модели. Приведем полученные закономерности. Для того, чтобы отличать элементы матриц пространственной и плоской моделей снабдим их верхними индексами «3D» и «2D» соответственно. Плоская и пространственная модели должны быть одинаковой структуры, т.е. иметь одинаковое количество звеньев, расположение точек ветвления, распределение масс на звене. Формулы для перехода имеют следующий вид.

$$\begin{aligned}
{}^{3D}a_{ij}^\phi &= {}^{2D}a_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}b_{ij}^\phi &= {}^{2D}a_{ij}^l l_i \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^\phi &= {}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}d_{ij}^\phi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}e_{ij}^\phi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}g_{ij}^\phi &= -{}^{2D}h_{ij}^\phi l_j \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}h_{ij}^\phi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}k_{ij}^\phi &= -{}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}p_i^\phi &= {}^{2D}p_i^\phi \cdot 0, & {}^{3D}\mu_i^\phi &= {}^{2D}\mu_i^\phi, & {}^{3D}a_{ij}^\psi &= -{}^{2D}a_{ij}^l l_i \cos\psi_j \sin\psi_i, \\
{}^{3D}b_{ij}^\psi &= {}^{2D}a_{ij}^\phi (\sin\psi_i \sin\psi_j + \cos\psi_i \cos\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)), \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi (\cos\psi_i \sin\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j) - \cos\psi_j \sin\psi_i), \\
{}^{3D}d_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi l_j \cos\psi_j \sin\psi_i, & {}^{3D}e_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi l_j (\cos\psi_j \sin\psi_i - \cos\psi_i \sin\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)), \\
{}^{3D}g_{ij}^\psi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \sin\psi_i \sin\psi_j, & {}^{3D}h_{ij}^\psi &= {}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \sin\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{2D}k_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi (\sin\psi_j \sin\psi_i + \cos\psi_i \cos\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)), & {}^{3D}p_i^\psi &= {}^{2D}p_i^\phi \cos\psi_i / \cos\varphi_i, \\
{}^{3D}\mu_i^\psi &= {}^{2D}\mu_i^\phi \Big|_{\varphi \rightarrow \psi}, & {}^{3D}a_{ij}^l &= {}^{2D}a_{ij}^l \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}b_{ij}^l &= {}^{2D}d_{ij}^l (\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)), \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^l &= {}^{2D}\lambda_{ij}^l (\cos\psi_i \cos\psi_j + \sin\psi_i \sin\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)), \\
\text{элементы несимметрической матрицы } D_l(\varphi, \psi, l) &= - (H_\varphi(\varphi, \psi, l))^T, \\
{}^{3D}e_{ij}^l &= {}^{2D}d_{ij}^l (\sin\psi_i \sin\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \cos\psi_i \cos\psi_j), \\
{}^{3D}g_{ij}^l &= -{}^{3D}a_{ij}^l \cos\psi_i \sin\psi_j, & {}^{3D}h_{ij}^l &= {}^{2D}h_{ij}^l \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}k_{ij}^l &= -{}^{2D}d_{ij}^l (\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j / \cos(\varphi_i - \varphi_j)) / l_j, \\
{}^{3D}p_i^l &= {}^{2D}p_i^l \sin\psi_i / \sin\varphi_i, & {}^{3D}\mu_i^l &= {}^{2D}\mu_i^l.
\end{aligned} \tag{18}$$

Чтобы в уравнении, полученном при дифференцировании по координате φ , перейти к трехмерной модели от двумерной необходимо элементы матриц, присутствующих в уравнениях для двумерной модели, умножить на произведение $\cos\psi_i \cos\psi_j$. Элементы матриц, отсутствующих в уравнениях двумерной модели, получаются из подходящих умножением на $\cos\psi_i \sin\psi_j$, и в некоторых матрицах на l_i или l_j . В остальных уравнениях зависимости сложнее.

Таким образом, впервые предложен метод записи дифференциальных уравнений движения для пространственного n -звенного стержневого механизма со звеньями переменной длины по соответствующим уравнениям плоского механизма.

6. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения модели экзоскелета со звеньями переменной длины

Предложенный новый матричный метод построения дифференциальных уравнений движения сводится к записи матриц по имеющимся формулам, а затем умножению матриц на соответствующие векторы из системы дифференциальных уравнений (5). Это упрощает процедуру получения дифференциальных уравнений движения экзоскелета. Покажем, как составляются уравнения движения, минуя этап применения уравнений Лагранжа второго рода и других методов составления дифференциальных уравнений движения, с использованием полученных обобщений для матриц.

Рассмотрим пример составления дифференциальных уравнений движения, с помощью полученной выше матричной формы (5) и обобщений для матриц. В примере ограничимся одной моделью, т.к. для других моделей все строится аналогично. Для модели, состоящей из четырех звеньев переменной длины, т.е. $n = 4$, (рис. 5), система дифференциальных уравнений движения имеет вид (5). Матрицы, входящие в уравнения движения, имеют размер 4×4 .

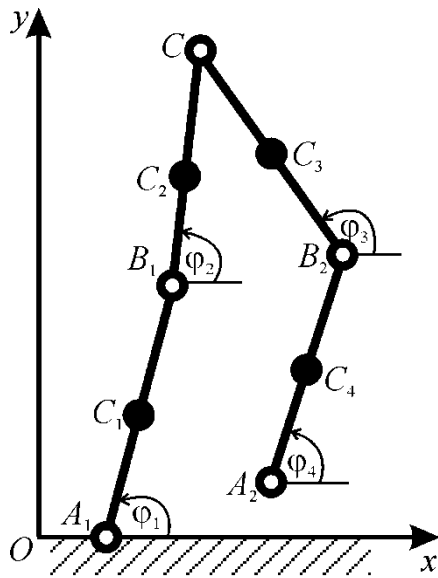


Рис. 5. Модель экзоскелета с четырьмя подвижными звеньями переменной длины с массами в шарнирах и одной массой между ними

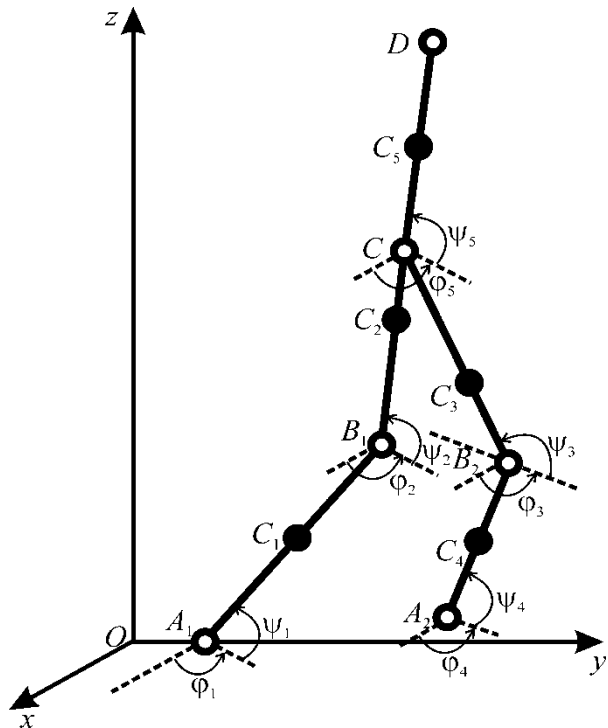


Рис. 6. Пространственная модель экзоскелета с пятью подвижными звеньями переменной длины

Построим матрицу A по предложенной формуле нахождения отдельных ее элементов (2.13). Выпишем для нее отдельно каждый элемент.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= l_1^2(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta}), \\
 a_{12} &= a_{21} = l_1 l_2 (m_{21}n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
 a_{j3} &= a_{3j} = l_j l_3 (m_{31}n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos(\varphi_j - \varphi_3), \quad j = 1, 2, \\
 a_{j4} &= a_{4j} = l_j l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4), \quad j = 1, 2, \\
 a_{22} &= l_2^2 (m_{21}n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}), \quad a_{33} = l_3^2 (m_{31}n_{31}^2 + m_{32} + \\
 &\quad \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}), \\
 a_{34} &= a_{43} = l_3 l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4), \quad a_{44} = l_4^2 (m_{41}n_{41}^2 + m_{42}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично определяются элементы для всех остальных матриц, входящих в (5), по предложенным формулам. После этого умножаем каждую записанную матрицу на соответствующий ей вектор в уравнениях (5). Так, матрица A умножается на вектор $\ddot{\varphi}$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_4)^T$.

Приведем начало первого уравнения из системы, которая получается для данного механизма, то есть произведение $A \ddot{\varphi}$:

$$a_{11} \ddot{\varphi}_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2 - a_{13} \ddot{\varphi}_3 - a_{14} \ddot{\varphi}_4 + \dots \tag{20}$$

В результате записываются дифференциальные уравнения движения экзоскелета с четырьмя подвижными звеньями переменной длины.

Чтобы перейти от плоской к пространственной модели, необходимо каждый элемент

матрицы домножить в соответствии с предложенными формулами.

$$\begin{aligned}
{}^{3D}a_{11}^\varphi &= l_1^2(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta}) \cos^2 \psi_1, \\
{}^{3D}a_{12}^\varphi &= {}^{3D}a_{21}^\varphi = l_1 l_2 (m_{21}n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \psi_1 \cos \psi_2, \\
{}^{3D}a_{j3}^\varphi &= {}^{3D}a_{3j}^\varphi = l_j l_3 (m_{31}n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos(\varphi_j - \varphi_3) \cos \psi_j \cos \psi_3, \quad j = 1, 2, \\
{}^{3D}a_{j4}^\varphi &= {}^{3D}a_{4j}^\varphi = l_j l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4) \cos \psi_j \cos \psi_4, \quad j = 1, 2, \\
{}^{3D}a_{22}^\varphi &= l_2^2 (m_{21}n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos^2 \psi_2, \\
{}^{3D}a_{33}^\varphi &= l_3^2 (m_{31}n_{31}^2 + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos^2 \psi_3, \\
{}^{3D}a_{34}^\varphi &= {}^{3D}a_{43}^\varphi = l_3 l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \cos \psi_3 \cos \psi_4, \\
{}^{3D}a_{44}^\varphi &= l_4^2 (m_{41}n_{41}^2 + m_{42}) \cos^2 \psi_4.
\end{aligned} \tag{21}$$

Далее построение аналогично выражению (20). Таким образом, предложен новый метод построения дифференциальных уравнений движения для пространственной стержневой модели со звеньями переменной длины. Описанный метод алгоритмируется и программируется.

7. Рекуррентный алгоритм составления дифференциальных уравнений движения

Рассмотрим на примере матрицы A .

Рассмотрим обобщение предложенного подхода для построения матрицы механической системы из $n + 1$ подвижного звена по матрице модели с n подвижными звеньями. Матрица A_n для n -звенной механической системы имеет вид:

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(\zeta_1 + \sum_{k=2}^n \theta_k \right) l_1 l_1 C_{11} & \dots & \left(\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_1 l_j C_{1j} & \dots & \eta_n l_1 l_n C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\eta_i + \sum_{k=i+1}^n \theta_k \right) l_i l_1 C_{i1} & \dots & \left(\zeta_i + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \eta_n l_i l_n C_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n l_n l_1 C_{n1} & \dots & \eta_n l_n l_j C_{nj} & \dots & \zeta_n l_n l_n C_{nn} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матрица для $n + 1$ -звенной механической системы строится так:

$$A_{n+1} = A_n + \delta A_n, \tag{23}$$

причем матрица A_n должна иметь размер $(n + 1) \times (n + 1)$, поэтому она записывается с дополнительными $(n + 1)$ -й нулевой строкой и $(n + 1)$ -м нулевым столбцом т.е. матрица A_n записывается в виде:

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(\zeta_1 + \sum_{k=2}^n \theta_k \right) l_1 l_1 C_{11} & \dots & \left(\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_1 l_j C_{1j} & \dots & \eta_n l_1 l_n C_{1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\eta_i + \sum_{k=i+1}^n \theta_k \right) l_i l_1 C_{i1} & \dots & \left(\zeta_i + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \eta_n l_i l_n C_{in} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n l_n l_1 C_{n1} & \dots & \eta_n l_n l_j C_{nj} & \dots & \zeta_n l_n l_n C_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матрица δA_n строится так:

$$\delta A_n = \begin{pmatrix} \theta_{n+1} l_1 l_1 C_{11} & \dots & \theta_{n+1} l_1 l_j C_{1j} & \dots & \theta_{n+1} l_1 l_n C_{1n} & \eta_{n+1} l_1 l_{n+1} C_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} l_i l_1 C_{i1} & \dots & \theta_{n+1} l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \theta_{n+1} l_i l_n C_{in} & \eta_{n+1} l_i l_{n+1} C_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} l_n l_1 C_{n1} & \dots & \theta_{n+1} l_n l_j C_{nj} & \dots & \theta_{n+1} l_n l_n C_{nn} & \eta_{n+1} l_n l_{n+1} C_{n,n+1} \\ \eta_{n+1} l_{n+1} l_1 C_{n+1,1} & \dots & \eta_{n+1} l_{n+1} l_j C_{n+1,j} & \dots & \eta_{n+1} l_{n+1} l_n C_{n+1,n} & \zeta_{n+1} l_{n+1} l_{n+1} C_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где: $C_{ij} = \cos(\varphi_i - \varphi_j)$, $\theta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta}$, $\eta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}$, $\zeta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}^2$.

Аналогично можно построить все матрицы, входящие в систему дифференциальных уравнений движения.

Алгоритм построения матрицы трехмерной модели с $n+1$ звеном по матрице двумерной модели с n звеньями имеет следующую последовательность действий:

$${}^{2D}A_n \rightarrow {}^{2D}A_{n+1} \rightarrow {}^{3D}A_{n+1}. \quad (26)$$

В матрице $\delta {}^{3D}A_{n+1}$ каждый ее элемент умножается на $\cos\psi_i \cos\psi_j$. Аналогично для остальных матриц в соответствии с формулами (18).

Таким образом, получен рекуррентный алгоритм составления уравнений движения двумерной стержневой механической системы с $n+1$ звеном по известному уравнению для n -звенной механической системы со звеньями переменной длины и дальнейшего перехода к трехмерной модели соответствующей структуры. Это позволяет автоматизировать составление системы дифференциальных уравнений движения стержневой механической системы со звеньями переменной длины. Открывается возможность синтеза большого количества моделей с разным количеством звеньев.

Матричный метод и рекуррентный алгоритм были реализованы в среде системы компьютерной математики Mathematica. При составлении уравнений Лагранжа второго рода было затрачено время в секундах для модели с одним подвижным звеном – 0.59, с двумя подвижными звеньями – 5.3, с тремя подвижными звеньями – 37, при использовании матричного метода 0.46, 0.55 и 0.79 секунды соответственно. Рекуррентный алгоритм при составлении дифференциальных уравнений движения для модели с двумя и тремя подвижными звеньями затратил 0.59 и 0.86 секунды соответственно. Это приведено время составления для модели, представленной на левой части рис. 2, оно примерно равно времени составления для модели, представленной на правой части рис. 2. Проводя сравнение с трехмерными моделями, для модели экзоскелета с двумя подвижными звеньями, время, затраченное на составление дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода равно 113.69 секунды, с помощью матричного метода 1.30 секунды. Таким образом, видно, что различия в скорости составления системы дифференциальных уравнений движения нарастают с увеличением количества звеньев

и перехода к трехмерной модели. Эффективность предложенных матричного метода и рекуррентного алгоритма становится очевидной.

7. Пространственная модель экзоскелета со звеньями переменной длины

Рассмотрим стрежневую модель экзоскелета со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами в трехмерном случае. Аналогично рассмотренным выше моделям, исследуем модель, состоящую из пяти звеньев переменной длины (рис. 6) [5].

При эксплуатации экзоскелета может возникнуть ситуация, когда экзоскелет должен самостоятельно управляться. Например, для тренировок с помощью экзоскелета и его частей, необходимо чтобы управление осуществлялось с помощью заданного алгоритма.

Значения параметров для численных расчетов: массы звеньев $m_1 = m_4 = 2.91$ кг, $m_2 = m_3 = 8.93$ кг, $m_5 = 28.93$ кг, они распределялись в виде точечных масс – в шарнирах $\frac{1}{4}$ и на стержне $\frac{1}{2}$ от массы звена. Множители, задающие положение сосредоточенной массы на стержне равны: $n_{11} = n_{41} = 0.595$, $n_{21} = n_{31} = 0.545$, $n_{51} = 0.500$.

Воспользуемся способом управления экзоскелетом с помощью аналитически задаваемых кинематических характеристик движения, при этом модифицировав его на трехмерный случай.

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t) &= \pi/2 + j_1 \sin[f_1 - (1 - \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_2(t) &= \pi/2 + j_2 \cos[f_2 - (1 - \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_3(t) &= \pi/2 + j_3 \cos[f_3 - (1 + \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_4(t) &= \pi/2 + j_4 \sin[f_4 - (1 + \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_5(t) &= \pi/2, \quad \varphi_1(t) = j_1 \sin[2\pi t/T], \quad \varphi_2(t) = j_2 \cos[2\pi t/T], \quad \varphi_3(t) = j_3 \cos[2\pi t/T], \\
 \varphi_4(t) &= j_4 \sin[2\pi t/T], \quad \varphi_5(t) = j_5 \cos[2\pi t/T], \\
 l_1(t) &= l_1^* + l_1^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_2(t) = l_2^* + l_2^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_3(t) = l_3^* + l_3^* l \sin[2\pi t/T], \\
 l_4(t) &= l_4^* - l_4^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_5(t) = l_5^* + l_5^* l \sin[2\pi t/T].
 \end{aligned} \tag{26}$$

где: T – период ходьбы, j_i и f_i – параметры ходьбы, l_i^* – начальная длина недеформированного звена, l – коэффициент изменения длины звена.

Аналитические выражения (26) и числовые значения параметров ходьбы к ним выбираются из условия синтеза антропоморфной периодической походки.

Приведем полученные в результате решения алгебраической системы для модели, представленной на рис. 6, графики управляющих моментов рис. 7 и продольных сил рис. 8, получающихся при задании кинематики движения в виде (26).

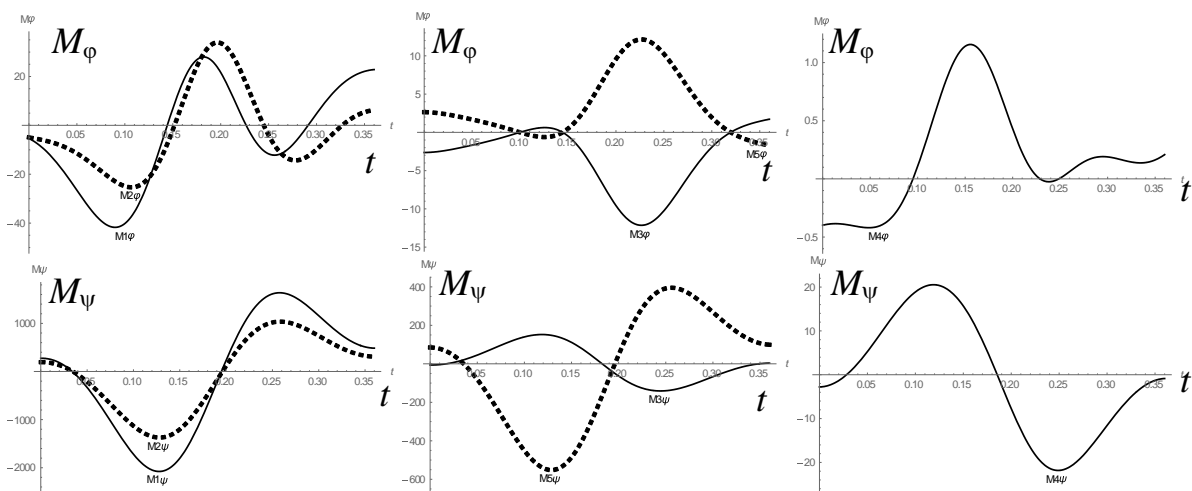


Рис. 7. Зависимости управляющих моментов в шарнирах-суставах экзоскелета от времени

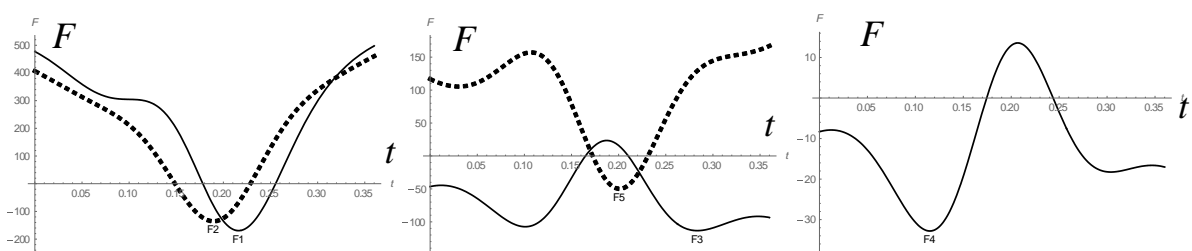


Рис. 8. Зависимости продольных сил, действующих вдоль звеньев экзоскелета от времени

На рис. 7 и 8, с целью наглядности представления результатов, графики сгруппированы по масштабу абсолютных максимальных значений.

Приведем кадры кинограммы пиктографической анимационной визуализации движения с кинематикой заданной в виде (26), рис. 9.

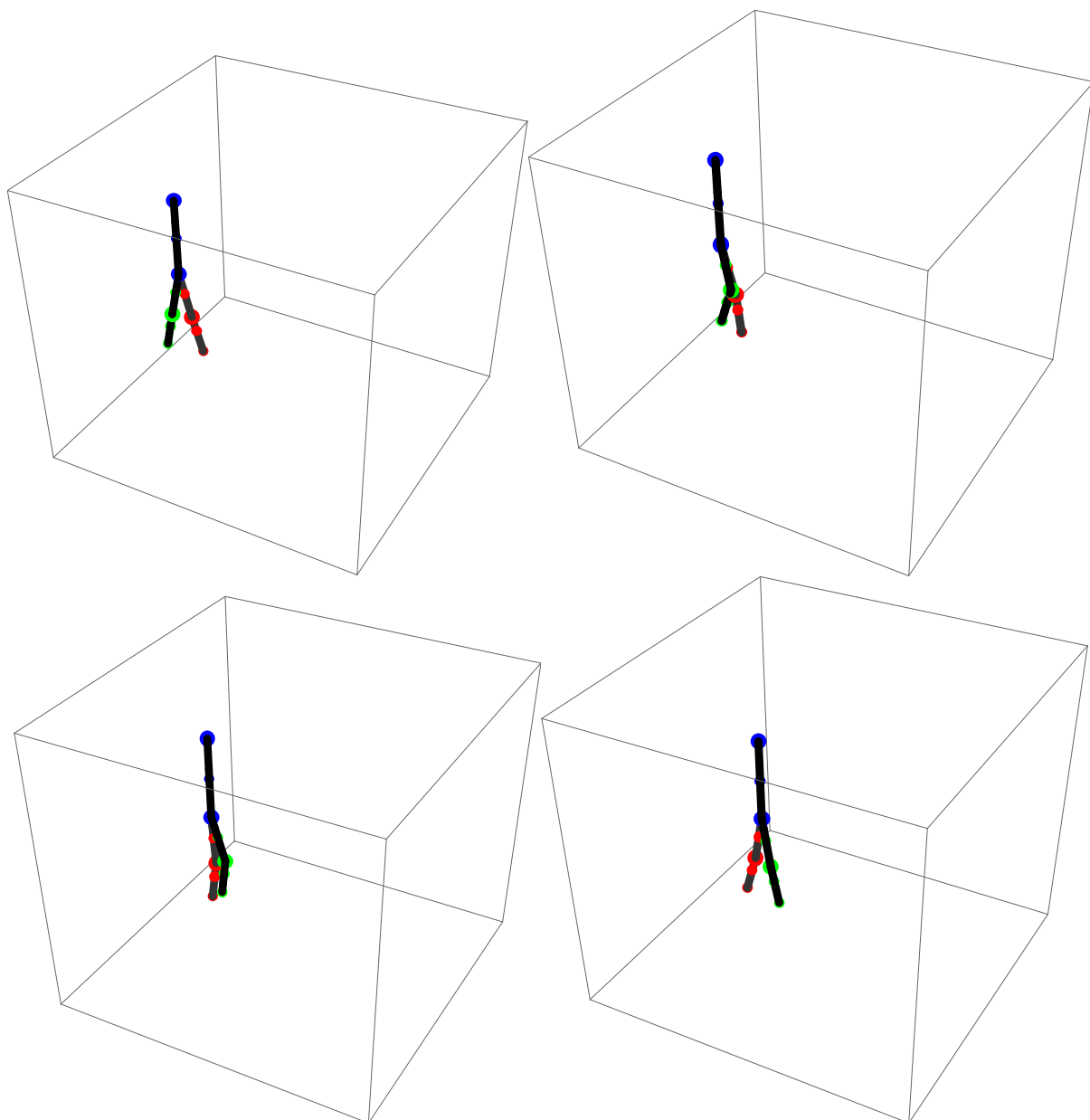


Рис. 9. Кадры кинограммы движения экзоскелета

Таким образом, решена задача синтеза управляющих воздействий при заданном движении экзоскелета. Можно будет создать базу данных реальных движений солдат в экзоскелете в разных ситуациях и, определив по движениям, управляющие воздействия использовать подходящие из них для управления экзоскелетом, в тех ситуациях, когда человек не может самостоятельно обеспечивать движение и управление экзоскелетом. Подобный подход для плоских моделей использовался выше, здесь он обобщен на пространственный случай.

Заключение

Таким образом, предложен метод построения систем дифференциальные уравнения движения пространственного механизма по дифференциальным уравнениям плоского механизма соответствующей структуры со стержнями переменной длины. Разработанный метод является универсальным и может использоваться для построения систем дифференциальных уравнений движения различных стержневых механизмов: манипуляторов, экзоскелетов, антропоморфных роботов и т.д. Класс подобных систем очень широк. Практическое применение разработанных моделей – это создание экзоскелетов и антропоморфных роботов, что является актуальным и востребованным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // ПММ. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511-522.
2. Borisov A. V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A. V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // Journal of Machinery Manufacturing and Automation. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmta/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
3. Чигарев А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.
4. Чигарев А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52-58.
5. Борисов А. В. Трехмерные модели стержневых систем со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами и с абсолютно твердым весомым стержнем и невесомым участком изменяющим длину / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 186-211.

ПРИВОД КАТЯЩЕГОСЯ КОЛЕСА ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ НАКЛОНЕ НИТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПЛОСКОСТИ КАЧЕНИЯ

¹Ковалевский А.С., ¹Грода Я.Г., ¹Вихренко В.С.

¹УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск

Введение. В большинстве механизмов, содержащих колеса, которые вращаются относительно неподвижных осей или движутся плоскопараллельно и связаны между собой системой нитей или рейками. Для обеспечения постоянных передаточных отношений нити или рейки, обеспечивающие кинематические связи между элементами механизмов, должны быть параллельными плоскости качения колес.

Вместе с тем, легко представить ситуацию, когда привод катящегося колеса или катушки осуществляется нитью, переброшенной через блок или намотанной на него, и составляющей переменный угол с плоскостью качения колеса. Такая ситуация может возникнуть при перекачивании бревен или бобин, на которые намотаны, например, провода или кабели. В таких случаях передаточные отношения становятся переменными величинами, зависящими от конструктивных особенностей механизма, в частности, от угла наклона нити. В результате существенно усложняется кинематика механизма, а непостоянство передаточных отношений приводит к переменным приведенным моментам инерции, что в результате приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям движения и значительным трудностям при их аналитическом интегрировании.

В настоящей работе рассмотрены три возможные схемы подобных механизмов и предложены методы получения кинематических зависимостей между характеристиками отдельных элементов, составления динамических дифференциальных уравнений движения и их интегрирования. Показано, что в зависимости от конструктивных особенностей механизмов возможны качественные отличия в характере движения катящегося колеса, и при определенных условиях возможно возбуждение в системе автоколебаний при действии на свободный конец нити постоянной силы (или на блок постоянного момента сил).

Кинематика привода катящегося колеса. Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

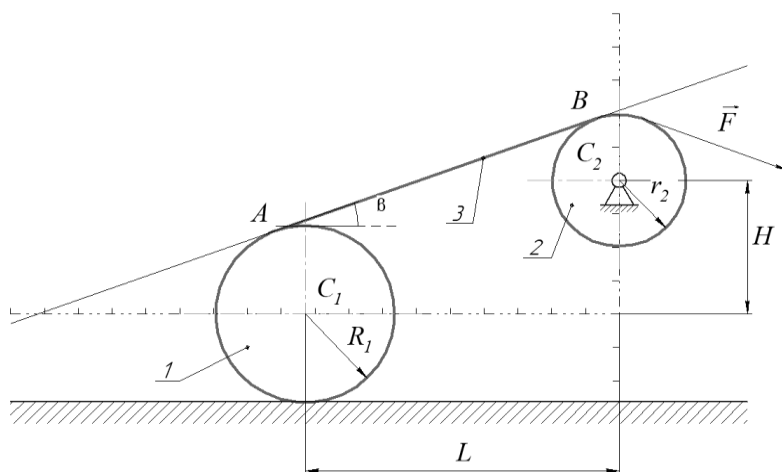


Рис. 1. Схема привода катящегося колеса

Геометрия системы определяется расстояниями L и H между проекциями центров колес на горизонтальную плоскость и вертикаль, соответственно. Введем также угол β как угол наклона нити к плоскости качения колеса. Пусть отрезок AB , отсекаемый точками касания нити с колесами, имеет длину l . Отметим, что система имеет одну степень свободы, и при заданных исходных параметрах H , r_2 , R_1 ее положение может быть задано либо расстояниями l или L , либо углом наклона нити β . Взаимосвязь между этими параметрами, определяется следующим уравнением

$$l^2 = L^2 + H^2 + (R_1 - r_2)^2. \quad (1)$$

Используем метод замкнутых контуров [1], и проецируя контур C_1OC_2AB на горизонтальную и вертикальную оси, получим систему уравнений

$$\begin{cases} L = l \cos \beta - (R_1 - r_2) \sin \beta, \\ H = l \sin \beta + (R_1 - r_2) \cos \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть за некоторое время Δt диски 1 и 2 совершат повороты на углы $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$, соответственно, по ходу часовой стрелки. При этом рейка повернется на угол $\Delta\beta$ против хода часовой стрелки, что вызовет смещение точек касания. Приращение длины отрезка на рейке, отсекаемого точками касания, составит

$$\Delta l = R_1(\Delta\varphi_1 + \Delta\beta) - r_2(\Delta\varphi_2 + \Delta\beta). \quad (3)$$

Соотношение (3) является справедливым при произвольном, а не только малом, перемещении системы. Дифференцируя данное соотношение по времени, получим

$$\dot{l} = R_1(\omega_1 + \omega_3) - r_2(\omega_2 + \omega_3), \quad (4)$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 – угловые скорости колес 1, 2 и рейки, соответственно.

Дифференцируя соотношение (2) по времени, найдем

$$\begin{cases} \dot{L} = \dot{l} \cos \beta - \dot{\beta} H, \\ 0 = \dot{l} \sin \beta + \dot{\beta} L. \end{cases} \quad (5)$$

Из этой системы уравнений следует соотношение

$$\dot{L} \cos \beta = \dot{l} - \dot{\beta}(R_1 - r_2), \quad (6)$$

С учетом соотношения (4) и того, что

$$\dot{L} = -R_1\omega_1, \quad (7)$$

получаем искомую связь между угловыми скоростями колес

$$\omega_1 = \frac{r_2}{R_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \omega_2. \quad (8)$$

Дифференцируя по времени последнее полученное соотношение, для углового ускорения первого колеса получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{r_2}{R_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \varepsilon_2 + \frac{r_2}{R_1} \frac{\sin \beta}{(1 + \cos \beta)^2} \omega_2 \omega_3. \quad (9)$$

Угловую скорость рейки найдем дифференцированием соотношения (1) по времени с учетом выражения (4)

$$\omega_3 = \frac{r_2}{l} \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \omega_2 = \frac{r_2}{l} \omega_2 \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{R_1}{l} \omega_1 \sin \beta. \quad (10)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда колесо 1 состоит из двух жестко связанных цилиндров радиусов r_1 и R_1 с совпадающими осями. Тогда, если нить намотана на малый цилиндр радиуса r_1 , а большой цилиндр радиуса R_1 катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соотношения (9) и (10) принимают следующий вид

$$\varepsilon_1 = \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \varepsilon_2 + \frac{r_2}{r_1} \frac{\sin \beta}{(1 + \cos \beta)^2} \omega_2 \omega_3. \quad (11)$$

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2 R_1}{(r_1 + R_1 \cos(\beta))(H - (r_1 - r_2) \cos(\beta))} \sin^2 \beta. \quad (12)$$

В случае, если нить намотана на большой цилиндр радиуса R_1 , а малый цилиндр радиуса r_1 катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соотношение (9) остается в силе, а соотношение (8) принимает вид:

$$\omega_1 = \frac{r_2}{R + r \sin \varphi} \omega_2 = \frac{r_2}{R + r \cos \beta} \omega_2. \quad (13)$$

Отметим, что записанные соотношения для угловых скоростей могут быть также получены на основе теории плоскопараллельного движения.

Динамика привода катящегося колеса. Для исследования динамики привода колеса воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода [2,3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad (14)$$

где T – кинетическая энергия системы, Q_φ – обобщенная сила, и в качестве обобщенной координаты выбран угол поворота φ первого колеса.

Будем полагать, что система приводится в движение силой F , приложенной к свободному концу нити. Тогда обобщенная сила определится выражением

$$Q_\varphi = F \omega_2 r_2 / \dot{\varphi} = F \begin{cases} R_1 (1 + \cos \beta) \\ (r_1 + R_1 \cos \beta) \\ (R_1 + r_1 \cos \beta) \end{cases}, \quad (15)$$

где строки в правой части соответствуют трем различным модификациям системы. Как вариант можно также рассмотреть систему, когда нить намотана на колесо 2, и к нему приложен крутящий момент $M = Fr_2$.

Кинетическая энергия системы состоит из суммы кинетических энергий двух колес и может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} I(\varphi) \dot{\varphi}^2, \quad (16)$$

где приведенные моменты инерции являются функциями обобщенной координаты, причем эта зависимость выражается через угол β , являющийся достаточно сложной функцией угла φ :

$$I(\varphi) = \begin{cases} (3/2)m_1 R_1^2 + m_2 r_2 R_1 (1 + \cos \beta) \\ m_1 (R_1^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (r_1 + R_1 \cos \beta), \\ m_1 (r_1^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (R_1 + r_1 \cos \beta). \end{cases} \quad (17)$$

В этих соотношениях ρ – центральный радиус инерции первого колеса, если оно составное (иначе колеса 1 и 2 рассматриваются как сплошные однородные диски); каждое из трех выражений для моментов инерции соответствует схемам механизмов, изображенных на рисунках 1, 2 и 3, соответственно.

Имея в виду выражение (16) для кинетической энергии, левую часть уравнения Лагранжа (14) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{d(I(\varphi)\dot{\varphi})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = I(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2. \quad (18)$$

Окончательно приходим к существенно нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему динамику рассматриваемых систем

$$I(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_\varphi. \quad (19)$$

Вычисляя производную приведенного момента инерции системы по обобщенной координате получаем

$$\frac{dI(\varphi)}{d\varphi} = -m_2 \frac{r_2 R}{l} \sin^2 \beta \begin{cases} R \\ R \\ r \end{cases}. \quad (20)$$

Прямое интегрирование полученного дифференциального уравнения сопряжено со значительными трудностями. Однако можно найти его первый интеграл, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме и учитывая, что работа силы F определяется интегралом от функции, зависящей от угла β , и при постоянной силе F ее работа определяется при изменении угла от исходного значения β_0 до текущего значения β . Для базового варианта (см. рис. 1)

$$A_1 = \int_{\beta_0}^{\beta} F \frac{ds}{d\beta} d\beta = \int_{\beta_0}^{\beta} F \frac{\omega_2 r_2}{\omega_3} d\beta = F \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{[H - (R_1 - r_2) \cos \beta](1 + \cos \beta)}{\sin^2 \beta} d\beta. \quad (21)$$

Выполняя интегрирование находим

$$A_1 = F \left\{ (\operatorname{ctg} \beta + \sin^{-1} \beta) [(R_1 - r_2) - H] + (R_1 - r_2) \beta \right\} \Big|_{\beta_0}^{\beta}. \quad (22)$$

Аналогичные вычисления для двух других случаев приводят к соотношениям

$$A_2 = (r_1 - r_2) \beta + ((r_1 - r_2) - H \frac{r_1}{R_1}) \operatorname{ctg} \beta - (H + \frac{r_1}{R_1} (r_1 - r_2)) \sin^{-1} \beta, \quad (23)$$

$$A_3 = (R_1 - r_2) \beta + ((R_1 - r_2) - H \frac{R_1}{r_1}) \operatorname{ctg} \beta - (H + \frac{R_1}{r_1} (R_1 - r_2)) \sin^{-1} \beta. \quad (24)$$

Заметим, что при одинаковых внешним и внутренним радиусах ($r_1 = R_1$) выражения для работы (23) и (24) сводятся к уравнению (22).

Таким образом, квадрат угловой скорости первого колеса определяется уравнением

$$\omega_1^2(\beta) = \frac{I(\beta_0)}{I(\beta)} \omega_1^2(\beta_0) + \frac{2A}{I(\beta)}. \quad (25)$$

Полученные соотношения позволяют решать широкий класс задач о движении системы. В частности, можно исследовать зависимость скорости движения тел системы в зависимости от расстояния, пройденного центром первого колеса. Также можно отметить, что для случая, когда нить навита на меньший радиус r_1 при $F > 0$ существует предельное расстояние, проходимое центром колеса 1, при котором его скорость обращается в нуль, и начинается движение в обратном направлении. При пренебрежении сопротивлением движению реализуется периодический процесс автоколебаний (колебаний, возбуждаемых действием постоянной силы) колеса между левой и правой точками возврата.

Примеры исследования движения колеса. При некоторых значениях параметров можно получить ряд аналитических результатов. Прежде всего, следует отметить, что в базовом варианте (рис. 1) при движении колеса 1 вправо с течением времени угол $\beta \rightarrow \pi$, нить сходит с колеса 1 вблизи его МЦС и, соответственно, скорость ее свободного конца, к которому приложена сила, стремится к нулю. Поэтому работа силы также стремится к нулю, и колесо уходит на бесконечность с практически постоянной предельной скоростью. Эту скорость можно легко вычислить при $r_2 = R_1$. Согласно уравнению (22) работа силы F

$$A_1(\beta) = FH[(\text{ctg}\beta_0 + \sin^{-1}\beta_0) - (\text{ctg}\beta + \sin^{-1}\beta)]. \quad (26)$$

Соответственно при $\beta \rightarrow \pi$ получим

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi} A_1(\beta) = FH(\text{ctg}\beta_0 + \sin^{-1}\beta_0). \quad (27)$$

Предельную угловую скорость при $\omega_0 = 0$ находим согласно уравнениям (25) и (17)

$$\omega_1(\beta) = \sqrt{\frac{4FH(1 + \cos\beta_0)}{3m_1R^2 \sin\beta_0}}. \quad (28)$$

При $R = r_2 = 0,5$ м, $H = 1,0$ м, $\beta_0 = \pi/6$, $F = 200$ Н, $m_1 = 50$ кг находим $\omega_{1\text{max}} = 8,92$ рад/с. На рис. 2 представлены результаты расчета угловой скорости первого колеса для базового варианта системы (см. рис. 1). На графике отчетливо видно, что угловая скорость колеса стремится к своему предельному значению, которое при выбранных параметрах равняется 8,92 рад/с.

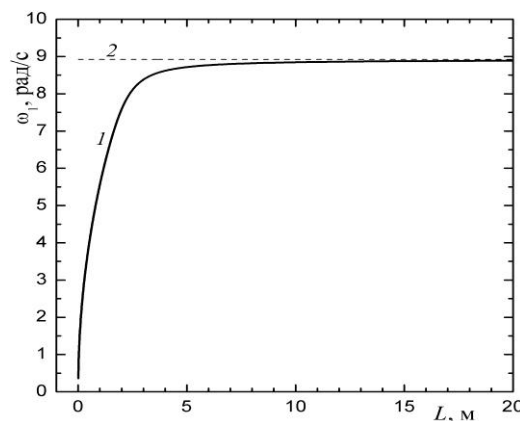


Рис. 2. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая рис. 1 (кривая 1). Линией 2 представлено предельное значение угловой скорости. Параметры системы: $R_1 = r_2 = 0,5$ м, $H = 1,0$ м, $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 10$ кг, $F = 200$ Н. Начальные условия: $\beta_0 = \pi/6$, $\omega_0 = 0$

В варианте 2 при приближении угла β к π свободный конец нити начинает двигаться влево, и сила F выполняет отрицательную работу, что приводит к остановке колеса и его последующему движению в противоположную сторону. Таким образом, возникает автоколебательное движение системы под действием постоянной силы. Если принять $r_2=r_1$, $R_1=2r_1$, выражение для работы принимает простой вид

$$A_2 = FH \{0,5 \operatorname{ctg} \beta_0 + \sin^{-1} \beta_0 - 0,5 \operatorname{ctg} \beta - \sin^{-1} \beta\}. \quad (29)$$

Приравнявая это выражение нулю и решая полученное уравнение при $\beta_0=\pi/3$ относительно предельного угла, находим $\beta=\pi-\arctg(3\sqrt{3}/13)=2,76 \text{ рад}=158^\circ 13'$.

На рис. 3 графически представлены результаты расчета движения системы для данного случая. Как было отмечено в начале раздела, в этом случае колесо совершает периодические колебания между правой и левой точками возврата. При заданных параметрах системы и начальных условиях максимальная угловая скорость колеса около 3,5 рад/с достигается при прохождении его центром расстояния примерно 1,2 м. Колесо останавливается, пройдя расстояние около 3,1 м.

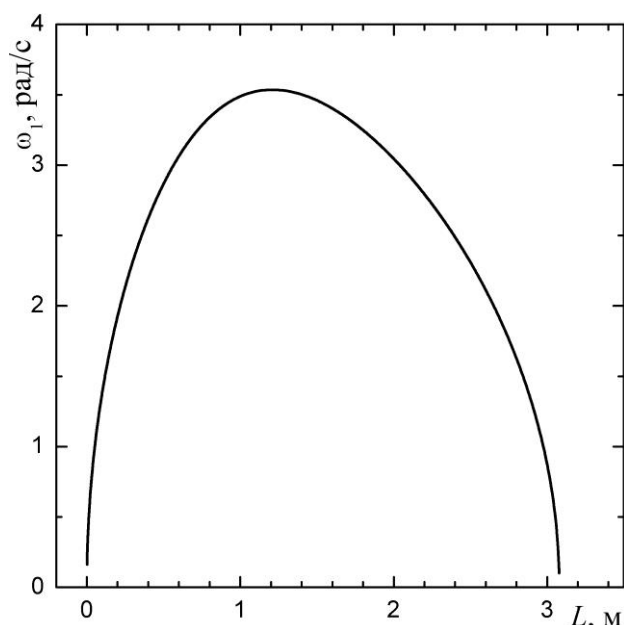


Рис. 3. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая 2. Параметры системы: $R_1=0,6 \text{ м}$, $r_1=0,3 \text{ м}$, $r_2=0,3 \text{ м}$, $H=1,0 \text{ м}$, $m_1=50 \text{ кг}$, $m_2=10 \text{ кг}$, $F=200 \text{ Н}$. Начальные условия: $\beta_0=\pi/3$, $\omega_0=0$.

В варианте 3 при $\beta \rightarrow \pi$ скорость движения нити, как это следует из кинематики системы, стремится к величине $\omega(R_1-r_1)$. В результате сила F продолжает выполнять работу, и колесо движется с угловым ускорением, стремящемся согласно уравнениям (15), (17), (19) и (20) к предельному значению

$$\ddot{\varphi} = \frac{Q_\varphi}{I(\varphi)} = \frac{F(R-r)}{m_1(r^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (R-r)}. \quad (30)$$

Рис. 4 демонстрирует, что в случае 3 скорость колеса монотонно возрастает, что соответствует выполненному выше анализу для этого случая.

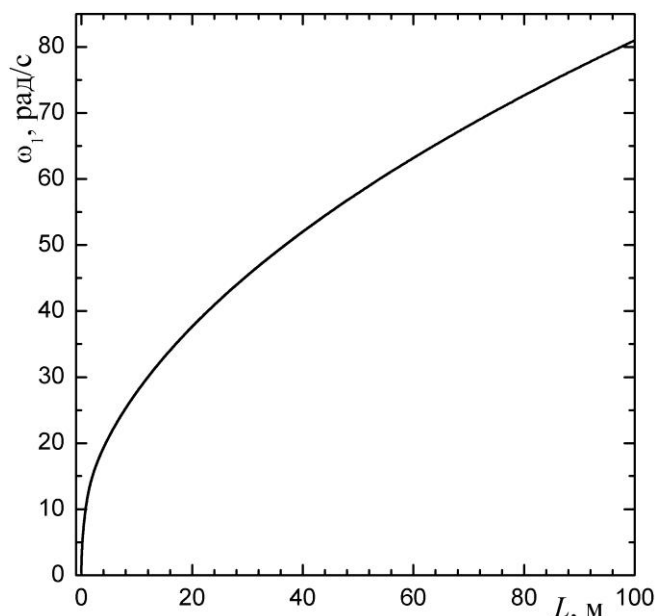


Рис. 4. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая 3. Параметры системы: $R_1 = 0,6$ м, $r_1 = 0,3$ м, $r_2 = 0,3$ м, $H = 1,0$ м, $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 10$ кг, $F = 200$ Н. Начальные условия: $\beta_0 = \pi/3$, $\omega_0 = 0$

Дальнейший анализ показал, что в базовом случае (см. рис. 1) при росте радиуса колеса 1 и постоянстве всех остальных параметров происходит уменьшение предельного значения его скорости и колесо медленнее набирает скорость, поскольку приведенный момент инерции системы при этом увеличивается. Другой характерной особенностью является резкое возрастание угловой скорости при прохождении нитью вертикального положения при больших радиусах колеса. Это обусловлено наличием в выражениях для работы и приведенного момента инерции быстро изменяющегося косинуса угла β при прохождении им значения $\pi/2$ и наличием при косинусе радиуса колеса в качестве сомножителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьев, В.А. Курс теории механизмов и машин / В.А. Зиновьев – М.: Наука, 1975. – 204 с.
2. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский – М.: Высшая школа, 1985. – 558 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН РАДИАЛЬНОГО И ОСЕВОГО НАТЯГОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ БЛОК-МАТРИЦЫ АППАРАТА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

¹ Дудяк А.И., ¹ Хвасько В.М.

¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Наиболее нагруженной частью аппарата высокого давления являются матрицы, которые находятся в условиях всестороннего неравномерного сжатия. Так как матрицы аппаратов высокого давления изготавливаются из твердого сплава марки ВК-6, то с целью получения в них условий всестороннего сжатия необходимо создать как можно большее контактное давление по их боковой поверхности. Этому можно добиться за счет запрессовки матриц в блок стальных колец, а также за счет деформации этих матриц в радиальном направлении в процессе их нагружения [1].

Рассмотрим толстостенный цилиндр, состоящий из двух колец, выполненных из одинакового материала. Такой цилиндр чаще всего изготавливают путем запрессовки внутреннего цилиндра в наружный по конусной поверхности. Осевой разрез такого цилиндра показан на рисунке 1. Обозначим величину радиального натяга – $\frac{\delta}{2}$, величину осевого натяга – h .

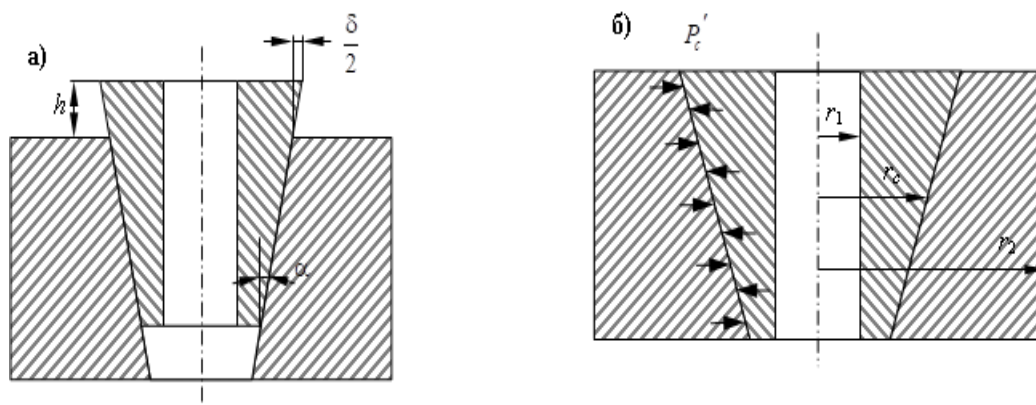


Рис. 1. Осевое сечение составного цилиндра: а) до сборки; б) после сборки

Угол конусности поверхностей контактов цилиндров находится в пределах $1^{\circ}30' \div 1^{\circ}50'$. Запрессовка внутреннего цилиндра в наружный производится с помощью прессов требуемого усилия.

Величина радиального натяга представляет собой разность до запрессовки между наружным радиусом внутреннего цилиндра и внутренним радиусом наружного цилиндра.

Так как величина $\frac{\delta}{2}$ весьма мала, то «подгонка» конусных поверхностей производится по величине осевого натяга, который определяется из выражения:

$$h = \frac{\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}. \quad (1)$$

После запрессовки цилиндров друг в друга наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного цилиндра становятся одинаковыми. В связи

с деформацией цилиндров в зоне их сопряжения возникают контактные давления, которые можно определить из соотношения [1]:

$$P_c' = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \right]}. \quad (2)$$

где E – модуль продольной упругости материала колец;

величины $k_1^2 = \frac{r_1^2}{r_c^2}$, $k_2^2 = \frac{r_c^2}{r_2^2}$.

Выражение для определения давления в зоне контакта цилиндров может быть представлено в следующем виде [2]:

$$P_c'' = \sigma_{\text{шц}} \cdot \frac{r_2^2 - r_c^2}{2r_2^2}. \quad (3)$$

Тогда полное контактное давление P_c можно определить как сумму контактного давления P_c' от запрессовки цилиндров друг в друга и контактного давления P_c'' , возникающего в результате деформации зоны контакта от создания давления P_1 внутри собранного блока цилиндров:

$$P_c = P_c' + P_c''. \quad (4)$$

Очень важно определить величину контактного давления от запрессовки цилиндров друг в друга. Вычислив значение данного контактного давления, находят величину осевого натяга, а затем осуществляют «подгонку» цилиндров друг к другу.

Контактное давление P_c'' равно радиальному напряжению в зоне контакта, величину которого можно определить из выражения вида [1]:

$$\sigma_r = \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{P_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_c^2} = P_c'',$$

или

$$\sigma_r = \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_c^2} \right) = P_c''. \quad (5)$$

Используя выражения (3) и (5), согласно формуле (4) получим значение величины P_c' :

$$P_c' = P_c - P_c'' = \sigma_{\text{шц}} \frac{r_2^2 - r_c^2}{2r_2^2} - \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_c^2} \right). \quad (6)$$

Рассматривая совместно соотношения (2) и (6), определим величину радиального натяга, которую нужно создать предварительной запрессовкой колец друг в друга:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{r_c}{E} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \right] \cdot \left[\sigma_{\text{шц}} \frac{r_2^2 - r_c^2}{2r_2^2} - \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_c^2} \right) \right]. \quad (7)$$

Вычислив значение радиального натяга согласно формуле (7), можно найти глубину запрессовки h внутреннего кольца в наружное из выражения (1).

Для прессов усилием 5000 кН используют блок-матрицы, состоящие из трех колец, изготовленных из стали 35ХГСА, и центральной матрицы, выполненной из твердого сплава марки ВК-6. Схема такой блок-матрицы показана на рисунке 2.

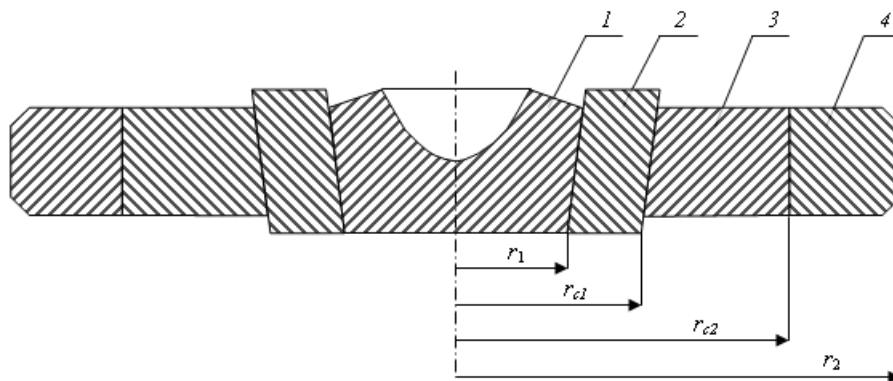


Рис. 2. Осевое сечение блок-матрицы аппарата высокого давления

Изготовление блок-матрицы (рис. 2) осуществляется следующим образом. В наружное кольцо 4 запрессовывается кольцо 3. Затем в блок колец запрессовывается внутреннее кольцо 2. В полностью собранный блок из трех колец запрессовывается твердосплавная матрица 1.

В практике конструктивно задаются размеры матрицы и диаметр наружного кольца, который определяется размером гнезда пресса. Для прессов марки ДО137 усилием 5000 кН диаметр матрицы колеблется в пределах 38÷42 мм, диаметр наружного кольца составляет 150 мм. Для материала колец – стали 35ХГСА: предел пропорциональности $\sigma_{\text{мц}}=1100$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu=0,22$; модуль продольной упругости $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа. Для твердого сплава ВК-6: предел прочности на сжатие $[\sigma]_{\text{с}}=4500$ МПа; предел прочности на растяжение $[\sigma]_{\text{р}}=1150$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu=0,18$; модуль продольной упругости $E=6,8 \cdot 10^5$ МПа.

Рассмотрим случай, когда диаметр матрицы равен 40 мм и диаметр наружного кольца – 150 мм, а соответствующие радиусы колец равны 20 и 75 мм.

Ранее аналитическим путем были получены формулы для определения радиусов контактов поверхностей для составного цилиндра [3], согласно которым получим:

$$r_{c2} = \sqrt[3]{r_1 \cdot r_2^2} = \sqrt[3]{20 \cdot 75^2} = 48,27 \text{ мм};$$

$$r_{c1} = \sqrt{r_1 \cdot r_{c2}} = \sqrt{20 \cdot 48,27} = 31,07 \text{ мм}.$$

Из выражений для определения эквивалентных напряжений в характерных зонах отдельных цилиндров составной конструкции найдем величины контактных давлений в зоне радиусами r_{c2} и r_{c1} [3]:

$$P_{c2} = \sigma_{\text{мц}} \frac{r_2^2 - r_{c2}^2}{2r_2^2} = 1100 \cdot \frac{75^2 - 48,27^2}{2 \cdot 75^2} = 322,2 \text{ МПа};$$

$$P_{c1} = P_{c2} + \sigma_{\text{мц}} \frac{r_{c2}^2 - r_{c1}^2}{2r_{c2}^2} = 322,2 + 1100 \cdot \frac{48,27^2 - 31,07^2}{2 \cdot 48,27^2} = 644,3 \text{ МПа}.$$

В этом случае максимальное значение контактного давления на боковую поверхность матрицы согласно [3]:

$$P_1 = P_{c1} + \sigma_{\text{мц}} \frac{r_{c1}^2 - r_1^2}{2r_{c1}^2} = 644,3 + 1100 \cdot \frac{31,07^2 - 20^2}{2 \cdot 31,07^2} = 966,4 \text{ МПа}.$$

Очевидно, что при запрессовке внутреннего кольца в блок из наружного и среднего стальных колец, в зоне их контакта происходит радиальная деформация. При этом радиальное напряжение в зоне контакта можно представить в следующем виде [4]:

$$\sigma_{rc2}' = \frac{P_{c1}r_{c1}^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} - \frac{P_{c1}r_{c1}^2r_2^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{1}{r_{c2}^2} = \frac{P_{c1}r_{c1}^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_{c2}^2} \right).$$

Подставив в последнее равенство все найденные ранее величины, получим:

$$\sigma_{rc2}' = \frac{644,31 \cdot 31,07^2}{75^2 - 31,07^2} \left(1 - \frac{75^2}{48,27^2} \right) = -188,8 \text{ МПа.}$$

Аналогично получим выражение для радиального напряжения σ_{rc2}'' , возникающего от запрессовки твердосплавной матрицы в блок стальных колец, состоящий из трех запрессованных друг в друга отдельных колец [4]:

$$\sigma_{rc2}'' = \frac{P_1r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{P_1r_1^2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_{c2}^2} = \frac{P_1r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_{c2}^2} \right).$$

Подставив в полученное выражение все вычисленные значения величин, получим:

$$\sigma_{rc2}'' = \frac{966,41 \cdot 20^2}{75^2 - 20^2} \left(1 - \frac{75^2}{48,27^2} \right) = -104,6 \text{ МПа.}$$

Аналогично формуле (4) полное контактное давление в зоне сопряжения наружного и среднего колец можно представить в виде следующей суммы:

$$P_{c2} = P_{c2}' + \sigma_{rc2}' + \sigma_{rc2}'',$$

где P_{c2}' - контактное давление, возникающее от запрессовки среднего кольца в наружное.

Из последнего равенства очевидно, что величина этого давления равна:

$$P_{c2}' = P_{c2} - \sigma_{rc2}' - \sigma_{rc2}'' = 322,18 - |-188,8| - |-104,6| = 28,8 \text{ МПа.}$$

Используя выражение (2), определим значение радиального натяга при запрессовке среднего кольца в наружное:

$$\frac{\delta_2}{2} = P_{c2}' \cdot \frac{r_{c2}}{E} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \right],$$

где $k_1^2 = \frac{r_{c1}^2}{r_{c2}^2} = \frac{31,07^2}{48,27^2} = 0,414$; $k_2^2 = \frac{r_{c2}^2}{r_2^2} = \frac{48,27^2}{75^2} = 0,414$.

Тогда $\frac{\delta_2}{2} = 28,78 \cdot \frac{48,27}{2,1 \cdot 10^5} \left[\frac{1+0,414}{1-0,414} + \frac{1+0,414}{1-0,414} \right] = 0,032 \text{ мм.}$

Обычно при запрессовке колец друг в друга и матрицы в блок стальных колец, угол конусности α составляет $1^\circ 30'$. В этом случае $\text{tg}1^\circ 30' = 0,0262$. Используя выражение (1), определим осевой натяг h_2 :

$$h_2 = \frac{0,032}{0,0262} = 1,22 \text{ мм.}$$

При запрессовке твердосплавной матрицы в блок стальных колец, происходит деформация в радиальном направлении слоев контакта внутреннего и среднего колец. Радиальное напряжение в зоне контакта можно представить в виде [4]:

$$\sigma_{rc1} = \frac{P_1r_1^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} - \frac{P_1r_1^2r_2^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} \cdot \frac{1}{r_{c1}^2} = \frac{P_1r_1^2}{r_2^2 - r_{c1}^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_{c1}^2} \right).$$

Подставив все известные величины в последнее выражение, получим:

$$\sigma_{rc1} = \frac{966,41 \cdot 20^2}{75^2 - 20^2} \left(1 - \frac{75^2}{31,07^2} \right) = -357,1 \text{ МПа.}$$

Полное контактное давление в зоне контакта внутреннего кольца и блока двух стальных колец от запрессовки матрицы и ее полного нагружения осевым усилием получим в виде:

$$P_{c1} = P_{c1}' + \sigma_{r_{c1}}.$$

Откуда контактное давление P_{c1}' от запрессовки матрицы в блок стальных колец и нагружения ее осевым усилием равно:

$$P_{c1}' = P_{c1} - \sigma_{r_{c1}} = 644,3 - |-357,1| = 287,2 \text{ МПа.}$$

Используя выражение (2), получим величину радиального натяга $\frac{\delta_1}{2}$ при запрессовке внутреннего кольца:

$$\frac{\delta_1}{2} = P_{c1}' \cdot \frac{r_{c1}}{E} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \right],$$

где $k_1^2 = \frac{r_1^2}{r_{c1}^2} = \frac{20^2}{31,07^2} = 0,414$; $k_2^2 = \frac{r_{c1}^2}{r_{c2}^2} = \frac{31,07^2}{48,27^2} = 0,414$.

Тогда $\frac{\delta_1}{2} = 287,2 \cdot \frac{31,07}{2,1 \cdot 10^5} \left[\frac{1+0,414}{1-0,414} + \frac{1+0,414}{1-0,414} \right] = 0,21 \text{ мм.}$

Осевой натяг внутреннего кольца в блок стальных колец составит:

$$h_1 = \frac{\delta_1}{2} = \frac{0,21}{\text{tg} \alpha} = \frac{0,21}{0,0262} = 8,02 \text{ мм.}$$

При синтезе порошков алмазов или кубического нитрида бора усилие прессы в среднем составляет 4500 кН и действует в направлении оси матрицы. Это усилие полностью направлено ко всей поверхности матрицы, поэтому осевое напряжение σ_z после нагружения будет равно [3]:

$$\sigma_z = \frac{P_z}{\pi r_1^2} = -\frac{4500 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 20^2} = -3582,8 \text{ МПа.}$$

После запрессовки матрицы в блок стальных колец и ее полного нагружения, контактное давление на ее боковую поверхность должно составлять значение $P_1 = 966,4$ МПа. Очевидно, что после осевого нагружения матрицы, она будет уменьшать свою высоту и увеличиваться в диаметре. Так как матрица не имеет осевого отверстия, то радиальные напряжения будут равны окружным ($\sigma_r = \sigma_t$) и должны быть равны величине P_1 .

Используя закон Гука, для объемного напряженного состояния можно записать равенство [2]:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)].$$

Рассматривая совместно последнее выражение для ε_t и уравнение (3.2), получим значение перемещения внутренних слоев внутреннего кольца за счет осевого нагружения матрицы. Данное перемещение будет соответствовать радиальному натягу $\frac{\delta}{2}$ от нагружения матрицы осевым усилием:

$$u = \frac{\delta}{2} = \frac{r_1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_t + \sigma_z)] = \frac{20}{2,1 \cdot 10^5} [-966,41 - 0,22(-966,41 - 3582,8)] = 0,00328 \text{ мм.}$$

Определим контактное давление на внутреннюю поверхность внутреннего кольца от деформации матрицы в радиальном направлении, используя соотношение вида:

$$P_c'' = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_1}{E_1} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right] + \frac{r_1}{E_2} \left[\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right]},$$

где E_1 – модуль продольной упругости твердого сплава ВК-6;

E_2 – модуль продольной упругости стали 35ХГСА;

μ_1 и μ_2 – коэффициенты Пуассона твердого сплава и стали, соответственно.

Так как матрица не имеет осевого отверстия, то величина $k_1^2 = 0$, при этом

$$k_2^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{20^2}{75^2} = 0,071.$$

$$\text{Тогда } P_c'' = \frac{0,00328}{\frac{20}{6,8 \cdot 10^5} [1 - 0,18] + \frac{20}{2,1 \cdot 10^5} \left[\frac{1+0,071}{1-0,071} + 0,22 \right]} = 21,2 \text{ МПа.}$$

Полное контактное давление будет состоять из контактного давления боковой поверхности матрицы при ее осевом напряжении P_c'' и контактного давления от ее запрессовки в блок колец P_c' :

$$P_c = P_c' + P_c''.$$

Вычислим величину контактного давления от запрессовки матрицы в блок стальных колец:

$$P_c' = P_c - P_c'' = 966,4 - 21,2 = 945,2 \text{ МПа.}$$

В этом случае радиальный натяг от запрессовки матрицы в блок стальных колец будет равен:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{2} \right)' &= P_c' \cdot \left[\frac{r_1}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_1}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) \right] = \\ &= 945,2 \cdot \left[\frac{20}{6,8 \cdot 10^5} (1 - 0,18) + \frac{20}{2,1 \cdot 10^5} \left(\frac{1+0,071}{1-0,071} + 0,22 \right) \right] = 0,146 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Тогда осевой натяг матрицы в блок стальных колец составляет:

$$h' = \frac{\left(\frac{\delta}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,146}{0,0262} = 5,59 \text{ мм.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С. *Сопротивление материалов: учеб. для вузов* / Г.С. Писаренко [и др.]; под общ. ред. Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб и доп. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – С. 443-460.
2. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов: учеб. для вузов* / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 389-393.
3. Дудяк, А.И. *Оптимизация радиусов контактов составных толстостенных цилиндров в блок-матрицах аппаратов высокого давления* / А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник* / пред. редкол. А.В. Чигарев. - Вып. 33. – 2018. – С. 81-85.
4. Подскребко, М.Д. *Сопротивление материалов: учеб.* / М.Д. Подскребко. – Минск: Высшая школа, 2007. – С. 653-670.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ЗАКОН ТРЕНИЯ И ИЗНАШИВАНИЯ В ТРИБОФАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

¹Сосновский Л.А.

¹ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», Гомель

Закон сухого трения [1, 2], впервые сформулированный Leonardo da Vinci 500 лет назад, вошел в историю техники как один из наиболее применяемых законов в инженерных расчетах [3]. Двести лет спустя (после da Vinci) Amontон M., Coulomb С. А. и Euler L. [4-7] внесли решающий вклад в обоснование и понимание этого закона, и он стал *классическим*: сила трения F_S при скольжении пропорциональна контактной нагрузке F_N . Исследования показали, что для *трибофатической системы* (ТФС) классический закон трения оказывается неточным и, следовательно, неприменимым. Экспериментально установлено, что *ошибка* оценки коэффициента трения в ТФС (например, типа колесо / рельс и др.) достигает 60...70 % и более [8], если использовать для ее анализа классический закон трения. Поэтому возникает задача о корректировке классического закона трения.

Закон да Винчи–Амонтона–Кулона–Эйлера является чисто *эмпирическим*. И на протяжении полутысячелетней истории успешных попыток получить его теоретически, по имеющимся сведениям [2], *не* оказалось. Впервые это сделано в наше время в рамках *трибофатики* [9]. В первом десятилетии XXI века разработаны *два* разных подхода к теоретическому построению закона трения для ТФС [8]. Ниже кратко изложены и кратко анализируются эти подходы.

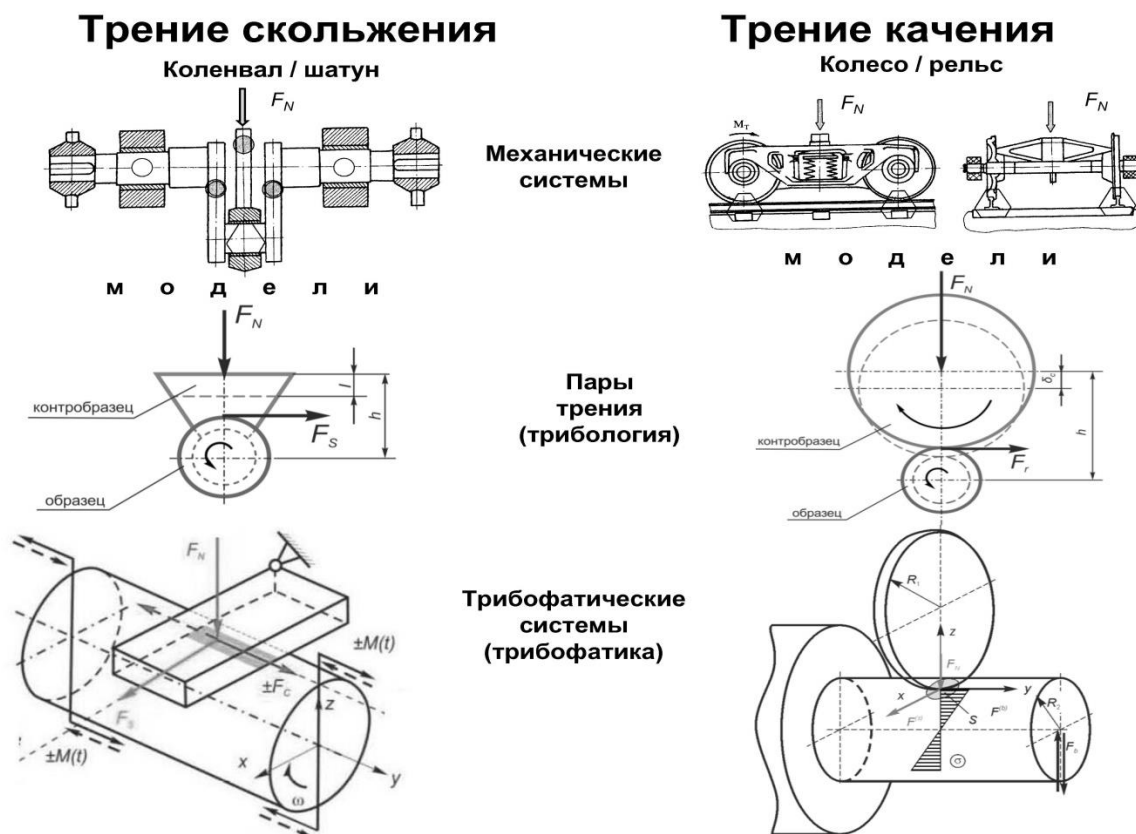


Рис.1. Основные виды трения и их реализация в технических системах

На рисунке 1 показано, что типичные узлы трения механических систем моделируют различным образом в трибологии и в трибофатике. Принципиальное различие состоит в том, что в трибологии принимается: на пару трения (ПТ) действует только одна – контактная нагрузка F_N . А в трибофатике те же узлы рассматриваются как ПТ, которые *дополнительно* нагружены внеконтактными (объемными) силами, которые существенно изменяют напряженно-деформированное состояние в области контакта.

Согласно рисунку 1, в ПТ *ролик / вкладыш*, которая моделирует систему коленвал / шатун, возникает *однонаправленная* (статическая) сила трения F_s . Такова трибологическая концепция. Однако, согласно трибофатической концепции, на площадке контакта этой же системы возникает *дополнительная* (циклическая) сила трения $\pm F_c$, которая возбуждается внеконтактным изгибающим моментом $\pm M(t)$ (см. рисунок 1). Сила F_c инициирует в области контакта либо растяжение ($+F_c$), либо сжатие ($-F_c$), при этом $F_s \perp F_c$. Естественно, что *обобщенная* сила трения в такой системе должна быть функцией $F_{s/\sigma}(F_s, F_c) \neq F_N$, так как $F_c > 0$.

Классический закон сухого трения гласит: *сила трения* (F_s) *при скольжении* (индекс s) *пропорциональна контактной нагрузке* (F_N), т.е.

$$F_s = f_s F_N. \quad (1)$$

Для анализа трения в ТФС разработан *феноменологический подход*, согласно которому

$$F_{s/\sigma} = F_s \pm \mu_\tau F_c(t) = f_s F_N \pm \mu_\sigma M(t), \quad (2)$$

где $\pm M(t)$ – изгибающий момент (см. рисунок 1), μ – коэффициент такого преобразования компоненты F_c к ортогональной ей компоненте F_s , чтобы их сумма была эквивалентной (равной) обобщенной силе $F_{s/\sigma}$ согласно (2).

Формула (2) и представляет *обобщенный закон трения* для ТФС типа коленвал / шатун, аналогичный классическому закону (1). Он гласит: *в общем случае сила трения пропорциональна как контактной, так и внеконтактной (объемной) нагрузке, если последняя возбуждает в зоне трения циклические напряжения* (в данном случае $\pm \sigma(M(t))$). Если $F_c(t) = 0$ (или, что то же, $M(t) = 0$), то (2) переходит в (1). Таким образом, классический закон трения (1) является частным случаем закона (2), что и дает основание называть его обобщенным.

Согласно феноменологическому подходу, *обобщенный коэффициент трения* в ТФС можно определить по формуле [10, 11]

$$f_{s/\sigma} = f_s \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{p_a} \right) = f_s (1 \pm \mu_p f_F). \quad (3)$$

где p_a – контактное давление, $f_F = \pm \sigma_a / p_a$ – индекс трения в ТФС.

Феноменологический подход для оценки силы и коэффициента трения в ТФС разработал Л. А. Сосновский [10, 11].

Рассмотрим далее систему *колесо / рельс* (см. рисунок 1). Ее *трибологическая модель ролик / ролик* нагружена одной контактной нагрузкой F_N . А *трибофатическая модель ролик / вал* принимает во внимание тот факт, что внеконтактная (объемная) изгибающая вал сила F_b вызывает *дополнительную* контактную нагрузку P_b , при этом F_N и P_b сонаправлены и приложены в одной точке. Таким образом, в ТФС в действительности реализуется суммарная контактная нагрузка $(F_N + P_b) \neq F_N$, так как

$P_b > 0$. Поскольку в такой системе изменяется величина контактной нагрузки, то, согласно закону трения, соответственно изменяются и численные значения силы и коэффициента трения. В этой связи разработан *деформационный подход* [9, 12] решения задачи определения силы и коэффициента трения в ТФС. Оно реализуется с использованием методов механики деформируемого твердого тела, механики контактного взаимодействия и теории упругости. В конечном счете получено единое соотношение

$$\begin{aligned} F_{\sigma/p} &= F^{(s)} + F^{(b)} = \int_S f^{(s)} p(x, y) ds = \\ &= \int_S f^{(s)} [p_c(x, y) + p_b(x, y)] ds = f^{(s)} (F_N + P_b), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p(x, y)$ – распределенные по площадке контактные усилия, обусловленные как контактной (индекс c), таки изгибающей (индекс b) нагрузками.

Это и есть *обобщенный закон трения* в ТФС, который формулируется так: обобщенная сила трения $F_{\sigma/p}$ в ТФС пропорциональна как контактной нагрузке (F_N), так и сонаправленной с ней силе (P_b), обусловленной неконтактной (объемной) нагрузкой. Сравнение (2) и (4) показывает, что эти формулы практически одинаковы. Естественно, что и формулировки обобщенного закона трения, полученные при феноменологическом и деформационном подходах, совпадают.

Если разделить (4) на F_N и провести несложные преобразования, то коэффициент трения в ТФС можно записать в следующем виде:

$$f_{\sigma/p} = f^{(s)} \left[1 + k_{\sigma/p} \left(\frac{\sigma_{yy}^{(b)}}{p_0} \right) \right], \quad (5)$$

где p_0 – максимум распределения p ; $k_{\sigma/p}$ – функция трения, обусловленная взаимодействием напряжений от внеконтактной и контактной нагрузок. Сравнение (3) и (5) показывает, что они формально одинаковы. Естественно, что они прогнозируют идентичные зависимости коэффициента сопротивления качению в ТФС от индекса трения.

Согласно (3) и (5), обобщенный коэффициент трения в ТФС определяется таковым в соответствующей ей ПТ и линейно зависит от индекса трения в ТФС. Это значит, что численное значение $f_{s/\sigma}$ линейно же зависит от величины, а также знака циклических напряжений. В этой связи коэффициент (как и сила) трения в ТФС может быть больше, меньше или равным таковому (f_s) в соответствующей ей ПТ.

Из (3) и (5) следует, что в данной ТФС – при одновременном действии контактной и внеконтактной нагрузок – коэффициент сопротивления качению в зоне растяжения уменьшается по сравнению с коэффициентом трения при чистом качении, а в зоне сжатия, напротив, увеличивается. Деформационный подход разработан С.С. Щербаковым [9, 12].

Таким образом, формулы (3) и (5) нетрудно использовать для прогнозирования коэффициента трения в ТФС, если известен коэффициент трения для соответствующей ей ПТ. Величины f_s для типичных ПТ известны и приведены в таблицах (см., например, [13]).

Экспериментальную проверку полученных решений выполнили по результатам испытаний двух марок сталей, предел прочности которых различался в ~2,5 раза: углеродистая сталь 45 ($\sigma_u=610$ МПа) и легированная сталь 18ХГТ ($\sigma_u=1700$ МПа). Геометрические размеры элементов (вал, ролик) ТФС и схемы ее нагружения показаны на рисунке 2. Испытания проводили с организацией трения качения либо в зоне

растяжения ($\sigma > 0$), либо в зоне сжатия ($\sigma < 0$) изгибаемого вала (изгибающая нагрузка Q направлена соответственно вверх либо вниз) (см. рисунок 2). Образец (вал) и контрообразец (ролик) испытываемой ПТ имели те же размеры, что и элементы ТФС. Чтобы обеспечить устойчивость контакта и деформирования в процессе испытаний, вал имеет выточку радиусом $R=10$ мм, а профильный радиус ролика $R=5$ мм вдвое меньше. А чтобы не допустить концентраций напряжений в области контакта, радиус выточки на образце равен его диаметру в рабочем сечении ($R_{10}=\varnothing 10$) (см. рисунок 2). Для испытаний принимали три сочетания материалов трущихся элементов (образцов и контрообразцов): сталь 45/сталь 45; сталь 18ХГТ/сталь 18ХГТ; сталь 45 (вал)/сталь 18ХГТ (ролик). Величины циклических напряжений при испытаниях, как правило, не превышали предел выносливости при изгибе с вращением ($\sigma_a \leq \sigma_{-1}$). Наибольшее контактное давление ($p_0 = \max p_a$) определяли по Герцу. Его величины принимали такими, чтобы реализовать при трении качения упругий либо упругопластический контакт. Характер контакта устанавливали по диаграмме $p_0 - \delta$ (δ – сближение осей элементов ТФС или ПТ) (см. рисунок 2). При испытаниях варьировали: циклические напряжения от 160 до 640 МПа (в 4 раза); контактное давление от 1200 до 3200 МПа (более чем в 2,5 раза); индекс трения в ТФС ($f_F = \sigma_a / p_0$) от 0,1 до 0,3 (в 3 раза). Все испытания проводили на одной машине СИ-03М методом ступенчатого повышения циклических напряжений при заданном контактном давлении $p_0 = const$ (см. рисунок 2). Всего проведено около 100 опытов (испытания выполнили к.т.н. В. В. Комиссаров и к.т.н. С. А. Тюрин под руководством автора статьи).

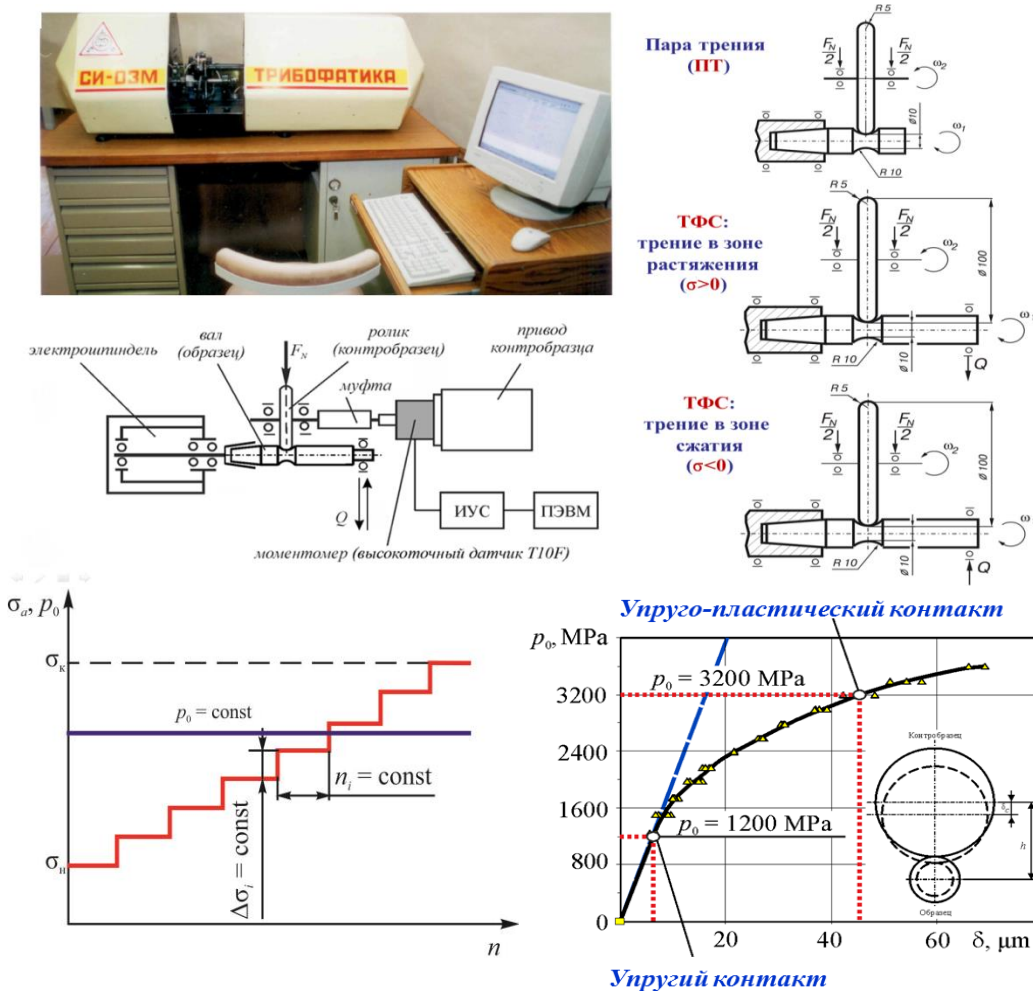


Рис.2. Фото универсальной испытательной машины СИ-03М и схемы испытаний

Результаты испытаний обрабатывали в соответствии с обобщенным законом трения для ТФС по формуле (3), т.е. строили зависимости коэффициентов сопротивления качению $f_{\sigma/p}$ от величины индекса трения σ_a/p_0 . Результаты обработки данных представлены на рисунке 3, а, б, в. Изучение этих опытных данных позволяет сделать следующие основные заключения.

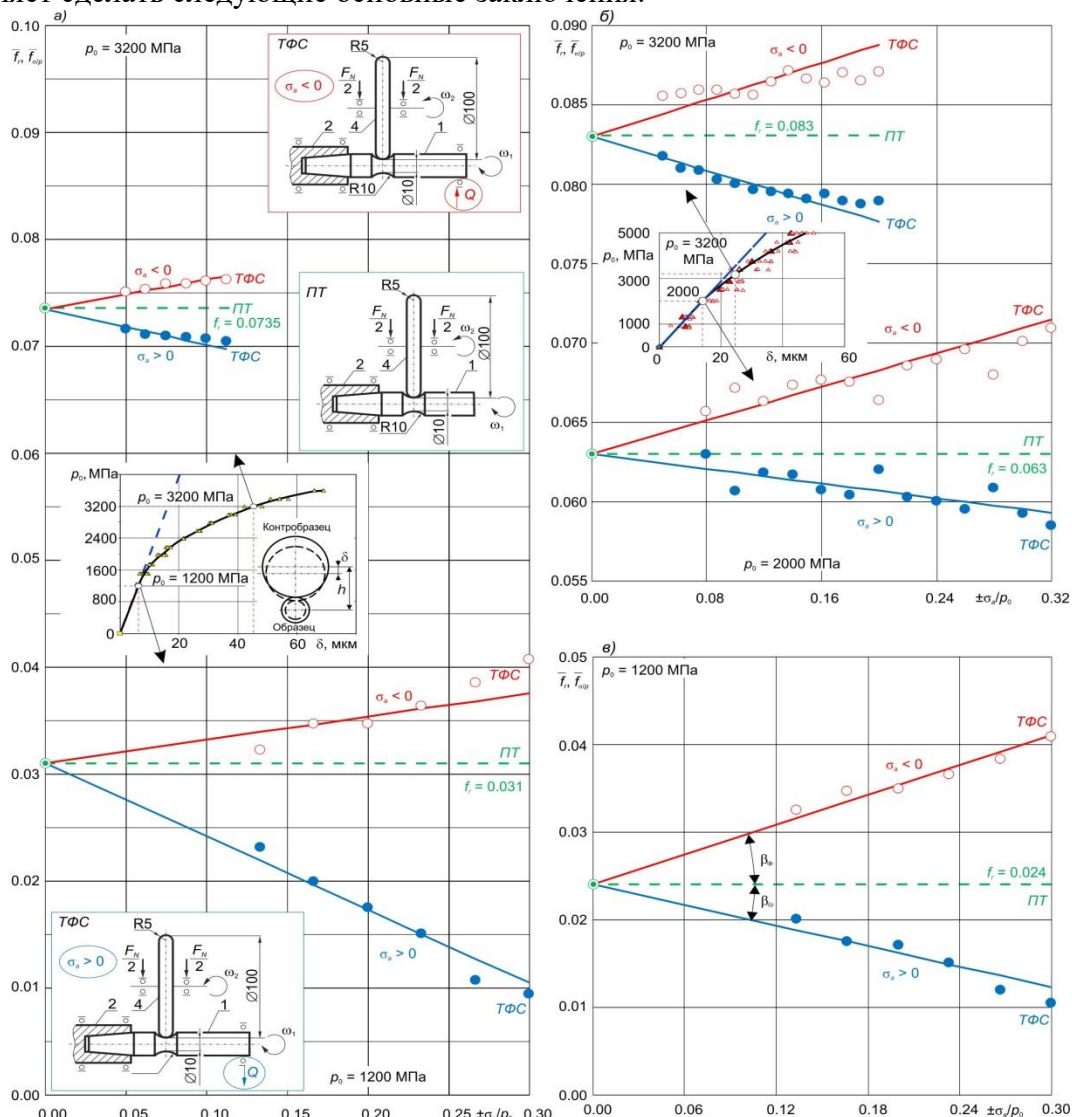


Рис.3. Анализ результатов испытаний ТФС сталь 45 / сталь 45 (а), сталь 18ХГТ / сталь 18ХГТ (б) и сталь 45 / сталь 18ХГТ (в)

Влияние индекса трения в ТФС на изменение коэффициента сопротивления качению графически представляется двумя линейными ветвями [$f_{\sigma/p} (\pm\sigma_a/p_0) = f_{\sigma/p} (\pm f_F)$], которые сходятся в единой точке $f_r (\sigma_a=0)$ для ПТ.

Рост уровня циклических напряжений растяжения ($\sigma_a > 0$) инициирует снижение коэффициента сопротивления качению, тогда как циклические напряжения сжатия ($\sigma_a < 0$), наоборот, его увеличивают. Эти закономерности вполне соответствуют теоретическому прогнозу.

Экспериментально установлено, что коэффициент сопротивления качению в ТФС ($f_{\sigma/p}$), как правило, значительно больше или меньше такового (f_r) в аналогичной ей ПТ. Относительная разность (Δ_{\max}) между ними в условиях опыта достигает $\Delta_{\max} = 60 \dots 70 \%$ и более (таблица 1). Следовательно, практическое использование классического закона для анализа трения в ТФС неправомерно, поскольку ведет к существенной ошибке при расчетах. Применение обобщенного закона трения снимает эту проблему.

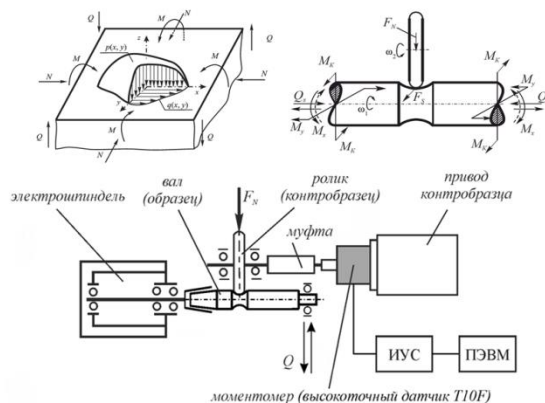
Таблица 1 - Анализ наибольшей относительной Δ_{\max} разности (в опытах) коэффициентов сопротивления качению в ТФС и ПТ

ПТ, ТФС	p_0 , МПа	ПТ, f_r	σ_a , МПа	σ_a / p_0	Трение в зоне растяжения ($\sigma_a > 0$)			Трение в зоне сжатия ($\sigma_a < 0$)		
					$\bar{f}_{\sigma/p}$	$\bar{\mu}_p$	$\Delta_{\max}, \%$	$\bar{f}_{\sigma/p}$	$\bar{\mu}_p$	$\Delta_{\max}, \%$
сталь 45/ сталь 45	1200	0,031	360	0,300	0,0105	2,207	66,2	0,0376	0,708	21,2
	3200	0,074		0,113	0,0697	0,456	5,1	0,0766	0,373	4,2
сталь 18ХГТ/ сталь 18ХГТ/ сталь 18ХГТ/	2000	0,063	640	0,320	0,0593	0,184	5,9	0,0715	0,421	13,5
	3200	0,083		0,200	0,0777	0,322	6,4	0,0888	0,350	7,0
сталь 45/ сталь 18ХГТ/	1200	0,024	360	0,300	0,0123	1,622	48,7	0,0412	2,383	71,5
$\Delta = \left[(\bar{f}_r - \bar{f}_{\sigma/p}) / \bar{f}_r \right] \cdot 100\%$										

Обобщенный закон трения аппроксимирует результаты всех экспериментов (около 100 значений коэффициентов сопротивления качению) с погрешностью, которая укладывается в интервал $\Delta_f = \pm 6\%$ (см. рисунок 3 и таблицу 1); в 90 % случаев он составляет $\pm 3\%$. Заметим, что погрешность обобщенного закона оказывается примерно одинаковой при реализации трения как в зоне сжатия, так и в зоне растяжения изгибаемого вала. Это позволяет рекомендовать его для практических расчетов.

Обобщенный закон трения одинаково эффективен для описания трения при упругом и упругопластическом контактах (см. рисунок 3 и таблицу 1), при этом повышение контактного давления ведет к соответствующему росту коэффициента сопротивления качению. Установлено, что наибольшая разность между величинами коэффициента сопротивления качению в ПТ и ТФС при повышении контактного давления означает, что погрешность классического закона трения особенно велика при упругом контакте (более 20 %), тогда как в условиях упругопластического контакта она существенно меньше (менее 10 %).

$$F_{s/\sigma} = \begin{cases} (f_s F_N \pm \mu_\sigma M_{ijk}) \frac{v_s}{|v_s|} & \text{при } v_s \neq 0, \\ -F_{s/\sigma}^{(0)}, +F_{s/\sigma}^{(0)} & \text{при } v_s = 0, F_{s/\sigma}^{(0)} \geq F_s \end{cases}$$



Л.А. Сосновский



С.С. Шербаков



В.В. Комиссаров



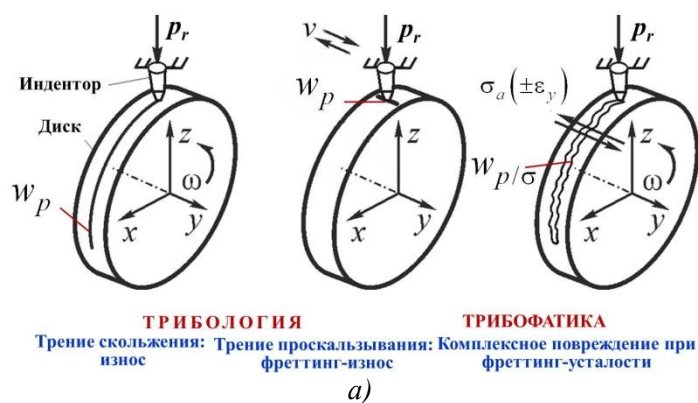
С.А. Тюрин

В общем случае сила трения пропорциональна как контактной, так и внеконтактной (объемной) нагрузке

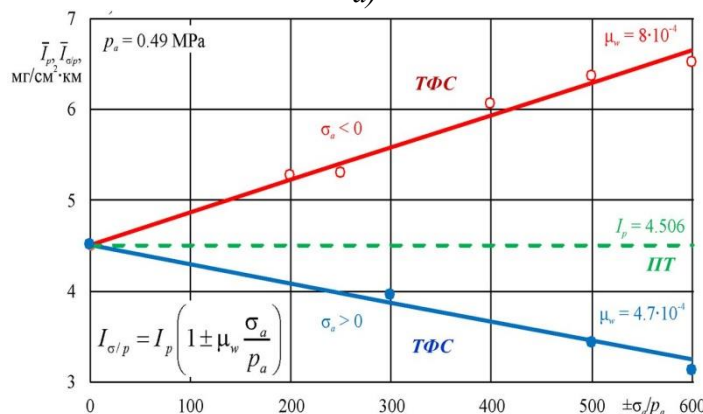
Рис.4. Обобщенный закон трения: 2000-2015

Таким образом, результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют сформулировать и представить здесь обобщенный закон трения (рисунок 4). В работе [14] ему дано имя Сосновского–Щербакова–Комиссарова. Как видно, на рисунке 4 закон записан в наиболее общем виде; здесь даны также наиболее общие схемы ТФС и методология испытаний одной из них (рисунок 4).

Давно и хорошо известна прямая зависимость износа от коэффициента трения [15]. Применительно к ТФС простейший анализ такой связи представлен на рисунке 5,а, где w_p – износ, обусловленный контактной нагрузкой при трении скольжения или трении проскальзывания, и $w_{p/\sigma}$ – износ, обусловленный как контактной, так и внеконтактной нагрузками; последняя возбуждает на площадке контакта знакопеременные циклические напряжения (деформации) $\sigma_a(\pm\varepsilon_y)$. Таким образом, комплексное повреждение



ТРИБОЛОГИЯ Трение скольжения: износ
ТРИБОФАТИКА Трение проскальзывания: фреттинг-износ
 Комплексное повреждение при фреттинг-усталости



Закон износа: интенсивность изнашивания в трибофатической системе ($I_{\sigma/p}$) пропорциональна износу пары трения (I_p) и индексу трения ($f_f = \pm\sigma/p_a$) в ТФС

б)

Рис.5. Схемы процессов трения и изнашивания в ПТ и в ТФС

В этой связи возникает идея использовать обобщенный закон трения для анализа изнашивания в ТФС при скольжении. Примем для анализа не абсолютную характеристику износа (w), а его относительную характеристику – интенсивность изнашивания (I), определяемую как удельный износ (износ, отнесенный к площади контакта), приходящийся на единицу длины пути трения [16]. В работе [17] испытания ТФС вал (сталь 45) / вкладыш (сталь 45) вели при трении скольжения без смазки. Результаты испытаний были обработаны нами по той же методике, что и на рисунке 3. Они представлены на рисунке 5, б в виде зависимости интенсивности изнашивания от индекса трения. Сравнение рисунка 5, б с рисунком 3 показывает, что обе зависимости

формально идентичны. Следовательно, данные на рисунке 5, а можно аппроксимировать (рисунок 5, б) уравнением типа (3)

$$I_{\sigma/p} = I_p \left(1 \pm \mu_w \frac{\sigma_a}{p_a} \right). \quad (7)$$

Формула (7) и есть, по существу, обобщенный закон изнашивания: интенсивность изнашивания в ТФС ($I_{\sigma/p}$) определяется таковой (I_p) в ПТ и пропорциональна (коэффициент μ_w) индексу трения ($f_F = \pm \sigma_a / p_a$). Погрешность аппроксимации опытных данных уравнением (7) не превышает 7 %.

Согласно (7), интенсивность изнашивания при скольжении в ТФС повышается в зоне сжатия ($\sigma_a < 0$) и уменьшается в зоне растяжения ($\sigma_a > 0$) – по сравнению с интенсивностью изнашивания ПТ.

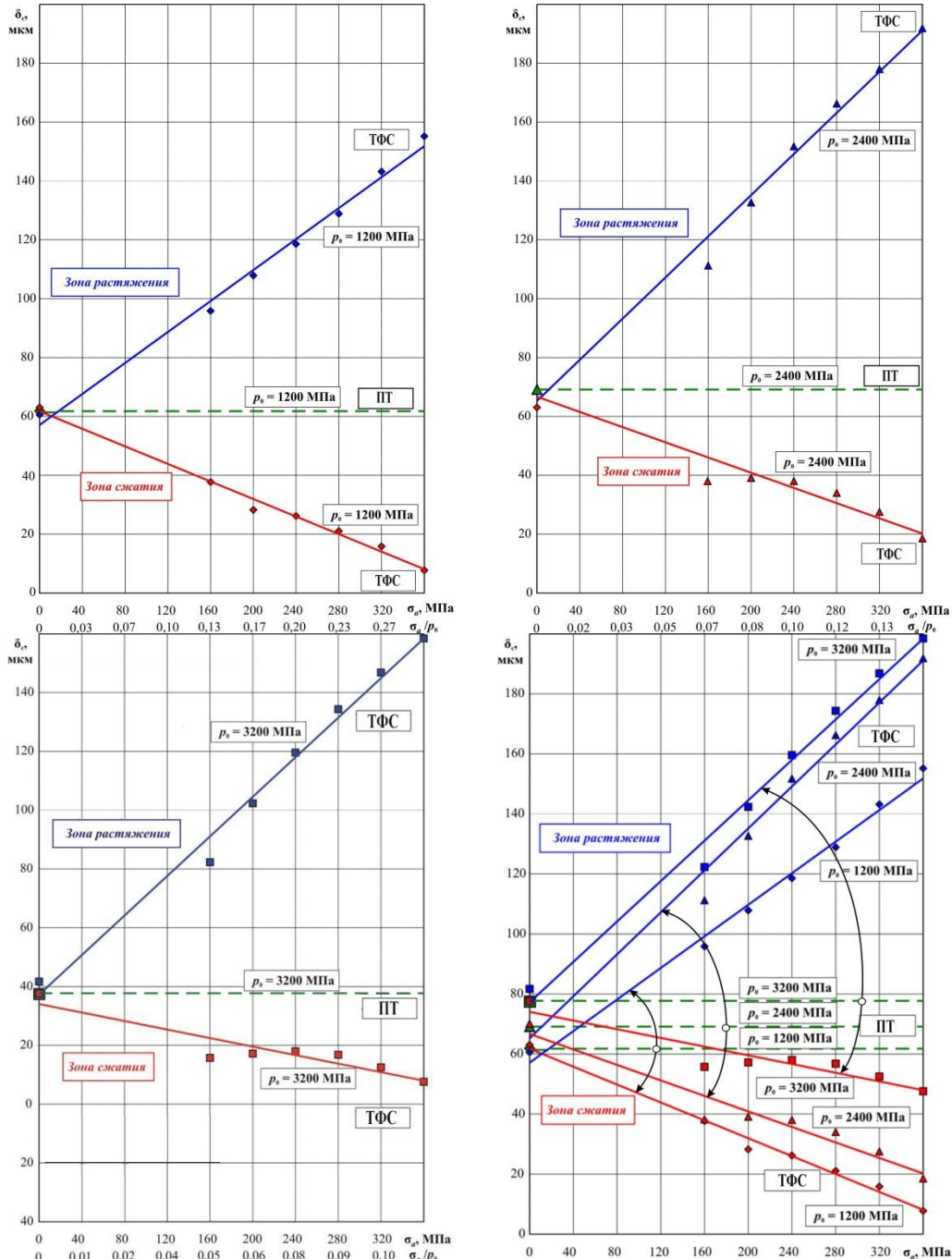


Рис.6. Сближение осей в ТФС сталь 45 (вал) / 18ХГТ (ролик) как функция индекса трения

При реализации трения качения за характеристику износа можно принять суммарное (остаточное) сближение осей (см. рисунок 1)

$$\delta_c = \delta_w + \delta_{pl}, \quad (8)$$

где δ_w и δ_{pl} – сближение осей, обусловленное собственно износом (индекс w) и остаточной деформацией (индекс pl). На рисунке 6 представлены полученные экспериментальные зависимости δ_c от индекса трения для ТФС (сталь 45 (вал) / сталь 18ХГТ (ролик)). Сравнение рисунков 3, 5, б и 6 показывает, что все они формально идентичны. Таким образом, зависимости на рисунке 6 аппроксимируются уравнением типа (3), (6):

$$\delta_{\sigma/p} = \delta_p \left(1 \pm \mu_\delta \frac{\sigma_a}{p_0} \right), \quad (9)$$

Формула (9) и есть, по существу, обобщенный закон остаточного деформирования и износа: суммарный износ $\delta_{\sigma/p}$, определяемый в ТФС при трении качения, равен таковому (δ_p) в ПТ и пропорционален (коэффициент μ_δ) индексу трения ($\mu_F = \pm \sigma_a / p_0$).

Обобщим описанные результаты. Полученные формулы для – коэффициента трения (3)

$$f_{\sigma/p} = f_p \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{p_0} \right), \quad (10)$$

– интенсивности изнашивания (7)

$$I_{\sigma/p} = I_p \left(1 \pm \mu_w \frac{\sigma_a}{p_a} \right), \quad (11)$$

– сближения осей (8)

$$\delta_{\sigma/p} = \delta_p \left(1 \pm \mu_\delta \frac{\sigma_a}{p_0} \right) \quad (12)$$

представим в единой форме объединенного закона трения, изнашивания и деформирования в ТФС

$$\Delta_{\sigma/p} = \Delta_p (1 \pm \mu_0 f_F), \quad (13)$$

в котором приняты следующие обозначения:

$$\frac{\sigma_a}{p_0} = f_F, \mu_p, \mu_w, \mu_\delta \equiv \mu_0, f_{\sigma/p}, I_{\sigma/p}, \delta_{\sigma/p} \equiv \Delta_{\sigma/p}, f_p, I_p, \delta_p \equiv \Delta_p. \quad (14)$$

Объединенный закон (13) гласит: процессы трения, остаточного деформирования и изнашивания в ТФС определяются соответствующими параметрами в ПТ и пропорциональны обобщенному индексу трения.

Полученные результаты, разумеется, требуют проведения дальнейших теоретических и широкомасштабных экспериментальных исследований.

Таким образом, в докладе поставлена и решена инновационная задача: сформулировать объединенный закон трения, остаточного деформирования и изнашивания в ТФС. На базе этого закона можно ставить и решать комплекс практически важных задач эффективного управления указанными процессами. Здесь важно подчеркнуть, что если для трибологической ПТ имеется только один управляющий нагрузочный параметр (контактная нагрузка p_0), то для ТФС их два (как контактная, так и внеконтактные объемные нагрузки), когда они вызывают циклические напряжения σ_a в области контакта. Эти два нагрузочных параметра

объединяются в новом параметре – индексе трения ($\mu_F = \pm\sigma_a / p_0$) в ТФС. Нельзя не видеть, что величина σ_a есть не менее сильный, чем p_0 , управляющий фактор.

И еще один практически важный вывод следует сделать по данной работе: при расчете и проектировании машин недопустимо в их ТФС силу и коэффициент трения определять на базе классического закона – надо использовать обобщенный закон трения. При несоблюдении этой рекомендации погрешность расчетов может достигать (в зависимости от условий трения) $\pm(50\dots60)\%$ и более.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Физический энциклопедический словарь*. – М. : Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
2. *Encyclopedia of Tribology* / ed. by Q. Jane Wang, Yip-Wah Chung. Springer, 2013. – In 6 volumes. – 4139 p.
3. Журавлев, В. Ф. 500 лет истории закона сухого трения / В. Ф. Журавлев // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2014. – № 2. – С. 21–31.
4. Леонардо да Винчи. *Избранные естественно-научные произведения*. – М. : Изд-во АН СССР, 1955. – 1028 с.
5. Amontons M. *De la reistance causee dans les machines*. Mem. l'Acad. Roy., 1699, pp. 206–222.
6. Euler L. *Sur la diminution de la resistance du frottement*. Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a Berlin, 1748, pp. 133–148.
7. Coulomb C.A. *Theorie des machines simples*. Mem. Math. et Phys. l'Acad. Sci., 1785, vol. 10, pp. 161–331.
8. Сосновский, Л. А. *Механика износоусталостного повреждения* / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
9. Щербаков, С. С. *Механика трибофатических систем* / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 407 с.
10. Сосновский, Л. А. *Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика)* / Л. А. Сосновский, В. Т. Трощенко, Н. А. Махутов, Гао Ван-Чжэн, А. В. Богданович, С. С. Щербаков; под науч. ред. Л. А. Сосновского. – Гомель–Киев–Москва–Ухань, 2001. – 170 с.
11. Сосновский, Л. А. *Трение в трибофатической системе* / Л.А. Сосновский, С.С. Щербаков, В.В. Комиссаров // Тр. VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г., Минск (Беларусь) / Редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. – Т. 1. – С. 361-373.
12. Щербаков, С. С. *Изменение силы и коэффициента трения при действии внеконтактной нагрузки (теоретический анализ)* / С. С. Щербаков // Вестник БелГУТа : Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 110–115.
13. *Таблицы коэффициентов трения* (<https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/Frication/>).
14. Sosnovskiy, L. A. *Methods and Main Results of Tribo-Fatigue Tests* / L. A. Sosnovskiy, A. V. Bogdanovich, O. M. Yelovoy, S. A. Tyurin, V. V. Komissarov, S. S. Sherbakov // *International Journal of Fatigue*. – 2014. – V. 66. – P. 207–219.
15. Frycz, M. *The friction force and friction coefficient in the journal sliding bearing ferrofluid lubricated with different concentrations of magnetic particles* / M. Frycz, A. Mischczak // *Journal of KONES Powertrain and Transport*. – 2011. – Vol. 18. – № 4. – P. 113–120.
16. Крагельский, И. В. *Основы расчетов на трение и износ* / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 528 с.
17. Шарай, В. Т. *Комплексное исследование износа и усталости у сталей* / В. Т. Шарай. – Киев: Изд-во техн. лит. УССР, 1959. – 32 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО ВИБРОНАГРУЖЕНИЯ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

д.т.н.¹Сурин В.М., к.т.н.²Держинский С.М.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

²УО «Белорусская государственная академия связи», Минск

Введение. Значительная часть изделий в процессе эксплуатации и транспортирования подвергается механическим воздействиям, которые часто являются причиной их отказа. Случайные воздействия можно охарактеризовать как воздействия, в которых перемещающиеся точки совершают нерегулярные циклы движения, никогда не повторяющиеся в точности. Чтобы полностью описать эти воздействия, необходимо бесконечное количество данных об их происхождении.

При оценке действия как периодических, так и случайных нагрузок важной характеристикой является среднеквадратическое (эффективное) значение воздействия

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt},$$

где $x(t)$ – уровень воздействия в данный момент; T – время, используемое для определения среднеквадратического значения. Так как при определении значения σ предусмотрено возведение уровня воздействия в квадрат, считают что эта величина имеет прямое отношение к энергии. Дополнительно используют метод частотного анализа. На основании теоремы Фурье любой периодический процесс можно рассматривать как множество чисто гармонических, т.е. разложить в ряд Фурье. Поэтому частотный спектр периодического воздействия состоит из ряда дискретных линий величин среднеквадратических значений воздействий на гармонических частотных составляющих процесса нагружения. Частотный спектр случайного воздействия является непрерывным. Поэтому для описания случайного нагружения используют среднеквадратичную спектральную плотность

$$S(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{\Delta f},$$

показывающую распределение энергии случайных воздействий в частотном диапазоне Δf . Ее обычно называют функцией спектральной плотности мощности. Поэтому при анализе и задании случайного воздействия на испытательных стендах наиболее эффективным является его представление в виде функции спектральной плотности мощности $S(f)$. Частотный спектр случайного воздействия при использовании в анализирующей или задающей аппаратуре фильтров с постоянной шириной частотной полосы будет прямо пропорционален функции распределения энергии по частотам воздействия.

Реальные случайные нагрузки действуют в широком частотном диапазоне, поэтому основным видом стендовых испытаний на случайные механические воздействия являются испытания на широкополосную случайную вибрацию (ШСВ). Воздействие ШСВ на испытываемое изделие имеет ряд особенностей, основной из которых является одновременное возбуждение всех форм собственных колебаний, попавших в частотный диапазон спектра воздействия.

Измерение, задание и контроль спектральной плотности мощности и среднеквадратического значения виброускорения при нагружении заложены

практически во всех типах задающей и анализирующей аппаратуры случайных вибраций.

Реакция на случайные воздействия является так же случайным процессом. Связь параметров реакции с параметрами воздействия осуществляется через амплитудно-частотную характеристику изделия. В дорезонансной для испытываемых элементов области частот, когда значение собственной частоты испытываемого элемента выше верхней частотной границы ШСВ, реакция повторяет структуру подводимого воздействия. При захвате спектром ШСВ только первой собственной частоты реакция является узкополосным случайным процессом. По мере расширения частотного диапазона ШСВ и захвата второй и третьей собственных частот элемента в реакции появляются соответствующие частотные составляющие. В результате реакция на случайное воздействие представляет собой сумму узкополосных случайных процессов, а частоты нагружения, близкие к собственным частотам, создают опасные режимы нагружения.

При проведении испытаний необходимо достаточно точно оценивать повреждаемость с учетом влияния различных параметров режимов испытаний. Оценка долговечности при заданном режиме случайного нагружения как на этапе проектирования, так и при эксплуатации актуальна для обеспечения надежности изделий.

При испытаниях на электродинамических стендах воздействием ШСВ реализуется случайный процесс с нулевым средним, контролируемые параметрами являются спектральная плотность мощности и среднеквадратическое (эффективное) значение виброускорений. Воздействие в заданной полосе частот нагружения задается величиной спектральной плотности мощности виброускорения, как правило, постоянного (белый шум) или ступенчато изменяющегося значения, постоянного в каждой частотной полосе фильтра.

Результаты испытаний. Испытания проводили на электродинамическом вибростенде УВЭ 5/10000 с системами управления виброиспытаниями СУВУ-4 и АСУВ-010. Вибростенд имеет следующие характеристики: диапазон частот возбуждения – 5...10000 Гц; грузоподъемность 5 кг; амплитуда перемещений – до 7,5 мм; максимальное ускорение – 450 м/с².

Для определения собственных частот испытываемых образцов применяли систему СУВУ-4, которая позволяет проводить испытания при действии гармонической вибрации с автоматическим поддержанием заданного уровня виброускорения методом качающейся частоты, сущность которого заключается в плавном изменении частоты возбуждения в частотном диапазоне ШСВ от нижней частоты до верхней и обратно. Реакция при прохождении собственных частот элементов резко возрастает из-за возникновения резонанса.

Для задания случайных вибраций использовали систему АСУВ-010. Она позволяет задавать и автоматически поддерживать уровень спектральной плотности ускорения от 0,01 до 10г²/Гц в диапазоне частот возбуждения 1-5000Гц в каждой из 400частотных полос управления, т.е. позволяет формировать гладкий или ступенчатый частотный спектр. В пределах полосы пропускания каждого фильтра обеспечивается постоянный уровень спектральной плотности мощности и осуществляется контроль среднеквадратического значения виброускорения. Воспроизведение спектральной плотности мощности включает в себя процесс деления среднеквадратического значения виброускорения, измеренного в узкой полосе фильтра с шириной полосы пропускания Δf на ширину полосы.

Многоцикловая усталость представляет основной тип повреждения динамически нагруженных элементов конструкций, и при действии случайных вибраций отказы обусловлены многоцикловой усталостью.

При построении расчетных моделей для оценки долговечности используют характеристики уровня и структуры случайных нагрузок – среднего квадратического значения вибровоздействия, ширины спектра и параметра широкополосности β , под которым понимают отношение числа максимумов процесса воздействия к числу пересечений среднего уровня [1].

Связь долговечности со средним квадратическим значением случайной нагрузки рекомендуют представлять в виде степенной зависимости [2; 3], подобной степенному уравнению кривой усталости

$$T\sigma^m = const, \quad (1)$$

где T - время до отказа при неизменном значении σ ; m – параметр, определяемый экспериментально по результатам испытаний при разных уровнях нагружения. Это подтверждается многими экспериментальными данными.

В качестве объектов испытаний были выбраны широко используемые в аппаратуре элементы типа резисторов МЛТ, конденсаторов, которые представляли собой сосредоточенную массу с проволочными выводами из меди или кобальта. Основными моделями крепления испытуемых элементов были: двухопорный закрепленный по краям стержень с сосредоточенной по середине межопорного расстояния массой и консольно закрепленный стержень с сосредоточенной массой на свободном незакрепленном краю. Элементы одного типа испытывали в каждом режиме одновременно партиями по 20-60 штук. Для уменьшения разброса результатов испытаний элементы определенного типа выбирались из одной партии. Крепежные для элементов приспособления, устанавливаемые на столе вибрационного стенда обеспечивали: идентичность заделки выводов элементов испытываемых партий; отклонение уровня ускорения воздействия в различных точках от задаваемого в контрольной точке не более 7%; отсутствие резонанса приспособления в исследуемом диапазоне частот. Система управления поддерживала заданный уровень среднеквадратического значения ускорения для выбранной формы спектра.

Каждую партию испытывали при неизменном режиме воздействия до разрушения выводов всех элементов. Отказы у испытываемых токопроводящих элементов автоматически фиксировали регистратором отказов, позволяющим одновременно контролировать до 100 элементов.

Регрессионный анализ результатов испытаний 80 партий объемом от 20 до 50 элементов каждая показал, что лучше всех соответствует эксперименту из 15 видов функций степенная зависимость (1) связи долговечности T и среднеквадратического значения ускорения. Это подтверждает дисперсионный анализ, вид графиков зависимости $T=f(\sigma)$.

Влияние параметров β исследовано значительно меньше. Экспериментальных данных по влиянию ширины полосы нагружения, структуры спектра практически нет.

Для получения процессов нагружения с различными значениями параметра широкополосности β создавались спектры воздействия, возбуждающие испытуемые образцы на двух первых собственных частотах. В этом случае реакция изделия представляет собой случайный процесс, состоящий из двух узкополосных случайных процессов с центральными частотами f_{01} и f_{02} и средними квадратическими значениями воздействия σ_1 и σ_2 . Такое возбуждение позволяет создавать случайные процессы нагружения с различными значениями параметров β . Его величину в этом случае определяли из выражения [1]:

$$\beta = \frac{\sqrt{(1+\gamma^2)(1+\gamma^2\theta^2)}}{(1+\gamma^2\theta^2)},$$

где $\gamma = \sigma_1/\sigma_2$; $\theta = f_{01}/f_{02}$.

В качестве испытуемых объектов служили жестко закрепленные одним концом в приспособлении на столе вибростенда плоские консольные образцы из меди М2, в

которых возбуждались резонансные изгибные колебания на двух первых собственных частотах. Размеры образцов таковы: длина свободного участка 110, ширина 10 и толщина 2 мм. Для создания опасного сечения размером 4x2 мм в образцах сделаны выборки радиусом 20 мм, расстояние от свободного конца до опасного сечения составляет 100 мм. Средние значения первой и второй собственных частот колебаний образцов были равны соответственно 56 и 410 Гц. Реакцию воздействия на образцах определяли в механических напряжениях. Измерения напряжений в образцах осуществляли с помощью наклеенных в опасном сечении тензодатчиков типа 2Ф КЛА33-100В по показаниям универсального цифрового вольтметра В7-27 и осциллографа Н102. Случайные воздействия создавали в двух полосах, захватывающих собственные частоты колебаний образцов – 40...80 и 350...450 Гц при значениях спектральных плотностей мощности в этих полосах, равных соответственно S_1 и S_2 в $g^2/Гц$.

Предварительно были протарированы с помощью тензомоста ГА-5975 показания тензодатчиков на измерительных приборах при статистическом нагружении испытываемых образцов. Напряжение в опасном сечении рассчитывали по формуле

$$\sigma = \frac{Mu}{w} = \frac{F \cdot l}{(bh^2/\delta)} \text{ МПа} ,$$

где F – груз на образце в Н; l – расстояние от точки приложения груза до опасного сечения в мм; b, h – ширина и толщина опасного сечения в мм. Для каждой полосы частот случайного нагружения строили экспериментальные зависимости изменения напряжения на образце в МПа от воздействия S в $g^2/Гц$

$$\sigma_i = K_i \sqrt{S_i} , \quad (3)$$

где K_i - коэффициент пропорциональности.

Для оценки предельного уровня нагружения, при котором возможно изменение механизма повреждения, т.е. переход от много- к малоциклового усталости предварительно определяли характеристики усталости при регулярном нагружении. Образцы испытывали на резонансной частоте с разными фиксированными уровнями гармонического воздействия. Сравнивая результаты испытаний при разных уровнях нагружения определили: параметр угла наклона степенного уравнения кривой усталости $m=5.28$, предел ограниченной выносливости при $N_\delta = 5 \cdot 10^5$ циклов равен 145 МПа.

Среднее квадратическое (эффективное) значение напряжения, получаемого при возбуждении колебаний образцов в двух полосах частот определяли как

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 . \quad (4)$$

Для всех исследуемых режимов нагружения приняли $\sigma=110$ МПа, что гарантировало многоциклового усталостное повреждение при проведении испытаний.

Планирование испытательных режимов осуществляли следующим образом: задавали режим, т.е. величину β при $\sigma=110$ МПа. Далее из выражения (2) определяли величину γ , т.е. отношение составляющих уровня нагружения, затем из уравнения (4) рассчитывали средние квадратичные значения σ_1 и σ_2 . Спектральные плотности мощности находили используя тарировочные зависимости (3), ранее полученные экспериментально.

Образцы испытывали партиями по 10 штук. Долговечность T принимали в качестве среднего времени до разрушения всех элементов партии.

Режимы испытаний при постоянном значении среднеквадратичного значения напряжения ($\sigma=110$ МПа), разных величинах параметра β и соответствующие им долговечности приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты испытаний плоских медных образцов при случайных воздействиях ($\beta \neq const$; $\sigma = const$).

$S_1, g^2/Гц$	$S_2, g^2/Гц$	β	Е, мин
1,15	0	1,0	245
0,90	4,7	2,0	180
0,94	3,8	2,28	167
1,02	2,4	2,71	160
1,04	1,8	3,0	145
1,06	1,4	3,18	136
1,08	1,1	3,44	133

Вид уравнения связи долговечности T с параметром β устанавливали с помощью регрессивного анализа результатов испытаний. Коэффициенты уравнения

$$y = b_0 = b_1 x \quad (5)$$

находили для зависимостей, где в качестве переменных y и x использовали следующие сочетания преобразований

$$y = T, x = \beta; \quad (6)$$

$$y = \ln T, x = \beta; \quad (7)$$

$$y = \ln T, x = \ln \beta; \quad (8)$$

$$y = T, x = \ln \beta; \quad (9)$$

Применение этих преобразований позволило получить коэффициенты линейного, показательного и специального уравнений, а также оценить точность представления экспериментальных данных этими уравнениями. Точность оценивали по величине суммы квадратов отклонений между экспериментальной и теоретической (расчетной) величиной долговечности. Чем меньше эта величина, тем лучше соответствие расчетов с результатом экспериментов.

Таблица 2 – Определение коэффициентов регрессии уравнений связи $T=f(\beta)$ при $\sigma=const$.

Зависимости	b_0	b_1	Уравнение связи	$\Sigma(T_э - T_p)^2$
(a)	280.1	-45.13	$T = b_0 + b_1 \beta$	431
(b)	5.72	-0.25	$T = \exp(b_0) \cdot (b_1 \beta)$	156
(c)	5.52	-0.49	$T = \exp(b_0) \beta^{b_1}$	111
(d)	244.44	-90.76	$T = b_0 + b_1 \ln \beta$	66

Результаты расчета приведены в табл. 2. Как видно, наиболее точно описывают эксперимент зависимости (c) и (d). Более удобной для использования в практических расчетах является степенная зависимость (c). В этом случае уравнение связи долговечности с параметрами спектра случайного воздействия с учетом степенной зависимости долговечности от нагрузки (1) можно представить в виде

$$T \sigma^m \beta^n = const, \quad (10)$$

где n – показатель, определяемый экспериментально.

Для проверки предложенного уравнения (10) проведены испытания на режимах, отличных от приведенных в табл. 1. По результатам испытаний определяли параметры уравнения (10). Значения долговечностей, рассчитанных по формуле (10) и полученных экспериментально, представлены в табл. 3.

Таблица 3 – Сравнение расчетной T_p по формуле (10) и экспериментальной T_3 долговечностей при испытании медных образцов

Режим		T_3 , мин	T_p , мин	Δ , %
σ , МПа	β			
135	1,0	130	130	0
110	1,0	245	246	0,4
120	2,28	131	125	4,5
120	3,44	98	102	3,0

Параметр m уравнения (10) определили, сравнив результаты испытаний при одинаковой структуре спектра, т.е. результаты 1-ой и 2-ой партий из табл. 3

$$m = \frac{\ln T_{32} - \ln T_{31}}{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2},$$

где T_{31}, T_{32} – долговечность образцов соответственно при уровнях воздействия σ_1 и σ_2 . Он равен 3,12, а при действии гармонических вибраций, как отмечено выше, он равен 5,28.

Сравнив результаты испытаний третьей и четвертой партий образцов из табл. 3 определили параметр n , который равен 0,49.

Сопоставление расчетных и полученных экспериментально долговечностей, оценка погрешности Δ определения величины T свидетельствует о возможности использования зависимости (10) для расчета долговечности при случайных воздействиях с учетом не только уровня воздействия, но и параметра широкополосности процесса нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменко, В.А. Многоцикловая усталость при переменных амплитудах нагружения. /В.А. Кузьменко, И.В. Васинюк, Б.З. Крук/// -К.: Наукова думка, 1986. – 264 с.
2. Дзержинский, С.М. Сравнение режимов стендовых испытаний элементов телекоммуникационных систем на долговечность. / С.М. Дзержинский, В.М. Сурин //Проблемы инфокоммуникаций. / 2016 - № 1 (3). с. 41-45.
3. Дзержинский, С.М. Долговечность электронных элементов, испытываемых на вибропрочность. / С.М. Дзержинский, В.М. Сурин // Проблемы инфокоммуникаций. – 2015- №1 (1). – с. 48-50.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЕПРЕГЕ ПРИ ХИМИЧЕСКОЙ УСАДКЕ СВЯЗУЮЩЕГО, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ТВЕРДОМ СОСТОЯНИИ

¹Василевич Ю.В., ²Сахоненко В.М., ¹Неумержицкая Е.Ю., ²Скворцов К.Г.

¹ УО Белорусский национальный технический университет, Минск

² ОАО «Авангард», Сафоново

Выполнен расчет напряжений в цилиндрической оболочке, возникающих в процессе ее изготовления по причине усадки связующего во время полимеризации. Показано, что процесс усадки связующего влияет на величину жесткостных характеристик композита, найдены их величины.

Усадка связующего является следствием образования трехмерной структуры полимера в процессе его отверждения, когда при химическом взаимодействии изменяются расстояния между молекулами мономера и других компонентов связующего. Усадка оценивается относительным изменением размеров изделия после намотки и после его отверждения на технологической оправке. Наличие армирующего наполнителя в композиции препятствует свободной усадке связующего, приводит к образованию внутренних напряжений, наиболее существенных на границе раздела фаз [1]. Усадка связующего при полимеризации на стадиях жидкого и твердого состояния примерно одинакова [2].

Рассмотрим изменение напряженного состояния в цилиндрической оболочке в результате химической усадки связующего, находящегося в твердом состоянии при максимальной температуре на стадии полимеризации.

Поставленную задачу будем решать с помощью уравнений, которые можно получить из условий равновесия и совместности деформаций наполнителя (нитей) и связующего, находящегося в твердом состоянии [3, 4]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\theta H} = \varepsilon_{\theta c} + \varepsilon_c; \\ \sigma_r &= \sigma_{rH} = \sigma_{rc}; \\ \varepsilon_r &= m(\varepsilon_{rc} + \varepsilon_c) + (1 - m)\varepsilon_{rH}; \\ \sigma_{\theta} &= m\sigma_{\theta c} + (1 - m)\sigma_{\theta H}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь m – относительное содержание связующего в единице объема полимерной композиции; θ – индекс, означающий кольцевое направление; r – радиальное направление; $\sigma_{\theta}, \sigma_r, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_r$ – «осредненные» напряжения и деформации; $\sigma_{rH}, \sigma_{rc}, \sigma_{\theta H}, \sigma_{\theta c}, \varepsilon_{\theta H}, \varepsilon_{\theta c}, \varepsilon_{rH}, \varepsilon_{rc}$ – напряжения и деформации в связующем и наполнителе; ε_c – усадка связующего, находящегося в твердом состоянии.

Полагаем, что связующее и наполнитель являются изотропными и подчиняются закону Гука [4]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rH} &= \frac{1}{E_H}(\sigma_{rH} - \nu_H \sigma_{\theta H}); \\ \varepsilon_{\theta H} &= \frac{1}{E_H}(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_{rH});\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rc} &= \frac{1}{E_c}(\sigma_{rc} - \nu_c \sigma_{\theta c}); \\ \varepsilon_{\theta c} &= \frac{1}{E_c}(\sigma_{\theta c} - \nu_c \sigma_{rc}),\end{aligned}\tag{3}$$

где E_H , E_c , ν_H и ν_c – модули упругости и коэффициенты Пуассона связующего и наполнителя; индекс «H» относится к наполнителю, а индекс «c» к связующему.

С учётом (1) соотношения (2) и (3) можно представить в виде

$$\varepsilon_{rH} = \frac{1}{E_H}(\sigma_r - \nu_H \sigma_{\theta H});\tag{4}$$

$$\varepsilon_{\theta H} = \frac{1}{E_H}(\sigma_{\theta H} - \nu_H \sigma_r);$$

$$\varepsilon_{rc} = \frac{1}{E_c}(\sigma_r - \nu_c \sigma_{\theta c});\tag{5}$$

$$\varepsilon_{\theta c} = \frac{1}{E_c}(\sigma_{\theta c} - \nu_c \sigma_r).$$

Для осредненных напряжений и деформаций связь между ними запишем в виде ([4], стр. 216)

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r};\tag{6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}}.$$

Здесь $E_{\theta}, E_r, \nu_{\theta r}$ и $\nu_{r\theta}$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона, характеризующие полимерный композиционный материал.

С учетом (1) из (4) и (6) найдем полезные в дальнейшем соотношения

$$\sigma_{\theta H} = E_H \varepsilon_{\theta} + \nu_H \sigma_r;\tag{7}$$

$$\sigma_{\theta c} = E_c (\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_c) + \nu_c \sigma_r$$

К полученным уравнениям необходимо добавить еще уравнение равновесия [4]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) = 0.\tag{8}$$

Путем последовательной подстановки в четвертое уравнение из (1) выражения из (2) – (7) получим следующее уравнение

$$a_{11} \sigma_r + a_{12} \sigma_{\theta} = a_1,\tag{9}$$

где

$$a_{11} = (1 - m)\nu_H + m\nu_c - (1 - m)\nu_{\theta r} \frac{E_H}{E_r} - m\nu_{\theta r} \frac{E_c}{E_r};$$

$$a_{12} = [-E_{\theta} + (1 - m)E_H + mE_c] \frac{1}{E_{\theta}};$$

$$a_1 = mE_c \varepsilon_c.$$

Вторую зависимость между σ_r и σ_θ получим путем подстановки в третье уравнение (1) необходимые зависимости из (2)-(7). В результате путем преобразований получим

$$a_{21}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta = a_2, \quad (10)$$

где

$$a_{21} = \frac{1}{E_r} - \frac{m(1-\nu_c^2)}{E_c} - \frac{(1-m)(1-\nu_H^2)}{E_H} - \frac{m\nu_c + (1-m)\nu_H}{E_r} \nu_{\theta r};$$

$$a_{22} = \frac{-\nu_{r\theta} + m\nu_c + (1-m)\nu_H}{E_\theta};$$

$$a_2 = m(\nu_c + 1)\varepsilon_c.$$

Полученная система уравнений (9) и (10) является линейной относительно напряжений σ_r и σ_θ . Коэффициенты a_{11}, \dots, a_{22} этой системы – постоянные числа. Эти коэффициенты определяются неизвестными пока $E_\theta, E_r, \nu_{\theta r}$ и $\nu_{r\theta}$ числами, с помощью которых при химической усадке связующего устанавливается закон Гука между осредненными напряжениями и деформациями композиционного материала и известными параметрами E_H, E_c, ν_H, ν_c и m . Проведем анализ этой системы.

Для этого вначале положим, что $\varepsilon_c = 0$. Решение системы возможно в двух случаях. Первый, когда при ненулевых коэффициентах a_{11}, \dots, a_{22} определитель системы равен нулю. И второй определяется тем, что все эти коэффициенты равны нулю.

Первый случай приводит к зависимости

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

В таком случае из (9) найдём

$$\sigma_\theta = \frac{a_{11}}{a_{12}} \sigma_r.$$

Подставим это выражение в уравнение равновесия (8). Тогда

$$\sigma_r' + \frac{\beta}{r} \sigma_r = 0,$$

где

$$\beta = 1 + \frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$\sigma_r = cr^{-\beta};$$

$$\sigma_\theta = -c \frac{a_{11}}{a_{12}} r^{-\beta}.$$

Здесь c – некоторая постоянная.

В условиях симметричной деформации зависимости между радиальными перемещениями u и компонентами деформации ε_θ и ε_r имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}.\end{aligned}\tag{11}$$

Тогда из (11) найдём

$$u = r\varepsilon_\theta = r\left(\frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta r}\frac{\sigma_r}{E_r}\right) = c\left(\frac{1}{E_\theta} + \frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)r^{-\beta+1}.$$

Из того, что

$$u|_{r=a} = 0.$$

следует равенство нулю либо c , либо

$$\frac{1}{E_\theta} + \frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\frac{a_{11}}{a_{12}} = 0.$$

Оба эти случая приводят к нулю перемещению u при любом значении r . Отсутствие деформации в любой точке цилиндрической оболочки означает, что должны быть равными нулю и напряжения σ_r и σ_θ . Приходим к противоречию, т.к. должно существовать ненулевое решение. Это означает, что решение поставленной задачи может быть получено только при условии равенства нулю всех коэффициентов системы (9), (10). Для нахождения решения воспользуемся зависимостями (6) и (11). После подстановки их в уравнение равновесия (8) получим

$$u'' + \frac{u}{r} - k^2 \frac{u}{r^2} = 0,$$

где $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$.

Решение этого дифференциального уравнения можно представить в виде

$$u = c_1 e^{-kr} + c_2 e^{kr},$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Приравнявая нулю коэффициенты системы, мы получим 4 уравнения для определения E_θ , E_r , $\nu_{\theta r}$ и $\nu_{r\theta}$. Решив эту систему, получим

$$E_\theta = (1 - m)E_H + mE_c;$$

$$\nu_{r\theta} = (1 - m)\nu_H + m\nu_c;$$

$$\nu_{\theta r} = \frac{E_r}{E_\theta}\nu_{r\theta};\tag{12}$$

$$E_r = \frac{E_H E_c (1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta})}{m(1 - \nu_c^2)E_H + (1 - m)(1 - \nu_H^2)E_c}.$$

Такие же результаты получены в работах Лехницкого С.Г. [3, 4, 5].

Соотношения (12) получены для случая, когда коэффициенты a_{ij} равны нулю. Однако усадка связующего приводит к тому, что коэффициенты жесткости должны измениться, так как коэффициенты a_{ij} , при отличной от нуля правой части системы, не равны нулю. Это может привести к путанице в обозначениях. Чтобы избежать такого введём параметры E_θ^0 , E_r^0 , $\nu_{r\theta}^0$ и $\nu_{\theta r}^0$, которые обозначают параметры E_θ , E_r , $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ в случае, если $a_{ij} = 0$. Тогда коэффициенты a_{ij} при $\varepsilon_c \neq 0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
a_{11} &= E_{\theta}^0 \left(\frac{v_{\theta r}^0}{E_r^0} - \frac{v_{\theta r}}{E_r} \right); \\
a_{12} &= \frac{E_{\theta}^0 - E_{\theta}}{E_{\theta}}; \\
a_{21} &= \frac{1 - v_{r\theta}^0 v_{\theta r}}{E_r} - \frac{1 - v_{r\theta}^0 v_{\theta r}^0}{E_r^0}; \\
a_{22} &= \frac{v_{r\theta}^0 - v_{r\theta}}{E_{\theta}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть теперь $\varepsilon_c \neq 0$. В таком случае система (9), (10) при ненулевом определителе имеет единственное решение, которое выражается равенствами

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} &= \frac{m\varepsilon_c [a_{11}(v_c + 1) - a_{21}E_c]}{\Delta}, \\
\sigma_r &= \frac{m\varepsilon_c [a_{21}E_c - a_{12}(v_c + 1)]}{\Delta},
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}.$$

Напряжения σ_{θ} и σ_r получены в виде постоянных чисел, поэтому они удовлетворяют уравнению равновесия (8), если $\sigma_r = \sigma_{\theta}$. Это возможно, если

$$(a_{11} + a_{12})(v_c + 1) = 2a_{21}E_c.$$

В таком случае на основании (6) ε_{θ} и ε_r тоже постоянны.

В условиях симметричной деформации зависимости между радиальными перемещениями u и компонентами деформации ε_r и ε_{θ} имеют вид (11).

Так как ε_r и ε_{θ} постоянные величины, то из (11) найдём

$$u = \varepsilon_r r + c. \tag{14}$$

Из того, что

$$u|_{r=a} = 0$$

следует

$$c = -\varepsilon_r a.$$

С другой стороны, из (11) следует, что

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_r + \frac{c}{r}.$$

В таком случае $c = 0$ ($\varepsilon_{\theta} = \text{const}$). Таким образом, $\varepsilon_r = 0$, $\varepsilon_{\theta} = 0$, $u = 0$.

Равенство нулю перемещения u означает, что в любой рассматриваемой точке цилиндрической оболочки отсутствуют деформации. Это означает, что должны быть равны нулю и напряжения σ_r и σ_{θ} . По предположению σ_r и σ_{θ} не должны быть равными нулю тождественно. Таким образом, определитель рассматриваемой системы должен быть равным нулю. В таком случае система (9), (10) будет иметь решение в двух случаях, если

$$a_{11} = a_{21} = 0$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{E_c}{1 + v_c} = E_c^0. \tag{15}$$

В первом случае система имеет решение, если

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{E_c}{1 + \nu_c}.$$

При этом уравнение равновесия (8) принимает вид

$$\sigma_r' + \frac{1}{r} \sigma_r = \frac{mE_c \varepsilon_c}{a_{12} r}.$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{c}{r} + \frac{mE_c \varepsilon_c}{a_{12}}; \\ \sigma_\theta &= \frac{mE_c \varepsilon_c}{a_{12}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Зависимости (16) будут представлять решение поставленной задачи, если согласовать между собой выражения (11). Такая согласованность выражается равенством

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_\theta r)'. \tag{17}$$

Путём подстановки в (17) ε_r и ε_θ , получаемые из (6) и (16) найдём, что постоянная равняется нулю. Здесь предполагалось, что (17) должно быть тождеством для любого r . В результате получаем, что (16) является решением для σ_r и σ_θ в виде постоянных чисел. Это решение было рассмотрено выше и, как показано, оно ведёт к противоречию.

Рассмотрим теперь второй случай из (15). Из (9) найдём σ_θ и подставим полученное значение в уравнение равновесия (8). В результате получим

$$\sigma_r' + \frac{\beta}{r} \sigma_r = \frac{b_2}{r}, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + \frac{a_{11}}{a_{12}}; \\ b_2 &= \frac{mE_c \varepsilon_c}{a_{12}}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (18) даёт следующие результаты

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c \left(\frac{a}{r} \right)^\beta + \frac{b_2}{\beta}; \\ \sigma_\theta &= b_2 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \left[c \left(\frac{a}{r} \right)^\beta + \frac{b_2}{\beta} \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Зависимости (6), (11) и (19) позволяют предположить, что

$$\varepsilon_r = u'; \quad \varepsilon_\theta r = u; \quad u = Ar^{-\beta+1} + Br, \tag{20}$$

где A и B – некоторые постоянные, которые можно определить путем подстановки в первые два уравнения из (2), соответствующие выражениям (19), (20) для u , σ_r и σ_θ .

$$A(1-\beta)r^{-\beta} + B = \frac{cr^{-\beta} + \frac{b_2}{\beta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_0} \left[b_2 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \left(cr^{-\beta} + \frac{b_2}{\beta} \right) \right];$$

$$Ar^{-\beta} + B = \frac{1}{E_0} \left[b_2 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \left(cr^{-\beta} + \frac{b_2}{\beta} \right) \right] - \frac{\nu_{\theta r}}{E_r} \left(cr^{-\beta} + \frac{b_2}{\beta} \right).$$

Предыдущие зависимости должны выполняться для любого r . На этом основании получим, что

$$A(1-\beta) = \frac{c}{E_r} + \frac{\nu_{r\theta}}{E_0} \frac{a_{11}}{a_{12}} c;$$

$$A = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{c}{E_0} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_r} c;$$

$$B = \frac{b_2}{\beta E_r} - \frac{\nu_{r\theta} b_2}{E_0} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{1}{\beta} \right);$$

$$B = \frac{b_2}{E_0} \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{1}{\beta} \right) - \frac{\nu_{\theta r} b_2}{E_r \beta}.$$
(21)

Из (21) вытекают два равенства, устанавливающие зависимости для нахождения жесткостных характеристик E_0 , $E_r, \nu_{r\theta}$ и $\nu_{\theta r}$.

$$\frac{E_0}{E_r} \left(1 - \nu_{\theta r} \frac{a_{11}}{a_{12}} \right) = \frac{a_{11}}{a_{12}} \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} - \nu_{r\theta} \right);$$

$$\frac{E_0}{E_r} = \frac{1 + \nu_{r\theta}}{1 + \nu_{\theta r}}.$$
(22)

Рассматриваются композиционные материалы, у которых $E_r^0 \ll E_0^0$.

Предположим, что

$$\nu_{\theta r} \ll 1.$$
(23)

В этом случае из (22) следует:

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{12}} \right)^2 - \nu_{r\theta} \frac{a_{11}}{a_{12}} = 1 + \nu_{r\theta}.$$

Решение этого уравнения получим в виде

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{12}} \right)_1 = \nu_{r\theta} + 1; \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} \right)_2 = -1.$$

Второй корень приводит к $\beta = 0$, а $\sigma_r = \sigma_0 = \text{const}$.

Этот случай рассмотрен ранее, и он не дал решения поставленной задачи. В результате из (22) получим зависимости

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \nu_{r\theta} + 1 = \frac{E_0}{E_r}.$$
(24)

Для нахождения жесткостных параметров E_0 , $E_r, \nu_{r\theta}$ и $\nu_{\theta r}$ два других уравнения получим, если воспользуемся условиями (15) и выражениями (13). В результате найдём

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E_{\theta}^0 (E_r' v_{\theta r}^0 - v_{\theta r}' E_r^0)}{v_{r\theta}^0 (v_{\theta r}' E_r^0 - v_{\theta r}^0 E_r') - E_r'} = E_c^0; \\ a_{21} &= \frac{E_{\theta}'}{v_{r\theta}'} = E_c^0, \\ a_{12} &= \frac{E_{\theta}'}{v_{r\theta}'} = E_c^0, \\ a_{22} &= \frac{E_{\theta}'}{v_{r\theta}'} = E_c^0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\theta}' &= E_{\theta} - E_{\theta}^0; E_r' = E_r - E_r^0; \\ v_{r\theta}' &= v_{r\theta} - v_{r\theta}^0; v_{\theta r}' = v_{\theta r} - v_{\theta r}^0. \end{aligned}$$

Так как из (13) следует, что

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{E_{\theta}^0 E_{\theta}'}{E_r^0 E_{\theta}'} \left(E_r' v_{\theta r}^0 - v_{\theta r}' E_r^0 \right)$$

зависимости (24) можно переписать в виде

$$E_r' v_{\theta r}^0 - v_{\theta r}' E_r^0 = -\frac{E_r^0 E_{\theta}'}{E_{\theta}^0}; \frac{E_{\theta}^0 + E_{\theta}'}{E_r^0 + E_r'} = v_{r\theta}^0 + v_{r\theta}' + 1. \quad (26)$$

Соотношения (25) и (26) позволяют найти искомые величины E_{θ} , E_r , $v_{r\theta}$ и $v_{\theta r}$. Для этого проведём следующие преобразования. Из первого уравнения (25) найдём

$$E_r' v_{\theta r}^0 - v_{\theta r}' E_r^0 = -\frac{E_r' E_c^0}{E_{\theta}^0 - v_{r\theta}^0 E_c^0}.$$

Приравняв правые части полученного уравнения и первого из (26) получим

$$E_r' = E_{\theta}' \left(\frac{E_r^0}{E_c^0} - v_{r\theta}^0 \frac{E_r^0}{E_{\theta}^0} \right) = D E_{\theta}'.$$

Вторые уравнения из (25) и (26) приводят к

$$\frac{E_{\theta}'}{E_c^0} = \frac{E_{\theta}^0 + E_{\theta}'}{E_r^0 + D E_{\theta}'} - (1 + v_{r\theta}^0).$$

Это соотношение эквивалентно следующей зависимости

$$\frac{D}{E_c^0} (E_{\theta}')^2 + \left[\frac{E_r^0}{E_c^0} - 1 - D(1 + v_{r\theta}^0) \right] E_{\theta}' = E_{\theta}^0 - (1 + v_{r\theta}^0) E_r^0.$$

Из того, что $E_r^0 \ll E_{\theta}^0$ можно упростить предыдущее уравнение. В результате получим

$$(E_{\theta}')^2 = \frac{E_{\theta}^0 (E_c^0)^2}{E_r^0}.$$

Решение этого уравнения найдём в виде

$$E_{\theta}' = E_c^0 \sqrt{\frac{E_{\theta}^0}{E_r^0}}; E_{\theta} = E_{\theta}^0 + E_c^0 \sqrt{\frac{E_{\theta}^0}{E_r^0}}. \quad (27)$$

Последовательно, в обратном порядке найдём остальные постоянные параметры

$$\begin{aligned}
E_r' &= \sqrt{E_r^0 E_\theta^0}; E_r = E_r^0 + \sqrt{E_r^0 E_\theta^0}; \\
\nu_{r\theta}' &= \sqrt{\frac{E_\theta^0}{E_r^0}}; \nu_{r\theta} = \nu_{r\theta}^0 + \sqrt{\frac{E_\theta^0}{E_r^0}}; \\
\nu_{\theta r}' &= \frac{E_c^0}{\sqrt{E_r^0 E_\theta^0}} + \nu_{r\theta}^0 \sqrt{\frac{E_r^0}{E_\theta^0}}; \nu_{\theta r} = \nu_{r\theta}^0 \frac{E_r^0}{E_\theta^0} + \frac{E_c^0}{\sqrt{E_r^0 E_\theta^0}} + \nu_{r\theta}^0 \sqrt{\frac{E_r^0}{E_\theta^0}}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Отметим далее, что гипотеза (23) о малости коэффициента Пуассона $\nu_{\theta r}$ имеет право на существование. Это видно из аналитического выражения для $\nu_{\theta r}$, представленного в (28). Здесь по-прежнему считаем, что

$$E_r^0 \ll E_\theta^0.$$

Процесс усадки связующего влияет на величину жесткостных характеристик композита. Они подчиняются законам, установленным зависимостями (27) и (28). Такое поведение обусловлено некоторыми свойствами нелинейности, происходящими в процессе формирования материала конструкции.

В формулах (27) и (28) все параметры, входящие в правые части равенств, известные величины, определяемые жесткостными характеристиками нитей и связующего. При этом следует иметь в виду, что

$$0 < \nu_{r\theta}^0 < 1;$$

Таковы основные результаты по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван фо Фы, Г.А. Конструкции из армированных пластмасс / Г.А. Ван фо Фы – Киев: Техника, 1971. 220 с.
2. Чернин, И.З. Эпоксидные полимеры и композиции / И.З. Чернин, Ф.М. Смехов, Ю.В. Жердяев // М.: Химия, 1982. 232 с.
3. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий – М., 1976.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А. Биргера. М.: Изд-во «Машиностроение», 1968. С.215-225.
5. Лехницкий С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией // Уч. зап. Саратовск. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук, т.1, в.2, 1938. С. 154-157.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, СКРЕПЛЕННОЙ С ИНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

¹ Леоненко Д. В.

¹ Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Определение спектра собственных частот и форм колебаний является одной из важнейших задач при расчете конструкции на динамические воздействия.

Ранее в монографии [1] рассмотрено статическое и динамическое деформирование многослойных конструкций. В работах [2, 3] исследовано напряженно-деформированное состояние двухслойных пластин при циклическом нагружении. В статье [4] рассмотрены колебания трехслойных круговых пластин, несвязанных с упругим основанием, под действием нагрузок различных форм. В работах [5–8] рассмотрены колебания трехслойных элементов конструкций на безынерционном основании Винклера. Там приведены постановки начально-краевых задач, изложены методы их расчета, получен ряд аналитических и численных решений. Анализ свободных колебаний круговых трехслойных круговых пластин и стержней на безынерционных упругих основаниях проведен в статьях [9, 10], соответственно. Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение начально-краевой задачи о собственных колебаниях трехслойной круговой пластины с несжимаемым заполнителем. Численная апробация решения проведена в случае композитной пластины.

Постановка задачи. Постановка задачи и ее решение проводим в цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок 1). Срединную плоскость заполнителя принимаем за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к слою 1. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) заполнителя ($h_3 = 2c$) принимаем гипотезу о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. К наружной грани второго несущего слоя приложена реакция упругого основания q_R . На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, т. е. $\psi = 0$ при $r = r_1$.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют ($u_\varphi^{(k)} = 0$, k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Уравнения движения рассматриваемой пластины можно вывести из вариационного принципа Лагранжа, учтя вариацию работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (1)$$

где δA – вариация работы внешних нагрузок, δW – вариация работы внутренних сил упругости, δA_I – вариация работы сил инерции.

Считаем, что к наружной поверхности второго несущего слоя приложена реакция основания q_R . Вариации работ будут следующие:

$$\delta A = - \iint_S q_R \delta w r d r d \varphi, \quad \delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r d r d \varphi,$$

$$\delta A_I = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} [\rho_k \ddot{w} \delta w] r dr d\varphi. \quad (2)$$

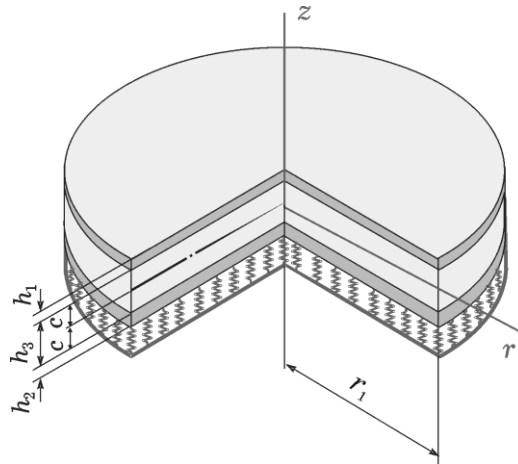


Рис. 1. Расчетная схема пластины

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Винклера, учитывающем инерционность основания

$$q_R = \kappa_0 w + m_f \ddot{w},$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, m_f – инерционный член основания, точка над прогибом обозначают производную по времени.

Предполагается, что пластина находится на упругом основании, которое моделирует поведение грунтов и представляет собой сжимаемый слой толщиной H_f , расположенный на бесконечно жестком основании. В этом случае расчетные параметры материала основания можно вычислить по методике, предложенной в монографии В.З. Власова, Н. Н. Леонтьева [11].

После подстановки выражений для вариаций работ (2) в (1) получаем в перемещениях следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую свободные поперечные колебания круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $M_0^* = M_0 + m_f$ – удельная масса пластины и основания, коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 введены в [5], запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В качестве начальных принимаем условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (4)$$

Задача отыскания функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к (3) начальных (4) и граничных условий.

Аналитическое решение. После преобразований система (3) сводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, & \psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ \Delta \Delta w + \kappa^4 w + M_f^4 \ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь величины κ, M_f, b_1, b_2 – характеристики системы пластина-основание.

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб принимаем в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (6)$$

где $v(r)$ – искомая координатная функция, ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины, A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (6) в последнее уравнение системы (5) следует уравнение для определения координатной функции $v^*(r)$:

$$\Delta \Delta v - (\beta_f^4 - \kappa^4)v = 0. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$\beta_f^4 = M_f^4 \omega^2, \quad \lambda^4 = \beta_f^4 - \kappa^4. \quad (8)$$

Уравнение (7) перепишем в виде

$$\Delta \Delta v - \lambda^4 v = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) можно представить в виде [12]

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r). \quad (10)$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_5, \dots, C_8 – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций, отметим, что $Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат [13], т. е. в центре пластины. Поэтому, исходя из ограниченности прогиба при $r = 0$, необходимо в (10) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$.

Если край пластины зашпелен, то при $r = r_1$ должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0.$$

Подставляя в два последних требования решение (6) с учетом функции (10) и ограниченности решения в начале координат, получаем однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_5, C_6 :

$$\begin{aligned} C_5 J_0(\lambda r_1) + C_6 I_0(\lambda r_1) &= 0, \\ -C_5 J_1(\lambda r_1) + C_6 I_1(\lambda r_1) &= 0, \end{aligned}$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\lambda r_1) J_0(\lambda r_1) + J_1(\lambda r_1) I_0(\lambda r_1) = 0. \quad (11)$$

Трансцендентное уравнение (11) служит для определения собственных чисел λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) уравнения (7).

При шарнирном опирании контура пластины и наличии на нем жесткой диафрагмы там должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = M_r = 0, \quad (12)$$

где внутренний обобщенный момент M_r выражается через перемещения и жесткостные характеристики пластины следующим образом

$$\begin{aligned}
M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
& + \left[c K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
& + \left[c K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
& - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
& - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k.
\end{aligned}$$

Подставляя в два последние условия (12) решение (6) с учетом функции (11) и непрерывности решения в начале координат, получаем однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_5, C_6 . Из нее следует уравнение для определения собственных чисел шарнирно опертой по контуру круговой трехслойной пластины, связанной с безынерционным упругим основанием:

$$\begin{aligned}
J_0(\lambda r_1) \left[a_7 \left(\lambda I_0(\lambda r_1) - \frac{I_1(\lambda r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\lambda r_1) \right] + \\
+ I_0(\lambda r_1) \left[a_7 \left(\lambda J_0(\lambda r_1) - \frac{J_1(\lambda r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\lambda r_1) \right] = 0, \quad (13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2, \quad a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2, \\
a_{60} = h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-.
\end{aligned}$$

После вычисления параметров λ_n частоты собственных колебаний следуют из выражения (8).

После вычисления параметров λ_n частоты собственных колебаний следуют из уравнений (9), (10):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4. \quad (14)$$

В общем случае для описания прогиба круговой трехслойной пластины при свободных поперечных колебаниях вводим систему собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\lambda_n, r)$:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]. \quad (15)$$

Здесь учтено вытекающее из граничного условия $w=0$ соотношение между константами интегрирования $C_6 = -C_5 J_0(\lambda r_1) / I_0(\lambda r_1)$.

Константы d_n определяем из требования нормировки системы функций (15):

$$d_n^2 = \int_0^{r_1} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]^2 r dr = \frac{r_1^2}{2} \left[J_0^2(\lambda_n r_1) + J_1^2(\lambda_n r_1) \right] -$$

$$-\frac{r_1 J_0(\lambda_n r_1)}{\lambda_n I_0(\lambda_n r_1)} \left[J_1(\lambda_n r_1) I_0(\lambda_n r_1) + J_0(\lambda_n r_1) I_1(\lambda_n r_1) \right] + \frac{r_1^2 J_0^2(\lambda_n r_1)}{2 I_0^2(\lambda_n r_1)} \left[I_0^2(\lambda_n r_1) - I_1^2(\lambda_n r_1) \right].$$

В конечном виде искомый прогиб трехслойной круговой пластины на упругом инерционном основании Винклера представляем разложением в ряд по фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (15):

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (16)$$

Радиальное перемещение и относительный сдвиг получим, используя первые два уравнения из системы (5) и граничное условие на контуре $\psi(r_1, t) = u(r_1, t) = 0$:

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)),$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (17)$$

Здесь система функций $\varphi_n \equiv \varphi_n(\lambda_n, r)$ следующая:

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right].$$

Коэффициенты A_n, B_n в формулах (16), (17) следуют из начальных условий движения (4)

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{r_1} g(r) v_n r dr.$$

Численные результаты. В уравнение (11) для определения собственных чисел системы пластина-основание Винклера при защемленном контуре входят жесткостные параметры системы, поэтому оно численно исследовано для пакета Д16Т–фторопласт–Д16Т [14] при $h_1 = h_2 = 0,02, h_3 = 0,1$.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение частоты основного тона ω_0 в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания k_0 при различной удельной массе основания m_f (кг/м²): 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500$, 3 – $m_f = 1000$, 4 – $m_f = 2000$. Из графиков следует, что учет инерции основания (2, 3, 4) приводит к уменьшению частоты более чем на 30 % по сравнению с безынерционным основанием (1).

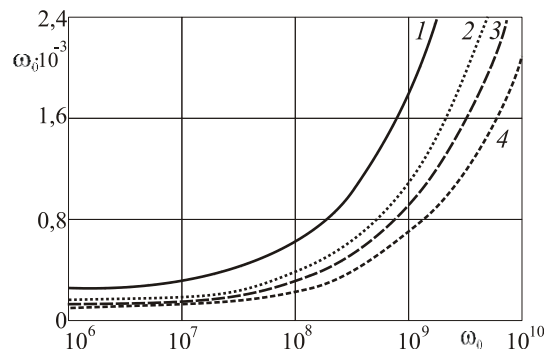


Рис. 2. Изменение частоты собственных колебаний ω_0 в зависимости от коэффициента k_0 (Па/м) при различных коэффициентах m_f

Графики зависимости первой частоты ω_0 собственных колебаний трехслойной пластины от толщины внешнего слоя h_1 ($h_2 = 0,02, h_3 = 0,1$) показаны на рисунке 3, а.

Влияние толщины заполнителя h_3 ($h_1 = h_2 = 0,01$) на эти частоты иллюстрирует рисунок 3, б. Кривые на обоих рисунках соответствуют основаниям: 1 – безынерционное, 2 – инерционное. Учет инерционной составляющей оснований при увеличении толщины несущего слоя существенно влияет на частоты собственных колебаний. При увеличении толщины заполнителя частоты по двум моделям сближаются.

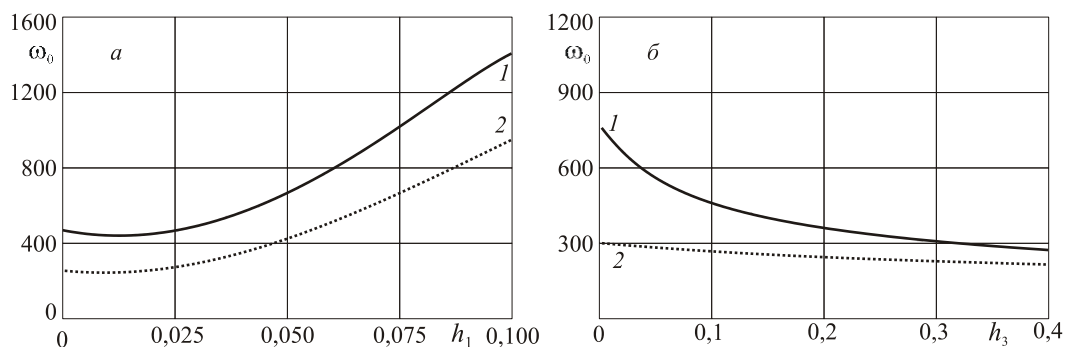


Рис. 3. Зависимость минимальной частоты собственных колебаний от толщины внешнего слоя h_1 (а) и заполнителя h_3 (б)

Следовательно, учет инерции основания приводит к уменьшению собственных частот; увеличение толщины несущего слоя увеличивает частоты собственных колебаний, увеличению толщины заполнителя приводит к их уменьшению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Москвитин, В.В. *К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузках* / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
3. Москвитин, В.В. *Деформация и переменные нагрузки двухслойных металлополимерных пластин* / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 409.
4. Starovoitov, É. I. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* / É. I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D. V. Leonenko // *Strength of materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.
5. Starovoitov, E. I. *Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol. 52, no. 5. – Pp. 665–672. doi: 10.1007/s11029-016-9615-y.
6. Старовойтов, Э.И. *Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании* / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.
7. Starovoitov, É.I. *Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation* / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040. DOI: 10.1007/s10778-009-0115-9.
8. Плескачевский, Ю.М. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
9. Леоненко Д.В. *Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании* // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2008. – №3. – С. 42–47.

10. Леоненко, Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании Винклера / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. журнал. Вып. 30.– Мн.: 2015. – С. 61–64.
11. Власов, В. З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.
12. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
13. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. В 2 т. / Г. Бейтмен, А. А. Эрдейи. – М.: Наука, 1970. – 670 с.
14. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988.– № 4. – С. 11–15.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

¹ Поленов В.С., ² Чигарев А.В.

¹ АНО ВО Автомобильно-транспортный институт, Воронеж

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Математическое моделирование двухкомпонентных пористых сред, насыщенных жидкостью, началось более 90 лет с исследований процесса консолидации грунтов.

Пористость среды необходимо учитывать при решении значительного числа прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности (грунты, пеноматериалы, различные цементные растворы, песок, пористая керамика и т.п.). Пористые двухкомпонентные среды широко применяются и в народном хозяйстве (строительство и восстановление разрушенных аэродромов, строительство дорог и т.п.), где применяемые строительные материалы содержат значительное количество пустот.

Исследование волновых процессов очень важно для разработки новых методов диагностики, новых технологий по созданию двухкомпонентных сред, которые могли бы быть применены в области машиностроения, приборостроения, металлургии и атомной энергетике.

Однако сложность описания эффектов взаимодействия компонент, теплообмена и других сопутствующих процессов привели к тому, что до настоящего времени общепринятые модели (упругая среда – жидкость) полностью не разработаны

Поэтому представляет интерес разработка математической двухкомпонентной модели, когда одна из компонент представляет сферически - симметричную упругую среду, а другая – сжимаемую жидкость.

Распространению волн в пористых средах посвящено ряд работ [1 - 6]. Среди которых следует отметить Био М.А. [1,2], Косачевского Л.Я. [3]. Френкеля Я.И. [6]. Цилиндрическим волнам в насыщенной жидкостью пористой среде посвящена работа [7,8].

Наличие и степень пористости в материалах учитывается с помощью коэффициента пористости, равного отношения объема пор к общему объему, занимаемому средой.

В сферически-симметричных пористых средах из симметрии следует, что в такой среде существуют только продольные волны.

Уравнения движения продольных волн в перемещениях пористой среды в случае сферической симметрии имеют вид [3,7]

$$(A + 2N)\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_1 \Delta u_r^{(2)} = \rho_{11} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\Gamma_1 \Delta u_r^{(1)} + \Gamma_2 \Delta u_r^{(2)} = \rho_{12} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \quad (2)$$

где A , N – коэффициенты Ламе; $\Gamma_1 = (1-m)R_0$, $\Gamma_2 = mR_0$, R_0 – модуль сжимаемости жидкости; m – пористость. Индексы, стоящие сверху: 1 – относится к упругой компоненте, 2 – к жидкости; ρ_{11}, ρ_{22} – эффективные плотности твердого скелета и жидкости; $\rho_{12} = \rho_{21}$ – коэффициент динамической связи твердого скелета и жидкости; Δ – оператор Лапласа в сферически - симметричной системе координат.

Систему уравнений (1) запишем в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} \right) - \gamma_{11} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} &= 0 \\ \sigma_{12} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right) + \sigma_{22} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} \right) - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} - \gamma_{22} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\sigma_{11} = \frac{A+2N}{H}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Gamma_1}{H}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Gamma_2}{H}, \quad H = A+2N+2\Gamma_1+\Gamma_2 \quad (4)$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

c – скорость продольных волн пористой среды

Система уравнений (3) после умножения на r примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \frac{\partial^2 (ru_r^{(1)})}{\partial r^2} + \sigma_{12} \frac{\partial^2 (ru_r^{(2)})}{\partial r^2} - \gamma_{11} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (ru_r^{(1)})}{\partial t^2} - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (ru_r^{(2)})}{\partial t^2} &= 0 \\ \sigma_{12} \frac{\partial^2 (ru_r^{(1)})}{\partial r^2} + \sigma_{22} \frac{\partial^2 (ru_r^{(2)})}{\partial r^2} - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (ru_r^{(1)})}{\partial t^2} - \gamma_{22} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (ru_r^{(2)})}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Введем новые функции следующим образом [9]

$$ru_r^{(1)} = U_1, \quad ru_r^{(2)} = U_2 \quad (6)$$

Тогда систему (5) перепишем в такой форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \sigma_{12} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} - \gamma_{11} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} &= 0 \\ \sigma_{12} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \sigma_{22} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} - \gamma_{12} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \gamma_{22} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Решения системы (7) будем искать в виде

$$U_r^{(1)} = A_1 \exp[i(\omega t + qr)], \quad U_r^{(2)} = A_2 \exp[i(\omega t + qr)], \quad (8)$$

где q – волновое число продольной волны в пористой среде, A_1 – амплитуда продольной волны I типа; A_2 – амплитуда продольной волны II типа.

После подстановки решения (8) в систему (7) получим

$$(\sigma_{11} q^2 - \gamma_{11} \frac{\omega^2}{c^2}) A_1 + (\sigma_{12} q^2 - \gamma_{12} \frac{\omega^2}{c^2}) A_2 = 0 \quad (9)$$

$$(\sigma_{12} q^2 - \gamma_{12} \frac{\omega^2}{c^2}) A_1 + (\sigma_{22} q^2 - \gamma_{22} \frac{\omega^2}{c^2}) A_2 = 0$$

Разделим обе части системы на q^2 , получим

$$(\sigma_{11} - \gamma_{11} \frac{c_q^2}{c^2}) A_1 + (\sigma_{12} - \gamma_{12} \frac{c_q^2}{c^2}) A_2 = 0 \quad (10)$$

$$(\sigma_{12} - \gamma_{12} \frac{c_q^2}{c^2})A_1 + (\sigma_{12} - \gamma_{22} \frac{c_q^2}{c^2})A_2 = 0, \quad c_q^2 = \frac{\omega^2}{q^2}$$

Систему (10) запишем в окончательном виде

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}z - \gamma_{11})A_1 + (\sigma_{12}z - \gamma_{12})A_2 &= 0 \\ (\sigma_{12}z - \gamma_{12})A_1 + (\sigma_{22}z - \gamma_{22})A_2 &= 0, \quad z = \frac{c^2}{c_q^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Однородная система имеет единственное решение в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных A_1 и A_2 , равен нулю [10]. Раскроем данный определитель, получим квадратное уравнение относительно z^2 продольных волн пористой среды

$$(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)z^2 - [\sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12}]z + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) = 0 \quad (12)$$

Тогда волновые числа продольных волн I и II типов в сферически - симметричной пористой среде могут быть записаны в виде

$$q_1^2 = z_1 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2, \quad q_2^2 = z_2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (13)$$

где z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения (12).

Если связь между упругой компонентной и жидкостью отсутствует

$$\sigma_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = 0 \quad (14)$$

то из (12) следует

$$z_1 = \frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}}, \quad z_2 = \frac{\gamma_{22}}{\sigma_{22}} \quad (15)$$

Волновые числа продольных волн примут вид

$$q_1^2 = \frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2, \quad q_2^2 = \frac{\gamma_{22}}{\sigma_{22}} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (16)$$

Перемещения продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии с учетом (6) имеют вид

$$u_{r_1} = A_1 \frac{1}{r} \exp[i(\omega t + q_1 r)], \quad u_{r_2} = A_2 \frac{1}{r} \exp[i(\omega t + q_2 r)] \quad (17)$$

Здесь A_1, A_2 – амплитуды продольных волн в пористой среде, они находятся из (11).

Так как система (11) однородная, то данная система имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нулевое. Поэтому из одного уравнения вытекает второе и наоборот. Следовательно, можно отбросить одно уравнение и найти решение второго. Пусть остается первое уравнение. Тогда, положим $A_2 = n$, получим формулы для амплитуд системы (11)

$$A_1 = - \frac{\sigma_{12} - \gamma_{12}z}{\sigma_{11} - \gamma_{11}z} n, \quad A_2 = n, \quad (-\infty < n < +\infty) \quad (18)$$

Подставим формулы (18), в (17), получим выражения для перемещений продольных волн I и II типов в пористой среде в случае сферической симметрии.

В качестве примера рассмотрим сферически-симметричную двухкомпонентную неограниченную среду радиуса r . Пусть $\sigma_{11} = 0.610$, $\sigma_{22} = 0.305$, $\sigma_{12} = 0.043$, $\gamma_{11} = 0.650$, $\gamma_{22} = 0.650$. $\gamma_{12} = -0.150$, $\omega = 1$.

По формуле (12) получим $z_1 = 0.909$, $z_2 = 2.394$.

Тогда выражение для амплитуд продольных волн I и II типов по формуле (18) запишем в виде

$$\begin{aligned} |A_1'| &= 8.54n, & |A_2'| &= n \\ |A_1''| &= 0.44n, & |A_2''| &= n, \quad (-\infty < n < +\infty) \end{aligned} \quad (19)$$

Перемещения продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии с учетом (17) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{r_1}' &= 8.54n \frac{1}{r} \exp[i(t + q_1 r)], & u_{r_2}' &= n \frac{1}{r} \exp[i(t + q_2 r)] \\ u_{r_1}'' &= 0.44n \frac{1}{r} \exp[i(t + q_1 r)], & u_{r_2}'' &= n \frac{1}{r} \exp[i(t + q_2 r)] \end{aligned} \quad (20)$$

Волновые числа находим из (13)

$$q_1^2 = 0,909c^{-2}, \quad q_2^2 = 2,394c^{-2} \quad (21)$$

Вывод. Разработана математическая модель двухкомпонентной среды, когда одна из компонент представляет сферически - симметричную упругую среду, а другая – сжимаемую жидкость. Получены формулы для определения перемещений продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии. В качестве примера рассмотрена сферически-симметричная двухкомпонентная неограниченная среда радиуса r .

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. America. - 1956. - V. - 28. - № 2. - P. - 168-178.
2. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid- saturated porous solid. II. Higher Frequency Range /M.A. Biot // J. Acoust. Soc. America. -1956. - V. - 28.- № 2. - P. 179 -191.
3. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах / Л.Я. Косачевский // ПММ.-1959. --Т. 23. -Вып. 6.- С. 1115-1123.
4. Polenov V.S., Chigarev A.V. Mathematical modeling of shock waves in inhomogeneous viscoelastic two component media/V.S. Polenov, A.V.Chigarev// Journal of Applied Mathematics and Physics, -2018. -6. (5) .- P. 997-1005.
5. Поленов В.С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде/ В.С.Поленов// ПММ. – 2014. -Т. 78. - Вып. 4. - С. 501 – 507.
6. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве /Я.И.Френкель// Изв. АН СССР. Сер. геогр. геофиз. -1944. -Т. 8. -№ 4. С.133-150.
7. Ibrahim A. Abbas and Abo-El-nour N. Abd-alla. A //Two-dimensional wave Propagation in a Proelastic Infinite Circular Cylinder//Journal of Physics. -Vol. 1. -№3-. 2012. -P. 32 - 38.
8. Киселев Г.К., Гусев А.П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах/Г.К.Киселев, А.П.Гусев, // Новосибирск. ВО «Наука». Сибирская издательская фирма. -1992. - 261 с.
9. Положий Г.Н. Уравнения математической физики /Г.Н.Положий // Изд. «Высшая школа». -М.: -1964. -559 с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра/В.А.Ильин, Э.Г.Позняк// М.: -1984. - 204 с.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

¹Нестерович А. В.

¹ УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Результаты, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [1–4]. Исследования осесимметричного деформирования слоистых упругопластических систем при циклических нагрузках проведены в работах [5–8]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое осесимметричное деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [9–14]. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию круговой однослойной пластины приведены в статье [15].

Здесь получена система дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении.

Постановка краевой задачи в усилиях. Принимаются кинематические гипотезы основанные на гипотезе ломаной нормали: для внешних несжимаемых по толщине слоев выполняются гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатными осями величины $\psi_r(r, \varphi)$, $\psi_\varphi(r, \varphi)$.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок 1). Срединная плоскость пластины принимается за координатную, ось z направлена ей перпендикулярно вверх. Считаем, что к верхней плоскости пластины приложена непрерывно распределенная нагрузка, дающая проекции на оси координат: $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$, $q(r, \varphi)$. В силу несимметричности нагрузки в слоях пластины, присутствуют тангенциальные $u_\varphi^{(k)}$ и радиальные перемещения $u_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) – номер слоя.

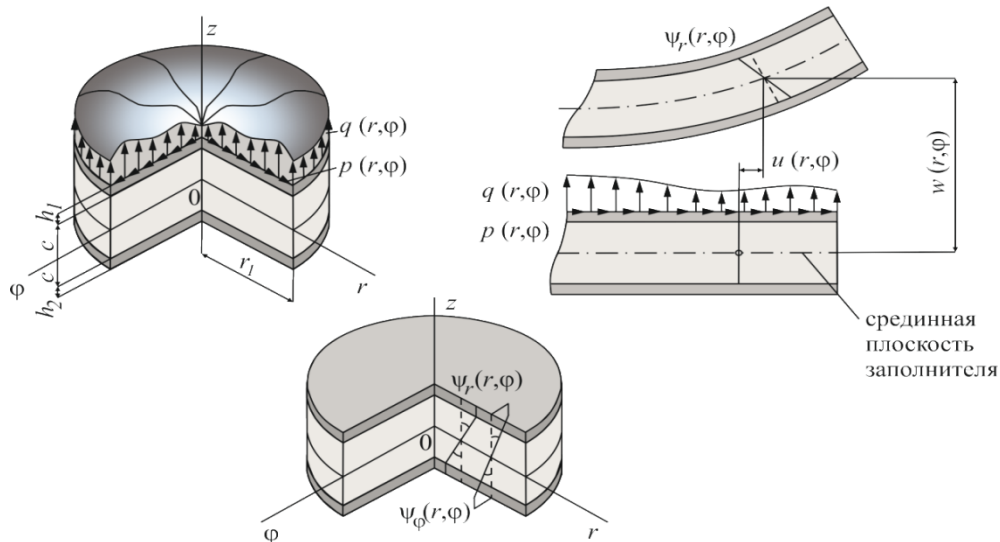


Рис. 1. Схема неосесимметричного нагружения и деформирования круговой пластины

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r'z}^{(3)} + w_r = \Psi_r, \quad 2\varepsilon_{\varphi z}^{(3)} = u_{\varphi'z}^{(3)} + \frac{1}{r} w_{\varphi} = \Psi_{\varphi},$$

после интегрирования получим выражения радиальных и тангенциальных перемещений в слоях через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u_r + c\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(1)} &= u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u_r + z\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(3)} &= u_{\varphi} + z\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u_r - c\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(2)} &= u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $(u_r + c\Psi_r)$, $(u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi})$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформирования заполнителя, для второго несущего слоя данное смещение будет $(u_r - c\Psi_r)$, $(u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi})$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} &= u_{r'r} + c\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} + c\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r + c\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, & \varepsilon_{\varphi z}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(3)} &= u_{r'r} + z\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} + z\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r + z\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2} \Psi_r, & \varepsilon_{\varphi z}^{(3)} &= \frac{1}{2} \Psi_{\varphi}, \\ \varepsilon_{rr}^{(2)} &= u_{r'r} - c\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} - c\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r - c\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, & \varepsilon_{\varphi z}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} + c\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} + c\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} + z\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} + z\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} + z\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} - c\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} - c\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz, & M_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} z dz, \\ Q_r &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{rz}^{(k)} dz, & Q_{\varphi} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\varphi z}^{(k)} dz, \\ H_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta}^{(3)} + c \left(T_{\alpha\beta}^{(1)} - T_{\alpha\beta}^{(2)} \right), & (\alpha, \beta = r, \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta W = \delta A,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация работы внешних сил ($dS = r dr d\varphi$); δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Считаем, что к наружной поверхности верхнего несущего слоя приложена неосесимметричная распределенная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $p_r(r, \varphi)$, $p_{\varphi}(r, \varphi)$, $q(r, \varphi)$. На контуре пластины заданы силы и моменты T_r^0 , Q^0 , M_r^0 , H_r^0 . Вариации работы этих нагрузок следующие:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p_r\delta u_r + p_\varphi\delta u_\varphi) r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0\delta u + M_r^0\delta w_r + H_r^0\delta\psi + Q^0\delta w) d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{rr}^{(k)}\delta\varepsilon_{rr}^{(k)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\delta\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 2\sigma_{r\varphi}^{(k)}\delta\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) dz + \int_{-c}^c (\sigma_{rz}^{(3)}\delta\psi_r + \sigma_{\varphi z}^{(3)}\delta\psi_\varphi) dz \right] r dr d\varphi. \quad (5)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций (2); S – координатная плоскость.

После необходимых преобразований с учетом (3), уравнения равновесия рассматриваемой пластины в усилиях получены в виде

$$\begin{aligned} T_{rr'r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) &= -p_r, \\ T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) &= -p_\varphi, \\ rH_{rr'r} + H_{rr} + H_{r\varphi'\varphi} - H_{\varphi\varphi} + rQ_r &= 0, \\ rH_{r\varphi'r} + 2H_{r\varphi} + H_{\varphi\varphi'\varphi} - rQ_\varphi &= 0, \\ M_{rr'rr} + \frac{1}{r}(2M_{rr'r} + 2M_{r\varphi'r\varphi} - M_{\varphi\varphi'r}) + \frac{1}{r^2}(M_{\varphi\varphi'\varphi\varphi} + 2M_{r\varphi'\varphi}) &= -q. \end{aligned} \quad (6)$$

Постановка краевой задачи в перемещениях. Принимается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости в девиаторно-сферической форме

$$s_{\alpha\beta} = 2G_k\vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad \sigma^k = K_k\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon, \quad (7)$$

где $s_{\alpha\beta}, \vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; σ, ε – шаровые части этих тензоров; G, K – модули сдвига и объемной деформации.

С помощью соотношений (2), (3), (7) внутренние усилия, входящие в систему (6), выражены через пять искомых функций $u_r = u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi)$, $\psi_r = \psi_r(r, \varphi)$, $\psi_\varphi = \psi_\varphi(r, \varphi)$, $w = w(r, \varphi)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \sum_{k=1}^3 h_k \left[K_k^+ u_{r'r} + \frac{1}{r} K_k^- (u_{\varphi'\varphi} + u_r) \right] + c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} (h_1 K_1^- - h_2 K_2^-) (\psi_r + \psi_{\varphi'\varphi}) - \\ &\quad - \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) w_{,rr} - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}), \\ T_{\varphi\varphi} &= \sum_{k=1}^3 h_k \left[K_k^- u_{r'r} + \frac{1}{r} K_k^+ (u_{\varphi'\varphi} + u_r) \right] + c(h_1 K_1^- - h_2 K_2^-) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} (h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) (\psi_r + \psi_{\varphi'\varphi}) - \\ &\quad - \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) w_{,rr} - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}), \\ T_{r\varphi} &= \sum_{k=1}^3 \frac{h_k G_k}{r} (u_{r'\varphi} + r u_{\varphi'r} - u_\varphi) + \frac{c}{r} (h_1 G_1 - h_2 G_2) (\psi_{r'\varphi} + r \psi_{\varphi'r} - \psi_\varphi) - \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 \right) (r \psi_{,r\varphi} - w_{,\varphi}), \\ M_{rr} &= \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) u_{r'r} + \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) (u_{\varphi'\varphi} + u_r) + \\ &\quad + c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\Psi_r + \Psi_{\varphi\varphi}) - \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
M_{\varphi\varphi} = & \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) u_{,r,r} + \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) (u_{\varphi\varphi} + u_r) + \\
& + c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) \Psi_{,r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) \cdot \\
& \cdot (\Psi_r + \Psi_{\varphi\varphi}) - \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
M_{r\varphi} = & \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 \right) (u_{r\varphi} + ru_{\varphi r} - u_\varphi) + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} c^2 G_3 \right) (\Psi_{r\varphi} + r\Psi_{\varphi r} - \Psi_\varphi) - \frac{2}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) G_1 + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) G_2 + \frac{2}{3} c^3 G_3 \right) (rw_{,r\varphi} - w_{\varphi}), \\
H_{rr} = & c \left(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+ \right) u_{,r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 K_1^- - h_2 K_2^- \right) (u_{\varphi\varphi} + u_r) + c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right) \Psi_{,r,r} + \\
& + \frac{c^2}{r} \left(h_1 K_1^- + h_2 K_2^- + \frac{2}{3} c K_3^- \right) (\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_r) - c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
H_{\varphi\varphi} = & c \left(h_1 K_1^- - h_2 K_2^- \right) u_{,r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+ \right) (u_{\varphi\varphi} + u_r) + c^2 \left(h_1 K_1^- + h_2 K_2^- + \frac{2}{3} c K_3^- \right) \Psi_{,r,r} + \\
& + \frac{c^2}{r} \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right) (\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_r) - c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
H_{r\varphi} = & \frac{c}{r} \left(h_1 G_1 - h_2 G_2 \right) (u_{r\varphi} + ru_{\varphi r} - u_\varphi) + \frac{c^2}{r} \left(h_1 G_1 + h_2 G_2 + \frac{2}{3} c G_3 \right) (\Psi_{r\varphi} + r\Psi_{\varphi r} - \Psi_\varphi) - \\
& - \frac{2c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 + \frac{2}{3} c^2 G_3 \right) (rw_{,r\varphi} - w_{\varphi}), \\
Q_r = & h_3 G_3 \Psi_r, \quad Q_\varphi = h_3 G_3 \Psi_\varphi, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k. \tag{8}
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия в перемещениях рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости получим из системы (6), с помощью соотношений (8):

$$\begin{aligned}
L_2 (a_1 u_r + a_3 \Psi_r - a_7 w_{,r}) + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{\varphi\varphi r} - \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{a_{13}}{r^2} u_{r\varphi\varphi} + \frac{a_{14}}{r^2} \Psi_{r\varphi\varphi} - \frac{a_3 + a_{14}}{r^2} \Psi_{\varphi\varphi} + \\
+ \frac{a_4 + a_{14}}{r} \Psi_{\varphi\varphi r} + \left(\frac{a_7}{r} + \frac{a_8}{r^2} + \frac{2a_{16}}{r^3} \right) w_{\varphi\varphi} - \frac{a_8 + 2a_{16}}{r^2} w_{r\varphi\varphi} = -p_r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L_2(a_{14}\Psi_\varphi) + \frac{a_{13}}{r^2}(r^2u_{\varphi'rr} + 2u_{\varphi'r} - 2u_\varphi) + \frac{a_1}{r^2}u_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_{13}}{r}u_{r'\varphi r} + \frac{a_1 + 2a_{13}}{r^2}u_{r'\varphi} + \frac{a_4 + a_{14}}{r}\Psi_{r'\varphi r} + \\
& \quad + \frac{a_3 + a_{14}}{r^2}\Psi_{r'\varphi} + \frac{a_3}{r^2}\Psi_{\varphi'\varphi\varphi} - \frac{a_7}{r^3}(rw_{r\varphi} + w_{\varphi\varphi\varphi}) - \frac{a_8 + 2a_{16}}{r}w_{r\varphi r} = -p_\varphi, \\
& rL_2(a_3u_r + a_5\Psi_r - a_9w_{r'}) + (a_4 + a_{14})u_{\varphi'\varphi r} + \frac{a_{14}}{r}u_{r'\varphi\varphi} - \frac{a_3 + a_{14}}{r}u_{\varphi'\varphi} + \frac{a_{15}}{r}\Psi_{r'\varphi\varphi} - \frac{a_5 + a_{15}}{r}\Psi_{\varphi'\varphi} + \\
& \quad + (a_6 + a_{15})\Psi_{\varphi'\varphi r} - \frac{a_{10} + 2a_{17}}{r}(rw_{r\varphi\varphi} - w_{\varphi\varphi}) + \frac{a_9}{r^2}w_{\varphi\varphi} - rh_3G_3\Psi_r = 0, \\
& rL_2(a_{15}\Psi_\varphi) + (a_4 + a_{14})u_{r'\varphi r} + ra_{14}u_{\varphi'rr} + \frac{a_3}{r}(u_{r'\varphi} + u_{\varphi'\varphi\varphi}) + (a_6 + a_{15})\Psi_{r'\varphi r} + \frac{a_5}{r}\Psi_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_5 + a_{15}}{r}\Psi_{r'\varphi} - \\
& \quad - (a_{10} + 2a_{17})w_{r\varphi r} - \frac{a_9}{r^2}(rw_{r\varphi} + w_{\varphi\varphi\varphi}) - rh_3G_3\Psi_\varphi = 0, \\
& L_3(a_7u_r + a_9\Psi_r) - \frac{1}{r}L_3(a_{11}w_r) + \frac{a_7}{r^3}(u_{\varphi'\varphi\varphi\varphi} - ru_{\varphi'r\varphi} + u_{r'\varphi\varphi} + u_{\varphi'\varphi}) + \frac{a_8 + 2a_{16}}{r^2}(ru_{\varphi'\varphi rr} + u_{r'r\varphi\varphi}) + \\
& \quad + \frac{a_9}{r^3}(\Psi_{\varphi'\varphi\varphi\varphi} - r\Psi_{\varphi'r\varphi} + \Psi_{r'\varphi\varphi} + \Psi_{\varphi'\varphi}) + \frac{a_{10} + 2a_{17}}{r^2}(r\Psi_{\varphi'\varphi rr} + \Psi_{r'r\varphi\varphi}) - \frac{a_{11}}{r^4}w_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + \frac{2a_{12}}{r^3}(w_{\varphi\varphi r} - rw_{rr\varphi\varphi}) - \\
& \quad - \frac{2(a_{12} + 2a_{18})}{r^4}w_{\varphi\varphi} - \frac{4a_{18}}{r^3}(rw_{rr\varphi\varphi} - 2w_{r\varphi\varphi} + w_{r\varphi}) = 0, \tag{9}
\end{aligned}$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев; $L_2(g)$, $L_3(g)$ – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg) \right)_r \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Задача отыскания перемещений замыкается присоединением к уравнениям равновесия (9) силовых или кинематических граничных условий. В случае жесткой заделки контура пластины ($r = r_1$) должны выполняться условия

$$u_r = u_\varphi = w = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\varphi = 0, \quad w_r = 0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u_r = u_\varphi = w = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\varphi = 0, \quad M_{rr} = 0.$$

Таким образом, перемещения в упругой круговой трехслойной пластине при неосесимметричном деформировании должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (9) и граничным условиям (10).

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2003. – Vol. 35, – № 4. – P. 346-352.
2. Starovoitov, É. I. Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 41. No. 7. – Pp. 809-816.
3. Starovoitov, E. I. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // *Russian Aeronautics*. – 2009. – Vol. 52. No. 2. – Pp. 151-157.

4. Starovoitov, E. I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – V. 46. – № 1. – P. 86-93.
5. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 1980. – № 2. – С. 92-96.
6. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 409-416.
7. Москвитин, В. В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – № 1. – С. 116-121.
8. Gorshkov, A. G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // *Mechanics of Solids*. – 2001. – Vol.36, No.1. – P. 64-69.
9. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37-40.
10. Starovoitov, E. I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol.43, No.4. – Pp. 451-459.
11. Старовойтов, Э. И. Динамика круглых трехслойных пластин на упругом основании при осесимметричном нагружении / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Проблемы прочности*. – 2010. – №3. – С.113-124
12. Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91-98.
13. Starovoitov, E. I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – № 9. – P. 1032-1040.
14. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сборник. Вып. 28*. – Мн. : 2013. – С. 23-26.
15. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2 (27). – С. 54-61.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН СКАЧКОВ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ К СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЯМ

¹Миронов Д.Н., ¹Чигарев В.А., ²Гончаренко В.П.

¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

² УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

При импульсном нагружении в термоупругих средах (оболочках) возникают внутренние напряжения, следствием которых являются волновые явления. С данными явлениями можно столкнуться в случае возникновения в телах температурных и динамических нагрузок.

Условно волновые явления можно разделить на три группы: плоские, сферические и цилиндрические.

Плоские волны. Рассмотрим одномерную задачу распространения плоской волны в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с осями e_1, e_2, e_3 для однородных изотропных несвязанных термоупругих сред с бесконечной скоростью распространения тепла или упругих и вязкоупругих сред. Если продольное перемещение $u = u(x_i, t)$, то такой одномерный процесс будем называть плоским движением в направлении e_i . Примем такое движение среды за аналог волнового процессом. В двумерной системе координат плоская волна будет распространяться в направлении e_i .

Для описания движения однородной изотропной несвязанной термоупругой среды будем использовать уравнение для распространения начальных перемещений среды (1), при $M \equiv 0$ полагая, что изменение температуры ν задано [1]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^p \iiint_G \sum_{i=1}^k \frac{\partial^{p-j} \mathbf{G}^i}{\partial t^{p-j}}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) d_{ij}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (1)$$

где G - модуль сдвига, ρ - плотность сплошной среды, $\boldsymbol{\xi}$ - радиус-вектор по осям.

Введем безразмерные параметры (они обозначены штрихом):

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_* t}{L}, \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{T_0}, \\ F'_i &= \frac{F_i L}{c_1^2} - \Lambda' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x'_i}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ \varkappa &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \Lambda' = \frac{\Lambda T_0}{\rho c_1^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\gamma_m = \frac{c_*}{c_m} \quad (m = 1, 2), \quad \eta = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{2}{1 - \varkappa}}.$$

Здесь u_i, σ_{ij}, F_i и $F_i - A \partial v / \partial x_i$ - компоненты вектора перемещения, тензора напряжений, вектора массовых сил и вектора фиктивных массовых сил; c_m - скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде; $\lambda, \mu, \nu, \rho, A$ - параметры Ламе, коэффициент Пуассона, плотность и коэффициент температурного расширения среды; T_0 - температура среды в начальном состоянии; c_* - параметр, имеющий размерность скорости; L - характерный линейный размер.

Тогда уравнения движения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 \gamma_2^2 \ddot{u}_\alpha = \gamma_2^2 u_{\alpha,\alpha\alpha} + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)(u_{\beta,\alpha\beta} + u_{\gamma,\alpha\gamma}) + \\ + \gamma_1^2(u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\alpha,\gamma\gamma}) + \gamma_2^2 F_\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом физические соотношения запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha} + \kappa(u_{\beta,\beta} + u_{\gamma,\gamma}) - \Lambda\vartheta, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\eta^2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Опишем характер волнового движения упругой среды с плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси Ox_1 . В этом случае соотношения

$$\gamma_1^2 \ddot{u}_1 = u_{1,11} + F_1, \quad \gamma_2^2 \ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} + \eta^2 F_\alpha \quad (\alpha = 2, 3); \quad (5)$$

$$\sigma_{11} = u_{1,1} - \Lambda\vartheta, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} \equiv 0, \quad \sigma_{12} = \frac{u_{2,1}}{\eta^2}, \quad \sigma_{13} = \frac{u_{3,1}}{\eta^2}. \quad (6)$$

при отсутствии массовых сил ($F_\alpha = 0$)

$$\gamma_1^2 \ddot{u}_1 = u_{1,11}, \quad \gamma_2^2 \ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} \quad (\alpha = 2, 3). \quad (7)$$

Отметим, что уравнения в системе независимы. Каждое из них является одномерным волновым уравнением и совпадает с известным уравнением колебания струны [2]. Рассмотрим два важных частных случая системы уравнений (7), приводящие к двум типам волн в упругой среде.

Плоская продольная волна. Пусть $u_2 = u_3 \equiv 0$. Тогда в системе (7) остается одно нетривиальное уравнение

$$\gamma_1^2 \ddot{u}_1 = u_{1,11}, \quad (8)$$

общее решение которого имеет вид

$$u_1(x_1, \tau) = F(\tau + \gamma_1 x_1) + G(\tau - \gamma_1 x_1), \quad (9)$$

где $F(\xi)$, $G(\xi)$ - произвольные функции класса $C^2(R)$.

Плоская поперечная волна. Пусть $u_1 \equiv 0$. Тогда система (7) сводится к двум независимым волновым уравнениям

$$\gamma_2^2 \ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} \quad (\alpha = 2, 3). \quad (10)$$

Решение каждого из них имеет вид, аналогичный:

$$u_\alpha(x_1, \tau) = F_\alpha(\tau + \gamma_2 x_1) + G_\alpha(\tau - \gamma_2 x_1). \quad (11)$$

Как следует из (9), частицы среды движутся со скоростью $1/\gamma_2$ в плоскости, перпендикулярной оси Ox_1 .

Сферическая волна. Для математического описания сферических волн на примере изотермических или адиабатических процессов в однородных изотропных упругих средах рассмотрим одномерную задачу в сферической системе координат r, β, α с ортами e_r, e_β, e_α и центром O . Если $u = u(r, t)$, то такая волна будет сферической.

В предположении о зависимости искомых функций только от одной пространственной координаты - радиуса - уравнения движения в перемещениях имеют вид ($\nu \equiv 0, M \equiv 0$):

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left(\Delta_{3r} u_r - \frac{2u_r}{r^2} \right) + \\
&\quad + \mu \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - (\lambda + 3\mu) \frac{u_\beta}{r} \right] \frac{\text{ctg } \beta}{r} + \rho F_r, \\
\rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} &= \mu \left(\Delta_{3r} u_\beta - \frac{u_\beta}{r^2 \sin^2 \beta} \right) + \rho F_\beta, \\
\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \mu \left(\Delta_{3r} u_\alpha - \frac{u_\alpha}{r^2 \sin^2 \beta} \right) + \rho F_\alpha,
\end{aligned} \tag{12}$$

Где

$$\Delta_{3r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что для обеспечения независимости искомым функций от угла β необходимо положить

$$u_\beta = u_\alpha \equiv 0, \quad F_\beta = F_\alpha \equiv 0, \quad F_r = F(r, t). \tag{14}$$

Положим, что $\{i, j\} = \{r, \beta, \alpha\}$, будем использовать следующие безразмерные параметры:

$$\gamma = \gamma_1, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \Phi'_1 = \frac{\Phi_1}{L}, \tag{15}$$

где φ и Φ_1 - скалярные потенциалы вектора перемещений и массовых сил.

При этом уравнения движения (12) сводятся к одному уравнению относительно ненулевой компоненты вектора перемещения $u = u_r$ (точки обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ):

$$\gamma^2 \ddot{u} = \Delta u_{3r} - \frac{2u}{r^2} + F. \tag{16}$$

А компоненты напряженно-деформированного состояния среды определяются так (запятой обозначена производная по координате r):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} = u_{,r}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\beta} = \varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_{\beta\alpha} = 0, \quad \theta = u_{,r} + \frac{2u}{r}; \\
\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = \varkappa u_{,r} + (1 + \varkappa) \frac{u}{r} = \varkappa \sigma_{rr} + (1 - \varkappa)(1 + 2\varkappa) \frac{u}{r}, \\
\sigma_{rr} = u_{,r} + \frac{2\varkappa}{r} u, \quad \sigma_{r\beta} = \sigma_{r\alpha} = \sigma_{\beta\alpha} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ - линейная комбинация σ_{rr} и u , то для решения системы достаточно определять только эти две последние величины.

Цилиндрическая волна. Одномерную задачу для цилиндрических волн рассмотрим в цилиндрической системе координат r, α, z с ортами e_r, e_α, e_z и центром O для изотермических или адиабатических процессов в однородных изотропных упругих средах. Параллельно с цилиндрической будем использовать прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$) с ортами e_1, e_2, e_3 . Так же будем использовать здесь безразмерные параметры $\{i, j\} = \{r, \alpha, z\}$ и $x_3 = z$.

В предположении о зависимости искомым функций и внешних нагрузок только от одной пространственной координаты - радиуса, безразмерные соотношения Коши, физический закон и уравнения движения в перемещениях ($v \equiv 0, M \equiv 0$) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,r} - \frac{u_\alpha}{r} \right), \quad (18)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} u_{z,r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\alpha z} = 0, \quad \theta = u_{r,r} + \frac{u_r}{r};$$

$$\sigma_{rr} = u_{r,r} + \frac{\varkappa}{r} u_r, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \varkappa u_{r,r} + \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{zz} = \varkappa \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (19)$$

$$\sigma_{r\alpha} = \frac{1-\varkappa}{2} \left(u_{\alpha,r} + \frac{u_\alpha}{r} \right), \quad \sigma_{rz} = \frac{1-\varkappa}{2} u_{z,r}, \quad \sigma_{\alpha z} = 0;$$

$$\gamma_1^2 \ddot{u}_r = \Delta_{2r} u_r - \frac{u_r}{r^2} + F_r, \quad (20)$$

$$\gamma_2^2 \ddot{u}_\alpha = \Delta_{2r} u_\alpha - \frac{u_\alpha}{r^2} + F_\alpha, \quad (21)$$

$$\gamma_2^2 \ddot{u}_z = \Delta_{2r} u_z + F_z, \quad (22)$$

Где

$$\Delta_{2r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (23)$$

Уравнения (20-22) являются гиперболическими. Кроме того, аналогично плоским волнам и, в отличие от сферических волн, они независимы. Их можно записать в виде одного уравнения

$$\gamma^2 \ddot{u} = \Delta_{2r} u - \frac{n^2}{r^2} u + F \quad (n = 0, 1), \quad (24)$$

где $n = 0$ соответствует (22), а $n = 1$ – (20) и (21).

Иногда вместо уравнений (20-22) удобнее использовать уравнения движения относительно скалярного потенциала φ и ненулевых компонентов ψ_α , ψ_z векторного потенциала перемещений, безразмерная форма которых такова

$$\gamma_1^2 \ddot{\varphi} = \Delta \varphi + \Phi_1; \quad (25)$$

$$\gamma_2^2 \ddot{\psi}_\alpha = \Delta \psi_\alpha - \frac{\psi_\alpha}{r^2} + \Phi_{2\alpha}; \quad (26)$$

$$\gamma_2^2 \ddot{\psi}_z = \Delta \psi_z + \Phi_{2z}, \quad (27)$$

где Φ_1 , $\Phi_{2\alpha}$ и Φ_{2z} – потенциалы поля внешних сил. При этом перемещения связаны с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad u_\alpha = \frac{\partial \psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial r} + \frac{\psi_\alpha}{r}. \quad (28)$$

Уравнения (25-27) также независимы, и их можно записать одним уравнением

$$\gamma^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi - \frac{m^2}{r^2} \psi + \Phi, \quad (29)$$

где $m = 0$ соответствует (25) и (27), а $m = 1$ – (26).

Изучение структуры цилиндрических волн удобнее проводить, используя уравнение (29) при отсутствии массовых сил ($F \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$).

Цилиндрическая волна расширения-сжатия. Цилиндрическая Р-волна соответствует уравнениям (20) и (25):

$$\begin{aligned}
u &= u_r \neq 0, \quad \psi = \varphi \neq 0, \quad u_\alpha = u_z = \psi_\alpha = \psi_z \equiv 0, \\
\theta &\neq 0, \quad \lambda_{ij} \equiv 0, \quad \gamma = \gamma_1, \quad n = 1, \quad m = 0, \\
u &= \psi_{,r}, \quad \sigma_{r\alpha} = \sigma_{rz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{rr} = u_{,r} + \frac{\varkappa}{r} u, \\
\sigma_{\alpha\alpha} &= \varkappa\sigma + \frac{1-\varkappa^2}{2} u, \quad \sigma_{zz} = \varkappa \left(\sigma + \frac{1-\varkappa}{2} \right) u.
\end{aligned} \tag{30}$$

Угловая цилиндрическая волна формоизменения. Угловая цилиндрическая S-волна, соответствует уравнениям (21) и (26):

$$\begin{aligned}
u &= u_\alpha \neq 0, \quad \psi = \psi_z \neq 0, \quad u_r = u_z = \varphi = \psi_\alpha \equiv 0, \\
\theta &\equiv 0, \quad \lambda_{ij} \neq 0, \quad \gamma = \gamma_2, \quad n = m = 1, \quad u = \psi_{,r},
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{r\alpha} = \frac{1-\varkappa}{2} \left(u_{,r} + \frac{u}{r} \right).$$

Осевая цилиндрическая волна формоизменения. Осевая цилиндрическая S-волна, соответствует уравнениям (22) и (27):

$$\begin{aligned}
u &= u_z \neq 0, \quad \psi = \psi_\alpha \neq 0, \quad u_r = u_\alpha = \varphi = \psi_z \equiv 0, \\
\theta &\equiv 0, \quad \lambda_{ij} \neq 0, \quad \gamma = \gamma_2, \quad n = m = 0, \quad u = \psi_{,r} + \frac{\psi}{r},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{r\alpha} = \sigma_{zz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{rz} = \frac{1-\varkappa}{2} u_{,r}.$$

Поскольку для каждого типа волн независимым является только одно напряжение σ , то во всех случаях будет определяться только оно.

Для построения общего решения однородного уравнения (29) применяем к нему преобразование Лапласа по времени. В результате получаем

$$\gamma^2 s^2 \psi^L(r, s) = \Delta_{2r} \psi^L(r, s) - \frac{m^2}{r^2} \psi^L(r, s). \tag{33}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид [3]:

$$\psi^L(r, s) = F^L(s) I_m(\gamma r s) + G^L(s) K_m(\gamma r s), \tag{34}$$

где $I_m(z)$ и $K_m(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка m , $F^L(s)$ и $G^L(s)$ - произвольные функции.

В работе получены зависимости для определения свойств плоской, сферической и цилиндрических волн от различных параметров среды и начальных параметров импульса. Данные зависимости позволяют описать напряженно-деформированное состояние упругой среды и спрогнозировать дальнейшее поведение волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов / А. Г. Горшков, А. Л. Медведский // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 39 с.
2. Тихонов А.П., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие / А.П. Тихонов, А.А. Самарский // М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. - 798 с.
3. Стиган, И. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица / И. Стиган - М.: Наука, 1979. - 830 с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

¹ Козел А.Г.

¹ Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Трёхслойные конструкции повсеместно используются в ответственных агрегатах летательных аппаратов всех классов: корпусах пассажирских и военных самолётов, вертолётов, ракет; двигателях различных типов. Так же актуально применение подобных элементов конструкций в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности. Слоистые конструкции при относительно малом весе, способны обеспечить не только хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, заданные показатели прочности и жёсткость, но и противостоять ряду других негативных воздействий.

Изотермическое деформирование физически нелинейных слоистых элементов конструкций исследовалось в работах [1–4]. Статьи [5–7] посвящены деформированию трёхслойных стержней и пластин в температурном и радиационном полях. Изгиб неоднородных конструкций, связанных с упругим основанием Винклера, рассмотрен в работах [8–9].

Осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих трёхслойных пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [10–15].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение в перемещениях задачи об изгибе трёхслойной круговой пластины с физически нелинейными слоями, связанной с упругим основанием Пастернака.

1. Постановка задачи

Рассматривается круговая трёхслойная пластина с лёгким заполнителем на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1 , h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной плоскости пластины. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ ; тангенциальные перемещения линейно распределены по толщине; не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$.

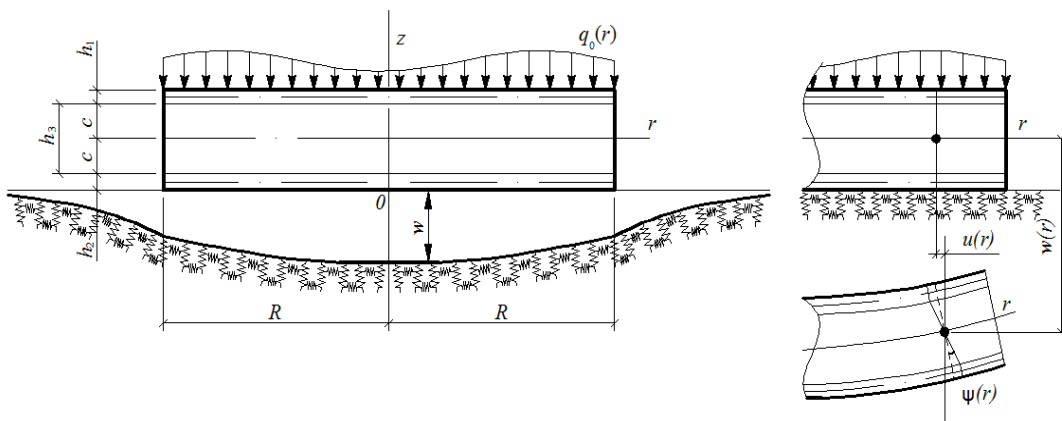


Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины на упругом основании

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q_0 = q_0(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_R , которую принимаем в соответствии с моделью Пастернака, согласно которой [11]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k=1,2,3$ – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $w(r), \psi(r), u(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}, z + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях u_r^k через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & (c \leq z \leq c+h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & (-c-h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где $(u+c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u-c\psi)$, z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Предполагается, что материалы несущих слоев в процессе деформирования проявляют упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), & (k=1,2,3, \alpha=r,\varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}, \vartheta_\alpha^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объёмной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности материалов несущих слоев, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое ($k=1,2$), $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоёв; $s_{rz}^{(3)}, \vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция

физической нелинейности заполнителя, причём $\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (4)$$

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{a\omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{a\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{a\omega}^{(k)}.$$

Величины $T_{ae}^{(k)}$, $T_{a\omega}^{(k)}$, $M_{ae}^{(k)}$, $M_{a\omega}^{(k)}$ вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{ae}^{(k)}$, $\sigma_{a\omega}^{(k)}$ (5). После этого обобщенные внутренние усилия будут следующими:

$$T_\alpha = T_{ae} - T_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha = M_{ae} - M_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{a\omega}^{(k)}, \\ H_{ae} = M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \quad H_{a\omega} = M_{a\omega}^{(3)} + c(T_{a\omega}^{(1)} - T_{a\omega}^{(2)}). \quad (6)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена в [18] без использования физических уравнений состояния, поэтому ее можно принять за исходную:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -(q_0 + q_R). \quad (7)$$

На контуре пластины ($r = R$) должны выполняться силовые граничные условия

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (8)$$

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях уравнений (7) линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (6), получим

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 - q_R + q_\omega. \quad (9)$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, причем нижний индекс «e» в дальнейшем опущен для удобства.

Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом « ω »:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (10)$$

С граничными условиями (8) поступаем аналогично:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^1 + T_\omega, \quad H_r = H_r^1 + H_\omega, \quad M_r = M_r^1 + M_\omega, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^1 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}). \end{aligned}$$

2. Уравнения равновесия в перемещениях. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам приведенным в [14], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), с учётом (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - \kappa_0w + t_f\Delta w &= -q_0 + q_\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 следующие

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+), \quad a_5 = c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &\equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Система уравнений (11) является нелинейной, поэтому для её решения применим метод упругих решений Ильюшина. В этом случае система (11) переписывается в итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w_{,r}^{(n)}) &= p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w_{,r}^{(n)}) &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w_{,r}^{(n)}) - \kappa_0w^{(n)} + t_f\Delta w^{(n)} &= -q_0 + q_\omega^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

где n – номер приближения; $p_\omega^{(n-1)}, h_\omega^{(n-1)}, q_\omega^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (10)

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \quad h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \\ q_\omega^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)}{}_{,r}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)}). \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом шаге приближения мы имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками (13).

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (12) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями $u^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$. После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r}, \\ \psi^{(n)} &= b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r + \frac{C_4^{(n)}}{r}, \\ L_3(w_{,r}^{(n)}) - t_{f1} \Delta w^{(n)} + \kappa^4 w^{(n)} &= q_0 + f_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$ – константы интегрирования на n -м шаге;

$$t_{f1} = t_f D, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$f_{\omega}^{(n-1)} = -D q_{\omega}^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r} (r p_{\omega}^{(n-1)})_{,r} + D_2 \frac{1}{r} (r h_{\omega}^{(n-1)})_{,r},$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \quad D_1 = \frac{a_1 (a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_2 = \frac{a_1 (a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Интегралы здесь и далее определённые с переменным верхним пределом, т.е.

$$\int f(r) dr \equiv \int_0^r f(r) dr.$$

Третье уравнение системы (15) в развернутом виде следующее:

$$w_{,rrrr}^{(n)} + \frac{2}{r} w_{,rrr}^{(n)} - \frac{1}{r^2} w_{,rr}^{(n)} + \frac{1}{r^3} w_{,r}^{(n)} - t_{f1} (w_{,rr}^{(n)} + \frac{1}{r} w_{,r}^{(n)}) + \kappa^4 w^{(n)} = q_0 + f_{\omega}^{(n-1)}. \quad (15)$$

Его решение получим по методике, примененной при решении задачи теории упругости [13], тогда рекуррентный прогиб будет

$$w^{(n)} = C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + C_6^{(n)} H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + C_8^{(n)} H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr) + w_p^{(n)}(r), \quad (16)$$

где $J_0(\sqrt{a}kr)$, $J_0(\sqrt{a}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}kr$ и $\sqrt{a}kr$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

$w_p^{(n)}(r)$ – частное решение уравнения (14).

Для сплошных круговых пластин, исходя из ограниченности прогиба в начале координат, в решении (16) следует положить $C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = 0$.

Рекуррентное решение задачи об изгибе круговой упругопластической трехслойной пластины на упругом основании, с учетом ограниченности перемещений в центре пластины $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = 0$, принимает вид

$$\begin{aligned} w^{(n)} &= C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{a}kr) + w_p^{(n)}(r), \\ u^{(n)} &= b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r, \\ \psi^{(n)} &= b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r. \end{aligned} \quad (17)$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_5^{(n)}$, $C_7^{(n)}$ следуют из условий закрепления пластины.

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (17) силовых (8) или кинематических граничных условий.

При жесткой заделке контура пластины решение (17) необходимо подставить в граничные условия

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0 \text{ при } r=R.$$

В результате получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{aligned} b_1 w_{,r}^{(n)}(R) - \int r \int (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R} + C_1^{(n)} R &= 0, \\ b_2 w_{,r}^{(n)}(R) + \int r \int (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R} + C_3^{(n)} R &= 0, \\ C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa R) + C_6^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa R) + w_p^{(n)}(R) &= 0, \\ -\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a} \kappa R) + \sqrt{a} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{a} \kappa R)) + w_p^{\prime(n)}(R) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь использовано выражение производной от прогиба (17)

$$w_{,r}^{(n)}(R) = -\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a} \kappa R) + \sqrt{a} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{a} \kappa R)) + w_p^{\prime(n)}(R),$$

где $w_p^{\prime(n)}(R)$ – значение на контуре производной от частного решения.

Из системы (18) следуют константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= \frac{1}{R} \int r \int (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R}, \quad C_3^{(n)} = -\frac{1}{R} \int r \int (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R}, \\ C_5^{(n)} &= \frac{w_p^{\prime(n)}(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R))}, \\ C_7^{(n)} &= \frac{w_p^{\prime(n)}(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a} \kappa R))}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, система (17) с константами интегрирования (19) дает рекуррентное решение задачи теории малых упругопластических деформаций для круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием Пастернака при произвольной осесимметричной нагрузке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных полых оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980. – № 2. – С. 92–96.
2. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
3. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409.
4. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации (Москва). – 2001. – № 4. – С. 37–40.
5. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

6. Горшков, А. Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // *Изв РАН, Механика твёрдого тела*. – 2001. – № 1. – С. 79–85.
7. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трёхслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91-98.
8. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.
9. Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
10. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Проблемы физики, математики и техники*. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины. – 2017. – № 1(30). – С. 42-46.
11. Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск: БНТУ. – 2017. – № 32. – С. 235-240.
12. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трёхслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 90-95.
13. Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск: БНТУ. – 2018. – № 33. – С. 318-323.
14. Козел, А.Г. Деформированное состояние трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*. – 2018. – № 1; URL: <http://mathmod.esrae.ru/17-60> (дата обращения: 11.06.2018).
15. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т.24. – №1. – С.392-406.

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

¹Зеленая А.С.

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Исследование деформаций изгиба трехслойных конструкций на сегодняшний день является достаточно актуальным в связи с широким распространением в промышленности, строительстве, машиностроении. Спрос на них объясняется тем, что трехслойные конструкции отличаются малым весом, но в то же время обладают высокой прочностью и жесткостью.

Колебания круглых трехслойных пластин под действием различных типов поверхностных нагрузок рассмотрены в статье [1]. Исследование круговых трехслойных пластин при действии импульсных локальных нагружений приведено в работе [2]. В статье [3] рассмотрен термоупругий изгиб трехслойной кольцевой пластины на упругом основании. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании и основании Пастернака рассмотрено в работах [4]–[5]. В статье [6] исследовано деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле, получены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а наполнитель – нелинейно упругий. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в наполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя (рис. 1). Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q , проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, и тепловой поток интенсивностью q_t , направленный перпендикулярно первому несущему слою.

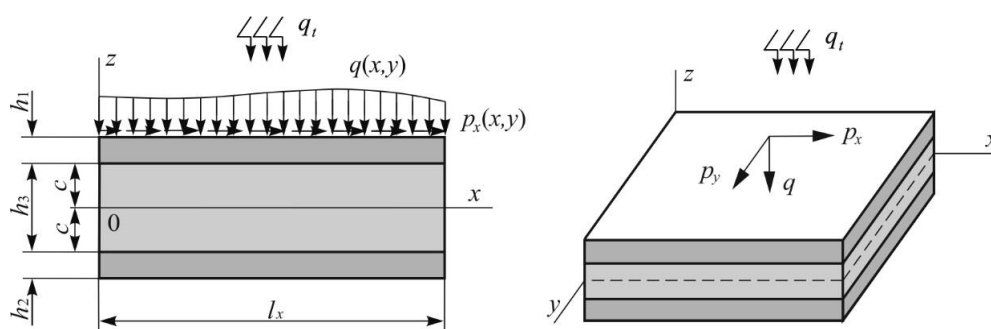


Рис. 1. Расчетная схема

В слоях пластины используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\right) \varepsilon_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений;
 $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций;
 $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k -м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_T^{(k)} \omega^{(k)}(T_k)$ равны нулю;
 $\varepsilon_T^{(k)}(T_k)$ – предел текучести материала;
 $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, равная нулю при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k)$;
 $\varepsilon_s^{(3)}(T_k)$ – предел физической нелинейности заполнителя;
 $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев;
 α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения;
 ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 .

Исходя из соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые, которые будут включать температурные добавки:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)} \delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \omega^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k. \quad (2)$$

Для рассматриваемой пластины получим:

- в несущих слоях ($k = 1, 2$)

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k = \frac{2}{3} G_k(T_k) (2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)}) \omega^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)} + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)} \omega^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k = \frac{2}{3} G_k(T_k) (2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)}) \omega^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k,$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} - \sigma_{xy}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} \omega^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} \omega^{(k)};$$

- в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3(T_3) \varepsilon_{xx}^{(3)} + 3K_3(T_3) \varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3) \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3) (\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{xx}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 = \\
&= \frac{2}{3}G_3(T_3)(2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)})\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3, \\
\sigma_{yy}^{(3)} &= \sigma_{yy}^{(3)0} - \sigma_{yy}^{(3)\omega}, \\
\sigma_{yy}^{(3)0} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{yy}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)}, \\
\sigma_{yy}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{yy}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 = \\
&= \frac{2}{3}G_3(T_3)(2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)})\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3, \\
\sigma_{zz}^{(3)} &= \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}, \\
\sigma_{zz}^{(3)0} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{zz}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}), \\
\sigma_{zz}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{zz}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 = \\
&= \frac{2}{3}G_3(T_3)(2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)})\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3, \\
\sigma_{xy}^{(3)} &= \sigma_{xy}^{(3)0} - \sigma_{xy}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xy}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\vartheta_{xy}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}, \\
\sigma_{xy}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{xy}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)}, \\
\sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\vartheta_{xz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}, \\
\sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{xz}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)}, \\
\sigma_{yz}^{(3)} &= \sigma_{yz}^{(3)0} - \sigma_{yz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{yz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\vartheta_{yz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}, \\
\sigma_{yz}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\vartheta_{yz}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)}, \\
K_k^+(T_k) &= K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k), \quad K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k) \quad (3)
\end{aligned}$$

где $\omega^{(k)} \equiv \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – универсальные функции нелинейности материалов слоев, определяемые экспериментально.

Аналогичную операцию проведем и с внутренними усилиями, получим ($k=1,2,3$):

$$\begin{aligned}
N_{xx}^{(k)} &= N_{xx}^{(k)0} - N_{xx}^{(k)\omega}, \quad N_{yy}^{(k)} = N_{yy}^{(k)0} - N_{yy}^{(k)\omega}, \quad M_{xx}^{(k)} = M_{xx}^{(k)0} - M_{xx}^{(k)\omega}, \\
M_{yy}^{(k)} &= M_{yy}^{(k)0} - M_{yy}^{(k)\omega}, \quad M_{xy}^{(k)} = M_{xy}^{(k)0} - M_{xy}^{(k)\omega}, \quad Q_{xy}^{(k)} = Q_{xy}^{(k)0} - Q_{xy}^{(k)\omega}, \\
N_{zz}^{(3)} &= N_{zz}^{(3)0} - N_{zz}^{(3)\omega}, \quad M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}, \quad M_{yz}^{(3)} = M_{yz}^{(3)0} - M_{yz}^{(3)\omega}, \\
Q_{xz}^{(3)} &= Q_{xz}^{(3)0} - Q_{xz}^{(3)\omega}, \quad Q_{yz}^{(3)} = Q_{yz}^{(3)0} - Q_{yz}^{(3)\omega}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Обобщенные усилия с помощью соотношений (2) также разобьем на линейные и нелинейные составляющие:

$$\begin{aligned}
H_{1x} &= H_{1x}^0 - H_{1x}^\omega, \quad H_{1x}^0 = \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2c}, \quad H_{1x}^\omega = \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
H_{1y} &= H_{1y}^0 - H_{1y}^\omega, \quad H_{1y}^0 = \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2c}, \quad H_{1y}^\omega = \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
H_2 &= H_2^0 - H_2^\omega, \quad H_2^0 = \frac{N_{zz}^{(3)0}}{2c}, \quad H_2^\omega = \frac{N_{zz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
P_{1x} &= P_{1x}^0 - P_{1x}^\omega, \quad P_{1x}^0 = \frac{N_{xx}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c} + N_{xx}^{(1)0}, \quad P_{1x}^\omega = \frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c} + N_{xx}^{(1)\omega}, \\
P_{2x} &= P_{2x}^0 - P_{2x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = \frac{N_{xx}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c} + N_{xx}^{(2)0}, \quad P_{2x}^\omega = \frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c} + N_{xx}^{(2)\omega}, \\
P_{1y} &= P_{1y}^0 - P_{1y}^\omega, \quad P_{1y}^0 = \frac{N_{yy}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c} + N_{yy}^{(1)0}, \quad P_{1y}^\omega = \frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c} + N_{yy}^{(1)\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{2y} &= P_{2y}^0 - P_{2y}^\omega, & P_{2y}^0 &= \frac{N_{yy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c} + N_{yy}^{(2)0}, & P_{2y}^\omega &= \frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c} + N_{yy}^{(2)\omega}, \\
V_1 &= V_1^0 - V_1^\omega, & V_1^0 &= \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(1)0}, & V_1^\omega &= \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(1)\omega}, \\
V_2 &= V_2^0 - V_2^\omega, & V_2^0 &= \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(2)0}, & V_2^\omega &= \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(2)\omega}, \\
S_{1x} &= S_{1x}^0 - S_{1x}^\omega, & S_{1x}^0 &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{xx}^{(1)0} - M_{xx}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)0}, \\
& & S_{1x}^\omega &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{xx}^{(1)\omega} - M_{xx}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega}, \\
S_{2x} &= S_{2x}^0 - S_{2x}^\omega, & S_{2x}^0 &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{xx}^{(2)0} - M_{xx}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)0}, \\
& & S_{2x}^\omega &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{xx}^{(2)\omega} - M_{xx}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega}, \\
S_{1y} &= S_{1y}^0 - S_{1y}^\omega, & S_{1y}^0 &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{yy}^{(1)0} - M_{yy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)0}, \\
& & S_{1y}^\omega &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{yy}^{(1)\omega} - M_{yy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)\omega}, \\
S_{2y} &= S_{2y}^0 - S_{2y}^\omega, & S_{2y}^0 &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{yy}^{(2)0} - M_{yy}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)0}, \\
& & S_{2y}^\omega &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{yy}^{(2)\omega} - M_{yy}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)\omega}, \\
T_{1x} &= T_{1x}^0 - T_{1x}^\omega, & T_{1x}^0 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, & T_{1x}^\omega &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{2x} &= T_{2x}^0 - T_{2x}^\omega, & T_{2x}^0 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, & T_{2x}^\omega &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{1y} &= T_{1y}^0 - T_{1y}^\omega, & T_{1y}^0 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, & T_{1y}^\omega &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
T_{2y} &= T_{2y}^0 - T_{2y}^\omega, & T_{2y}^0 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, & T_{2y}^\omega &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
U_1 &= U_1^0 - U_1^\omega, & U_1^0 &= (2c + h_1) Q_{xy}^{(1)0} - 2M_{xy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)0} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)0}, \\
& & U_1^\omega &= (2c + h_1) Q_{xy}^{(1)\omega} - 2M_{xy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)\omega}, \\
U_2 &= U_2^0 - U_2^\omega, & U_2^0 &= (2c + h_2) Q_{xy}^{(2)0} + 2M_{xy}^{(2)0} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)0} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)0}, \\
& & U_2^\omega &= (2c + h_2) Q_{xy}^{(2)\omega} + 2M_{xy}^{(2)\omega} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)\omega}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Входящие в (5) линейные (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») составляющие внутренних усилий вычисляются через напряжения и деформации по формулам (3).

Система уравнений равновесия в обобщенных усилиях и соответствующие силовые граничные условия по виду совпадают с уравнениями, полученными в [7]:

$$\begin{aligned}
H_{1x}^0 - V_{1,y}^0 - P_{1x,x}^0 &= p_x + H_{1x}^\omega - V_{1,y}^\omega - P_{1x,x}^\omega, \\
H_{1x}^0 + V_{2,y}^0 + P_{2x,x}^0 &= H_{1x}^\omega + V_{2,y}^\omega + P_{2x,x}^\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1y}^0 - V_{1,x}^0 - P_{1y,y}^0 &= p_y + H_{1y}^\omega - V_{1,x}^\omega - P_{1y,y}^\omega, \\
H_{1y}^0 + V_{2,x}^0 + P_{2y,y}^0 &= H_{1y}^\omega + V_{2,x}^\omega + P_{2y,y}^\omega, \\
S_{1x,xx}^0 + H_2^0 - T_{1x,x}^0 - U_{1,xy}^0 + S_{1y,yy}^0 - T_{1y,y}^0 &= q + \frac{p_{x,y} h_1}{2} + \frac{p_{y,y} h_1}{2} + S_{1x,xx}^\omega + H_2^\omega - T_{1x,x}^\omega - U_{1,xy}^\omega + S_{1y,yy}^\omega - T_{1y,y}^\omega, \\
S_{2x,xx}^0 - H_2^0 - T_{2x,x}^0 - U_{2,xy}^0 + S_{2y,yy}^0 - T_{2y,y}^0 &= S_{2x,xx}^\omega - H_2^\omega - T_{2x,x}^\omega - U_{2,xy}^\omega + S_{2y,yy}^\omega - T_{2y,y}^\omega. \quad (6)
\end{aligned}$$

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т.е. при $x=0, l_x$ должны выполняться требования:

$$\begin{aligned}
P_{1x}^0 &= N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^\omega, \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{xy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{xy}^{(2)} + V_2^\omega, \\
T_{1x}^0 - S_{1x,x}^0 - U_{1,y}^0 &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{1x}^\omega - S_{1x,x}^\omega - U_{1,y}^\omega), \\
T_{2x}^0 - S_{2x,x}^0 - U_{2,y}^0 &= Q_{rx}^{(2)} + (T_{2x}^\omega - S_{2x,x}^\omega - U_{2,y}^\omega), \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^\omega.
\end{aligned}$$

При $y=0, l_y$

$$\begin{aligned}
P_{1y}^0 &= N_{sy}^{(1)} + P_{1y}^\omega, \quad P_{2y}^0 = N_{sy}^{(2)} + P_{2y}^\omega, \quad V_1^0 = Q_{xy}^{(1)} + V_1^\omega, \quad V_2^0 = Q_{xy}^{(2)} + V_2^\omega, \\
T_{1y}^0 - S_{1y,y}^0 &= Q_{sy}^{(1)} + (T_{1y}^\omega - S_{1y,y}^\omega), \quad T_{2y}^0 - S_{2y,y}^0 = Q_{sy}^{(2)} + (T_{2y}^\omega - S_{2y,y}^\omega), \\
S_{1y}^0 &= M_{sy}^{(1)} + S_{1y}^\omega, \quad S_{2y}^0 = M_{sy}^{(2)} + S_{2y}^\omega, \quad U_1^0 = Q_{sxy}^{(1)} + U_1^\omega, \quad U_2^0 = Q_{sxy}^{(2)} + U_2^\omega. \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь $N_{rx}^{(1)}$, $Q_{xy}^{(1)}$, $Q_{rx}^{(1)}$, $M_{rx}^{(1)}$, $N_{ry}^{(1)}$, $Q_{xy}^{(1)}$, $Q_{ry}^{(1)}$, $M_{ry}^{(1)}$ – заданные усилия на торцах пластины в первом несущем слое (с индексом «2» – во втором несущем слое). Индекс r принимает значения $0, l_x$, индекс s – $0, l_y$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

Выразим внутренние усилия (4) через искомые перемещения u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 и подставим в систему уравнений равновесия (6). Получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающая изгиб упругопластической пластины в температурном поле. Данная система имеет вид аналогичный системе уравнений равновесия, полученной в [8]. При ее решении был использован метод «упругих решений» А.А. Ильюшина [9]. Система примет вид:

$$\begin{aligned}
&a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x,xx}^n - a_5 u_{2x,xx}^n - a_{19} u_{1x,yy}^n - a_{18} u_{2x,yy}^n - a_{21} u_{1y,xy}^n - a_{23} u_{2y,xy}^n + a_2 w_1^n + \\
&\quad + a_3 w_2^n - 2a_{24} w_1^n + a_{25} w_2^n - 2a_6 w_1^n + a_7 w_2^n = p_x + p_\omega^{n-1}, \\
&-a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x,xx}^n - a_9 u_{2x,xx}^n - a_{18} u_{1x,yy}^n - a_{20} u_{2x,yy}^n - a_{23} u_{1y,xy}^n - a_{22} u_{2y,xy}^n - a_{10} w_1^n - \\
&\quad - a_{17} w_2^n - a_{24} w_1^n + 2a_{25} w_2^n - a_6 w_1^n + 2a_7 w_2^n = s_\omega^{n-1}, \\
&a_1 u_{1y}^n - a_1 u_{2y}^n - a_4 u_{1y,yy}^n - a_5 u_{2y,yy}^n - a_{19} u_{1y,xx}^n - a_{18} u_{2y,xx}^n - a_{21} u_{1x,xy}^n - a_{23} u_{2x,xy}^n + a_2 w_1^n + \\
&\quad + a_3 w_2^n - 2a_{24} w_1^n + a_{25} w_2^n - 2a_6 w_1^n + a_7 w_2^n = p_y + h_\omega^{n-1}, \\
&-a_1 u_{1y}^n + a_1 u_{2y}^n - a_5 u_{1y,yy}^n - a_9 u_{2y,yy}^n - a_{18} u_{1y,xx}^n - a_{20} u_{2y,xx}^n - a_{23} u_{1x,xy}^n - a_{22} u_{2x,xy}^n - a_{10} w_1^n - \\
&\quad - a_{17} w_2^n - a_{24} w_1^n + 2a_{25} w_2^n - a_6 w_1^n + 2a_7 w_2^n = r_\omega^{n-1}, \\
&-a_2 u_{1x,xx}^n - a_2 u_{1y,yy}^n + a_{10} u_{2x,xx}^n + a_{10} u_{2y,yy}^n + 2a_6 u_{1x,xxx}^n + a_6 u_{2x,xxx}^n + 2a_6 u_{1y,yyy}^n + a_6 u_{2y,yyy}^n + \\
&\quad + 2a_{24} u_{1x,xyy}^n + a_{24} u_{2x,xyy}^n + 2a_{24} u_{1y,xyx}^n + a_{24} u_{2y,xyx}^n + a_{11} w_1^n + a_{11} w_2^n - a_{12} w_2^n - \\
&\quad - a_{12} w_2^n + a_{15} w_1^n + a_{15} w_2^n - a_{16} w_2^n - a_{16} w_2^n + a_{26} w_1^n - a_{28} w_2^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + \frac{p_{x,x} h_1}{2} + \frac{p_{y,y} h_1}{2} + q_\omega^{n-1}, \\
& -a_3 u_{1y,y}^n - a_3 u_{1x,x}^n + a_{17} u_{2y,y}^n + a_{17} u_{2x,x}^n - a_7 u_{1y,yyy}^n - a_7 u_{1x,xxx}^n - 2a_7 u_{2y,yyy}^n - 2a_7 u_{2x,xxx}^n - \\
& - 2a_{27} u_{2y,xyy}^n - a_{25} u_{1y,xyy}^n - 2a_{25} u_{2x,xyy}^n - a_{25} u_{1x,xyy}^n - a_{12} w_1^n - a_{12} w_1^n - a_{12} w_1^n + a_{14} w_2^n + \\
& + a_{14} w_2^n - a_{16} w_1^n - a_{16} w_1^n - a_{16} w_1^n + a_{13} w_2^n - a_{13} w_2^n - a_{13} w_2^n + a_{13} w_2^n - a_{28} w_1^n + a_{27} w_2^n - \\
& - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \tag{8}
\end{aligned}$$

где n – номер приближения;

p_ω^{n-1} , s_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , r_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} , g_ω^{n-1} – величины, которые вычисляются по формулам, аналогичным [8]:

$$\begin{aligned}
p_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, & s_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\
h_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} - P_{1y}^{\omega(n-1)}, & r_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} + P_{2y}^{\omega(n-1)}, \\
q_\omega^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)} - U_1^{\omega(n-1)} + S_{1y}^{\omega(n-1)} - T_{1y}^{\omega(n-1)}, \\
g_\omega^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} - U_2^{\omega(n-1)} + S_{2y}^{\omega(n-1)} - T_{2y}^{\omega(n-1)}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений получим методом Бубнова–Галеркина, который предполагает разложение искомым перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций. Тогда искомые перемещения выражаются следующим образом

$$\begin{aligned}
u_{kx} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm}^n \Psi_{xpm}(x, y), & u_{ky} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm}^n \Psi_{ypm}(x, y), \\
w_k &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm}^n \Psi_{zpm}(x, y), \tag{10}
\end{aligned}$$

где U_{kxpm}^n , U_{kypm}^n , W_{kpm}^n – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге ($k=1, 2$);

Ψ_{xpm} , Ψ_{ypm} , Ψ_{zpm} – системы базисных ортогональных функций, удовлетворяющие граничным условиям.

Внешние нагрузки

$$\begin{aligned}
p_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y), & s_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} s_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y), \\
h_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} h_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y), & r_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} r_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y), & q_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y), \\
g_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{\omega pm}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y), \\
q &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \Psi_{zpm}(x, y). \tag{11}
\end{aligned}$$

После подстановки перемещений (10), нагрузок и дополнительных усилий (11) в систему (8) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомым амплитуд перемещений U_{1xpm}^n , U_{2xpm}^n , U_{1ypm}^n , U_{2ypm}^n , W_{1pm}^n , W_{2pm}^n , совпадающих:

$$\begin{aligned}
b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypm}^n + b_{12} U_{2ypm}^n + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n &= p_{\omega pm}^{n-1}, \\
b_2 U_{1xpm}^n + b_5 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypm}^n + b_{13} U_{2ypm}^n + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n &= s_{\omega pm}^{n-1}, \\
b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypm}^n + b_{15} U_{2ypm}^n + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n &= h_{\omega pm}^{n-1}, \\
b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypm}^n + b_{18} U_{2ypm}^n + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n &= r_{\omega pm}^{n-1},
\end{aligned}$$

$$b_3 U_{1xpm}^n + b_6 U_{2xpm}^n + b_{16} U_{1yrm}^n + b_{19} U_{2yrm}^n + b_8 W_{1pm}^n + b_9 W_{2pm}^n = q_{pm} + q_{\text{орт}}^{n-1},$$

$$b_4 U_{1xpm}^n + b_7 U_{2xpm}^n + b_{17} U_{1yrm}^n + b_{20} U_{2yrm}^n + b_9 W_{1pm}^n + b_{10} W_{2pm}^n = g_{\text{орт}}^{n-1}.$$

Коэффициенты b_i вычисляются через величины a_i , зависят от температуры, параметров p и m .

Вывод. Полученное в работе аналитическое решение позволяет исследовать деформирование физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин при действии термосиловых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitov, É. I. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* / É. I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D. V. Leonenko // *Strength of materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352 DOI: 10.1023/A:1025834123302.
2. Старовойтов, Э.И. *Импульсные локальные нагружения круговых трехслойных пластин* / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // *Прикладная механика*. – 2003. – 39, № 8. – С. 86 – 94.
3. Starovoitov, É.I. *Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation* / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040. DOI: 10.1007/s10778-009-0115-9.
4. Леоненко Д.В. *Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании* // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2008. – №3. – С. 42–47.
5. Леоненко, Д.В. *Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака* / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
6. Старовойтов, Э.И. *Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками* / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации (Москва)*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
7. Леоненко, Д. В. *Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Минск : БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С.65–71.
8. Леоненко, Д. В. *Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем* / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2018. – № 2(43). – С. 77–82.
9. Ильюшин, А.А. *Упругопластические деформации полых цилиндров* / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

ВОПРОСЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОБЩЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

¹Блинов А.О., ¹Гончарова И.А., ¹Куликова М.Г.

¹ Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ", Смоленск

Участие магистранта в научно-исследовательской работе способствует развитию его профессиональных и других компетенций. Благодаря участию в научной деятельности магистрант получит необходимый опыт, который поможет ему в написании диссертации. Часто возникают вопросы визуализации этапов эксперимента, которые должны быть представлены в отчетах магистранта для получения промежуточной аттестации.

В процессе работы над магистерской диссертацией студенты реализуют несколько компетенций, одной из которых является научно-исследовательская. В результате этого возникает несколько задач, стоящих перед магистрантами: развитие у магистрантов способностей творчески подходить к изучению темы диссертации. Данный вопрос решается посредством подбора САПР с учетом их возможностей на каждом этапе эксперимента. Для этого мы провели необходимый обзор САПР, применяемых для решения учебных и профессиональных целей.

Согласно стандартам, принятым в 80-х годах, САПР является информационным комплексом, включающим аппаратное и программное обеспечение, описание методов и способов работы с системой и так далее. Спустя некоторое время данную функцию приняла на себя система CAD, которая служит для проектирования с помощью использования компьютера. В настоящее время, то, что раньше называли CAD и САПР, является системой автоматизированного проектирования. В настоящее время существуют большое количество САПР, решающие различные задачи. Классификация подразделяет САПР на 3 вида: базовые(легкие), средние и «тяжелые».

AutoCAD – самый распространенный САПР в мире. Программа позволяет работать как в двухмерной, так и в трехмерной среде, создавать чертежи, ориентированные на различные области применения, такие как архитектурное и дизайнерское моделирование, строительство, машиностроение, электроника и прочие. Данный САПР адаптирован под 18 языков, благодаря чему не возникает вопросов работы в программе. Кроме того на базе программы были выполнены такие подпрограммы, как AutoCAD Mechanical, AutoCAD Electrical, AutoCAD Architecture и другие.

Альтернативой и аналогом AutoCAD служит BricsCAD. Данная среда так же сочетает в себе понятный и удобный интерфейс, DWG совместимость, постоянный выпуск сторонних приложений, работающих на базе основной программы. Однако, так как программа является основным конкурентом, она имеет ряд нововведений. К ним относится улучшение и упрощение расстановки размеров, запись видео непосредственно внутри программы, встраивание трехмерной модели на фотографию, улучшение графического интерфейса, поддержка высокого качества четкости дисплея, функция machine learning («машинное самообучение») и многое другое.

САПР среднего уровня предназначены не только для выполнения чертежей, создание 3D-моделей, но и для выполнения различных расчетов(гидравлических, прочностных, электрических). Часто такие типы программ используют функцию подготовки программы для использования ее для станков с ЧПУ. К таким

программам можно отнести Autodesk Inventor. К возможностям данной программы можно отнести автоматизация проектирования, создание сборок, чертежей, анализ механизма, включающий анализ кинематики, исследование детали под действием нагрузок, всесторонняя оценка. Преимуществом программы является ее конвертирование под различные существующие САПР.

Другим представителем средних САПР выступает Solid Works. Возможности программы включают разработку твердотельных 3D моделей, работу с электрическими схемами, проведение расчетов на прочность, изгиб, гидро- и аэродинамики, создание анимаций. Так же программа включает в себя ряд библиотек стандартных компонентов и изделий, включающая разнообразные детали и сборки различных назначений.

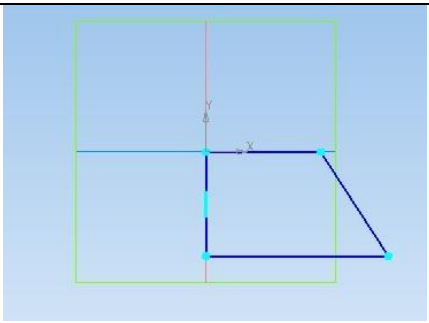
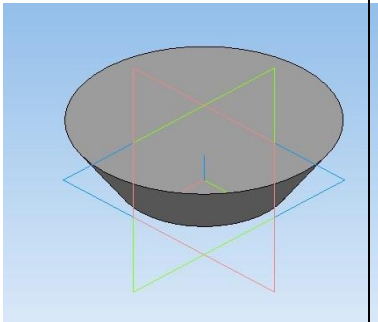
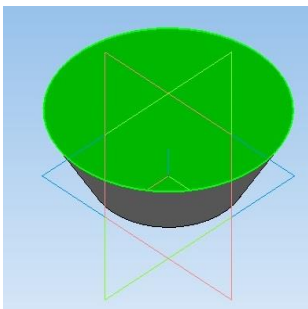
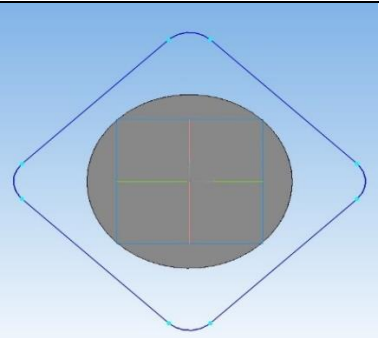
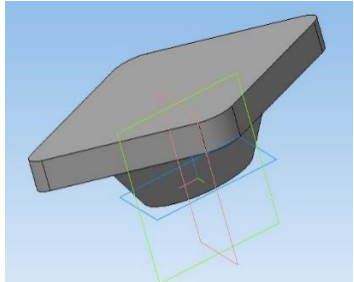
Отличительными особенностями «тяжелых» САПР является заложенная в них архитектура работы и работа со сложными сборками, применяемыми в авиа- и кораблестроении. Яркими представителями этой области являются PTC Creo, NX, CATIA.

В ходе работы стоял вопрос изучения 3D возможностей одной из программ, и мы выбрали для этих целей САПР среднего уровня Компас-3D V13, при помощи которого мы представили пример решения задачи на выполнение сборочного чертежа и отдельных моделей деталей.

Была решена учебная задача по созданию твердотельных моделей и чертежей к ним. При помощи программы была освоена методика автоматизированного проектирования изделий, при которой конструкторская документация создавалась на основе трехмерного моделирования данных деталей.

Первый этап проектирования заключался в создании 3D-моделей входящей в сборочную единицу «Основание». Этапы создания моделей представлены в таблицах 1-3.

Таблица 1 – Этапы создания основания

1	2	3	4
№	Плоскость	Эскиз	Деталь
1	XУ		
2			

Продолжение таблицы 1

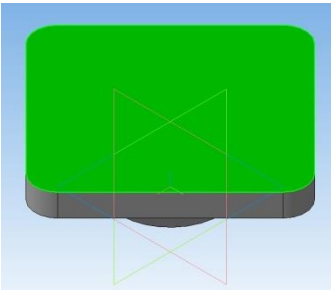
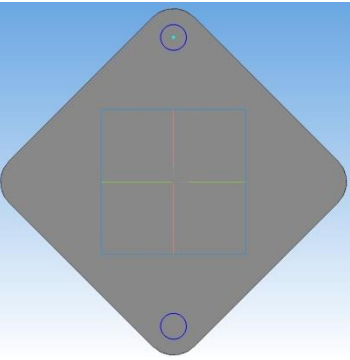
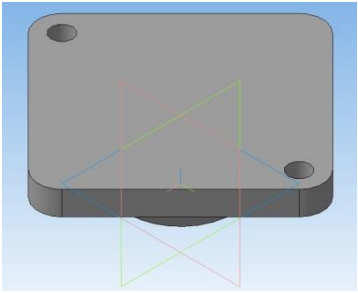
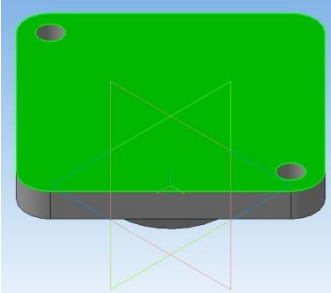
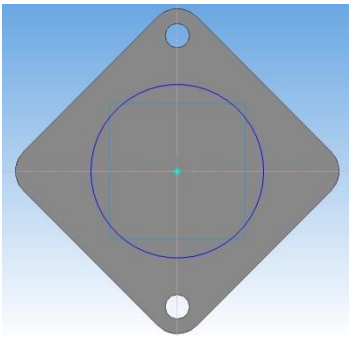
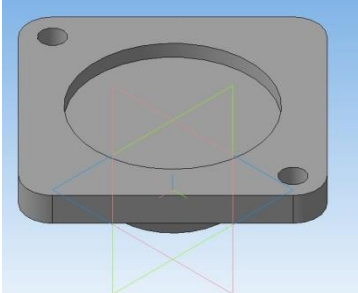
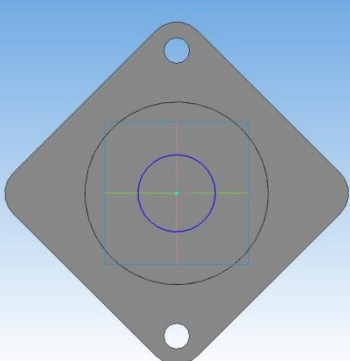
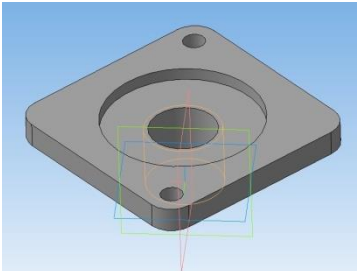
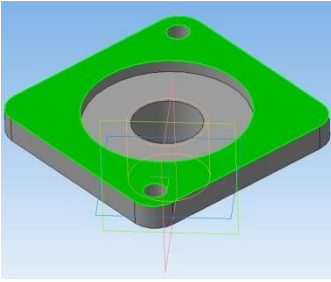
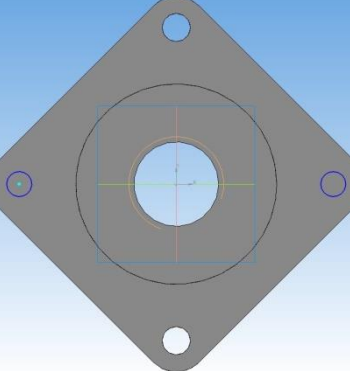
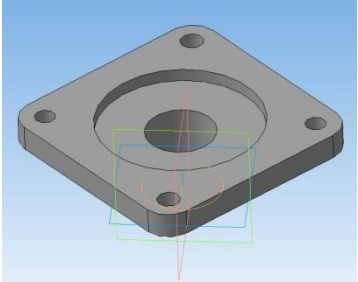
1	2	3	4
3			
4			
5	<p data-bbox="392 1319 440 1352">XY</p>		
6			

Таблица 2 – Этапы создания тарелки

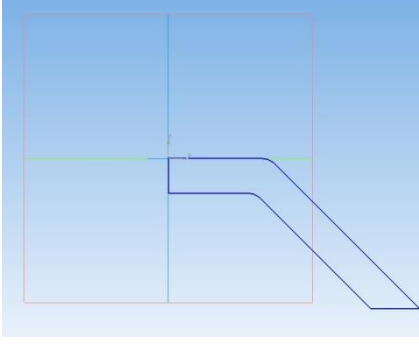
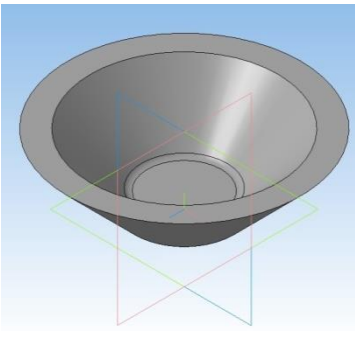
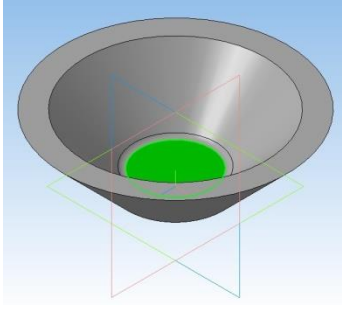
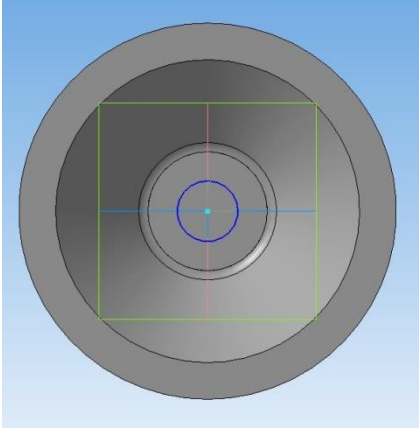
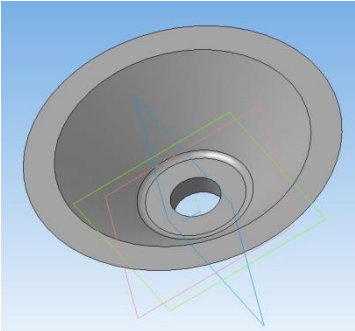
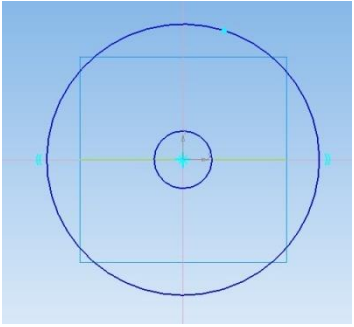
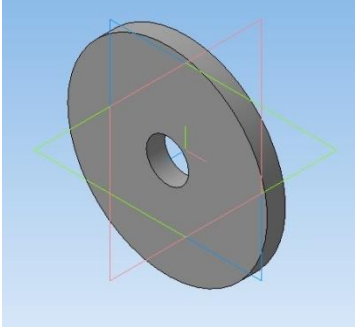
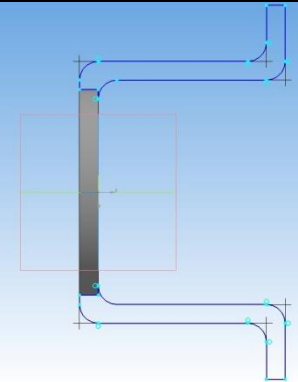
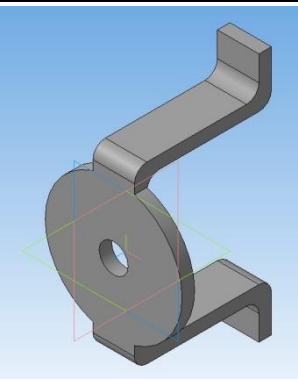
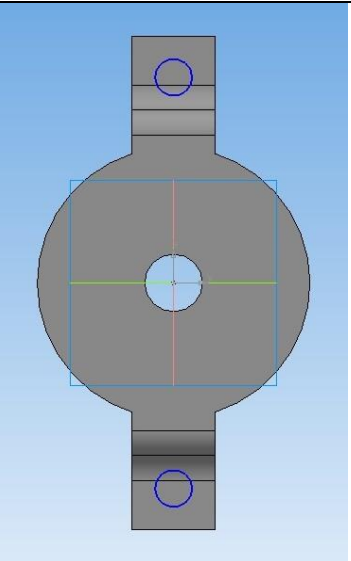
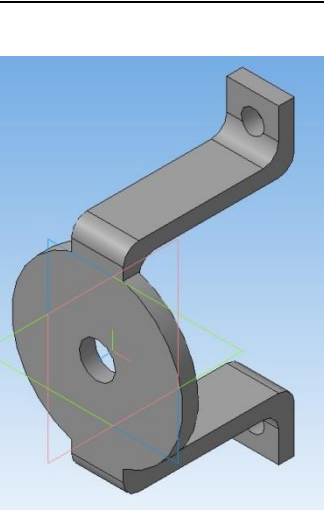
1	2	3	4
№	Плоскость	Эскиз	Деталь
1	XУ		
2			

Таблица 3 – Этапы создания фиксатора

1	2	3	4
№	Плоскость	Эскиз	Деталь
1	УZ		

2	XZ		
---	----	---	---

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
3	YZ		

Выполнив учебную задачу по созданию деталей для сборочной единицы «Основание» мы пришли к выводу, что для графического представления и создания и создания 3D-моделей чертежей различной сложности более всего подходит Компас 3D V13. Именно эта программа более всего способствует задачи освоения двумерного проектирования и 3D-моделирования при выполнении практических, лабораторных работ и учебных задач различного уровня в магистерской подготовке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В.П. Инженерная и компьютерная графика / В.П. Большаков, В.Т. Тозик, А.В. Чагина – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2013. – 276 с.
2. Ефремов Г.В. Инженерная и компьютерная графика на базе графических систем / Г.В. Ефремов, С.И. Ньюкалова – Старый Оскол: ТНТ, 2014 – 256 с.
3. Зелёный П.В. Инженерная графика. Практикум по чертежам сборочных единиц / П.В. Зелёный, Е.И. Белякова, О.Н. Кучура под ред. П.В. Зелёного – М: ИНФРА-М, 2015. – 127 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТЕКАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЛОЯ В РЕБРА

¹Сосенушкин Е.Н., ²Кадымов В.А., ¹Яновская Е.А., ³Архипов А.А., ⁴Гуреева Т.В.,
¹Гусев Д.С.

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный гуманитарно-экономический университет», Москва

³ПАО "НПО "Алмаз", Москва

⁴Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение "Школа № 1501" Москва

В машиностроении довольно часто встречаются детали квадратной или прямоугольной формы плоские, применяемые в качестве опор и подставок, с контурным оребрением, используемых в качестве коробок или корпусных деталей, а также в виде фланцев для соединения волноводов и волноводных блоков устройств сверхвысоких частот [1], один из таких фланцев показан на рис. 1.

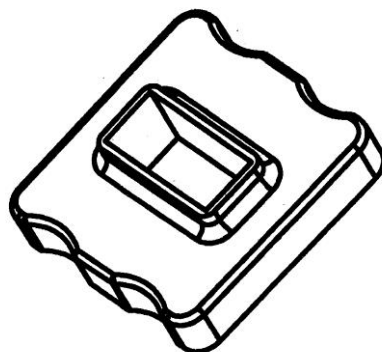


Рис. 1. Фланец для соединения волноводов

Технологией изготовления таких изделий традиционно является штамповка в холодном, полугорячем [2] и горячем [3, 4] состояниях в зависимости от механических характеристик материала фланца [5] и необходимой степени деформации при формоизменении [6].

Оценка энергосиловых параметров при деформировании перечисленных поковок проводится с помощью компьютерного моделирования, либо одним из методов приближенного расчета теории пластичности [7, 8].

При производстве некруглых поковок, имеющих ребра [9], необходимо учитывать эффект затекания металла в пазы штампа, формирующие тело ребер. Для анализа энергосиловых и кинематических параметров исследуемого технологического процесса предлагается использовать осредненную по толщине теорию течения пластического слоя в изложении А.А. Ильюшина [10]. Расчетная схема приведена на рис. 2.

Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в двусвязной области $S(x, y)$, где

$$S(x, y) = \bigcup_{i=1}^{m7} S_i(x, y). \quad (1)$$

Внешние области толщиной h_1 :

$$S_1(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_2; \\ b_3 \leq y \leq b; \end{array} \right. S_2(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} a_3 \leq x \leq a; \\ 0 \leq y \leq b_2; \end{array} \right. S_3(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} a_2 - r_1 \leq x \leq a; \\ b_2 - r_1 \leq y \leq b \end{array} \right. \quad (2)$$

Внутренние области толщиной h_2 :

$$S_4(x, y) = \begin{cases} 0 \leq x \leq a_1, \\ 0 \leq y \leq b_2 \end{cases}; S_5(x, y) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 - r_1, \\ x - a_1 \leq y \leq b_2 \end{cases}; S_6(x, y) = \begin{cases} y + a \leq x \leq a_2, \\ 0 \leq y \leq b_2 - r_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$S_7(x, y) = \begin{cases} a_2 - r_1 \leq x \leq a_2, \\ b_2 - r_1 \leq y \leq (b_2 - r_1) + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_1 - r_1))^2} \end{cases} \quad (4)$$

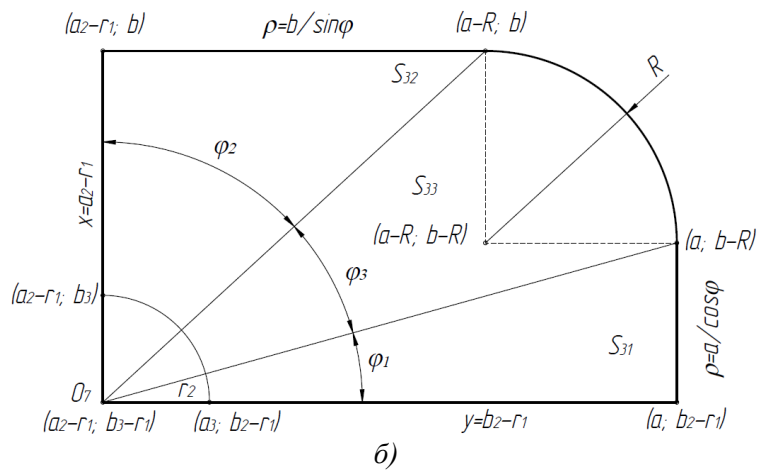
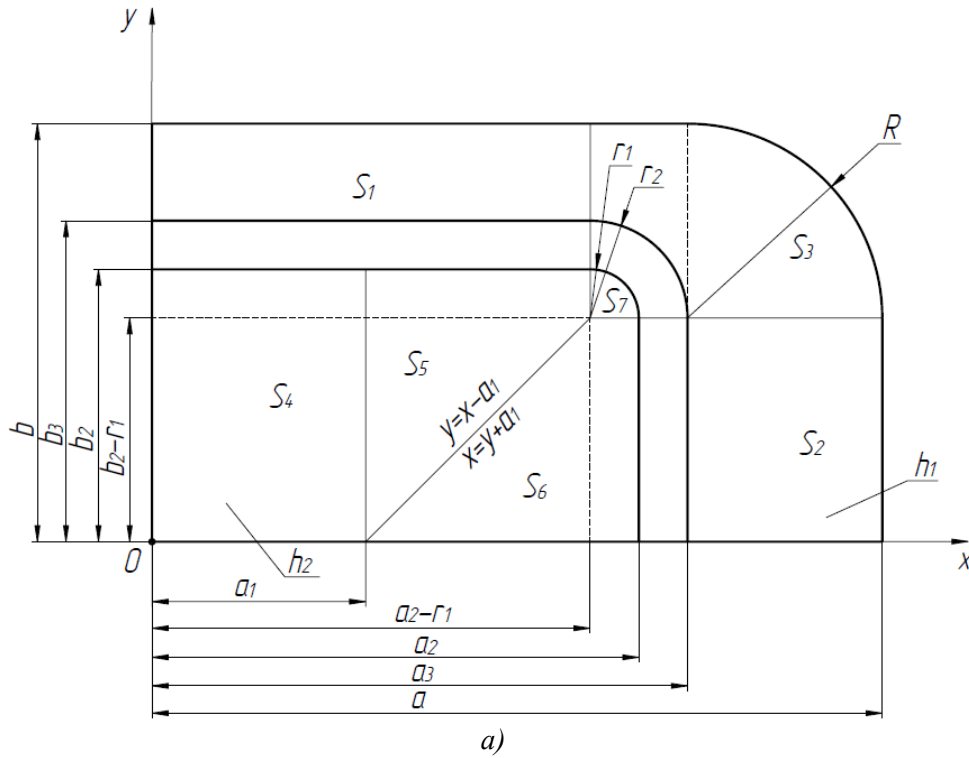


Рис. 2. Расчетная схема: а – участок поковки в I квадранте; б – разбиение области S_3

В областях S_3 и S_7 перейдем к цилиндрической системе координат, причем S_3 дополнительно разобьем на 3 зоны:

$$S_{3.1}(\rho, \varphi) = \left\{ (\rho, \varphi) \begin{cases} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{(b-b_2)-(R-r_1)}{(a-a_2)+r_1} \end{cases} \right. \quad (5)$$

$$S_{3.2}(\rho, \varphi) = \{(\rho, \varphi); \begin{aligned} (a_3 - a_2) + r_1 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin \varphi}, \\ \arctg \frac{(a-a_2)-(R-r_1)}{(b-b_2)+r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \}. \quad (6)$$

$$S_{3.3}(\rho, \varphi) = \{(\rho, \varphi); \begin{aligned} (a_3 - a_2) + r_1 \leq \rho \leq R \\ \arctg \frac{(b-b_2)-(R-r)}{(a-a_2)+r_1} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a-a_2)-(R-r)}{(b-b_2)+r_1} \end{aligned} \}. \quad (7)$$

Принимается условие полной пластичности на том основании, что касательное напряжение в слое τ_{xy} мало по сравнению с нормальными напряжениями и им можно пренебречь, причем два нормальных напряжения в поперечном (вертикальном) сечении в начальном приближении можно считать равными $\sigma_x \approx \sigma_y = -q$. Третье нормальное напряжение, постоянное по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности:

$$-\sigma_z = p = q + \sigma_s. \quad (8)$$

Уравнения краевой задачи [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)$; $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{1}{h(t)} \cdot \frac{dh}{dt}$ - степень деформации по А.А. Ильюшину;

$\tau_s(p)$ - напряжение текучести материала при сдвиге;

$u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ - компоненты скорости течения;

Будем решать задачу отдельно в каждой подобласти S_i . Граничные условия для области S_1 :

$$\begin{aligned} \text{при } y = b; \quad v &= 0 \\ \text{при } y = b_3; \quad p &= 2\tau_s \end{aligned} \quad (10)$$

Скорость течения вдоль оси x $u=0$, поэтому из системы (9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2\tau_s}{h_1};$$

После интегрирования:

$$p = \frac{2\tau_s}{h_1} y + C_{11}.$$

Воспользуемся граничным условием, что при $y = b_3$ давление $p = 2\tau_s$, тогда постоянная интегрирования определится $C_{11} = 2\tau_s \left(1 - \frac{b_3}{h_1}\right) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s b_3}{h_1}$.

Давление в области S_1 :

$$p_{s1}(y) = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_3). \quad (11)$$

Из уравнения несжимаемости системы (9):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

После интегрирования скорость течения определится, как:

$$v = \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh}{dt} y + C_{12}.$$

Постоянную интегрирования найдем из граничных условий, что при $y = b$ скорость течения $v = 0$, поэтому $C_{12} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot b$.

Окончательно скорость течения

$$v = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} (b - y). \quad (12)$$

Находим силу штамповки, приходящуюся на область S_1 :

$$\begin{aligned} P_{S_1} &= \iint_{S_1} p_{s_1}(y) dx dy = \int_0^{a_2} dx \cdot \int_{b_3}^b \left(2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (y - b_3) \right) dy = \\ &= \int_0^{a_2} \left(2\tau_s y + \frac{2\tau_s}{2h_1} (y - b_3)^2 \right) \Big|_{b_3}^b dx = 2\tau_s a_2 \left((b - b_3) + \frac{(b - b_3)^2}{2h_1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

По аналогии находим силу штамповки, приходящуюся на область S_2 :

$$\begin{aligned} P_{S_2} &= \iint_{S_2} p_{s_2}(x) dx dy = \iint_{S_2} \left(2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (x - a_3) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{b_2} dy \int_{a_3}^a \left(2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (x - a_3) \right) dx = 2\tau_s b \left((a - a_3) + \frac{(a - a_3)^2}{2h_1} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Переходим к области S_3 , границы отдельных зон которой описаны соотношениями (5) – (7). Граничные условия для зоны S_{31} : при $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$ скорости течения

$$v_\rho = 0; \quad v_\varphi = 0, \quad \text{а при } \rho = r_2 \text{ давление } p = 2\tau_s.$$

Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке $(a_2 - r_1; b_2 - r_1)$. Из первого уравнения системы (9) с учетом граничных условий $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{2\tau_s}{h_1}$ и $p(\rho) - p(r_2) = \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2)$ или $p(\rho) = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2)$.

Уравнение несжимаемости, записанное в цилиндрической системе координат $\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} = 0$, после разделения переменных $\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\rho \partial \rho} = -\frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt}$ интегрируем и подставляем пределы интегрирования $\rho v_\rho \Big|_{\frac{a}{\cos \varphi}}^{\frac{a}{\rho}} = -\frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\frac{a}{\cos \varphi}}^{\frac{a}{\rho}} + C_{31}$. Получаем выражение для скорости течения $v_\rho = -\frac{1}{2\rho h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot \left(\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - \rho^2 \right)$.

Сила штамповки, приходящаяся на S_{31} :

$$\begin{aligned} P_{S_{31}} &= \iint_{S_{31}} p(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} \left(2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2) \right) \rho d\rho d\varphi = 2\tau_s \int_0^{\varphi_1} d\varphi \left(\left(1 - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{r_2}{h_1} \right) \frac{\rho^2}{2} \Big|_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} + \frac{\rho^3}{3h_1} \Big|_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} \right) = 2\tau_s \left(\frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_1 + \tau_s \left(1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{2\tau_s a^3}{3h_1} \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{(\cos \varphi)^3} d\varphi \\ P_{S_{31}} &= 2\tau_s \left(\frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_1 + \tau_s \left(1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{2\tau_s a^3}{3h_1} \cdot \left[\frac{\sin \varphi_1}{(\cos \varphi_1)^2} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

По аналогии для зоны S_{32} :

$$P_{S_{32}}^{(32)} = 2\tau_s \left(\frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_2 + \tau_s \left(1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg}(\varphi_2) + 2\tau_s \frac{a^3}{3h_1} \left[\frac{\sin \varphi_2}{(\cos \varphi_2)^2} - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right| \right]; \quad (16)$$

и зоны S_{33} :

$$P_{S_{33}} = \frac{\tau_s}{3} \left(\frac{\pi}{2} - (\varphi_2 + \varphi_1) \right) \cdot (R^2 - r_2^2) \cdot \left(3 + \frac{2R}{h_1} - \frac{r_2}{h_1} \right). \quad (17)$$

Для области S_4 :

$$P_{s_4}^{(4)} = 2\tau_s a_1 \left(b_2 - \frac{b_2^2}{2h_2} \right). \quad (18)$$

Для области S_5 :

$$P_{s_5} = \tau_s ((a_2 - a_1) - r_1) + \frac{\tau_s}{3h_2} ((a_2 - a_1) - 2b_2 - r_1)((a_2 - a_1) - (b_2 + r_1))^2 + b_2((a_2 - a_1) - r_1). \quad (19)$$

Для области S_6 :

$$P_{s_6} = \tau_s (b_2 - r_1)(2(a_2 - a_1) - (b_2 - r_1)) + \frac{\tau_s (b_2 - r_1)}{3h_2} \times ((b_2 - r_1)^2 - 3(b_2 - r_1)(a_2 - a_1) + 3(a_2 - a_1)^2). \quad (20)$$

Для области S_7 :

$$P_{s_7} = \frac{\tau_s \pi / 2}{h_2} r_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} r_1 \right). \quad (21)$$

Общая сила штамповки фланца определится как сумма компонент по областям S_i

$$P_{\Sigma} = 4 \sum_{i=1}^7 P_{s_i}. \quad (22)$$

Один из типоразмеров поковки имеет следующие размеры: толщина фланца $h_1 = 8$ мм; радиус закругления фланца $R = 4$ мм; радиусы закругления в месте пересечения рёбер $r_1 = r_2 = 2$ мм; размеры фланца в плане $2a = 2b = 42$ мм; размеры центрального отверстия, образованного рёбрами, $2a_2 = 22$ мм; $2b_2 = 9$ мм. Материал: алюминиевый сплав АД0 ГОСТ 21488-77 с механическими характеристиками $\sigma_b = 53$ МПа; $\sigma_{02} = 37$ МПа; $\tau_s = 30,6$ МПа [5]. Результаты расчета сил деформирования по разработанной математической модели для данной поковки представлены в виде графиков на рис. 3.

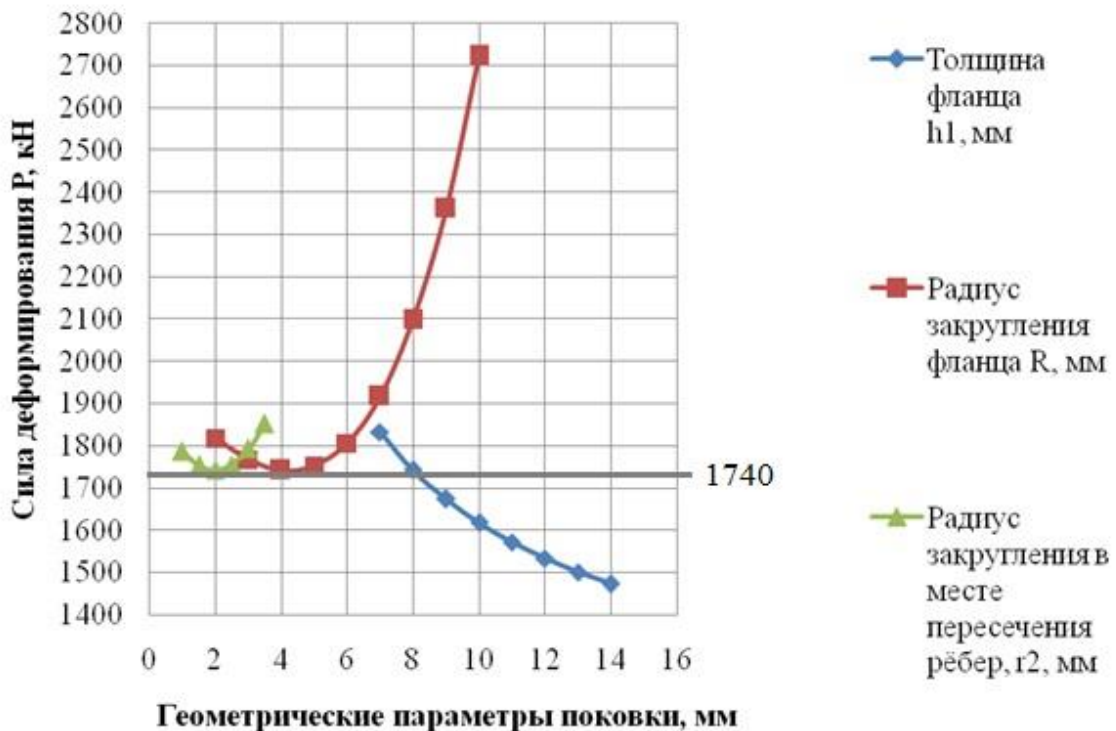


Рис. 3. Влияние геометрических параметров поковки на силу деформирования

Анализ графиков показывает, что для поковки с указанными размерами, сила деформирования, равная 1740 кН, соответствует минимальной величине, а значения радиусов закругления являются оптимальными.

Вывод. Разработана математическая модель для решения задачи сжатия пластического слоя со свободным затеканием металла в ребра. Установлена взаимосвязь сил деформирования с геометрическими параметрами штампуемого плоского фланца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосенушкин Е.Н. Повышение эффективности технологического процесса изготовления волноводных фланцев / Е.Н. Сосенушкин, А.А. Архипов /Сб. научных статей и докладов «Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечно-прессового машиностроения» - Рязань: ООО «Экспресс печать». 2017. -С.99-103.
2. Сосенушкин Е.Н. Прогрессивные технологии объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин - М.: Машиностроение, 2011. - 480 с.
3. Сосенушкин Е.Н. Разработка ресурсосберегающей технологии производства фланцевых поковок на универсальном оборудовании/ Е.Н. Сосенушкин В.В. Белокопытов // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №3(11). - С.35-41.
4. Каплунов Б.Г. Патент №2352431 РФ Способ штамповки поковок фланцев воротниковых/ Б.Г. Каплунов, В.М. Тяжельников, С.П. Зуев и др. ООО НПО «Интеграл». 10.10.2008.
5. Механические свойства легких сплавов при температурах и скоростях обработки давлением: Справ. издание. / П.Г. Микляев. - М.: Металлургия, 1994. - 288 с.
6. Бильчук М.В. Прогнозирование образования поверхностных дефектов фланцевой части поковок при горячей объемной штамповке/ М.В. Бильчук, Е.Н. Сосенушкин// Вестник МГТУ «Станкин». 2012. №4(23). - С.44-48.
7. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением/ М.В. Сторожев, Е.А. Попов - М.: Машиностроение, 1977. - 423 с.
8. Воронцов А.Л. Теория штамповки выдавливанием/ А.Л. Воронцов - М.: Машиностроение-1, 2004. 721 с.
9. Соломонов К.Н. Моделирование формообразования поковки с контурным оребрением/ К.Н. Соломонов, Л.И. Тищук, Е.А. Листров и др. // Известия Юго-Западного гос. ун-та. Сер. Техника и технологии. 2016. №4 (21). - С. 45-51.
10. Ильюшин А.А. Труды (1946 – 1966). Т.2. Пластичность/ А.А. Ильюшин - М.: Физматлит, 2004. - 480 с.
11. Кадымов В.А., Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2016 г)/ Под ред. проф. Г.Л. Бровко, проф. Р.А. Васина, проф. Д.В. Георгиевского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С.180-185.
12. Кадымов В.А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое: Монография. – М.: МГГЭУ, 2015. – 122 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТАПРЕДМЕТНОГО ПОДХОДА В ВОПРОСАХ ИНТЕГРАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

¹Гончарова И.А., ¹Кончина Л.В., ¹Куликова М.Г., ¹Маслова К.С.

¹Филиал ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» в г. Смоленске, Смоленск

На сегодняшний момент главной целью общеобразовательной школы является умственное, нравственное, эмоциональное, физическое, творческое развитие личности ученика, что будет способствовать правильному самоопределению в дальнейшей жизни. Но жизненный барьер по окончании школы при поступлении в ВУЗ далеко не каждому удастся преодолеть успешно. По данным Центра внутреннего мониторинга России, 15% россиян имеют неполное высшее образование, т.е. в большинстве случаев они были отчислены с первых, иногда с последних курсов ВУЗов.

Основной причиной отчисления наряду с неорганизованностью в учебе, является низкий уровень базовых знаний и разочарование в выбранной специальности. Поэтому вопросы жизненного определения будущих студентов волнуют в равной мере школьных учителей и преподавателей вузов. [1]

В данной статье изложен материал, связанный с вопросами общеобразовательной и профессиональной подготовки.

Проблема: повышение качества подготовки будущих абитуриентов путем интеграции общеобразовательной и профессиональной подготовки.

Объект исследования: подготовка учащихся с учетом их будущего самоопределения в профессиональной подготовке.

Предмет исследования: содержание, средства и методические основы метапредметного подхода в интеграции общеобразовательной и профессиональной подготовки.

Цель исследования: разработка методики метапредметного подхода в интеграции общеобразовательной и профессиональной подготовки.

На базе филиала ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске более 15 лет проводятся занятия в профильных классах на базе МБОУ СОШ № 33 и Лицея №1. Подготовка учащихся данных классов ориентирована на успешную сдачу единого государственного экзамена по программе средней школы и дальнейшее поступление в филиал МЭИ в г. Смоленске и другие технические ВУЗы.

Данная форма интеграции общеобразовательной и профессиональной подготовки успешно выполняет компенсирующую функцию образования. Занятия с опытными преподавателями филиала направлены на ликвидацию пробелов и приведение уровня школьного образования в соответствии с требованиями ВУЗа.

Педагогический коллектив филиала работает над задачей информационно-профориентационной деятельности, направленной на осознанный выбор именно инженерной специальности выпускниками школ.

Так, в филиале ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске на базе выпускающей кафедры «Технологические машины и оборудование» (ТМО) разработан учебный комплекс программы «Моделирование3D – это просто!» и с 2015 года проводятся занятия со школьниками 10-11 классов различных школ города Смоленска.

Помимо профориентационной функции, данные занятия имеют развивающий смысл. Школьникам предлагается работа с заданиями различной сложности, связанные с программами таких дисциплин как «Инженерная и компьютерная графика», «Детали машин», «Основы расчета и конструирования оборудования» и др.

В ходе занятий школьники учатся составлять чертежи различной сложности в 2D редакторе программы Компас 3D, конструируют 3D модели простых и более сложных деталей, и продолжают на работу с созданными деталями на 3D принтере. На наш взгляд, именно в результате такой работы реализуется освоение метапредмета «Задача», выделенного нами. Учащиеся сами могут поставить перед собой творческие задачи любой сложности. Приведем следующий пример. [2]

В ходе знакомства с возможностями программы Компас 3D, учащиеся выполняют задачу по моделированию поверхности вращения. Поверхность должна быть приближена к окружающим нас бытовым предметам. Одна из простых форм – это поверхность-стакан.

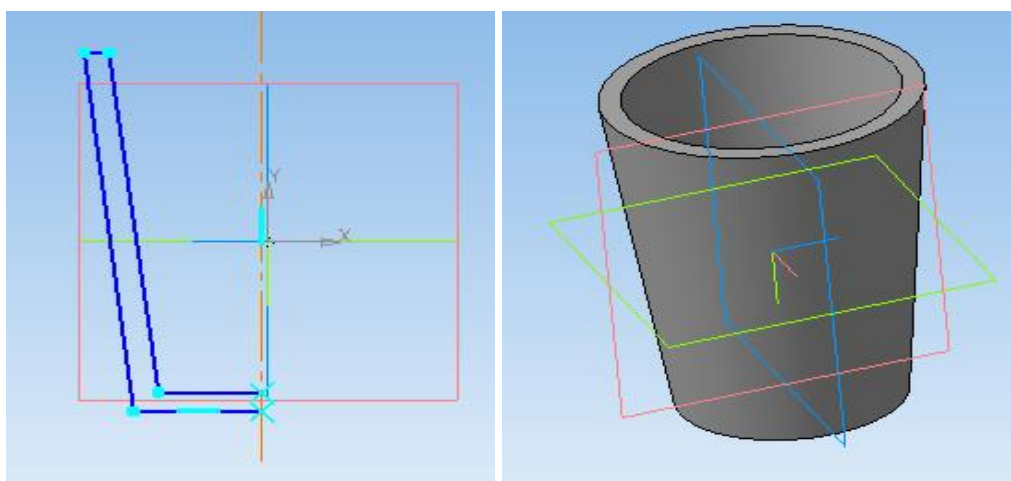


Рис. 1. Этапы моделирования поверхности вращения

Но задачу можно усложнить. Как получить более сложную поверхность вращения? Некоторые учащиеся предлагают создать совершенно новый эскиз. Это было бы одним из решений задачи. Но более оптимальный вариант – редактировать уже имеющийся эскиз другими командами. Редактирование может происходить неограниченное количество раз.

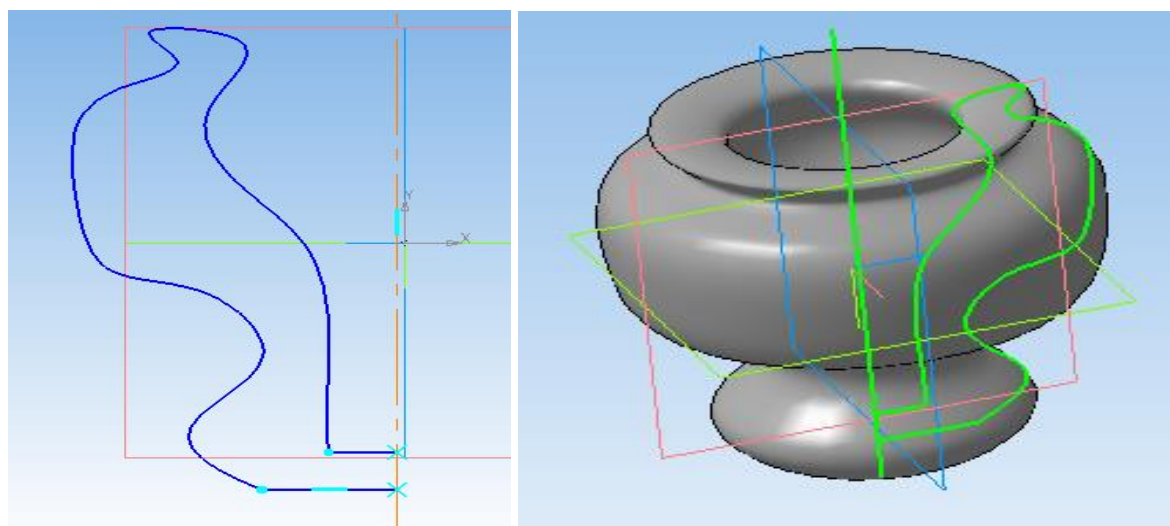


Рис. 2. Этапы моделирования сложной поверхности вращения

В качестве практического примера можно привести следующую модель проведения занятий по применению полученных навыков составления чертежей в программе Компас 3D. Имеющееся на кафедре «Технологические машины и оборудование» филиала ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске лабораторное оборудование позволяет школьникам выпускных классов, ознакомившись на первом этапе с такими понятиями, как механизм, деталь, звено, кинематическая схема, примерами изображения звеньев механизмов на кинематических схемах, получить азы знаний о классификации механизмов.

На следующем этапе на лабораторном оборудовании кафедры ТМО происходит практическое ознакомление школьников с механическими передачами и их классификацией. Рассмотрев кинематические схемы и технические характеристики конического, червячного, различных цилиндрических зубчатых редукторов, имеющих на кафедре, учащиеся школ знакомятся с их практическим применением, конструкцией и назначением отдельных частей и элементов редукторов путем их разборки, осмотра, а также получают первичные знания по выполнению эскиза простой детали с соблюдением правил ЕСКД.

Далее, изучив достоинства и недостатки зубчатых передач, на имеющемся на кафедре ТМО оборудовании школьники имеют возможность ознакомиться с классификацией зубчатых передач.

Освоив информацию о конструкциях зубчатых колёсах и материалах, используемых для их изготовления, ученики получают первоначальные знания о следующих способах изготовления зубчатых колёс: литье, штамповка, накатка зубьев на заготовке, нарезание. В зависимости от назначения, используя технологические соображения, выбирают способ изготовления зубчатых колёс.

На практике для нарезания зубьев часто используются способы копирования и обкатки. Этим обусловлен следующий этап при проведении практических занятий с школьниками, вызывающий их особый интерес к освоению программы «Моделирование 3D – это просто!». Используя практические навыки, полученные на оборудовании кафедры ТМО, в процессе обучения черчению в 2D редакторе программы Компас 3D, учащиеся конструируют модели зубчатых колёс, которые затем используются для получения зубчатых колёс с использованием имеющегося на кафедре 3D принтера.

На этом же этапе происходит ознакомление с нарезанием эвольвентных зубчатых колёс методом обката инструментальной рейкой с использованием учебной модели ТММ-42, применяемой в учебном процессе освоения дисциплин цикла «Механика» кафедрой «Технологические машины и оборудование». Изучив устройство и принцип работы модели ТММ-42, разделив бумажный круг-заготовку на три равные части и закрепив его на диске прибора, учащиеся опробуют механизм передвижения рейки, получают контуры зубьев и азы знаний об основных параметрах эвольвентного зацепления.

Исследование таких основных видов повреждений и разрушений зубьев, как поломка, выкрашивание, изнашивание, заедание, завершает знакомство школьников с первичными знаниями курса дисциплин механического цикла: Основы проектирования, Основы конструирования и детали машин, Техническая механика.

Материально-техническая оснащённость кафедры ТМО позволяет проводить дальнейшие практические занятия по обработке разработанных школьниками 3D моделей деталей на металлорежущих станках в специально оборудованных лабораториях кафедры. Таким образом учащиеся школ г. Смоленска получают азы знаний по следующим дисциплинам направления «Технологические машины и

оборудование» - Технология конструкционных материалов, Основы технологии машиностроения.

Изучив практическое назначение, классификацию валов и осей, материалы, используемые для их изготовления, элементы конструкций валов, школьники под руководством преподавателей кафедры ТМО конструируют модели ступенчатых валов, используя практические навыки, полученные в процессе обучения черчению в 2D редакторе программы Компас 3D, которые затем могут быть использованы также для их изготовления на 3D принтере кафедры и при проведении практических занятий на металлорежущих станках.

Школьникам также даются теоретические знания по робототехнике и мехатронике о современном уровне науки и техники и перспективах развития в данной области. О возможностях применения полученных школьниками знаний при разработке 3D моделей в реальных устройствах и перспективах развития данной темы в соответствии с направлением обучения кафедры ТМО. Тем самым вызывается интерес школьников и реализуется профориентационная составляющая работы с будущими абитуриентами.

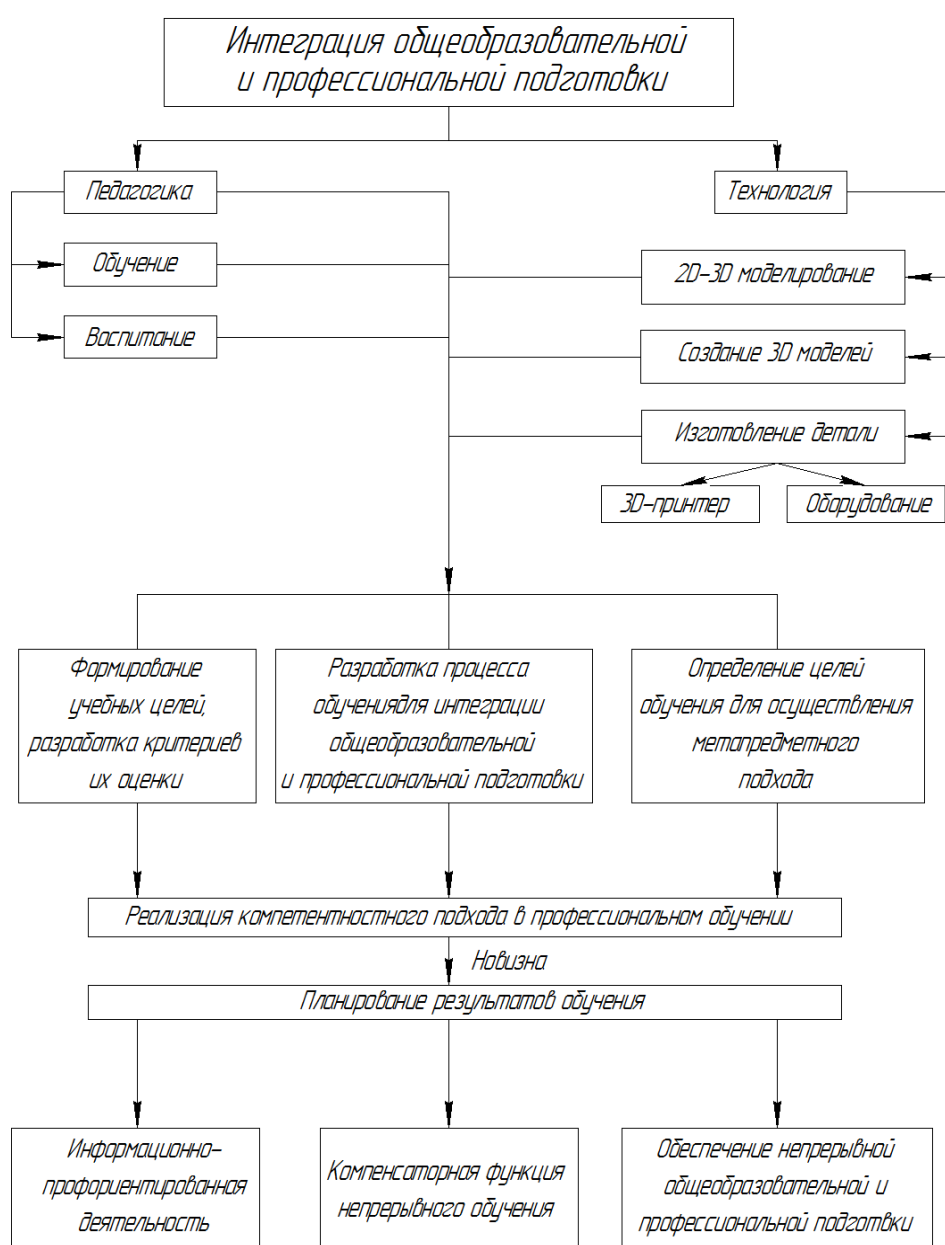


Рис. 3. Интеграция общеобразовательной и профессиональной подготовки

В данной цепочке занятий реализуются принципы межпредметных связей и метапредметного подхода в образовании, что соответствует последним стандартам образовательных программ. [3]

Помимо этого, на занятиях выполняется адаптирующая функция довузовской подготовки, имеющая своей целью облегчить приспособление школьников к структуре учебного процесса ВУЗа, его технологиям и содержанию.

Педагогический коллектив кафедры привлекает к работе со школьниками и наиболее успевающих студентов. В этой ситуации важна воспитательная функция как для школьников, так и для студентов. Ведь любая система успешно работает только при наличии обратной связи, когда все звенья совершенствуются, учитывая требования друг друга.

На данный момент коллектив преподавателей и студентов кафедры ТМО филиала ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске активно способствует определению новых форм работы в довузовской подготовке, и готов к решению поставленных задач в системе непрерывного образования «Школа-ВУЗ».

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева Т.С. ФГОС нового поколения о требованиях к результатам обучения//Теория и практика образования в современном мире: материалы 4 Междунар. науч. конф. (г. Санкт- Петербург, январь 2014 г.). – СПб.: Заневская площадь, 2014. –С. 74-76. - URL <https://moluch.ru/conf/ped/archive/99/4793>
2. Гончарова И.А. Подготовка будущих инженеров к использованию инструментальных программных средств при решении и моделировании научных и учебных задач. Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat <http://www.dissercat.com/content/podgotovka-budushchikh-inzhenerov-k-ispolzovaniyu-instrumentalnykh-programmnykh-sredstv-pri-#ixzz51ixrG87u>
3. Гончарова И.А., Гончаров М.М. Метапредмет и решение учебных, научных, прикладных задач в подготовке выпускников технических вузов// *Colloquium-journal*. 2017. № 11-3 (11). С. 5-6.
4. Лавриненко С.В. Технология подготовки студентов технического вуза к профессиональной деятельности на высокотехнологичных предприятиях атомной энергетики // *Современные проблемы науки и образования*. – 2018. – № 3.; URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27607> (дата обращения: 24.07.2018).
5. Березина С.Л., Горячева В.Н., Елисеева Е.А., Слынько Л.Е. Самостоятельная научно-исследовательская деятельность студентов технических университетов как средство повышения качества инженерной подготовки // *Современные проблемы науки и образования*. – 2018. – № 3.; URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27664> (дата обращения: 24.07.2018).
6. Вязанкова В.В., Медведев А.М. Педагогические условия использования метода проектов в преподавании графических дисциплин в техническом вузе // *Современные проблемы науки и образования*. – 2018. – № 1.; URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27394> (дата обращения: 24.07.2018).

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ НА ШЕСТИКООРДИНАТНОМ ГИБРИДНОМ ПРИВОДЕ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

маг. ¹Кузнецов В.В.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. В настоящее время особенно остро ставится задача дальнейшей интенсификации производства, повышения его эффективности и обеспечения выпуска конкурентоспособной продукции. Достижение этих целей возможно лишь при осуществлении существенного роста производительности технологического оборудования и наиболее полной его автоматизации. Для приборостроения и микроэлектроники также остро ставится проблема повышения точности, связанная с развитием мехатроники, микромеханики и особенно с высокими темпами уменьшения топологической нормы при производстве изделий электронной техники [1]. Эффективным средством реализации этих целей является широкое внедрение и применение гибкого автоматизированного оборудования, построенного на системах перемещений параллельной кинематики с гибридным приводом прямого действия.

В настоящей работе в развитие предложенной нами концепции реализации управляемого движения в трехмерном пространстве на базе многокоординатного привода прямого действия и реконфигурируемых механизмов параллельной кинематики [1] представлена алгоритмизация прямой задачи кинематики мехатронной системы на шестикоординатном гибридном приводе прямого действия.

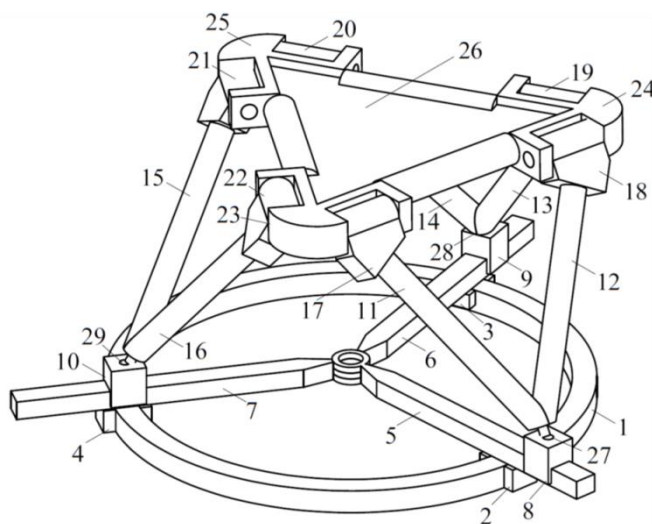


Рис. 1. Структурно-кинематическая схема мехатронной системы

Мехатронная система параллельной кинематики на шестикоординатном гибридном приводе. Мехатронная система параллельной кинематики, рассматриваемая в настоящей статье, состоит из механизма параллельной кинематики с шестью степенями свободы, предложенного нами (заявка на изобретение № и 20180183 от 2018 г.) и разработанного нами для этой мехатронной системы гибридного шестикоординатного привода прямого действия, который состоит из трёхкоординатного кольцевого шагового двигателя и трёх независимых линейных

двигателей, линейные направляющие которых установлены на подвижных сегментных модулях кольцевого двигателя. Структурно-кинематическая схема этой мехатронной системы представлена на рисунке 1.

Механизм параллельной кинематики, входящий в мехатронную систему (рисунок 1), состоит из трех параллельных кинематических цепей, содержащих три подвижных треугольных шатуна в виде двойных элементов 11–12, 13–14, 15–16, связанных с одной стороны вращательными шарнирами 17–23, 18–24, 19–24, 20–25, 21–25, 22–23 с подвижной треугольной платформой 26, а с другой стороны связанных сферическими шарнирами 27, 28, 29 с тремя автономно управляемыми линейными шаговыми двигателями 8, 9, 10, линейные направляющие которых 5, 6, 7 с одной стороны, шарнирно соединены между собой, а с другой стороны жёстко закреплены на соответствующих подвижных сегментных модулях 2, 3, 4 кольцевого шагового двигателя, неподвижная направляющая которых представляет основание замкнутого кольцевого статора 1. Он работает следующим образом. При секторных перемещениях трёх сегментных модулей 2, 3, 4 в соответствии с заданными на входе системой управления законами их движения по неподвижной направляющей замкнутого кольцевого статора 1 кольцевого шагового двигателя и одновременно при линейных перемещениях, реализуемых тремя линейными шаговыми двигателями 8, 9, 10 в соответствии с заданными системой управления законами их движения по подвижным линейным направляющим 5, 6, 7 через сферические шарниры 27, 28, 29, шатуны 11–12, 13–14, 15–16 и соответствующие вращательные шарниры 17–23, 18–24, 19–24, 20–25, 21–25, 22–23 приводится в пространственное движение исполнительная платформа 26. В зависимости от конкретно задаваемого секторного положения относительно статора 1 сегментных модулей 2, 3, 4 и конкретных положений линейных подвижных модулей 8, 9, 10 рабочая платформа 26 принимает однозначное и соответствующие им положение и ориентацию в трёхмерном пространстве. Таким образом с помощью предложенного механизма параллельной кинематики могут быть реализованы прецизионные движения с шестью степенями свободы по шести независимым координатам в трёхмерном пространстве, включая три линейные и три угловые, обеспечивая в то же время высокие кинематические и динамические характеристики перемещений при высокой точности их реализации. При этом обеспечивается реализация дополнительного управляемого разворота вокруг вертикальной оси в диапазоне ± 360 градусов, что расширяет область управляемого движения с перспективой построения на его основе современного прецизионного, фрезерного, сверлильного оборудования, прецизионных промышленных роботов и платформ, например, для телескопов, лазеров, телекоммуникационных антенн.

Расчётная схема алгоритмизации. Решение прямой задачи кинематики [2] для рассматриваемого в работе механизма параллельной кинематики с шестью степенями свободы (рисунок 2) состоит в нахождении координат точек A, B, C платформы 4 в зависимости от координат точек D, E и F подвижных модулей используемого гибридного шестикоординатного привода прямого действия может быть выполнено различными способами по условию кинематической замкнутости входящего в мехатронную систему исполнительного механизма параллельной кинематики, оптимальным из которых будет тот, который приводит к минимальному объёму вычислений в итерационном алгоритме моделирования.

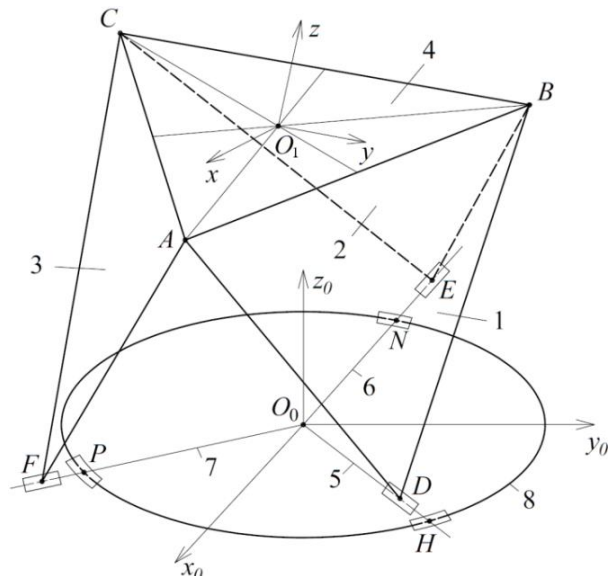


Рис. 2. Расчётная схема механизма параллельной кинематики

Так, если формировать расчётные уравнения непосредственно по условиям замкнутости контура из подвижных звеньев исполнительного раскрывающегося тетраэдра, то, очевидно, их число будет равно девяти [2, 3] по числу рёбер тетраэдра, и число независимых перемещений, подлежащих нахождению при решении прямой задачи будет тоже девять. Это координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, и учитывая, что координаты точек $D(x_D, y_D, z_D)$, $E(x_E, y_E, z_E)$ и $F(x_F, y_F, z_F)$ известны, так как определяются реализуемыми управлениями многокоординатного привода.

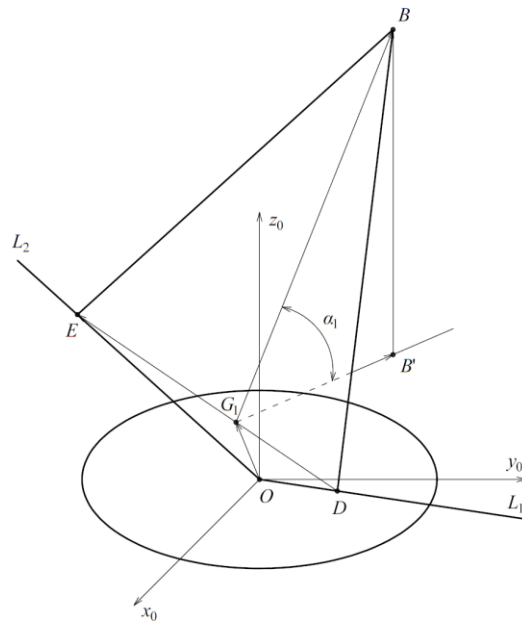


Рис. 3. Расчётная схема для углового параметра α_1

Проведенный в работе анализ возможных расчётных моделей и алгоритмов решения прямой задачи кинематики предложенного механизма показал, что возможно сокращение уравнений в системе кинематической замкнутости до трёх той же аналитической структуры. Для этого нами предложен подход алгоритмизации, основанный на рассмотрении фрагмента расчётной схемы, представленной на рисунке 3, позволяющий заменить координатные представления решения прямой задачи, в частности для точки $B(x_B, y_B, z_B)$ на параметрическое с введением

позиционного углового параметра α_1 , зависящего от координат текущего положения точек D и E на линейных направляющих, соответственно L_1 и L_2 , принадлежащих подвижным элементам линейных шаговых двигателей.

В результате реализации предложенного подхода удалось многопараметрическую задачу о положениях точек A, B и C , свести к однопараметрической задаче нахождения угловых параметров $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ соответственно для каждого из трёх подвижных контуров DBE, ECF и FAD . Так, для контура DBE , определяющего положение точки B , вводится угловой параметр α_1 в виде угла образованного треугольником DBE с плоскостью кольцевого двигателя совпадающей с плоскостью x_0Oy_0 . Здесь DB и EB стороны соседних треугольных звеньев ADB и BEC (рисунок 2). Необходимо отметить, что алгоритм решения задачи о положениях является главной вычислительной составляющей алгоритмизации решения прямой задачи кинематики.

Алгоритмизация математической модели. Из расчётной схемы (рисунок 3), видно, что при изменении положения точек D и E на направляющих L_1 и L_2 меняется положение и ориентация контура DBE , при этом положение определяется задаваемыми координатами точек D и E , а ориентация определяется угловым параметром α_1 , связывающим искомые координаты точки $B(x_B, y_B, z_B)$ и задаваемые координаты точек $D(x_D, y_D, 0)$ и $E(x_E, y_E, 0)$ гибридного привода. Для нахождения уравнений этой кинематической связи необходимо рассмотреть векторные контуры OG_1B и OG_1B' (рисунок 3) согласно которым получим

$$\overline{OG_1} + \overline{G_1B} = \overline{OG_1} + \overline{G_1B'} + \overline{B'B}. \quad (1)$$

Так как треугольник DBE равнобедренный с переменным по длине основанием DE , то угловой параметр α_1 будет определяться углом между векторами $\overline{G_1B'}$ и $\overline{G_1B}$, где $\overline{G_1B'} \perp \overline{DE}$ и $G_1B \perp BE$. В этом случае точка G_1 делит отрезок DE пополам, а это значит, что вектор $\overline{OG_1} = \left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2} \right)$ или $G_1 \left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2} \right)$.

Угол, образованный вектором \overline{DE} с осью x_0 , обозначим θ_1 , согласно рисунку 3 его можно определить по координатам двух точек D и E в виде

$$\theta_1 = \arctg \left(\frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} \right). \quad (2)$$

При этом однозначное определение угла θ_1 , связанное с выбором четверти решения, выполняется по результатам вычисления $\sin \theta_1$ и $\cos \theta_1$ по сопоставлению их знаков.

Угол между вектором $\overline{G_1B'}$ и осью x_0 , обозначенный θ_1' , согласно рисунку 3 равен

$$\theta_1' = \theta_1 - 90^\circ. \quad (3)$$

В свою очередь $G_1B' = G_1B \cos \alpha_1$, а $B'B = z_B = G_1B \sin \alpha_1$.

Для нахождения уравнений связей координат точки B и углового параметра α_1 спроецируем векторное уравнение (1) на оси x_0, y_0 и z_0 . В результате окончательно получим:

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_E + x_D}{2} + G_1 B \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \\ y_B = \frac{y_E + y_D}{2} + G_1 B \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \\ z_B = G_1 B \sin \alpha_1, \end{cases} \quad (4)$$

где $G_1 B = \sqrt{a^2 - \frac{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2}{4}}$.

Координаты точек *A* и *C* находим, используя тот же подход, что и для нахождения координат точки *B*. Окончательно получим следующие расчётные системы уравнения.

Для точки *A* получим:

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_D + x_F}{2} + G_2 A \cos \alpha_2 \cos \theta_2' \\ y_A = \frac{y_D + y_F}{2} + G_2 A \cos \alpha_2 \sin \theta_2' \\ z_A = G_2 A \sin \alpha_2, \end{cases} \quad (5)$$

где $G_2 A = \sqrt{a^2 - \frac{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2}{4}}$.

Для точки *C* получим:

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_E + x_F}{2} + G_3 C \cos \alpha_3 \cos \theta_3' \\ y_C = \frac{y_E + y_F}{2} + G_3 C \cos \alpha_3 \sin \theta_3' \\ z_C = G_3 C \sin \alpha_3, \end{cases} \quad (6)$$

где $G_3 C = \sqrt{a^2 - \frac{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}{4}}$.

Положение точек *A*, *B* и *C*, реализуемые тремя параллельными кинематическими цепями кинематически связаны с рабочей платформой 4 (рисунок 2), которая представляет собой равносторонний треугольник *ABC* со сторонами равными *a*. С учётом этого конечная математическая модель кинематики всей системы будет выражаться следующей системой из трёх уравнений

$$\begin{cases} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = a^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = a^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = a^2, \end{cases} \quad (7)$$

где все координаты точек *A*, *B* и *C* определяются по ранее полученным выражениям (4), (5) и (6), сводя решение прямой задачи кинематики к решению системы из трёх нелинейных уравнений относительно трёх неизвестных в виде угловых параметров α_1, α_2 и α_3 . Нахождение последних выполняется одним из численных методов реализованных в программном обеспечении MATLAB. Обратной подстановкой α_1, α_2 и α_3 в соответствующие уравнения систем (4), (5) и (6) даёт искомые координаты точек *A*, *B* и *C* в зависимости от управляемых положения точек *D*, *E* и *F* шестикоординатного гибридного привода прямого действия.

Предложенная нами математическая модель при последовательном формировании аналитических выражений представляет собой алгоритмизацию, на

основании разработанного программного модуля компьютерного исследования было выполнено верификационное имитационное моделирование прямой кинематики, которое показало полную адекватность разработанной модели и алгоритмов в решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
2. Kuzniatsou V.U. Computer modeling of kinematics and dynamics of parallel manipulator with six degrees of freedom / V.U. Kuzniatsou // *Present Day Trends of Innovations 7*. – Zilina, Slovakia : Printing House of Zilina University, 2017. – P. 65–73.
3. Huang, Z. *Theory of parallel Mechanisms* / Z. Huang, Q. Li, H. Ding – Springer, 2012 – 419 p.

ВЕРСИОНИРОВАНИЕ И КОНТРОЛЬ ЦЕЛОСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ МНОГОКООРДИНАТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

маг. ¹Марко А.Ф., маг. ¹Манин А.С., маг. ¹Нестеренко В.Н.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. Объединение узлов точной механики с электронными, электрическими и компьютерными компонентами позволило осуществлять проектирование и производство качественно новых модулей, систем и машин с их интеллектуальным управлением [1]. С развитием электрических приводов и возможностей их применения в индустриально-производственных и транспортных системах, стала очевидна необходимость полной интеграции составляющих элементов электропривода: механики, электрических машин, силовой электроники, микропроцессорной техники и программного обеспечения для наиболее полного использования возможностей современного электропривода, и построения на его основе мехатронных систем перемещения [2]. Можно выделить следующие основные компоненты мехатронной системы прецизионных перемещений: объект перемещения, электропривод (с обратными связями либо без них), драйвер электропривода, интеллектуальный контроллер, аппаратно-программное обеспечение системы управления, пользовательский интерфейс.

Традиционные системы перемещений используют ПЛК-технологии для выполнения задачи управления и включают в свой состав следующие аппаратные и программные элементы: ПК для визуализации, ПЛК с различными сопроцессорами, ввод/вывод через полевую шину, управление движением через параллельный интерфейс LPT, операционную систему и различные языки программирования.

Проведённый анализ современных программно-аппаратных средств показал, что наиболее эффективной технологией для реализации управления системами многокоординатных перемещений в режиме реального времени является технология EtherCAT, внедрение которой требует разработки дополнительных программных приложений [1].

Разработка программного обеспечения требует применения специальных инструментов, которые повышают эффективность разработки за счёт снижения трудоёмкости выполняемых операций. К таким инструментам относятся различные среды разработки общего программного обеспечения и программных средств систем управления [3].

В рамках настоящей работы рассматривается программное обеспечение для версионирования и контроля целостности при управлении системами многокоординатных перемещений в режиме реального времени. Разработка данного программного обеспечения выполнялась в интегрированной среде разработки Visual Studio и комплексной системе управления версиями Team Foundation Server [4].

Мехатронная система параллельной кинематики на шестикоординатном гибридном приводе. Для управления в реальном времени всё большее распространение получает технология EtherCAT. Типовая схема пересылки данных в EtherCAT-сети представлена на рисунке 1.

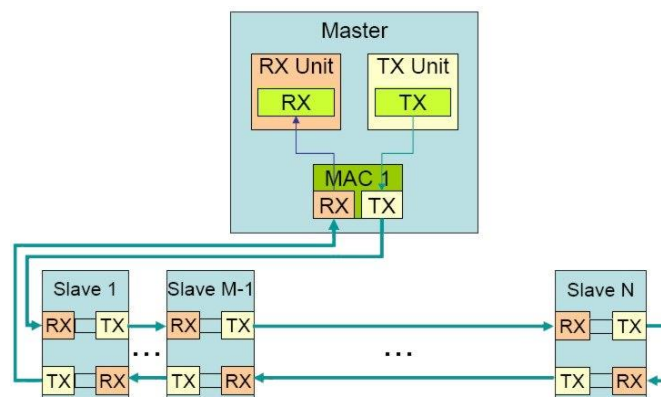


Рис. 1. Типовая схема пересылки данных в EtherCAT-сети

Из всех устройств, подключенных к шине EtherCAT, только мастер может быть инициатором телеграмм. Все остальные устройства «на лету» модифицируют проходящую через них телеграмму, читая и записывая в нее данные технологического процесса. Аппаратная задержка на прохождение телеграммы через одно slave-устройство составляет всего несколько наносекунд.

Таким образом, EtherCAT-технология предоставляет разработчикам систем управления технологическими процессами и сложным оборудованием полностью интегрированное решение, обеспечивающее стандартную и надежную сеть обмена управляющей информацией. При этом количество задействованных полевых шин и интерфейсов уменьшается, обеспечивая тем самым унификацию всех процессов управления, гибкость структуры при практически неограниченном количестве устройств и малое время реакции на события, а также обеспечивается возможность переконфигурирования системы управления без необходимости ее полного отключения.

В связи с наметившимся внедрением технологии EtherCAT в прецизионное технологическое оборудование актуальной и важной является разработка специальных инструментов, позволяющих разрабатывать программное обеспечение системы управления в множестве версий и тем самым с постоянным изменением кода. Поэтому актуальной и важной является автоматизация процесса версионирования такого программного обеспечения и контроль целостности в процессе его эксплуатации.

Программное средство версионирования и контроля целостности. При разработке и эксплуатации программного обеспечения (ПО) для систем перемещений важной задачей является обеспечение их цельности, необходимой для предотвращения незапланированных изменений. Контроль за целостностью в предложенном ПО обеспечивается на этапе разработки с помощью внедрения процесса версионирования в интегрированную среду разработки Visual Studio (VS) и систему управления версиями Team Foundation Server (TFS), а на этапе эксплуатации – через формирования и сравнение контрольных сумм. В работе решена задача по разработке программного средства, позволяющего внедрить процесс версионирования в среду VS и систему TFS, контролировать целостность ПО в процессе его эксплуатации.

Для этого было предложено выделить два функциональных модуля. Основные функциональные блоки модулей и их взаимосвязи приведены на рисунке 2.

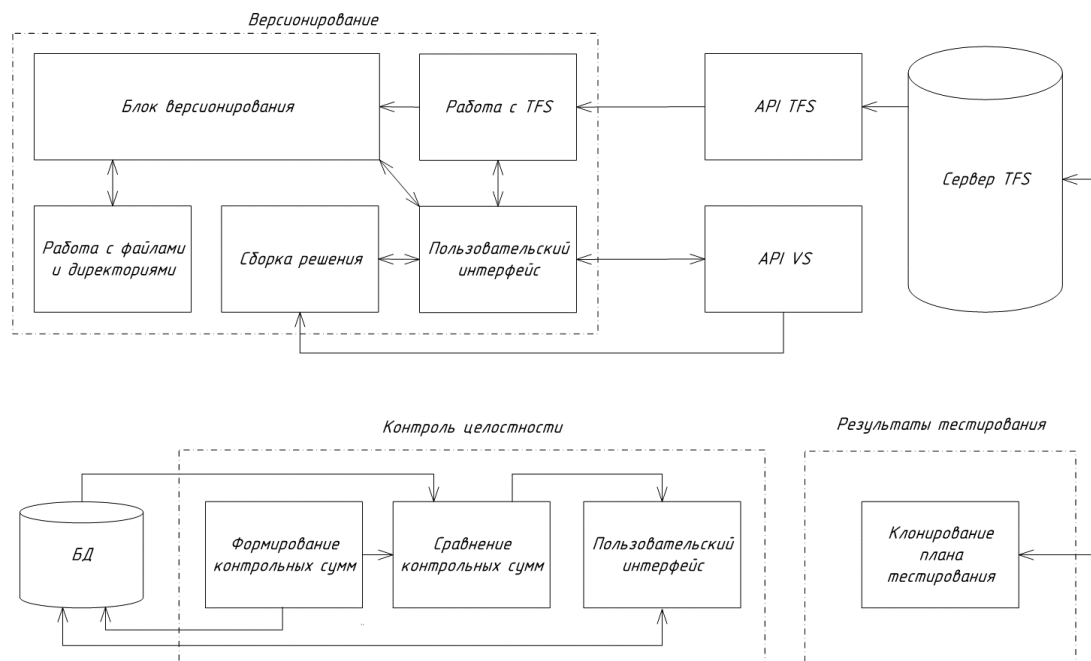


Рис. 2. Функциональные блоки модулей и их взаимосвязи

Модуль версионирования реализован в виде расширения VS и позволяет обновлять версии ПО при внесении изменений. В процессе разработки была реализована концепция формирования версий для проектов, как принадлежащих к версионизируемому решению, так и для проектов, подключённых из других решений по ссылке. В свою очередь проекты, принадлежащие к версионизируемому решению, подразделяются на основные проекты, которые являются источником версии последнего релиза и обычные проекты. Определение типа проекта выполняется с помощью структурного анализа файла решения и конфигурационных файлов. Версия проекта состоит из двух частей: ручной части (первые три старших разряда версии), определяемой последней версией релиза и автоматической части, соответствующей номеру сохранения в системе TFS, в котором был изменён проект. Каждый проект содержит текстовый файл AssemblyInfo, который хранит версию проекта. Для её получения или изменения используются регулярные выражения. В результате после сборки релиза будут сформированы исполняемые файлы, в которых сохранится номер актуальной версии.

Модуль контроля целостности предназначен для определения незапланированных изменений данных в процессе эксплуатации. Для обеспечения целостности данных в процессе эксплуатации необходимо учитывать, что некоторые данные не могут оставаться неизменными, поэтому выделяются части, которые должны быть неизменными в процессе эксплуатации, и части, которые могут изменяться.

Программное обеспечение системы управления состоит из множества различных объектов, таких как исполняемые файлы, файлы данных и объекты баз данных. Формирование контрольных сумм выполняется для каждого типа по-разному. На рисунке 3 приведены выделяемые типы и многоступенчатость процесса формирования контрольных сумм для каждого типа.

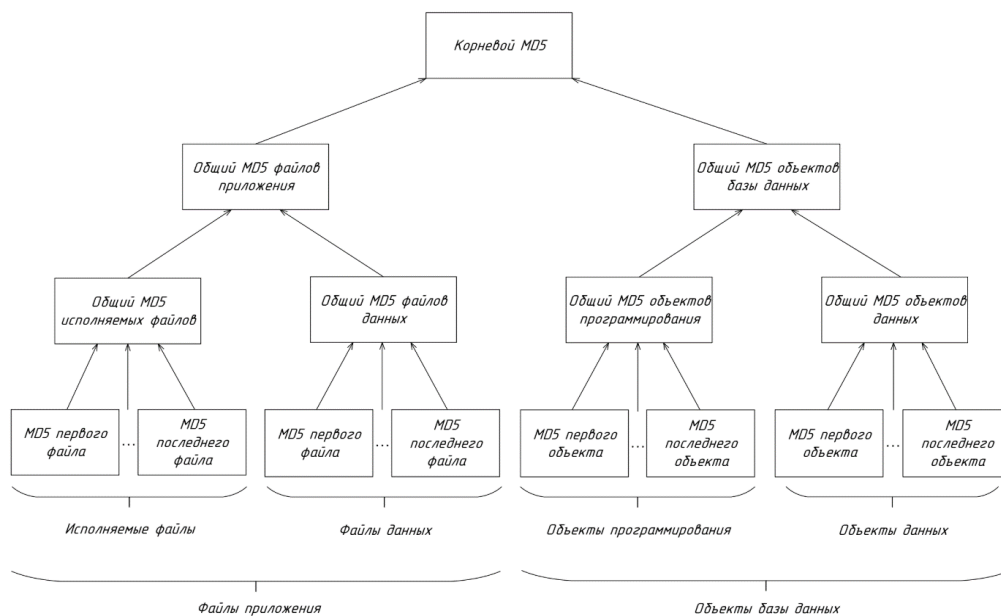


Рис. 3. Многоступенчатый процесс формирования контрольных сумм

Основная цель многоступенчатого формирования контрольных сумм заключается в удобстве представления информации о состоянии каждой подгруппы и в повышении скорости нахождения изменённых файлов.

Таким образом, результатом работы является программное средство, которое контролирует целостность ПО системы управления в процессе разработки и эксплуатации.

Реализация в тестере печатных плат. Традиционная аппаратно-программная реализация не позволяет создавать системы управления тестерами печатных плат в реальном режиме времени, поэтому нами была предложена новая аппаратно-программное решение, основанное на технологии EtherCAT. Разработанное программное средство было использовано для обеспечения целостности ПО многокоординатной планарной системы, разработанной и произведенной предприятием ООО «Рухсервомотор» для канадской фирмы Acculogic, выпускающей автоматические установки тестирования печатных плат, предназначенные для реализации финишного контроля печатных плат в сборе с электронными компонентами. Структура EtherCAT-сети для управления шестью планарными позиционерами тестера печатных плат показана на рисунке 4.

Разработанная EtherCAT-сеть содержит один управляющий компьютер Master и шесть локальных систем управления, каждая из которых работает в режиме «управляемый» и обеспечивает реализацию прецизионных перемещений соответствующего планарного позиционера по двум координатам.

Конструктивно многокоординатная система состоит из двух параллельно установленных планарных статоров, расположенных рабочими поверхностями друг к другу. На каждом из статоров, в свою очередь, располагается три планарных якорей с тестирующими иглами и камерами распознавания. Суммарное число степеней свободы такой координатной системы равно 12, при этом по каждой из координат обеспечивается точность перемещений ± 10 мкм, повторяемость 3 мкм, скорость перемещения до 0,5 м/с и ускорение до 20 м/с². Печатная плата фиксируется в зоне загрузки в плоскости между двумя статорами установки, при этом манипуляторы находятся с обеих сторон печатной платы, тем самым обеспечивая контактирование зондов с верхней и нижней сторон печатной платы. Каждый из зондов обладает шестью степенями свободы, позволяя осуществить подвод контактирующего зонда к контактной площадке под различными углами.

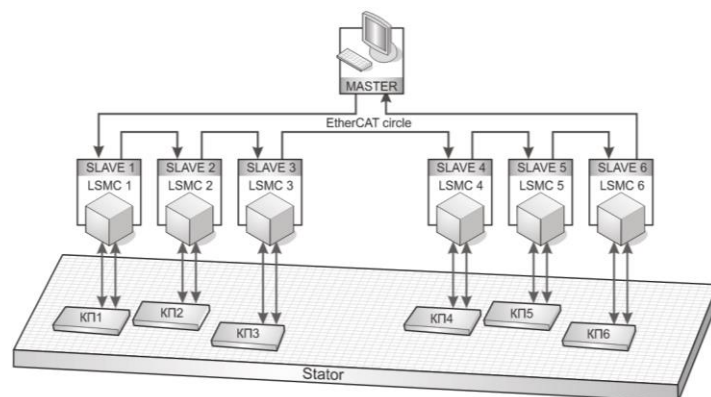


Рис. 4. EtherCAT-сеть для управления шестью позиционерами

Модульное построение системы перемещений обеспечивает при необходимости аппаратно-программное мультиплицирование системы управления, и тем самым быстрое изменение количества используемых зондов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
2. Аваков, С.М. Система перемещений для оптико-механического оборудования микроэлектроники / С.М. Аваков, В.В. Жарский, С.А. Русецкий // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 39–43.
3. Raymont, E. S. The Art of Unix Programming / E. S. Raymont. – Addison-Wesley, 2003 – 547.
4. Chowdhury, K Mastering Visual Studio 2017 // K. Chowdhury / Birmingham B3 2PB, UK, July 2017 – 433 P.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ТРУБЧАТЫХ КОСТЕЙ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ УПРУГИХ СВОЙСТВ

¹Ершова А.И., ¹Босяков С.М.

¹Белорусский государственный университет

Введение. Костная ткань обладает анизотропией механических свойств как на микроуровне (остеоны, гаверсовы каналы, ламели), так и на макроуровне (цельная кость) [1]. В соответствии с [2], значения упругих параметров костной ткани на макроуровне могут изменяться как у разных цельных костей, так и в их различных частях (верхняя, средняя и нижняя трети) или анатомических квадрантах (передний, внешний, задний и внутренний). Эти факты существенно влияют на поведение костной ткани в ходе рутинной деятельности человека и травмирующих воздействий на кость [3]. Однако согласно [4], в большинстве случаев конечно-элементного моделирования поведения кортикальной костной ткани под действием произвольной нагрузки, костная ткань представляется неоднородным изотропным материалом. Для оценки отдельного изотропного модуля упругости каждого конечного элемента кости обычно используются эмпирические соотношения между плотностью кости и модулем упругости.

В работах [5–8] предложены методы определения анизотропной ориентации костной ткани, основанные на зависимостях упругих свойств кортикальной и губчатой структуры костной ткани от ее механического поведения, анатомического направления. Модели с анизотропным распределением упругих свойств на основании компьютерной томографии представлены в работах [9, 10]. Зависимости ортотропных свойств в проксимальной части бедренной кости от направлений главных напряжений при действии нагрузки эквивалентной собственному весу человека предложено использовать при конечно-элементном моделировании в исследовании [11]. Целью настоящей работы является разработка методики моделирования упругих свойств бедренной кости на основании зависимостей модуля упругости и сдвига, а также коэффициента Пуассона от пространственных координат для двумерного (2D) и одномерного (1D) случаев. Зависимости получены на основе экспериментальных данных для различных частей кости и анатомических квадрантов трубчатой кости [1].

Нелинейное распределение анизотропных упругих свойств. Для описания упругих свойств бедренной кости использовались двумерные регрессионные функции, полученные методом наименьших квадратов на основе модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона для двадцати точек, расположенных в зоне диафиза приблизительно между губчатой и кортикальной костных тканях в разных частях бедренной кости. Двенадцать точек A_k, M_k, L_k и $P_k, k=\overline{1,3}$ расположены в переднем, внешнем, заднем и внутреннем анатомических квадрантах поперечного сечения бедренной кости; каждые четыре точки находятся на одном из трех различных уровней l_1, l_2, l_3 , диафизарной части бедра. Восемь точек $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}$ и $M_n^{(0)}, n=1,2$ расположены в губчатой костной ткани на уровнях m_1 и m_2 в дистальном и проксимальном отделах бедренной кости соответственно. Схематическое расположение точек интерполяции на различных уровнях бедренной кости указаны на рисунке 1.

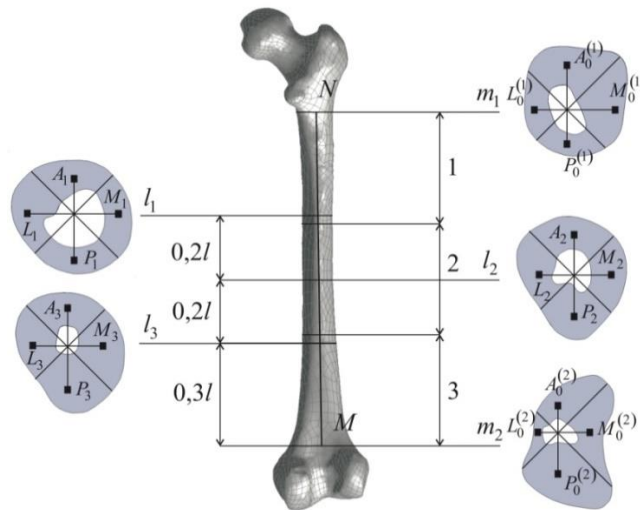


Рис. 1. Уровни l_1, l_2, l_3 диафиза бедренной кости с узлами интерполяции A_k, L_k, P_k и M_k ; уровни m_1, m_2 между губчатой и кортикальной частью бедра с узлами интерполяции $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}, M_n^{(0)}, n=1,2$; MN – анатомическая ось; l – длина части кости примерно соответствующая кортикальной части; 1 – верхняя треть; 2 – средняя треть; 3 – нижняя треть.

Губчатая костная ткань моделируется как однородный изотропный материал с модулем упругости в 8,0 ГПа и коэффициентом Пуассона равным 0,33 [5, 12]. Следовательно, в точках $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}$ и $M_n^{(0)}, n=1,2$ для губчатой костной ткани модули Юнга $E_1 = E_2 = E_3 = 8$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,33$ и модули сдвига $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3,08$ ГПа определены для каждого анатомического квадранта. Значения упругих констант в точках A_k, M_k, L_k и $P_k, k=1,3$ приведены в таблице 1 в соответствии с [1]. В таблице 1, индексы 1, 2 и 3 соответствуют радиальному, окружному и продольному направлениям; продольное направление совпадает с анатомической осью бедра MN (рисунок 1).

Таблица 1– Средние упругие константы кортикальной кости в различных интерполяционных точках для переднего, внешнего, заднего и внутреннего квадрантов бедра, пересекаемого в уровнях l_1, l_2 и l_3 (индексы 1, 2 и 3 для упругих констант соответствуют радиальному, окружному и продольному направлениям)

Узел интерполяции	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	E_3 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
A_1	10,6	11,6	21,3	3,6	4,9	5,5	0,418	0,224	0,211
L_1	11,4	12,6	20,9	4,0	4,9	5,6	0,382	0,240	0,228
P_1	12,4	12,7	19,8	4,3	5,3	5,8	0,419	0,249	0,246
M_1	11,4	11,9	20,4	3,9	5,1	5,8	0,425	0,239	0,232
A_2	10,9	11,5	20,9	3,7	5,1	5,5	0,423	0,229	0,219
L_2	11,5	11,9	20,6	4,0	5,0	5,7	0,420	0,239	0,234
P_2	12,3	12,3	21,1	4,3	5,3	5,8	0,433	0,238	0,238
M_2	12,6	12,9	21,2	4,4	5,5	6,1	0,419	0,239	0,236
A_3	11,2	11,6	20,5	3,9	5,1	5,6	0,432	0,235	0,228
L_3	11,8	12,3	20,9	4,1	5,2	5,8	0,427	0,235	0,229
P_3	12,2	12,4	21,2	4,2	5,4	5,8	0,441	0,227	0,224
M_3	11,9	12,3	19,9	4,2	5,3	5,7	0,405	0,249	0,243

Регрессионные функции для упругих констант сформулированы в предположении, что в радиальном направлении упругие свойства бедренной кости в любом поперечном сечении не изменяются. Двумерные зависимости модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от продольной z и окружной φ координат в области между уровнями m_1 и m_2 бедренной кости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)}(\varphi, z) &= 0,00246775\varphi^3 - 0,0231933\varphi^2 + 0,0483053\varphi - 1,56228\varphi^3 z^3 + 3,707\varphi^2 z^3 - \\
&- 156,394\varphi z^3 + 236,667z^3 + 1,68187\varphi^3 z^2 - 19,6999\varphi^2 z^2 + 57,3801\varphi z^2 - 237,495z^2 - \\
&- 0,378222\varphi^3 z + 2,7499\varphi^2 z - 2,3469\varphi z + 51,763z + 8,0, \\
E_2^{(1)}(\varphi, z) &= 0,00335998\varphi^3 - 0,0324159\varphi^2 + 0,0710288\varphi - 10,936\varphi^3 z^3 + 108,328\varphi^2 z^3 - \\
&- 248,909\varphi z^3 + 11,4181z^3 + 5,68217\varphi^3 z^2 - 51,9547\varphi^2 z^2 + 102,118\varphi z^2 - 158,814z^2 - \\
&- 0,698451\varphi^3 z + 5,53273\varphi^2 z - 7,1894\varphi z + 49,6513z + 8,0, \\
E_3^{(1)}(\varphi, z) &= 8,92417\varphi^5 z^5 - 141,19\varphi^4 z^5 - 465,113\varphi^3 z^5 + 8914,43\varphi^2 z^5 - 16535,7\varphi z^5 - 47549z^5 + \\
&+ 0,499524\varphi^5 z^3 + 24,663\varphi^4 z^3 + 21,1731\varphi^3 z^3 - 1930,78\varphi^2 z^3 + 4399,36\varphi z^3 + 14606z^3 - \\
&- 0,708928\varphi^3 z + 12,4988\varphi^4 z^3 + 38,747\varphi^3 z^3 + 804,607\varphi^2 z^3 + 1530,39\varphi z^3 + 3946,05z^3 - \\
&- 0,337796\varphi^5 z^5 - 1,43267\varphi^4 z^2 + 7,74583\varphi^3 z^2 + 167,768\varphi^2 z^2 - 478,067\varphi z^2 - 2094z^2 + \\
&+ 0,070743\varphi^5 z^0 - 0,149099\varphi^4 z - 2,26309\varphi^3 z - 1,50093\varphi^2 z + 25,5008\varphi z + 285,982z + 8,0, \\
G_{12}^{(1)}(\varphi, z) &= 0,0009486990\varphi^3 - 0,00846988\varphi^2 + 0,0157647\varphi - 3,12457\varphi^3 z^3 + 39,965\varphi^2 z^3 - \\
&- 127,758\varphi z^3 + 117,295z^3 + 1,81964\varphi^3 z^2 - 19,8852\varphi^2 z^2 + 53,1055\varphi z^2 - 84,0534z^2 - \\
&- 0,26233\varphi^3 z + 2,27077\varphi^2 z - 3,91129\varphi z + 14,886z + 3,08, \\
G_{13}^{(1)}(\varphi, z) &= -8,4718\varphi^4 z^4 + 942,252\varphi^3 z^4 - 2766,15\varphi^2 z^4 + 1382,9\varphi z^4 - 2534,05z^4 + \\
&+ 52,2155\varphi^4 z^3 - 570,234\varphi^3 z^3 + 1636,59\varphi^2 z^3 - 723,157\varphi z^3 + 1694,45z^3 - 9,74689\varphi^4 z^2 + \\
&+ 105,7\varphi^3 z^2 - 296,994\varphi^2 z^2 + 110,904\varphi z^2 - 438,142z^2 + 0,572878\varphi^4 z - 6,30793\varphi^3 z + \\
&+ 18,0923\varphi^2 z - 6,75303\varphi z + 49,7292z + 3,08, \\
G_{23}^{(1)}(\varphi, z) &= -99,1473\varphi^4 z^4 + 1106,29\varphi^3 z^4 - 3579,05\varphi^2 z^4 + 3406,66\varphi z^4 - 4963,65z^4 + \\
&+ 32,957\varphi^4 z^3 - 697,091\varphi^3 z^3 + 2225,56\varphi^2 z^3 - 2080,04\varphi z^3 + 3213,07z^3 - 12,0779\varphi^4 z^2 + \\
&+ 132,325\varphi^3 z^2 - 413,578\varphi^2 z^2 + 370,538\varphi z^2 - 747,317z^2 + 0,666983\varphi^4 z - 7,21276\varphi^3 z + \\
&+ 21,726\varphi^2 z - 17,20553\varphi z + 72,7723z + 3,08, \\
v_{12}^{(1)}(\varphi, z) &= -6,06694\varphi^4 z^4 + 81,775\varphi^3 z^4 - 355,482\varphi^2 z^4 + 510,084\varphi z^4 - 246,139z^4 + \\
&+ 4,03203\varphi^4 z^3 - 53,1958\varphi^3 z^3 + 225,005\varphi^2 z^3 - 313,81\varphi z^3 + 162,615z^3 - 0,871705\varphi^4 z^2 + \\
&+ 11,1737\varphi^3 z^2 - 45,4057\varphi^2 z^2 + 60,3988\varphi z^2 - 38,7519z^2 + 0,0648672\varphi^4 - 0,807968\varphi^3 z + \\
&+ 3,13773\varphi^2 z - 3,90792\varphi z + 3,81429z + 0,33, \\
v_{13}^{(1)}(\varphi, z) &= 1,33336\varphi^4 z^4 - 13,5821\varphi^3 z^4 + 36,9715\varphi^2 z^4 - 26,8389\varphi z^4 + 123,296z^4 - \\
&- 1,17659\varphi^4 z^3 + 12,5201\varphi^3 z^3 - 36,189\varphi^2 z^3 + 24,963\varphi z^3 - 74,9134z^3 + \\
&+ 0,33277\varphi^4 z^2 - 3,6631\varphi^3 z^2 + 11,1243\varphi^2 z^2 - 7,82783\varphi z^2 + 16,6371z^2 - \\
&- 0,029697\varphi^4 z + 0,335189\varphi^3 z - 1,06546\varphi^2 z + 0,828095\varphi z - 1,69293z + 0,33, \\
v_{23}^{(1)}(\varphi, z) &= 0,251753\varphi^4 z^4 + 0,4100991\varphi^3 z^4 - 21,7872\varphi^2 z^4 + 58,2554\varphi z^4 + 141,462z^4 - \\
&- 0,524144\varphi^4 z^3 + 4,1431\varphi^3 z^3 - 1,06259\varphi^2 z^3 - 26,8755\varphi z^3 - 84,3593z^3 + 0,210218\varphi^4 z^2 - \\
&- 2,10589\varphi^3 z^2 + 4,642563\varphi^2 z^2 + 1,82261\varphi z^2 + 18,3066z^2 - 0,0218468\varphi^4 z + 0,236185\varphi^3 z - \\
&- 0,662882\varphi^2 z + 0,259906\varphi z - 1,85513z + 0,33,
\end{aligned}$$

Длина части бедра между уровнями m_1 и m_2 предполагается равной 0,31 м.

Ортотропное распределение упругих свойств. В этом случае упругие свойства бедренной кости описываются функциями для модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона только от продольной координаты z (изменяющейся вдоль анатомической оси бедренной кости MN , показанной на рисунке. 1). В этом случае кортикальная костная ткань является нелинейным упругим ортотропным материалом. Усредненные упругие константы костной ткани для регрессионных функций принимаются равными соответствующим константам на уровне l_2 бедренной кости (см. рисунок 1). Усредненные значения модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона на уровне l_2 приведены в таблице 2.

Таблица 2– Усредненные значения упругих констант кортикальной кости в интерполяционных точках бедра на уровне l_2

$E_1, \text{ГПа}$	$E_2, \text{ГПа}$	$E_3, \text{ГПа}$	$G_{12}, \text{ГПа}$	$G_{13}, \text{ГПа}$	$G_{23}, \text{ГПа}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
11,7	12,2	20,7	4,1	5,2	5,7	0,420	0,237	0,231

Губчатая кость на уровнях m_1 и m_2 рассматривалась как изотропный материал. В результате интерполяции получены следующие функции для модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона в зависимости от продольной координаты z :

$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)}(z) &= -144,531z^2 + 46,25z + 8,0, & E_2^{(2)}(z) &= -164,063z^2 + 52,5z + 8,0, \\
 E_3^{(2)}(z) &= -496,094z^2 + 158,75z + 8,0, & G_{12}^{(2)}(z) &= -48,4375z^2 + 15,5z + 2,86, \\
 G_{13}^{(2)}(z) &= -90,2344z^2 + 28,875z + 2,86, & G_{23}^{(2)}(z) &= -110,938z^2 + 35,5z + 2,86, \\
 \nu_{12}^{(2)}(z) &= -4,6875z^2 + 1,5z + 0,33, & \nu_{13}^{(2)}(z) &= 2,46094z^2 - 0,7875z + 0,33, \\
 \nu_{23}^{(2)}(z) &= 2,69531z^2 - 0,8625z + 0,33,
 \end{aligned}$$

Нелинейные изотропные упругие свойства. Кортикальная костная ткань моделировалась с использованием материала с нелинейно распределенными изотропными свойствами вдоль анатомической оси бедра в предположении, что упругие свойства кости в радиальном и окружном направлениях в любом поперечном сечении бедра не изменяются. В этом случае для интерполяционных зависимостей модуля упругости и коэффициента Пуассона от координаты, изменяющейся вдоль оси MN , обозначенной на рисунке 1, использованы значения модулей упругости $E_1 = E_2 = E_3 = 14,9$ ГПа и коэффициентов Пуассона $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,298$ на уровне l_2 . Губчатая кость на уровнях m_1 и m_2 рассматривалась как изотропный материал. Интерполяционные функции для модуля упругости и коэффициента Пуассона, зависящие от z -координаты между уровнями m_1 и m_2 имеют вид

$$E^{(3)}(z) = -269,531z^2 + 86,25z + 8,0, \nu^{(3)}(z) = 0,33 - 0,025z + 0,078125z^2.$$

Граничные условия для статического анализа. Нагрузка на бедро прикладывалась вдоль его биомеханической оси, проходящей от верхнего полюса головки бедра до середины расстояния между крайними нижними отделами мышечков бедренной кости в соответствии с [13, 14]. Область приложения нагрузки располагалась в третьей части верхнего сегмента головки бедренной кости; величина нагрузки составляла 800 Н. Граничные условия задавались таким образом, чтобы головка бедра (область контакта вертлужной впадины) и нижние отделы мышечков бедра (места контакта с мышечками большеберцовой кости) имели жесткое закрепление.

Заключение. Предлагаемый подход к моделированию упругих свойств костной ткани позволяет учесть их нелинейное анизотропное распределение как вдоль

анатомических осей, так и в поперечном сечении бедренной кости. Преимуществом этого подхода является использование статистических данных модулей упругости и модулей сдвига, а также коэффициентов Пуассона для различных частей и анатомических квадрантов кости, полученных экспериментально используя разные образцы костной ткани. Другое преимущество заключается в возможности геометрической модификации модели кости, в частности, для моделирования имплантации, хирургических операций и т.д. Полученные главные напряжения и деформации с учетом нагрузки, эквивалентной действию собственного веса человека на бедренную кость, существенно различаются у моделей с нелинейным анизотропным и изотропным распределением упругих свойств. Эти различия могут увеличиваться при более сложной комбинации нагрузки на бедренную кость, например, при одновременном воздействии собственного веса человека, изгибающих моментов или крутящего момента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rho J. Tsui T.Y., Pharr G.M. *Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation* // *Biomaterials* 1997. Vol. 18, P. 1325–1330.
2. Goldstein S. *The mechanical properties of trabecular bone: dependence on anatomic location and function* // *Journal of Biomechanics*. 1987. Vol. 20, P. 1055–1061.
3. Currey J.D. *The structure and mechanics of bone* // *Journal of Material Science*. 2012. Vol. 47, P. 41–54.
4. Hambli R. *A quasi-brittle continuum damage finite element model of the human proximal femur based on element deletion* // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2013. Vol. 51, P. 219–231.
5. Bonnet A.S., Postaire M., Lipinski P. *Biomechanical study of mandible bone supporting a four-implant retained bridge finite element analysis of the influence of bone anisotropy and foodstuff position* // *Medical Engineering and Physics*. 2009. Vol. 31, P. 806–815.
6. Gray H.A., Taddei F., Zavatsky A.B., Cristofolini L., Gill H.S. *Experimental validation of a finite element model of a human cadaveric tibia* // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2008. Vol. 130, P. 031016.
7. Koivumaki J.E., Thevenot J., Pulkkinen P., Kuhn V., Link T.M., Eckstein F., Jämsä T. *CT-based finite element models can be used to estimate experimentally measured failure loads in the proximal femur* // *Bone*. 2012. Vol. 50, P. 824–829.
8. Yang H., Ma X., Guo T. *Some factors that affect the comparison between isotropic and orthotropic inhomogeneous finite element material models of femur* // *Medical Engineering and Physics*. 2010. Vol. 32, P. 553–560.
9. Hellmich C., Kober C., Erdmann B. *Micromechanics-based conversion of CT data into anisotropic elasticity tensors, applied to FE simulations of a mandible* // *Annals of Biomedical Engineering*. 2008. Vol. 36, P. 108–122.
10. Schneider R., Faust G., Hindenlang U., Helwig, P. *Inhomogeneous, orthotropic material model for the cortical structure of long bones modeled on the basis of clinical CT or density data* // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009. Vol. 198, P. 2167–2174.
11. San Antonio T., Ciaccia M., Muller-Karger C., Casanova E. *Orientation of orthotropic material properties in a femur FE model: a method based on the principal stresses directions* // *Medical Engineering and Physics*. 2011. Vol. 34, P. 914–919.
12. Tanne K., Sakuda M. *Biomechanical and clinical changes of the craniofacial complex from orthopedic maxillary protraction* // *Angle Orthodontist*. 1991. Vol. 61, P. 145–152.

13. *Letter to the editor. ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion part I: ankle, hip, and spine // Journal of Biomechanics. 2002. Vol. 35, P. 543–548.*
14. *Yoshioka Y., Siu D., Cooke D.V., Chir B. The anatomy and functional axes of the femur // Journal of Bone and Joint Surgery. 1987. Vol. 69-A, P. 873–880.*

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛОГАРИФМАМИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

д.ф.-м.н. ¹ Мелешко И.Н., к.ф.-м.н. ¹ Ласый П.Г., к.ф.-м.н. ¹ Ширвель П.И.

¹ Белорусский национальный технический университет, Минск

Многие важные прикладные задачи приводят к вариационной проблеме относительно функции двух переменных. Например, задача теории упругости о равновесии растянутой упругой мембраны приводит к задаче о минимуме интеграла

$$\iint_D \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - 2u \right] dx dy, \quad u = u(x, y),$$

Если мембрана однородная, то этот двойной интеграл с точностью до постоянного множителя определяет ее потенциальную энергию при малых прогибах.

В свою очередь, задача о минимуме такого интеграла, когда область D – единичный круг при граничном условии Дирихле эквивалентна следующей краевой задаче для уравнения Пуассона в единичном круге:

$$\Delta u = -1, \quad r < 1, \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (2)$$

Приближенное представление логарифмами вариационной задачи о минимуме интеграла конструируется на основе точного решения соответствующей краевой задачи (1)-(2).

1. Точное представление решения краевой задачи (1)-(2). Представим искомую функцию u в виде двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2,$$

первое из которых является решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta u_1 = 0, \quad r < 1, \quad (3)$$

$$u_1|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (4)$$

Второе же слагаемое удовлетворяет уравнению Пуассона (1) и на границе круга принимает нулевое значение

$$\Delta u_2 = 0,$$

Известно (см., например, [1], [2]), что решение краевой задачи (3)-(4) может быть найдено при помощи интеграла Пуассона

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau, \quad r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (5)$$

С помощью теории логарифмического потенциала и рядов Фурье [3] функция u_2 может быть представлена следующим интегралом:

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|t|<1} \ln \frac{|1-z\bar{t}|}{|t-z|} d\tau, \quad t = \rho e^{i\tau}, \quad z = r e^{i\varphi}. \quad (6)$$

Следовательно, точное решение краевой задачи (1)-(2)

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<1} \ln \frac{|1-z\bar{t}|}{|t-z|} d\sigma \quad (7)$$

2. Приближенное решение краевой задачи (3)-(4).

Зададим на отрезке $[-\pi; \pi]$ систему точек

$$\varphi_k = kh, \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{2}{2n+1}$$

и приблизим плотность $f(\varphi)$ интеграла Пуассона на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{-n}^n \Theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \quad (8)$$

где

$$\Theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]; \\ 0, & \varphi \notin \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда подставляя в представление (5) решение краевой задачи (3)-(4) интегралом Пуассона вместо плотности ее приближение по формуле (8), получим приближенную формулу

$$u_1(r, \varphi) \approx \tilde{u}_1(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k), \quad (9)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau. \quad (10)$$

Теорема 1. Коэффициенты приближенной формулы (9) $A_k(r, \varphi)$ неотрицательны

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) \equiv 1, \quad r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (11)$$

а для их вычисления имеет место единая формула

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[h + 2 \operatorname{Im} \left(\ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k + h/2)} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k - h/2)} \right) \right) \right], \quad (12)$$

где $z = re^{i\varphi}$, а для логарифмической функции выбрана ветвь, принимающая на промежутке $(-1, 1)$ действительной оси действительные значения.

Доказательство.

Так как ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} > 0, \quad r \neq 1,$$

то из представления (10) для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ следует, что все они неотрицательны для всех r и φ ($r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Очевидно, что

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau. \quad (13)$$

Но, как известно, значение интеграла Пуассона с плотностью равной единице также равняется единице. Следовательно, справедливо равенство (11).

Заметив, что ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m}\right) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(\tau-\varphi).$$

а затем, представив $\frac{1}{1-z/t}$ в виде ряда геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m}\right) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(\tau-\varphi).$$

Подставляя теперь это представление ядра Пуассона тригонометрическим рядом в выражение для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ (10), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_k(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \cos m(\tau - \varphi) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[h + 2\operatorname{Im}\left(\ln\left(1 - ze^{-i(\varphi_k + h/2)}\right) - \ln\left(1 - ze^{-i(\varphi_k - h/2)}\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

приводящие к формуле (12).

Таким образом, для приближенного решения краевой задачи (3)-(4) из (9) вытекает следующая формула:

$$u_1(r, \varphi) \approx \tilde{u}_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^n \left(\left[h + 2\operatorname{Im}\left(\ln\left(1 - ze^{-i(\varphi_k + h/2)}\right) - \ln\left(1 - ze^{-i(\varphi_k - h/2)}\right)\right) \right] \right) f(\varphi_k). \quad (15)$$

Получим теперь неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (13).

Теорема 2. Пусть плотность интеграла Пуассона $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, тогда имеет место равномерная по r и φ ($r \leq 1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$) следующая оценка погрешности приближенной формулы (13):

$$|u_1(r, \varphi) - \tilde{u}_1(r, \varphi)| \leq \omega(f; h), \quad (16)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|u_1(r, \varphi) - \tilde{u}_1(r, \varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h, \quad r \leq 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (17)$$

$$M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(\varphi)|.$$

Доказательство.

$$u_1(r, \varphi) - \tilde{u}_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau,$$

где функция $\tilde{f}(\varphi)$ определена формулой (8). В силу положительности ядра Пуассона

$$|u_1(r, \varphi) - \tilde{u}_1(r, \varphi)| \leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \quad (18)$$

Но если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f; h), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (19)$$

Если же $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко установить с помощью формулы Тейлора, что

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (20)$$

Так как значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau \equiv 1,$$

то из неравенств (16-18) следуют неравенства (14), (15).

3. Приближенное решение краевой задачи (1)-(2).

Преобразуем интеграл правой части формулы (6).

Развернув $\ln|1-z\bar{t}|$ ($z=re^{i\varphi}$, $t=\rho e^{i\tau}$) в тригонометрический ряд, получаем равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{|t|<1} \ln|1-z\bar{t}| d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \iint_{|t|<1} \rho^k \cos k(\varphi-\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(\varphi-\tau) d\tau \int_0^1 \rho^k d\rho = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{r^k \sin k(\pi-\varphi)}{k^2(k+2)} - \frac{r^k \sin k(-\pi-\varphi)}{k^2(k+2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{|t|<1} \ln \frac{1}{t-z} d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int_0^1 \rho \ln |\rho e^{i\tau} - re^{i\varphi}| d\rho = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^r \rho \ln \left| 1 - \frac{\rho}{r} l^{i(\tau-\varphi)} \right| d\rho + \int_0^r \rho \ln r d\rho + \int_r^1 \rho \ln \left| 1 - \frac{\rho}{r} l^{i(\varphi-\tau)} \right| d\rho + \int_r^1 \rho \ln \rho d\rho \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{4} (1-r^2). \end{aligned}$$

Таким образом, находим, что

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{4} (1-r^2) \quad (21)$$

Складывая приближенное равенство (13) и точное равенство (19), получаем приближенное решение краевой задачи (1)-(2) и эквивалентной ей вариационной задачи о минимуме интеграла

$$u(r, \varphi) \approx \tilde{u}(\tilde{r}, \varphi) = \frac{1}{4} (1-r^2) + \frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^n \left(\left[h + 2 \operatorname{Im} \left(\ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k+h/2)} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k-h/2)} \right) \right) \right] \right) f(\varphi_k) \quad (22)$$

Так как

$$u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) - \tilde{u}_1(r, \varphi),$$

то для оценки погрешности приближенной формулы (22) можно пользоваться неравенствами (14), (15).

Примечание. Функции комплексного переменного z , определяемые в круге единичного радиуса степенными рядами

$$L^s(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^k}{k^s},$$

где s – целое положительное число, названы полилогорифмами [4] (см. также [5]), где с помощью полилогорифмов найдены новые формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и решения некоторых краевых задач теории теплопроводности и термоупругости.

При $s=1$ полилогорифмы представляют собой логарифмическую функцию ($L'(z) = -\ln(1-z)$). Следовательно, логарифмические функции, входящие

приближенные формулы (13) и (22) можно понимать также как полилогорифмы первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиханов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тиханов, А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Пыхтеев, Г.Н. Полилогорифмы, их свойства и методы вычисления / Г.Н. Пыхтеев, И.Н. Мелешко – Минск, 1976.
5. Мелешко, И.Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Минск, 1999 – 197с.
6. Мелешко И.Н. О приближенном решении одной задачи теории теплопроводности для полуплоскости при граничных условиях первого рода/ И.Н. Мелешко, П.И. Ширвель// ТПМ. Выпуск 31. 2016. С. 56-59.

МОДЕЛИРОВАНИЕ В MATLAB СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМ ПРИВОДОМ МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ

студ. ¹ Войтов А.Ю., асп. ¹ Форулан М.М., асп. ¹ Салманзадех Г.Й.

¹ УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
Минск

Введение. Применение механизмов параллельной кинематики в качестве исполнительных устройств систем пространственных перемещений широкого назначения, включая системы координатных совмещений прецизионного оборудования микро- и наноэлектроники, системы позиционирования, технологических и измерительных операций в трехмерном пространстве современных обрабатывающих центров и автоматических линий машиностроительного профиля, позволяет в настоящее время разрешить большинство из проблем, присущих традиционной и широко используемой компоновке и элементной базе робототехнических комплексов в составе станков и промышленных роботов.

Наибольший эффект механизмы параллельной кинематики обеспечивают при использовании в качестве привода систем на базе прецизионных многокоординатных гибридных двигателей с возбуждением от постоянных магнитов. При этом необходимо отметить, что механизмы параллельной кинематики до шести степеней свободы включительно выглядят наиболее приемлемыми с точки зрения построения на их основе перспективных координатных систем, способных реализовывать практически весь спектр требуемых движений инструмента и заготовки в трехмерном пространстве. Но, несмотря на все преимущества и свойства таких механизмов, приходится констатировать, что в настоящее время их применение в автоматическом оборудовании и робототехнике пока ограничено из-за сложности управления параллельными механизмами и недостаточной проработанности алгоритмов и методик, которые позволяли бы получать как оптимальные варианты конструкций, так и наиболее подходящие для выбранной конструкции алгоритмы автоматического управления приводами.

В статье рассмотрено моделирование в среде MATLAB управления гибридным многокоординатным приводом мехатронной системы параллельной кинематики, которая была представлена в нашей работе [3, 4] с результатами имитационного моделирования прямой и обратной задач кинематики.

Структура системы управления. Система управления многокоординатным гибридным приводом предложенной в работе [1] мехатронной системы перемещений состоит из шести подсистем управления независимыми однокоординатными электромагнитными модулями поворотного движения. Такие модули входят в состав гибридного шестикоординатного привода. Все эти шесть подсистем объединены в одну систему управления, реализуемую специальным контроллером и с верхним уровнем управления от персонального компьютера [1]. Это и есть структура управления мехатронной системы перемещений в целом. Такой подход представления мехатронной системы и её моделирования через моделирование системы гибридных приводов в виде многокоординатного привода является наиболее удобным, так как позволяет создавать математическую и компьютерную модели управления одним модулем гибридного привода в логически связанном и законченном виде инструментами Simulink программной среды MATLAB.

Укрупнённая блок-схема одним из модулей гибридного привода прямого действия приведена на рисунке 1.

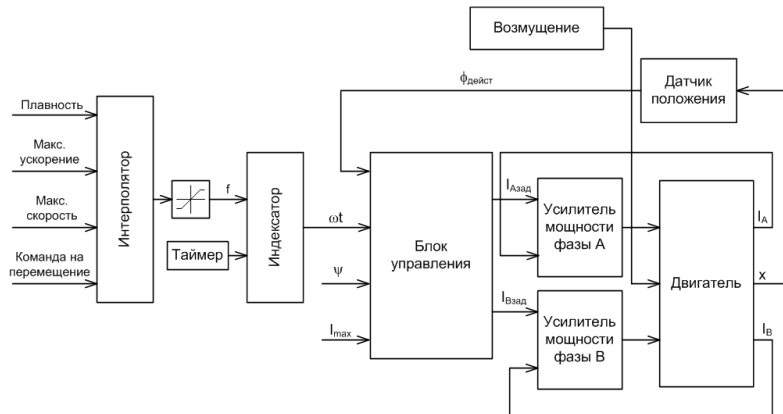


Рис. 1. Укрупнённая структурная блок-схема системы управления

Как видно из этой структурной схемы, система управления приводом прямого действия состоит из следующих основных модулей: *Интерполятора, Индексатора, Блока управления, Усилителей и Двигателя.*

Для описания системы управления необходимо остановиться более подробно на каждом из этих модулей.

Интерполятор. Для того чтобы эффективно управлять многокоординатным приводом, необходимо иметь задатчик управляющих воздействий. Интерполятор представляет собой программную реализацию заданных положения, скорости и ускорения двигателя, то есть в каждый момент времени на выходе интерполятора имеем заданные значения положения, скорости и ускорения, с которыми должен перемещаться каждый из подвижных электромагнитных модулей. Для алгоритмизации интерполятора был использован алгоритм формирования управляющей функции $u_{ij}(t)$ от времени в аналитическом виде.

При создании модели в среде MATLAB нами учитывались требования, которые могут возникнуть при дальнейшей работе с моделью. Так, модель интерполятора дает возможность вводить в систему управления не только заданные скорость и ускорение, но и профиль позиции, потому что при синтезе сложных законов управления шаговыми двигателями требуется знать не только заданную скорость, но и положение, а также ускорение.

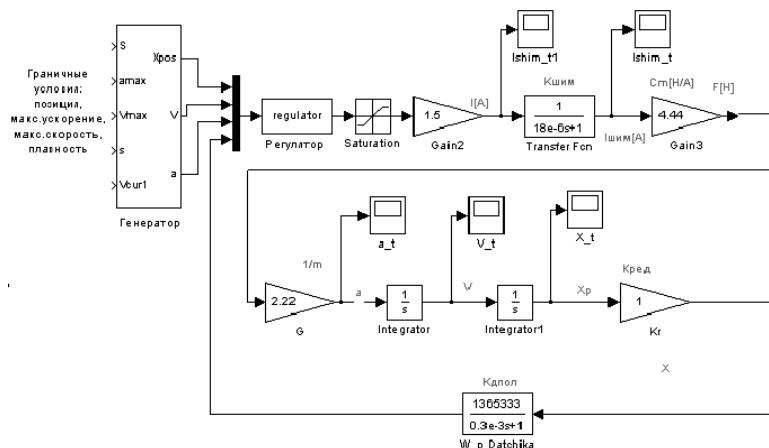


Рис. 2. Компьютерная модель системы управления в MATLAB/SIMULINK

Компьютерная модель системы управления. Компьютерная модель системы управления, включающая исполнительный механизм, регулятор и генератор,

разработанная в среде моделирования MATLAB/Simulink, приведена на рисунке 2.

Возможны различные случаи реализации управления. При реализации системы управления без регулятора используется только лишь составляющая управляющего воздействия по положению. Следует отметить, что такая система неустойчива вследствие того, что в системе находится два интегратора, которые дают суммарный сдвиг фаз электромагнитных модулей в 180 градусов. Использование такого регулятора мехатронным устройством разработанной системы не представляется возможным. Поэтому необходимо разрабатывать модели регулятора по скорости.

Построение управляемого движения по заданной кривой l с заданной скоростью заключается в изменении скорости точки вдоль каждой координаты, причем это изменение есть линейная функция текущих фазовых координат точки в зависимости от времени t с управлениями в виде коэффициентов $u_{ij}(t)$ [2]. В общем случае наиболее удобным для реализации при управлении исполнительными приводами, является трапецевидный закон скорости с графиком $v = v(t)$, показанным на рисунке 3.

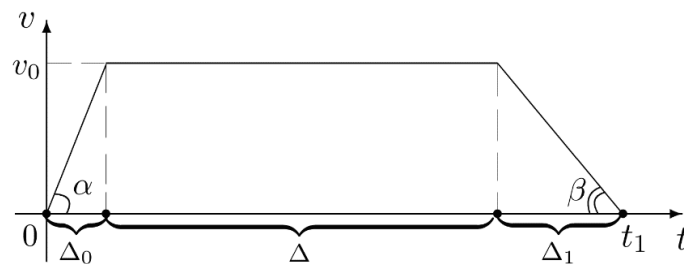


Рис. 3. График зависимости модуля максимальной скорости от времени

При реализации этого закона выделяется три характерных участка: Δ_0 – участок разгона, Δ_1 – участок торможения и Δ – рабочий участок с постоянной скоростью v_0 , который может выбираться таким, чтобы обеспечить прохождение точкой всей заданной кривой. В технических системах параллельной кинематики участок Δ – это технологический участок в соответствии с назначением системы. Учитывая все вышесказанное, можно окончательно сформулировать рассматриваемую задачу построения программных движений мехатронной системой перемещений, как задачу нахождения управлений (коэффициентов $u_{ij}(t)$) дифференциальной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_{11}(t)x + u_{12}(t)y + u_{13}(t)z \\ \dot{y} = u_{21}(t)x + u_{22}(t)y + u_{23}(t)z \\ \dot{z} = u_{31}(t)x + u_{32}(t)y + u_{33}(t)z, \end{cases} \quad (31)$$

описывающей пространство состояний мехатронной системы с учётом скорости [5].

Так как система (31) удовлетворяет теореме существования и единственности и имеет тождественно нулевое решение, то никакая ее фазовая кривая l не может проходить через начало координат, то есть должно выполняться координатное условие:

$$X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) \neq 0, \quad \forall t, \quad (32)$$

где $X(t), Y(t), Z(t)$ – функции, задающие закон движения точки.

Если заранее на матрицу коэффициентов системы (31) не накладывать никаких дополнительных ограничений, то для любой кривой l , не проходящей через начало координат, можно определить коэффициенты $u_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$ системы (31) сразу и в общем виде, так, чтобы l была ее фазовой кривой. Действительно, учитывая выражение (32) и обозначая

$$D = X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t),$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 u_{11}(t) &= \frac{X(t)\dot{X}(t)}{D}, u_{12}(t) = \frac{Y(t)\dot{X}(t)}{D}, u_{13}(t) = \frac{Z(t)\dot{X}(t)}{D} \\
 u_{21}(t) &= \frac{X(t)\dot{Y}(t)}{D}, u_{22}(t) = \frac{Y(t)\dot{Y}(t)}{D}, u_{23}(t) = \frac{Z(t)\dot{Y}(t)}{D} \\
 u_{31}(t) &= \frac{X(t)\dot{Z}(t)}{D}, u_{32}(t) = \frac{Y(t)\dot{Z}(t)}{D}, u_{33}(t) = \frac{Z(t)\dot{Z}(t)}{D},
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

где вектор-функция $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$ – будет решением системы (31).

Таким образом, нами получены управляющие функции в виде коэффициентов $u_{ij}(t)$ при реализации которых системой управления обеспечивается движение изображающей точки по заданной траектории с заданным законом скорости.

Результаты моделирования. В качестве примера результатов моделирования на рисунке 4 представлены результаты моделирования в среде MATLAB поворотного шагового двигателя серии RSMS-M36, производимого предприятием «Рухсервомотор» г. Минск при нагрузке 5 Н и трапециевидным законом скорости с максимальным её значением $v_0 = 0,5$ м/с. При этом обеспечивается одинаковый по времени режим разгона и торможения.

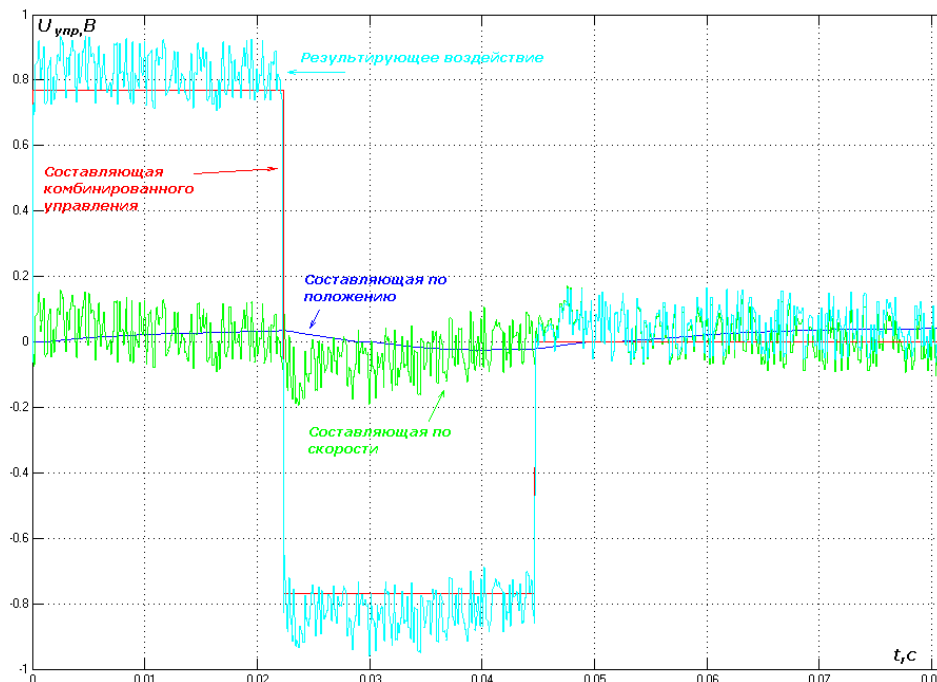


Рис. 4. Составляющие управляющего воздействия после ввода в систему момента сопротивления пружины

Графики составляющих управляющего воздействия приведены на рисунке 4. Как видно из графиков, ввод функционального блока, учитывающего момент сопротивления, несколько видоизменяет значения составляющих управляющего воздействия, однако это изменение в незначительной мере влияет на характер перемещения, что свидетельствует о высоком качестве регулирования.

Таким образом в работе показано, что решение задач по разработке компьютерного моделирования системы управления мехатронной системы перемещений сводится к моделированию управления каждым координатным модулем движения в отдельности с последующей интеграцией в общую схему управления гибридного многокоординатного привода по условиям реализации программируемых движений в соответствии с дифференциальными системами уравнений, предложенными в настоящей работе, которые описывают программируемые движения

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович [и др.]; под ред. проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
2. Карпович, С.Е. Математическая модель и алгоритмизация прямой задачи кинематики параллельного манипулятора с шестью степенями свободы / С.Е. Карпович, А.Ю. Войтов, В.Н. Нестеренко, А.С. Манин // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Вып. 33. Минск, 2018. – С. 137–143.
3. Карпович, С.Е. Алгоритмизация и имитационное моделирование системы перемещений с тремя степенями свободы / С.Е. Карпович, В.В. Кузнецов, А.Ю. Войтов, В.В. Жарский // Актуальные вопросы машиноведения : сборник научн. трудов / Объед. инст. машиностр. Нац. академии наук Беларуси – Минск, 2016. – Вып. 5. – С. 69–74.
4. Карпович, С.Е. Математическая модель кинематики для системы перемещений на кольцевом приводе прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Кузнецов, А.Ю. Войтов, В.В. Поляковский // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Вып. 31. Минск, 2016. – С. 156–161.
5. Карпович, С.Е. Алгоритмизация решения задач кинематики системы перемещений на трех планарных позиционерах / С.Е. Карпович, И.В. Дайняк, В.В. Кузнецов, А.Ю. Войтов // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Вып. 31. Минск, 2016. – С. 17–23.

ПОСТРОЕНИЕ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОГО МОДУЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ МИКРО- И НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

асп. ¹ Поляковский В.В.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
Минск

Введение. Современные тенденции в приборостроении, микро- и нанoeлектронике требуют от производителя все более широкий спектр элементной базы оборудования, при этом требования к интегральным схемам (ИС) с каждым годом растут. Разработка таких ИС требует создание все более сложных и специализированных производств, которые должны иметь возможность быстрой перенастройки согласно требованиям технологических процессов. Одним из способов организации таких производств является внедрение специализированных кластерных технологических линий, которые представляют собой связанные в единую систему комплексы из N модулей, выполняющие различные технологические задачи. Одним из ключевых решений таких систем является обеспечение транспортной связанности модулей комплекса, которая достигается с помощью специализированных систем перемещений, выполняющих перемещение изделия по запрограммированной последовательности технологических операций [1-3]. В данной статье рассмотрен подход построения транспортных систем для такого рода комплексов, а также предложены алгоритмы формирования программируемых движений.

Транспортная система на базе планарных шаговых двигателей. В НИЧ БГУИР «Мехатроника и Микросистемы» была предложена концепция модульного построения транспортной системы для производственных комплексов изделий микро- и нанoeлектроники. Общая структурная схема такого комплекса представлена на рисунке 1. Предложенный модульный подход подразумевает формирование необходимой структуры транспортной системы перемещения из базового модуля, в качестве которых выступает планарный линейный шаговый двигатель (ПЛШД), получивший широкое применение и зарекомендовавший себя как система координатных перемещений сборочного оборудования производства изделий микро- и нанoeлектроники.

На рисунке 1 схематически представлен производственный комплекс, содержащий несколько технологических модулей, транспортная связь между которыми осуществляется с помощью пяти ПЛШД.

В общем случае такие системы могут содержать N планарных позиционеров, которые выполняют согласованные программируемые перемещения по заданным траекториям согласно технологическому процессу, позволяя перемещать образец из одного технологического модуля в другой, при этом позиционируя его с точностью до 5 мкм [1, 4].

В зависимости от требуемой технологической операции, каждый их планарных позиционеров может дополнительно оснащаться локальными линейными или поворотными системами перемещений для обеспечения дополнительных степеней свободы изделия, его подъема, поворота в технологических модулях.

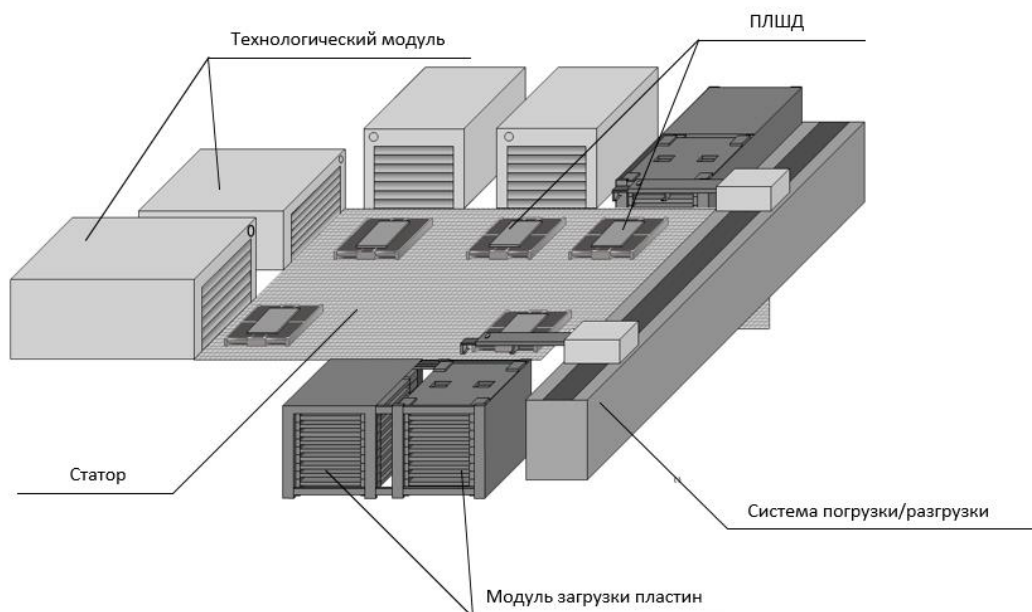


Рис. 1. Производственный комплекс для микро- и нанoeлектроники

Алгоритмы формирования программируемых движений. При разработке алгоритмов управления транспортными системами на базе мультикоординатных планарных систем перемещений ключевым решением являлся алгоритм формирования бесколлизийных перемещений N планарных позиционеров на одном статоре. При этом алгоритм должен обеспечивать требования мультиплицирования, т.е. использования в системе любого произвольного количества базовых элементов ПЛШД.

Представленный в работе алгоритм анализа и предотвращения коллизий для N планарных ЛШД основан на том [5, 6], что каждый позиционер представляется его проекцией на плоскость статора в виде геометрического места, ограниченного подвижным четырехугольником. Рассмотрим приложенный алгоритм на примере системы из двух планарных ЛШД. Геометрическая модель разработанного алгоритма представлена на рисунке 2.

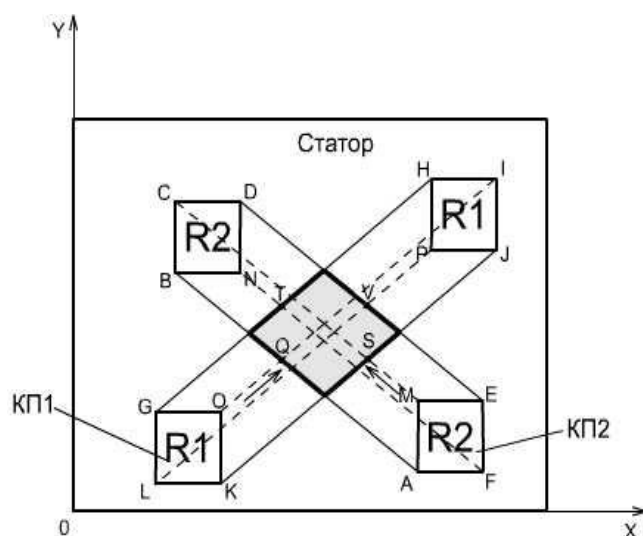


Рис. 2. Геометрическая модель анализа коллизий двух планарных ЛШД на одном статоре

Внешний прямоугольный контур определяет рабочее поле статора, в пределах которого возможно движение координатных позиционеров (КП). Четырехугольники LGOK и AMEF определяют геометрическое место на статоре, которое занимают в данный момент времени позиционеры КП1 и КП2 соответственно. Геометрические

зоны на статоре, в которых происходит перемещение позиционеров от начальной точки к конечной в работе принято называть шлейфами. Так, для позиционера КП1 шлейфом является шестиугольник $KLGHJ$, для позиционера КП2 – $ABCDEF$.

Не нарушая общности решения поставленной задачи, нами разработан алгоритм анализа и предотвращения коллизий для двух координатных позиционеров КП1 и КП2 имеющих форму квадрата со стороной L , при их прямолинейном движении от начального положения к конечному.

Параметрические уравнение перемещения любой точки позиционера в выбранной системе координат XOY имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \end{cases} \quad (1)$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – скорость позиционера на траектории в виде прямой.

При этом уравнение траектории будет иметь вид:

$$y = k \cdot x + b, \quad (2)$$

где $k = \operatorname{tg} \phi = \frac{v_x}{v_y}$ – угловой коэффициент траектории движения.

Если заданы начальная и конечная точки перемещения, то постоянные параметры прямой (2) рассчитываются по формулам:

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (3)$$

$$b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0, \quad (4)$$

где x_0, y_0 – координаты начальной точки перемещения; x_1, y_1 – координаты конечной точки перемещения.

В этом случае значения v_x и v_y будут определяться по формулам:

$$\begin{cases} v_x = v \cdot \cos \phi \\ v_y = v \cdot \sin \phi, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right), \text{ если } y_1 - y_0 \geq 0, \\ 180 + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right), \text{ если } y_1 - y_0 < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, по заданным начальным и конечным точкам движения позиционеров однозначно определяем уравнения их траекторий.

Областью на статоре, где возможно столкновение позиционеров, является геометрическое место пересечения шлейфов движения позиционеров (на рисунке 1 эта область выделена серым цветом). В соответствии с принятым в алгоритме правилом приоритетов, преимущество в движении имеет тот позиционер, который первым вошел в общую зону.

Моменты времени входа позиционеров в общую зону можно рассчитать по следующим формулам:

$$t_{1in} = \frac{\sqrt{(X_{in1} - X_{10})^2 + (Y_{in1} - Y_{10})^2}}{V_1}, \quad (7)$$

$$t_{2in} = \frac{\sqrt{(X_{in2} - X_{20})^2 + (Y_{in2} - Y_{20})^2}}{V_2} \quad (8)$$

где X_{in1}, Y_{in1} – координаты центра позиционера КП1 при входе в общую зону; X_{10}, Y_{10} – координаты центра позиционера КП1 в начальном положении; X_{in2}, Y_{in2} – координаты

центра позиционера КП2 при входе в общую зону; X_{20}, Y_{20} – координаты центра позиционера КП2 в начальном положении; V_1, V_2 – скорость движения позиционера КП1 и КП2 соответственно.

Сравнивая полученные по формулам (7) и (8) значения моментов времени входа и выхода в общую зону, принимаем решение о приоритетах движения позиционеров.

Предположим, что $t_{in1} < t_{in2}$. Тогда, в соответствии с выше сказанным, приоритет движения имеет позиционер КП1, т.е. он может двигаться без остановок. Позиционер КП2 должен остановиться у входа в общую зону на время Δt , определяемое по следующей формуле:

$$\Delta t = t_{out1} - t_{in2}. \quad (9)$$

где t_{out1} – момент времени выхода позиционера КП2 из общей зоны.

В момент времени $t = t_{in2} + \Delta t$ позиционер КП2 может продолжить свое движение.

Для мультикоординатной системы перемещения, включающей N планарных позиционеров, необходимо производить расчет времени остановки у входа в общую зону для каждой пары позиционеров. Так, для позиционера КП1 полный расчет времен остановки у входа в общую зону будет производиться по следующей формуле:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{12} = t_{out21} - t_{in12}, \text{ при } t_{in12} > t_{in21}, \\ \Delta t_{12} = 0, \text{ при } t_{in12} \leq t_{in21}. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{13} = t_{out31} - t_{in13}, \text{ при } t_{in13} > t_{in31}, \\ \Delta t_{13} = 0, \text{ при } t_{in13} \leq t_{in31}. \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{1i} = t_{outi1} - t_{in1i}, \text{ при } t_{in1i} > t_{ini1}, \\ \Delta t_{1i} = 0, \text{ при } t_{in1i} \leq t_{ini1}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (10)$$

где $\Delta t_{12}, \Delta t_{13}, \dots, \Delta t_{1i}$ – время остановки у входа в общую зону позиционеров КП1 и КП2, КП1 и КП3, КП1 и КПi соответственно; t_{in12}, t_{ini} – время входа позиционера КП1 в общую зону позиционеров КП1 и КП2, КП1 и КПi соответственно; t_{in21}, t_{ini1} – время входа позиционера КП2 и КПi соответственно в общую зону с позиционером КП1; t_{out21}, t_{outi1} – время выхода позиционера КП2 и КПi соответственно из общей зоны с позиционером КП1.

Аналогичное выражение для расчета времен остановки у входа в общие зоны можно составить и для других позиционеров системы. Таким образом, предложенный алгоритм формирования бесколлизийных перемещений масштабируется для системы из N планарных ЛШД, что позволяет обеспечить эффективное управление производственного комплекса на базе планарных шаговых двигателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарский, В.В. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования : монография / С.Е. Карпович [и др.] ; под. ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Поляковский, В.В. Анализ и предотвращение коллизий планарных позиционеров в системе перемещений Трипланар / В.В. Поляковский [и др.] // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 65–71.
3. Карпович, С.Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики : монография / С.Е. Карпович, И.В. Дайняк, В.В. Кузнецов, М.М. Форулан, Д.С. Титко, В.В. Поляковский, В.В. Жарский, Ю.С. Межинский ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.

4. Дайняк, И.В. Управление мехатронными системами перемещений в режиме реального времени / И.В. Дайняк, В.В. Кузнецов, В.В. Поляковский, С.К. Дик // *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*. Вып. 33. Минск, 2018. – С. 86–91.
5. Кузнецов, В.В. Интерактивное управление мехатронной системой перемещений на трёх планарных позиционерах / В.В. Кузнецов, В.В. Поляковский, С.К. Дик // *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*. Вып. 32. Минск, 2017. – С. 283–292.
6. Карпович, С.Е. Интерактивный мультимедийный модуль исследования в реальном режиме времени колебательных систем / С.Е. Карпович, В.Н. Нестеренко, А.С. Манин, В.В. Поляковский // *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*. Вып. 32. Минск, 2017. – С. 202–206.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ПРИ СОПРЯЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНИХ СИЛОВЫХ НАГРУЗОК

¹ Агаев В.Н., ¹ Мартыненко Т.М., ² Скляр О.Н., ² Мартыненко И.М.

¹ Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

² УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Пластины и оболочки являются наиболее распространенными составными элементами инженерных конструкций. Повышенные требования к прочности и надежности при уменьшении материалоемкости создают сложные проблемы анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных тел в условиях взаимодействия с переменными физическими полями. В связи с этим одной из задач механики тонкостенных конструкций является совершенствование методов расчета и проектирования пластин и оболочек сложной формы с различными законами изменения толщины, отверстиями, включениями, накладками при сопряженных воздействиях физических температурных полей и механических локализованных и распределенных внешних силовых нагрузок. Среди различных видов воздействий на элементы конструкций можно выделить класс термосиловых воздействий, когда неоднородность в термических условиях является сильным концентратором напряжений [1]. Термическое воздействие, играющее роль концентратора напряжений, – это неидеальный тепловой контакт. Возможная неоднородность или дефект межслоевого соединения приводят к неидеальному тепловому контакту. Эта неоднородность, локализованная в какой-либо области, являясь концентратором напряжений, может сильно влиять на распределение напряжений в конструкции [2-4]. Исследованию влияния такого вида локальных эффектов на НДС пластин и оболочек и посвящена данная работа.

Рассмотрим устойчивость тонкой подкрепленной оболочечной конструкции, квадратной и прямоугольной в плане, при действии физических температурных полей на несущие элементы конструкции. Устойчивость несущих элементов конструкции, или их поведение в условиях продольно – поперечного изгиба, зависит от формы поперечного сечения; так, стрингер с поперечным сечением, не имеющим осей симметрии, может потерять устойчивость, только одновременно скручиваясь и изгибаясь, в то время как в других случаях возможны также некоторые несвязанные формы потери устойчивости. Как и в задачах об изотермической устойчивости стержней [5], указанные вопросы возникают и тогда, когда на тело воздействует поле температур. В данной работе обсуждаются общая формулировка и решение задачи, причем для простоты анализ ограничивается важным частным случаем стержня бисимметричного сечения с минимальным главным моментом инерции I_z при этом в плоскости xu действует распределенная нагрузка $q = q(x)$, а распределение температуры, таково, что $M_{Ty} = 0$. Тогда стрингерная система, не закручиваясь, изгибается в плоскости xu , а перемещение $w = 0$.

Приложим силу P , которая считается положительной при сжатии. При этом предполагается что главная ось, соответствующая минимальному моменту инерции

поперечного сечения, перпендикулярна к плоскости xu . Так как $P = EA \frac{\partial w}{\partial x}$. Волны сжатия, вызываемые перемещениями концов, распространяются вдоль стрингеров со значительно большей скоростью, чем скорость, с которой происходит поперечное перемещение. Следовательно, можно считать сжимающую осевую силу P постоянной вдоль оси. Это означает, что выражение для сжимающей силы может быть заменено интегральным выражением, которое связывает сжимающую силу с перемещением ct за время t и с изменением расстояния между концевыми точками стрингера. Если поперечное сечение стрингера постоянно, то это выражение имеет вид

$$P = \frac{EA}{L} \left(ct - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right). \quad [6].$$

Стрингерная система в конечном состоянии получит прогиб w , а кривизна K изменится на величину

$$\delta K = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{M_z + M_{Tz}}{EI_z}, \quad (1)$$

связанную с действием дополнительного момента Pw . Исходя из обычного допущения о пропорциональности между кривизной и изгибающим моментом, получим, что

$$\delta K = -\frac{Pw}{EI_z}, \quad (2)$$

или

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = M_z + M_{Tz}, \quad (3)$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = q - \frac{d^2 M_{Tz}}{dx^2}. \quad (4)$$

В качестве основного уравнения для расчета нагретой стрингерной системы можно взять любое из последних двух уравнений. Их надо решить при следующих граничных условиях;

$$\text{закрепленный конец: } w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0; \quad (5)$$

$$\text{свободно опертый конец } w = 0, \quad EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_{Tz}; \quad (6)$$

$$\text{свободный конец } EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_{Tz}, \quad \frac{d}{dx} \left(EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{dw}{dx} = -\frac{dM_{Tz}}{dx}. \quad (7)$$

В указанных уравнениях члены, содержащие температуру M_{Tz} , входят только в правые части и поэтому оказывают такое же влияние, как и добавочная нагрузка P . Решения этой задачи, можно получить теми же методами, что и для оболочек с постоянной температурой [7]. Чтобы разделить влияние температуры и поперечных нагрузок решение сформулированной выше задачи удобно представить в виде двух частей. С этой целью определим компоненты прогибов w_T и w_q следующий образом. Величина w_T – это прогиб, который имела бы конструкция, если бы она была подвержена действию только температуры и продольной силы P , а поперечные нагрузки отсутствовали. Поэтому w_T удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 w_T}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w_T}{dx^2} = - \frac{d^2 M_{Tz}}{dx^2}, \quad (8)$$

и граничным условиям (5) – (7). Величина w_q – это прогиб, который имела бы стрингерная система, если бы на нее действовали только поперечные нагрузки и продольная сила P , а влияние температуры не учитывалось [8]. Поэтому w_q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 w_q}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w_q}{dx^2} = q, \quad (9)$$

и следующим граничным условиям

$$\text{защемленный конец } w_q = 0, \quad \frac{dw_q}{dx} = 0; \quad (10)$$

$$\text{свободно опертый конец } w_q = 0, \quad \frac{d^2 w_q}{dx^2} = 0; \quad (11)$$

$$\text{свободный конец } EI_z \frac{d^2 w_q}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(EI_z \frac{d^2 w_q}{dx^2} \right) + P \frac{dw_q}{dx} = 0. \quad (12)$$

Решение полной задачи, когда действуют все нагрузки, можно представить в виде $w = w_T + w_q$. Основное преимущество указанного способа заключается в том, что составляющая прогиба w_q представляет собой решение задачи о продольно-поперечном изгибе. Что касается w_T , то ее в общем приходится определять для каждой конкретной задачи заново.

Рассмотрим случай, когда распределение температуры по длине представляется многочленом степени не выше третьей[9]

$$M_{Tz} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (13)$$

В этом случае для стрингерной системы постоянного сечения уравнение (12) можно записать в виде

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad (14)$$

где

$$V = w_T + \frac{M_{Tz}}{P}, \quad (15)$$

$$\text{и введено обозначение } k = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}. \quad (16)$$

В этом случае непосредственно находим

$$w_T = \frac{M_{Tz}}{P} + b_0 + b_1 x + b_2 \sin kx + b_3 \cos kx \quad (17)$$

и затем, определяя из граничных условий (9) – (11) постоянные b_i , получаем окончательное решение.

Вычислим в явном виде значения прогиба w_T по формуле (17) для трех важных частных примеров, причем ограничимся случаем $a_2 = a_3 = 0$, так что

$$M_{Tz} = a_0 + a_1 x. \quad (18)$$

Предположим, что стрингерная система имеет постоянное сечение, а его длина ограничена координатами $x = 0$ и $x = L$.

1. Оба конца зашпелены. В этом случае продольная сила не влияет на прогиб w_T и поэтому (при нагрузке меньше критической) решение имеет вид

$$w_T = 0 \text{ при } P < P_{кр.} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}, \quad (19)$$

Однако, если бы постоянные a_2 и a_3 не равнялись нулю, то прогиб также отличался бы от нуля; он зависел бы от усилия P и бесконечно возрос бы при критическом значении усилия, соответствующем условию $kL = 2\pi$, т. е. при значении $P_{кр.} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}$, что равно критическому усилию для стрингерной системы с двумя зашпеленными концами.

2. Оба конца свободно оперты. В этом случае решение имеет вид

$$w_T = -\frac{a_0}{P} \left(\frac{\cos kL - 1}{\sin kL} \sin kx + 1 - \cos kx \right) - \frac{a_1}{P} \left(x - L \frac{\sin kx}{\sin kL} \right), \quad (20)$$

и w_T стремится к бесконечности при $kL = \pi$, когда величина усилия P становится равной критическому значению для стрингерной системы данного типа, т. е. когда $P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$.

3. Консоль конец $x = 0$ заделан, конец $x = L$ свободен. При указанных условиях на концах прогиб равен

$$w_T = -\frac{a_0}{P} \frac{1 - \cos kx}{\cos kL} - \frac{a_1}{P_k} \left(\left(\frac{kL - \sin kL}{\cos kL} \right) (1 - \cos kx) + kx - \sin kx \right), \quad (21)$$

Прогиб становится бесконечным при $kL = \frac{\pi}{2}$, когда усилие P принимает значение $P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$ что соответствует критическому усилию для консольного операния.

Напомним, что с точки зрения точной теории термоупругости указанные формулировки являются приближенными. Подытоживая результаты расчетов для пластин и оболочек, можно сделать вывод о характере напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек, подвергаемых локальному нагреву. При локальном нагреве тонкостенного элемента возникает температурное поле, характеризуемое локализацией в области пятна нагрева. При решении задачи в стационарной постановке максимум интенсивности приходится на центр пятна нагрева. При решении нестационарной задачи максимум интенсивности нестационарных напряжений приходится в начальное время на область края пятна нагрева, и по мере прогрева максимум переходит в центр пятна нагрева.

Заключение. Повышение работоспособности зависит от частоты расположения и жесткости подкрепляющих элементов, которые весьма сложным образом влияют на процесс динамического деформирования и в частности на то, какая форма потери устойчивости (общая или местная) будет доминирующей. Результаты решения позволяют более детально назначать прочностные критерии для оболочек работающих под действием контактных термодинамических нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.

2. Власов, В.З. *Общая теория оболочек* / В.З. Власов. – М. : Физматгиз, 1949. – 784 с.
3. Блейх, Ф. *Устойчивость металлических конструкций* / Ф. Блейх. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.
4. Тимошенко, С.П. *Пластинки и оболочки* / С.П.Тимошенко, С.В. Войковский-Кригер. – М. : Физматгиз, 1963.
5. Белов, Н.Н. *Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки* / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов. – Томск : STT, 2004. – 465 с.
6. Bangash, M.Y.H. *Explosion-Resistant Building Structures* / M.Y.H. Bangash, T. Bangash; *Design, Analysis, and Case Studies*. – Berlin : Springer, 2006. – 450 с.
7. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. – Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.
8. Abaqus. *Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution*. Publisher Simulia, 2008. 711 p.
9. Matsagar Vasant A. *Computing stress and displacement response of composite plates under blast*. *Disaster Advances*. 2014. Vol. 7, No 1. P. 23–38.

АЛГОРИТМЫ ГРУППОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМИ РОБОТАМИ НА АВТОМАТИЗИРОВАННОМ СКЛАДЕ

асп. ¹Поляковский В.В., асп. ¹Лахвич М.Н., студ. ¹Голунова В.М., студ. ¹Хмель О.В.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. В настоящее время одним из острых вопросов построения современного автоматизированного склада является вопрос решение транспортной задачи без участия человека, путем использования роботов-кладовщиков. В работе рассмотрен подход к построению архитектуры алгоритмов группового управления складскими роботами.

Цифровая экосистема умного производства. Сейчас современному высокотехнологическому производству, или как принято говорить умному производству (Smart manufacturing, SM), предъявляются новые требования, предполагающие интеграцию производственных бизнес-процессов в глобальную сеть спроса-предложения. Данные требования реализуются путем создания цифровых экосистем, способных адаптироваться к глобальной среде как на физическом, так и на виртуальном мирах.

Такой подход был сформулирован в рамках философии четвертой промышленной революции, более известная как «Индустрия 4.0» (Industry 4.0), получила свое название от инициативы 2011 года, возглавляемой бизнесменами, политиками и учеными, которые определили ее как средство повышения конкурентоспособности обрабатывающей промышленности Германии через усиленную интеграцию «кибер-физических систем», или CPS, в заводские процессы [1].



Рис. 1. Иерархия цифровой экосистемы умного производства

Неотъемлемой частью экосистемы современного предприятия (рисунок 1) является система управления автоматизированным складом или WMS-системы. Однако, наряду с классическими задачами WMS-систем, которое можно сформулировать, как организация оптимального товародвижения в рамках склада, все более остро ставится задача управления складскими роботами, которые выполняют функцию транспортной

системы на складе, осуществляя перемещение товаров по заданным маршрутам.

В качестве исполняющего механизма, осуществляющее непосредственное перемещение, может выступать автономный робот-кладовщик (рисунок 2) или интегрированный роботизированный комплекс.



Рис. 2. Пример робота-кладовщика на предприятии Amazon [2]

Алгоритмы формирования маршрутов движения. Данные алгоритмы реализованы в ядре WMS-системы и предназначены для формирования маршрутов движения товаров на складе согласно стратегии, применяемой на предприятии. К таким алгоритмам можно отнести алгоритмы размещения продукции, отборки продукции, уплотнения, инвентаризации и т.д.

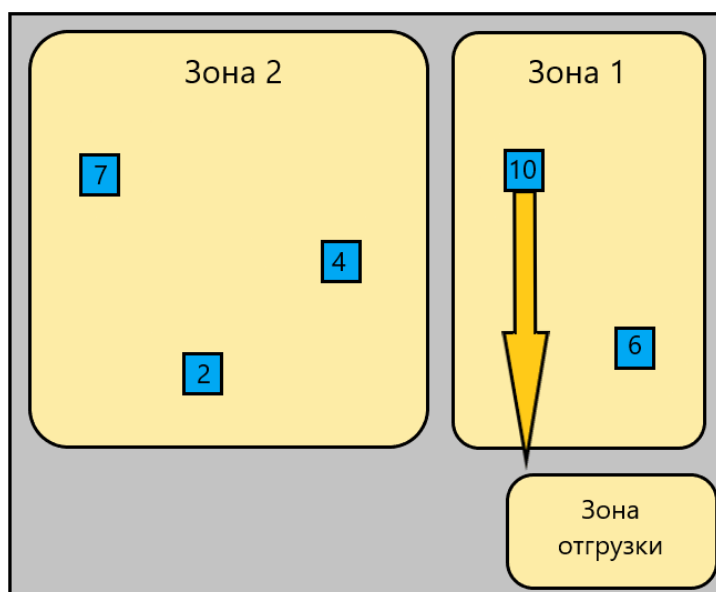


Рис. 3. Топология склада

Рассмотрим алгоритм отборки продукции на примере склада, топология которого представлена на рисунке 3. На данном складе можно выделить три зоны: зона мезонина (зона 1) и зона полётных стеллажей (зона 2) и зона отгрузки. В каждой из зон синими квадратами отмечены ячейки, в которых существует физическое наличие продукции,

предназначенной для отборки.

Алгоритм, определяющий ячейки, из которых будет отбираться продукция, можно разделить на два этапа:

- определение зоны или зон, в рамках которых будут производиться отборка;
- определение конкретных ячеек зон, выбранной на первом этапе.

При определении номера зоны отборки необходимо сформулировать правила приоритета – например, приоритет имеет зона с максимальным коэффициентом эффективности операции отборки, для нашего пример это зона 1 мезонин.

Далее происходит подбор конкретной ячейки в рамках зоны, который осуществляется согласно стратегии отборки продукции, который и определяет приоритеты. Примером такой стратегии может быть FEFO (First Expire, First Out – первый истекает – первый выходит), для которой решающую роль будет играть дата истечения срока годности.

Результатом работы алгоритмов данного уровня являются массив из номеров ячеек, контрольных точек, которые требуется обойти складскому роботу, для обеспечения выполнения поставленной задачи на отборку.

Алгоритм трассировки траектории движения. Рассмотрим алгоритм формирования траектории движения на примере топологии перемещения, представленной на рисунке 4.

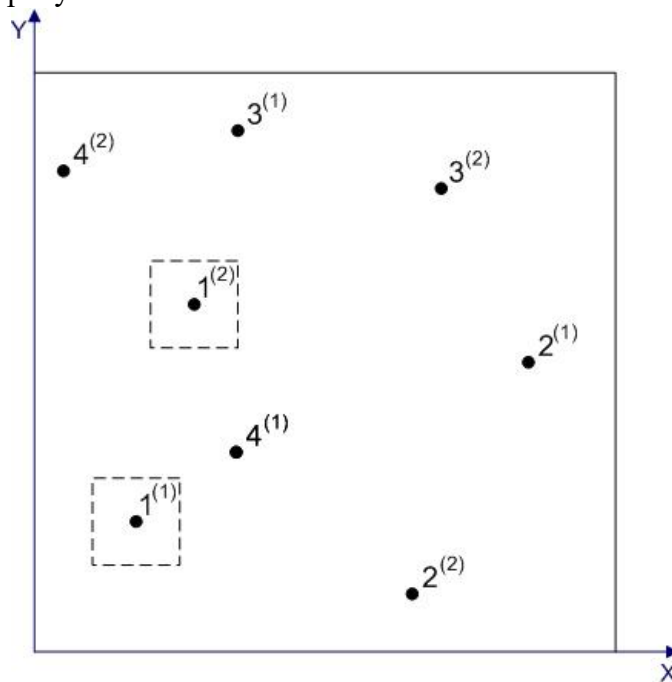


Рис. 4. Топология перемещений роботов

На рисунке 4 представлен набор контрольных точек для 2-х роботов на рабочей области, в которые они должны осуществить свое перемещение. Обозначим эти наборы точек для робота 1 через множество p_1 , для робота 2 – через множество p_2 .

В качестве параметра оптимизации принимаем время выполнения полной задачи на перемещение, т.к. очевидно, что минимальность пройденного расстояния не всегда обеспечивает максимальную производительность многокоординатной системы перемещения. Под полным временем выполнения задачи на перемещения понимается промежуток времени, в течение которого все позиционеры многокоординатной системы выполняют перемещения во все ключевые точки своих траекторий. Таким образом, полное время перемещения может быть определено по следующей формуле:

$$t_{total} = \max(t_{total}^k), \quad (1)$$

где t_{total}^k – полное время перемещения k -го робота системы, которое может быть рассчитано по следующей формуле:

$$t_{total}^k = \sum_{i=1}^{n-1} t_{i \rightarrow i+1}^k, \quad (2)$$

где $t_{i \rightarrow i+1}^k$ – время перемещения k -го робота из точки i в точку $(i+1)$;

n – количество ключевых точек траектории k -го робота.

Из выражений (2) и (3) следует, что решение задачи определения оптимальной траектории перемещения достижимо путем поиска локальных оптимумов по времени перемещения из текущих в последующие ключевые точки $t_{i \rightarrow i+1}^k$.

Принимая во внимание трапецеидальный закон движения роботов, можем выполнить расчет времени движения k -го робота от точки i до точки j :

$$t_{i \rightarrow j}^k = \frac{\sqrt{(p_j^k[x] - p_i^k[x])^2 - (p_j^k[y] - p_i^k[y])^2}}{v_{max}^k} + \frac{1}{2} \cdot (t_p^k + t_T^k) + \Delta t_{i \rightarrow j}^k, \quad (3)$$

где $t_{i \rightarrow j}^k$ – время перемещения k -го позиционера из точки i в точку j ;

$(p_i^k[x], p_i^k[y])$, $(p_j^k[x], p_j^k[y])$ – координаты i -й и j -й точки соответственно для k -го позиционера;

v_{max}^k – максимально допустимая скорость k -го робота;

t_p^k – время разгона k -го робота;

t_T^k – время торможения k -го робота;

$\Delta t_{i \rightarrow j}^k$ – время остановки k -го робота, в случае коллизий с другим роботом системы.

Расчет производим для всех возможных комбинаций из множеств точек траектории позиционеров системы (p_1, p_2, \dots, p_n) . Результатом данного расчета является двумерное множество NT , состоящее из двух частей – порядкового номера последующей точки и время перемещения в эту точку из текущего положения. То есть каждый элемент множества NT представляет собой пару (j, t) , где j – порядковый номер последующей точки, t – время перемещения в эту точку. Расчет значений множества NT для k -го позиционера выполняется на каждой итерации алгоритма с использованием следующего выражения:

$$NT[k] = \begin{cases} [j, t_{i \rightarrow j}^k], \text{ npu } j = i + 1, \\ [j, t_{i \rightarrow j}^k], \text{ npu } NT[k][t] > t_{i \rightarrow j}^k, \\ NT[k], \text{ npu } NT[k][t] \leq t_{i \rightarrow j}^k, \end{cases} \quad (4)$$

где $NT[k]$ – порядковый номер последующей точки и времени перемещения в нее для k -го робота, представленные в форме одномерного множества вида $[n, t]$.

Анализируя полученные выражения (3) и (4) видно, что время перемещения отдельного робота в последующую точку зависит не только от координат и параметров его движения, но и от перемещений остальных роботов, которое учитывается в выражении (4) с помощью значения $\Delta t_{i \rightarrow j}^k$.

Таким образом, формирование оптимальной траектории движения для каждого робота системы отдельно невозможно, а необходимо учитывать совместные перемещения. В этом случае формула (4) примет следующий вид:

$$NT[k] = \begin{cases} [j, t_{i \rightarrow j}^k], \text{ npu } j = i + 1, \\ NT'[k], \text{ npu } \max(NT[t]) > \max(NT'[t]), \\ NT[k], \text{ npu } \max(NT[t]) \leq \max(NT'[t]), \end{cases} \quad (5)$$

где $NT'[k]$ – множество вида $[n, t]$ для выбранной комбинации точек на i -м шаге

расчета.

Алгоритмы бесколлизийных движений. Задача построения бесколлизийных перемещений в общем рабочей области является ключевой в алгоритмах группового управления складскими роботами. Авторами предлагается использовать математическую модель и аналитические алгоритмы формирования бесколлизийных движений при равномерном и равноускоренном законах движения, которые представлены в работе [3].

В работе представлены 3 основных уровня архитектуры алгоритмов группового управления складскими роботами, реализация которых позволит организовать совместное эффективное перемещение в рабочей области склада, согласно стратегии складского управления, принятой на предприятии. Данные алгоритмы могут быть объединены в один вычислительный модуль, с последующей интеграцией его в ERM/WMS/MES-систему предприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарский, В.В., Карпович, С.Е., Дайняк, И.В., Ланин, В.Л., Петухов, И.Б., Литвинов, Е.А., Поляковский, В.В. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования : монография / С.Е. Карпович [и др.] ; под. ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа <https://logist.today/2017/03/30/zamenjat-li-roboty-gruzchikov-i-kurerov/>
3. Поляковский, В.В. Анализ и предотвращение коллизий планарных позиционеров в системе перемещений Трипланар / В.В. Поляковский [и др.] // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 65–71.

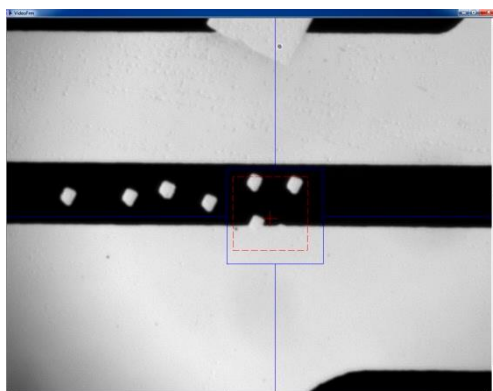
МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЛАЗЕРНОГО ИСПРАВЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ ОРИГИНАЛОВ ТОПОЛОГИЙ НА ФОТОШАБЛОНАХ

инж. ¹ Дедков А.И.

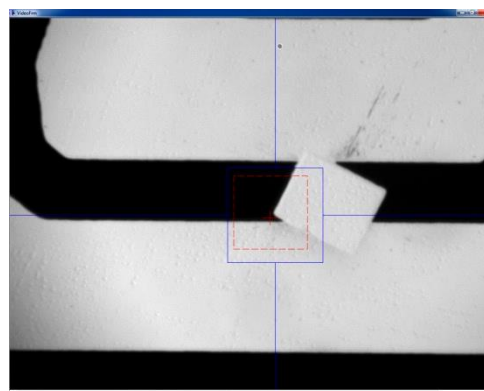
¹ ОАО «КБТЭМ-ОМО»

Введение. С развитием современной микро- и нанoeлектроники все больше прослеживаются тенденции к интеграции различных типов устройств в один чип. Так элементы микро электромеханических систем (МЭМС) комбинируют с электронными или нанооптическими. В связи с этим происходит значительное усложнение топологий слоев при производстве чипов таких интегральных устройств. И если ранее преобладали, в основном, прямолинейные формы и участки, то в настоящее время приоритет принадлежит сложным криволинейным конфигурациям.

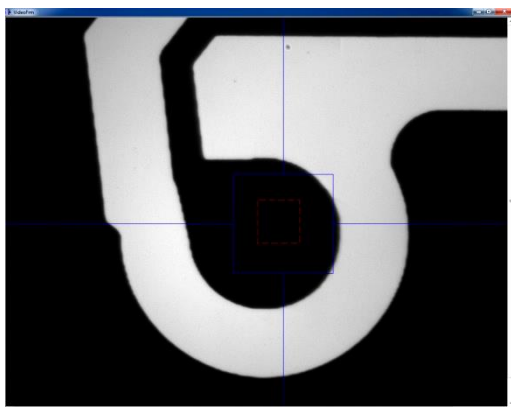
Исходя из тезиса о невозможности бездефектного производства фотошаблонов, вероятность попадания дефектов на сложные участки топологии значительно возросла. И если на предыдущих поколениях устройств мы сталкивались преимущественно с нарушениями, представленными на рисунке 1 (а и б), в современной фотолитографии преобладают конфигурации типа в и г (рисунок 1).



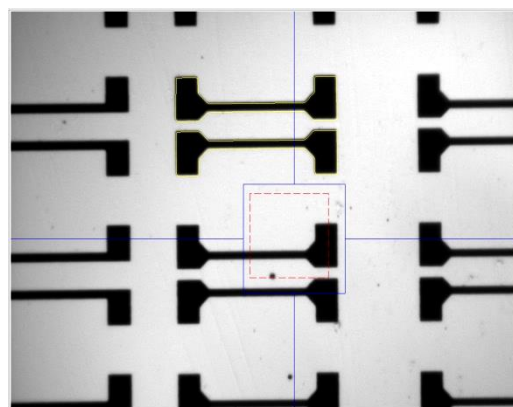
а)



б)



в)



г)

Рис. 1. Примеры конфигураций топологии на фотошаблонах

Таким образом, при разработке оборудования устранения дефектов мы сталкиваемся с проблемой восстановления рисунка топологии в тех допусках и

точностях, которые необходимы для дальнейшего технологического цикла производства изделия. Нужно отметить, что эти сложности испытывают и конкурирующие производители оборудования данного типа. И далеко не у всех моделей ретушеров есть возможность решения данной проблемы.

Целью данной работы явилось исследование влияния параметров проекционной системы и системы видеонаблюдения на качество исправления дефектов. И как следствие, разработка методов, позволяющих повысить качество результатов ремонта.

Проблемы и методы их решения. Наиболее характерным технологическим требованием при устранении дефектов является отклонение размеров малых элементов, не превышающих 5–10% от номинала. Таким образом, при ширине линии 300 нм искажения формы после ремонта не должны превышать 30 нм.

В рамках статьи описаны методы и алгоритмы, которые разработаны и внедрены в последние модели установок ремонта фотошаблонов ЭМ-5131, ЭМ-5141 для повышения качества устранения дефектов сложной формы.

Методика, которую мы предлагаем, основана на использовании алгоритмов машинного зрения для формирования шаблонов контуров восстанавливаемых участков топологии, а также субпиксельного определения расположения фрагментов топологии. В отличие от других подобных методик, которые для работы требуют наличия эталонного описания фотошаблона в одном из общепринятых векторных форматах типа GDS [1-3], наши алгоритмы формируют графический шаблон непосредственно по реальному видеоизображению. Данный подход значительно упрощает работу оператора, т.к. в основе своей имеет визуальную составляющую, что позволяет одновременной проводить контроль ремонта непосредственно в процессе его проведения. На рисунке 2 представлен процесс ремонта с применением контурного шаблона элемента топологии на установке ремонта фотошаблонов ЭМ-5131.

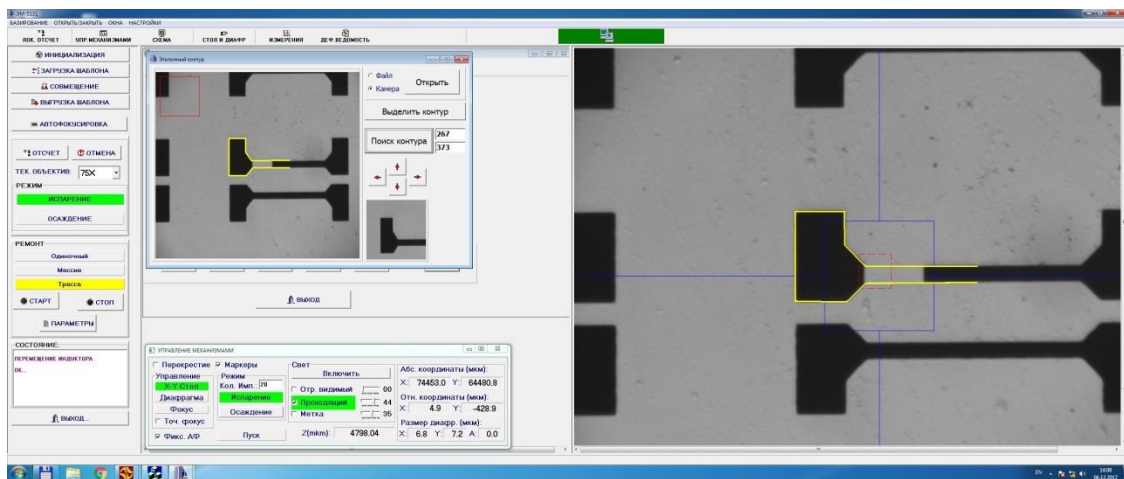


Рис. 2. Применение контурного шаблона при восстановлении формы элемента топологии

Важно то, что расположение эталонного контура на элементе не меняется, а перемещается синхронно с объектом в поле видеокamеры. Это позволяет постоянно контролировать процесс ремонта.

Основной проблемой при ремонте сложных элементов топологий являются физические ограничения системы наблюдения. На рисунке 3а представлено изображение топологии линия-промежуток размером 300 нм, полученное при помощи объектива с числовой апертурой $N_A=0.5$, на рисунке 3б то же изображение с объективом с числовой апертурой $N_A=0.7$ при освещении с длиной волны $\lambda=257$ нм на установке ремонта ЭМ-5141.

На рисунках 3в и 3г представлены горизонтальные профили этих изображений

соответственно. Из представленных изображений видно, что при достаточном разрешении таких структур края элементов отображаются смазанными. Это объясняется оптическими эффектами при конечных апертурах объективов и дифракцией на краях элементов.

Размер пикселя на изображения 3а и 3б 60 нм и 40 нм соответственно, что однозначно не позволяет нам удовлетворить требования по искажениям формы при проведении ремонта по визуальным данным. Для решения этой проблемы были разработаны алгоритмы и программы автоматизированного наведения на дефект. Данные алгоритмы учитывают интегральный профиль краев элементов и позволяют вычислять координаты с нанометровой точность. Применяя разработанные алгоритмы и программы на их базе, а также прецизионную систему координатного позиционирования, удалось провести устранение дефекта типа перемычка с требуемыми допусками. Результаты приведены на рисунке 4.

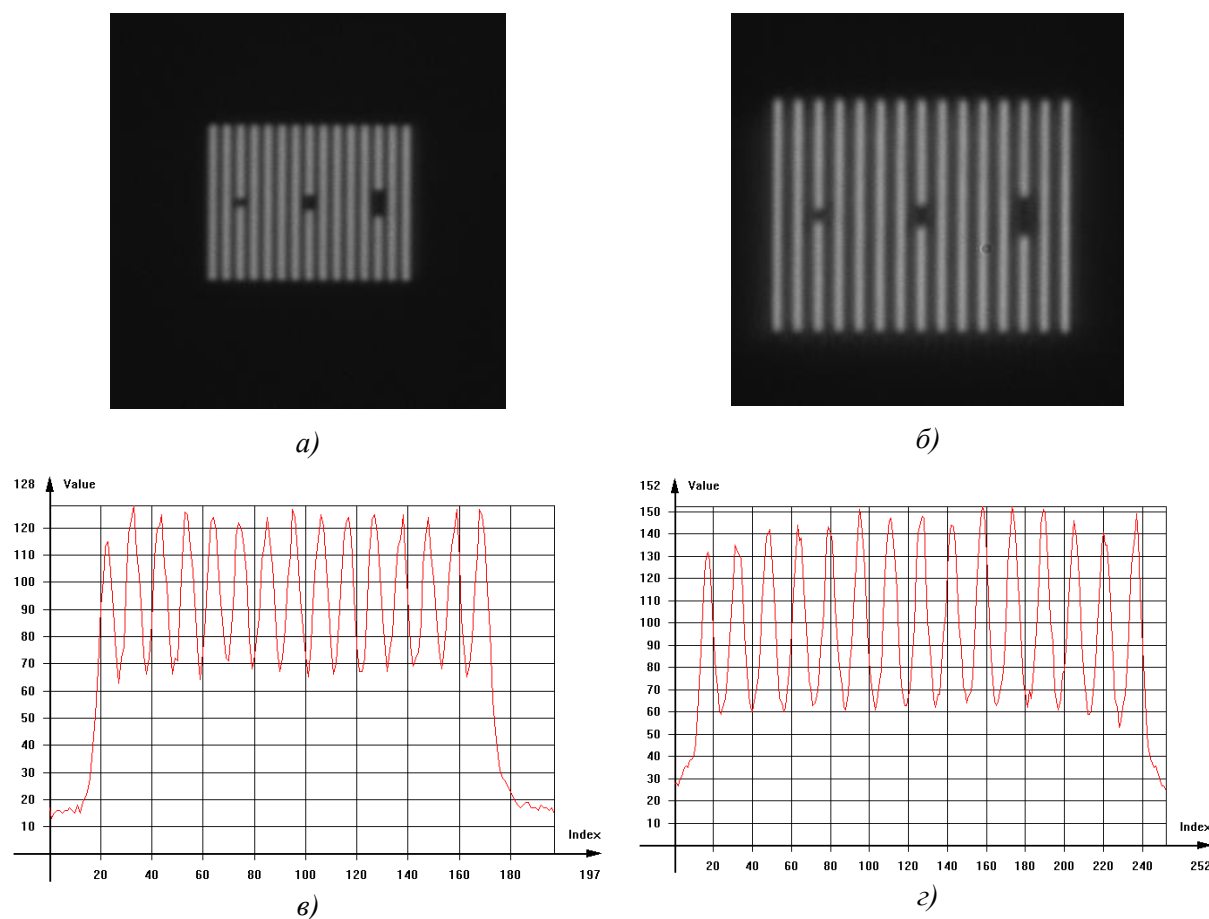


Рис. 3. Изображение структуры линия-промежутки с шириной линии 300 нм

На рисунке видно, что при номинале линии 314.7 нм результат после ремонта составил 303.1 нм, что уверенно удовлетворяет технологическим требованиям на 5% допуск на искажение формы и размера элемента.

Также следствием физических ограничений системы наблюдения является затрудненный анализ результатов устранения дефектов. На практике для решения этой проблемы используют повторный контроль на установках автоматического поиска дефектов или анализ фрагментов отремонтированной топологии на установках типа AIMS (Система автоматического измерения изображений) [4].

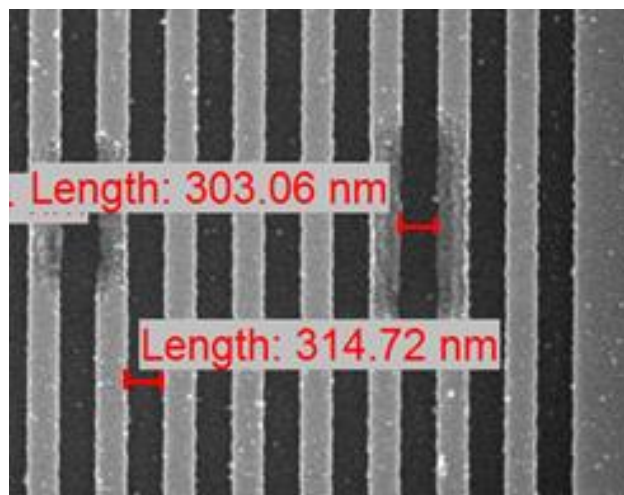


Рис. 4. Результат устранения дефекта типа перемычка в структуре линия-промежутки с шириной линии 300 нм. Получено и измерено на электронном микроскопе Nova NanoSEM 650.

Нами предложены и применены алгоритмы цветового представления монохромной видеоинформации. На рисунке 5 представлены фрагменты видеозображения до (а) и после (б) применения данного представления. Применение такого представления обусловлено особенностями человеческого зрения к лучшему восприятию малых элементов и форм в цветовом контрасте, чем в оттенках серого.

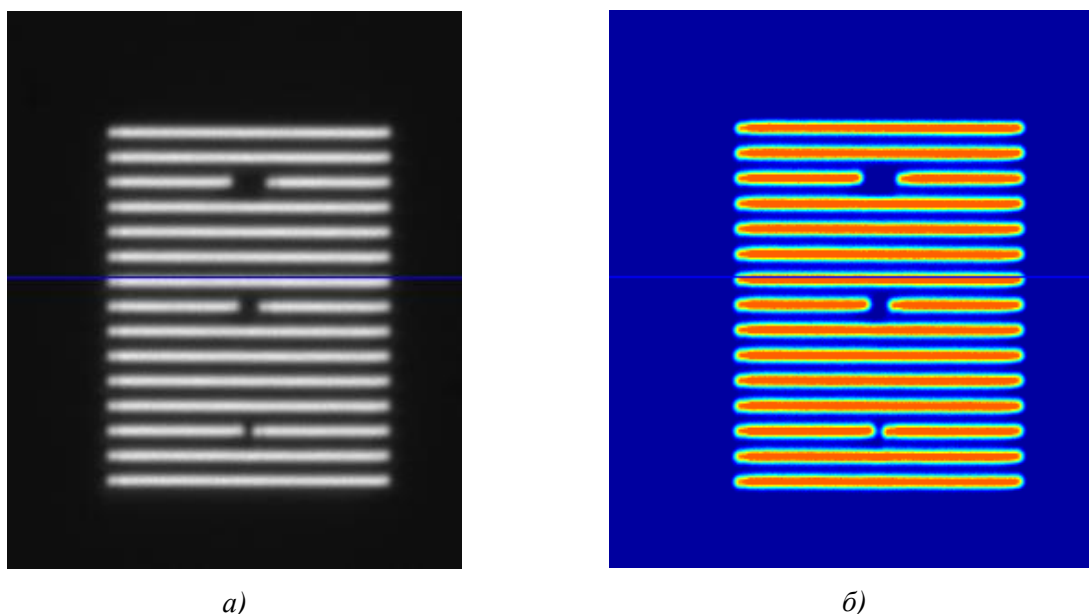


Рис. 5. Цветовое представление монохромного видеозображения. Ширина линий 400 нм.

Особенностями данных алгоритмов является их оптимизация по времени выполнения, что позволило обрабатывать каждый кадр видеопотока без снижения его скорости. Кроме того, мы значительно повысили четкость краев элементов, что позволило оператору установки оперативно анализировать результаты ремонта и при необходимости проводить дополнительную коррекцию.

Заключение. В данной статье рассмотрены основные ограничения и проблемы, с которыми приходится сталкиваться при конструировании и производстве оборудования устранения дефектов на фотосаблонах, работающего в диапазоне глубокого ультрафиолета (ГУФ). Как видно из проведенных исследований, даже использование ГУФ не дает гарантированных результатов при устранении сложных

дефектов. Дальнейшее увеличение разрешающей способности для визуального процесса ремонта предполагает переход к электронно-лучевым системам ремонта. Это влечет за собой значительное усложнение, как оптических систем установки, так и систем управления процессом ремонта. А это, в свою очередь, значительно увеличивает время и сложность разработки, а также стоимость готового образца.

Использование предложенных алгоритмов и методик позволило получить значительное улучшение технологических характеристик оборудования с малыми экономическими затратами. Также было получено доказательство успешного применения описанных методик в реальных технологических процессах ремонта как бинарных, так и фазосдвигающих фотошаблонов.

ЛИТЕРАТУРА

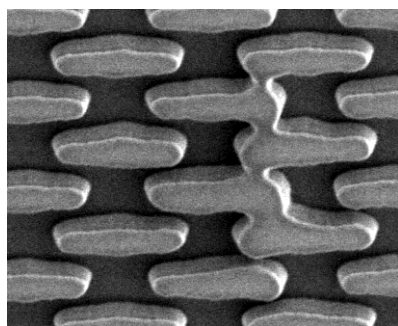
1. Irene Shi, Eric Guo, Max Lu, Izumi Santo. *Micro-defect repair assisted with contour-based 2D metrology / SPIE 10451, Photomask Technology, 2017*
2. Wenzhe Shi, Jose Caballero, Ferenc Huszar, Johannes Totz, Andrew P. Aitken, Rob Bishop, Daniel Rueckert, Zehan Wang. *Real-Time Single Image and Video Super-Resolution Using an Efficient Sub-Pixel Convolutional Neural Network / 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 105-114, 2017.*
3. Evangelidis, G.D., Psarakis, E.Z.: *Parametric image alignment using enhanced correlation coefficient maximization / IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 30(10), 1858–1865 (2008).*
4. Kristian Schulz, Kokila Egodage, Gilles Tabbone, Christian Ehrlich, Anthony Garetto. *SEM AutoAnalysis: enhancing photomask and NIL defect disposition and review / SPIE 10446, 33rd European Mask and Lithography Conference, 2017*

МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ ОРИГИНАЛОВ ТОПОЛОГИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ НА ФОТОШАБЛОНАХ, ОСНОВАННЫЕ НА МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ФОТОЛИТОГРАФИИ

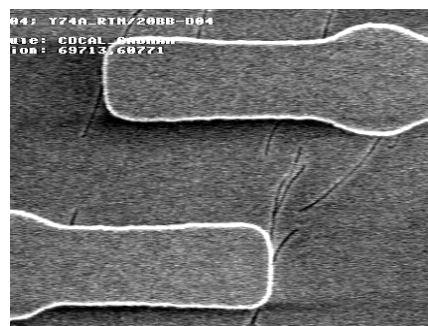
асп. ¹Титко Д.С.

¹УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
Минск

Введение. Процесс производства оригиналов топологии полупроводниковых приборов на фотошаблонах характеризуется повышением сложности формируемых топологических структур [1]. Соответственно повышается сложность технологии изготовления и стоимость фотошаблонов, которая для проектных норм 65-22 нм может превосходить один миллион евро за комплект [2]. Поэтому большое значение имеет повышение процента выхода годных при одновременном обеспечении 100% вероятности отсутствия дефектов в процессе использования фотошаблонов в кристалльном производстве, что требует так называемой «бездефектной» [3, 4] технологии производства. Существующая технология предполагает наличие в технологическом цикле производства оригиналов топологии на фотошаблонах обязательной операции автоматического контроля топологических структур на соответствие проектным данным. При этом, дефекты, обнаруженные в результате автоматического контроля, устраняются при помощи лазерного [4, 5] или электронно-лучевого [6] оборудования для исправления как прозрачных, так и непрозрачных дефектов. В первом случае используется технология лазерно-стимулированного (электронно-стимулированного) осаждения метало-органического вещества из газообразной фазы, во втором – технология лазерной (электронно-лучевой) сублимации остатков металлизированной маски, как правило, при помощи импульсного лазера с высокой плотностью энергии в импульсе (с продолжительностью импульса порядка сотен фемтосекунд). И та, и другая технологии несут в себе существенно большие риски травмирования маски и подложки фотошаблона, чем традиционная технология экспонирования фоторезиста лазерным (электронным) лучом, в силу чего вероятность получения бракованных изделий при формировании аналогичного рисунка является существенно более высокой.



*Топология пластины на электронном
микроскопе*

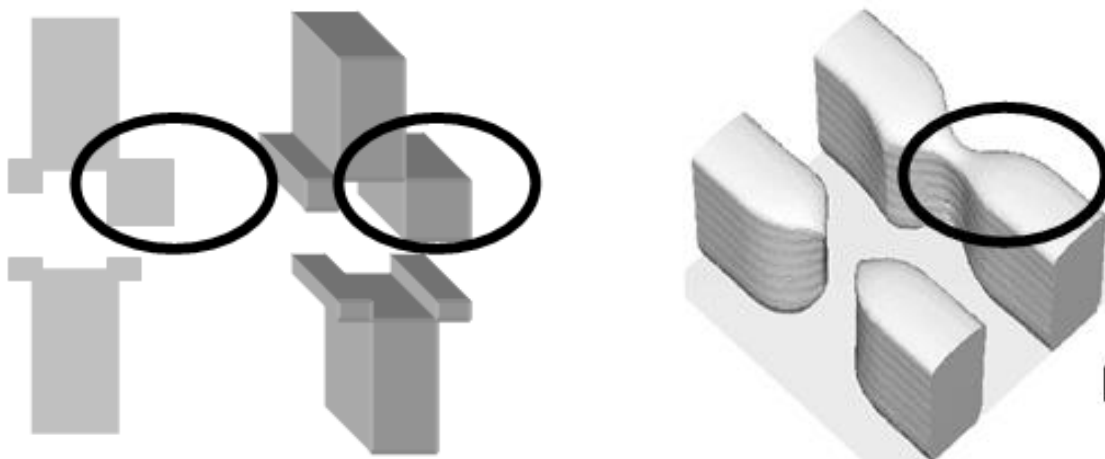


*Топология фотошаблона на
электронном микроскопе*

Рис. 1. Влияние групповых дефектов на процесс формирования топологии

Постановка задачи. Особое место среди всех типов дефектов топологии

занимают дефекты, которые не прорабатываются проекционной оптической системой установки совмещения и мультипликации при последующем переносе изображения с фотошаблона на полупроводниковую пластину, но в совокупности с другими элементами топологии могут вызвать появление критичного дефекта. Существует два типа подобных дефектов – это групповые дефекты конструктивных структур (рисунок 1) [7] и дефекты элементов OPC (optical proximity correction – коррекции оптической близости) (рисунок 2). Степень критичности таких дефектов можно определить только при помощи комплексной оценки соответствующих фрагментов топологии.



Сериф, увеличенный на 175 нм

Топология после проекционного переноса на пластину на фотошаблоне

Рис. 2. Влияние дефектов элементов OPC на процесс формирования топологии

Таким образом, необходим подход, обеспечивающий возможность минимизации количества исправляемых дефектов, определения критичности групповых дефектов конструктивных структур и функциональных дефектов элементов OPC [9, 10].

На современных кристалльных производствах оценка фотолитографической значимости (критичности) дефектов, необходимая для решения трех выше обозначенных задач, производится в процессе выполнения операции фотолитографии на полупроводниковой пластине при помощи установки совмещения и мультипликации или путем выборочного моделирования в исследовательском режиме [8], потому что 100% моделирование дефектов, обнаруженных в процессе контроля фотошаблонов, не представляется возможным. Это обусловлено с одной стороны тем, что существующие системы моделирования процессов фотолитографии являются громоздкими в силу своей универсальности, неоднозначными в настройке и обладают очень низким быстродействием, с другой стороны, эти системы слабо связаны с используемым контрольным оборудованием, что не позволяет проводить предварительную обработку дефектов топологии с целью минимизации количества моделируемых фрагментов топологии.

Учитывая вышеизложенное, перспективным является новый подход к процессу производства фотошаблонов, обеспечивающий возможность оперативной оценки фотолитографической значимости дефектов топологии без выполнения операции проекционного переноса изображения на полупроводниковую пластину или перехода в исследовательский режим.

Классификация методов контроля. Существующие виды контроля оригиналов топологии на фотошаблонах и отечественные установки, их реализующие, представлены на рисунке 3. Как видно из рисунка, определенные отличия имеют место при контроле дефектов у изготовителя фотошаблонов и у их потребителя. В первом

случае необходимым является контроль критических размеров и совмещаемости комплекта фотошаблонов, контроль на соответствие проектным данным, контроль идентичности мультиплицированных фрагментов топологии и контроль «мягких» дефектов (дефектов, не имеющих стабильного местоположения). Во втором случае контроль критических размеров и совмещаемости комплекта не является обязательным, но может применяться, так называемый, In-Situ контроль. Контроль In-Situ выполняется как правило перед особо ответственными экспозициями, где должны быть исключены все возможные случайности. При этом необходимо проконтролировать фотошаблон после загрузки в степпер (установка совмещения и мультипликации) или сканер (установка сканирующего переноса изображений) и перед выполнением операции проекционного переноса изображения. Такой контроль проводится путем предварительной пропечатки топологического рисунка на стеклянной или кварцевой пластине с последующим автоматическим контролем этого рисунка в проходящем свете. Однако ни один из вышеупомянутых способов контроля не гарантирует отсутствие групповых дефектов и функциональных дефектов элементов, предназначенных для коррекции эффектов оптической близости.



Рис. 3. Виды контроля оригиналов топологии на фотошаблонах

Описание нового метода. Новый метод контроля оригиналов топологии полупроводниковых приборов на фотошаблонах основан на применении имитационных моделей, обеспечивающих возможность оперативного моделирования процесса проекционного переноса топологических структур с фотошаблона на полупроводниковую пластину. Данный подход позволяет определить степень влияния обнаруженного дефекта на технологический процесс проекционного переноса изображения с фотошаблона на полупроводниковую пластину и существенно повысить процент выхода годных, что особенно важно при суб-стананометровых технологиях. Большая часть дефектов, обнаруживаемых на фотошаблонах, не прорабатывается на полупроводниковых пластинах, поэтому использование средств оперативного моделирования делает процесс изготовления фотошаблонов существенно более дешевым и надежным.

01 Прокол	02 Островок	03 Выступ 1	04 Выступ 2	05 Выступ 3
06 Выступ 4	07 Вырыв 1	08 Вырыв 2	09 Вырыв 3	10 Вырыв 4
11 Выступ у1	12 Выступ у2	13 Выступ у3	14 Выступ у4	15 Выступ у5
16 Выступ у6	17 Выступ у7	18 Выступ у8	19 Вырыв у1	20 Вырыв у2
21 Вырыв у3	22 Вырыв у4	23 Мостик 1	24 Мостик 2	25 Ув.размер
26 Ум.размер	27 Нет элем-та	28 Избыток1	29 Избыток 2	30 Избыток 3
31 Избыток 4	32 Усечение 1	33 Усечение 2	34 Усечение 3	35 Усечение 4
36 Смещение1	37 Смещение2	38 Смещение3	39 Смещение4	40 Смещение5
41 Смещение6	42 Смещение7	43 Смещение8	44 Полутон	45Полут.точка
46 Полут.точк				

Рис. 4. Классификация по геометрическим соотношениям между дефектами и конструктивными элементами топологии

Оригинал топологии современной интегральной микросхемы, содержит сотни миллионов элементов топологии. Рисунок такой сложности изготавливается более чем за 1 000 миллиардов вспышек, что даже при самой высокой надежности технологического процесса, которая может составлять 10-10 операций на сбой, не оставляет сомнений в наличии дефектов, многие из которых могут оказаться

критичными. С другой стороны, необходимость использования техники повышения разрешения, делает фотошаблоны очень дорогими, что в случае наличия технологических проблем и, соответственно, при проценте выхода годных ниже определенного порогового уровня, делает производственный процесс экономически не целесообразным.

Предлагаемый подход основан на введении новой группы операций – операций, обеспечивающих оперативное моделирование последующего процесса проекционного переноса изображений с фотошаблона на полупроводниковую пластину.

Первой операцией процесса моделирования проекционного переноса изображений является операция построения воздушного изображения. Эта операция основана на моделировании процесса распространения волнового фронта от источника излучения через фотошаблон и объектив мультипликатора до плоскости изображения, расположенной на поверхности полупроводниковой пластины, покрытой тонким слоем фоторезиста. При этом используются специализированные программы, каждая из которых позволяет построить только ограниченный класс моделей, но при этом обладает существенно более высоким быстродействием.

Второй операцией является моделирование процесса распространения изображения, построенного объективом мультипликатора, в фоторезисте. При этом решается объемная задача, причем глубина воздействия передаваемой энергии соответствует глубине резкости объектива и определяется по формуле:

$$DoF = \frac{\lambda}{NA^2} \times k_2$$

где, DoF – глубина фокуса проекционной оптической системы, λ – длина волны экспонирующего излучения, NA – числовая апертура оптической системы, k_2 – коэффициент, определяющий технологический уровень системы.

Третьей операцией является операция оценки фотолитографической значимости дефекта фотошаблона. При этом в изображении, построенном в результате выполнения двух предыдущих операций, осуществляется поиск элементов изображения дефектов фотошаблона.

На рисунке 4 показана классификация, выполненная на основании анализа геометрических соотношений между дефектами и конструктивными элементами топологии, соответствующая стандартам SEMI P23893, SEMI P23-0200. Ниже приведены наименования и краткое описание классов дефектов:

1. прокол – светлое вкрапление на темном элементе топологии;
2. островок – темное вкрапление на светлом элементе топологии;
- 3-6. выступ на границе элемента топологии;
- 7-10. вырыв на границе элемента топологии;
- 11-18. выступ угла элемента топологии;
- 19-22. вырыв угла элемента топологии;
- 23-24. мостик внутри элемента топологии;
- 25-26. увеличение (уменьшение) размера элемента по обеим координатам;
27. отсутствие конструктивного элемента топологии;
- 28-35. увеличение (уменьшение) размера элемента по одной координате;
- 36-43. ошибка расположения (координат привязки) элемента топологии;
- 44-46. полутоновой дефект.

Каждая из подгрупп характеризуется своим набором элементов изображения. Фотолитографическая значимость дефекта определяется путем анализа наличия одного или нескольких элементов изображения соответствующей подгруппы типов дефектов.

На практике может быть использована упрощенная классификация, которая также предоставляет всю информацию, необходимую для определения критичности обнаруженных дефектов:

проколы и островки в маскирующем покрытии (1-2);
выступы и вырывы на краю элементов топологии (3-10);
дефекты углов элементов топологии (11-22);
перемычки между элементами топологии и разрывы (23-24);
недостающие или лишние конструкционные элементы топологии (27);
ошибки координат элементов топологии (36-43);
ошибки размеров элементов топологии (25-26, 28-35);
полутонные дефекты (44-46).

В результате автоматического контроля топологии фотошаблона кроме информации, представленной в ведомости дефектов, по каждому дефекту формируется файл с описанием топологии этого дефекта, содержащий полутонную информацию о дефекте в контексте топологии. При этом каждый пиксел представляется однобайтным кодом.

Размерность формируемой модели является одним из параметров настройки системы распознавания дефектов. В результате взаимодействия с системой моделирования определяются параметры «тип структуры» и «признак фотолитографической значимости дефекта». Параметр «тип структуры» указывает базовый тип структуры моделируемого участка топологии – одномерная структура типа линия-промежуток или двумерная структура типа контактное окно.

Для настройки системы моделирования на конкретный тип установки совмещения и мультипликации используются такие параметры оптической системы и фоторезистивной маски, как числовая апертура объектива, разрешение, длина волны экспонирующего излучения, глубина резкости объектива, коэффициент когерентности, тип и толщина фоторезиста.

Результатом работы системы моделирования является оценка фотолитографической значимости дефекта, которая позволяет определить проработается ли заданный дефект в процессе проекционного переноса изображения с фотошаблона на полупроводниковую пластину.

Заключение. Таким образом, предложенный метод контроля оригиналов топологии на фотошаблонах обеспечивает возможность оперативной оценки фотолитографической значимости дефектов маскирующего покрытия фотошаблона, обнаруженных в процессе автоматического контроля фотошаблонов, без выполнения операции физического проекционного переноса изображений с фотошаблона на полупроводниковую пластину на степпере или перехода в исследовательский режим, что, в свою очередь, позволяет уменьшить количество операций исправления дефектов маски фотошаблонов, обеспечивает возможность детектирования групповых дефектов конструкционных структур и делает возможным функциональный контроль элементов ОРС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Future Mask Writers Requirements for the Sub 10 nm Node Era / Mahesh Chandramouli, Frank Abboud, Nathan Wilcox, Andrew Sowers, Damon Cole // Bacus News, Vol.28, Issue 11, November 2012.*
2. *Analyzing EUV Mask Costs. / M.Lercel, Bryan Kasprovicz / Bacus News, Vol. 33 Issue 2, February 2017 - pp.1-7.*
3. *Application of actinic mask review system for the preparation of HVM EUV lithography with defect free mask / Jihoon Na, Donggun Lee, Changhwan Do и др.// Bacus News, Vol.33 Issue 7, July 2017 – pp.1-8.*
4. *A complete set of the special process equipment for the defect-free production of reticles / S.M. Avakaw, V.A. Iouditski, L.V. Pushkin, A.A. Tsitko // SPIE – 2007. – Vol. 6533 – P. 65331B 1-65331B-9.*

5. *Femtosecond Laser Mask Repair* / Alfred Wagner, Richard Haight, Peter Longo, Michael Schmidt u др. // *Microlithography World*, February 2003.
6. *Phase-shifting photomask repair and repair validation procedure for transparent & opaque defects relevant for the 45 nm node and beyond* / Christian Ehrlich, Uve Buttgereit, Klaus Boehm, Thomas Scheruebl, Klaus Edinger, Tristan Bret. // Vol. 24, Issue 7, July 2008 – pp.1-8.
7. *Jim Wiley / Reticle Defects in the New (Low k_1) Era* // *Sub-wavelength Lithography*// KLA-Tencor Workshop, 1999, pp.1-29.
8. *Defect Printability Analysis by Lithographic Simulation from High Resolution Mask Images* / George Chen, James N. Wiley, Jen-Shiang Wang ... // *Bacus 2009-M-LMC-manuscript*, pp.1-9.
9. *Аваков, С.М. Лазерная литография. Коррекция формы субмикронных элементов.* / Аваков С.М., Беспалов В.А., Овчинников В.А., Пушкин Л.В., Тутко Е.А. // *Электроника НТБ.*- 2009. - №8, С. – 82-85.
10. *Model based correction of placement error in EBL and its verification* / Sergey Babin, Sergey Borisov, Vladimir Militsin, Tadashi Komagata, Tetsurou Wakatsuki // *Bacus News* Vol. 32, Issue 7, July 2016 – pp.1-7.

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРНО СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

¹ Акимов В.А., ¹ Гончарова С.В.

¹ Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} = 0 \\ \partial_1 \tau_{yx} + \partial_2 \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ - частная производная по переменной x , $\partial_2 = \partial/\partial y$ - частная производная по переменной y . Напряжения выразим через функцию напряжений по известным [1] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2 \varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2 \varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1 \partial_2 \varphi \quad (2)$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) \varphi = 0 \quad (3)$$

Представим: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (4)

В соответствии с [2], представим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [A_1(\partial_1) \sin(y\partial_1) + B_1(\partial_1) y \cos(y\partial_1) + C_1(\partial_1) \cos(y\partial_1) + \\ &+ D_1(\partial_1) y \sin(y\partial_1)] * f(x) \\ \varphi_2 &= [A_2(\partial_2) \sin(x\partial_2) + B_2(\partial_2) x \cos(x\partial_2) + C_2(\partial_2) \cos(x\partial_2) + \\ &+ D_2(\partial_2) x \sin(x\partial_2)] * g(y) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ - операторные коэффициенты; $f(x)$ и $g(x)$ - произвольные функции. Так как

$$\begin{aligned} \partial_2^2 [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_2^2 \partial_1 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 \partial_2^2 [\sin(y\partial_1)] = -\partial_1 [\partial_1^2 \sin(y\partial_1)] = \\ &= -2\partial_1 \sin(y\partial_1) - \partial_1^2 y \cos(y\partial_1) \\ \partial_2^4 [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_2^4 \partial_1 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 \partial_2^4 [\sin(y\partial_1)] = \partial_1 [\partial_1^4 \sin(y\partial_1)] = \\ &= 4\partial_1^3 \sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) [y \cos(y\partial_1)] &= \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) + 2\partial_1^2 (-2\partial_1 \sin(y\partial_1) - \\ &- \partial_1^2 y \cos(y\partial_1)) + 4\partial_1^3 \sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y \cos(y\partial_1) = 0 \end{aligned}$$

Аналогично можно установить, что функция φ_2 , выражаемая соотношением (5) также удовлетворяет бигармоническому уравнению (3). Рассмотрим задачу о сжатии

упругого квадрата $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq a$ параболической нагрузкой $P = q(x^2 - a^2)$. Краевые условия должны быть следующие:

$$\sigma_y(x, \pm a) = P; \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = \tau_{yx}(x, \pm a) = 0; \quad \sigma_x = g(x)$$

Как известно, данная задача не имеет замкнутого решения. Операторный метод позволяет построить новое функциональное уравнение, которое эффективно решает поставленную задачу. Итак, полагаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x / a) \text{ и } g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^g \sin(\pi n y / a) \quad (7).$$

Подставляя (5) и (6) в (2), получим:

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 \varphi_1 = -\partial_1 [A_1(\partial_1) \partial_1 \cos(y \partial_1) + B_1(\partial_1) \cos(y \partial_1) - B_1(\partial_1) \partial_1 y \sin(y \partial_1) - C_1(\partial_1) \partial_1 \sin(y \partial_1) + D_1(\partial_1) \sin(y \partial_1) + D_1(\partial_1) \partial_1 y \cos(y \partial_1)] * \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x / a) \right]$$

Полагая $B_1(\partial_1) = -\partial_1 A_1(\partial_1)$, $D_1(\partial_1) = \partial_1 C_1(\partial_1)$, $C_1(\partial_1) = -A_1(\partial_1) \operatorname{tg}(a \partial_1)$, а с учетом наличия необходимого произвола постоянных коэффициентов c_n^f , считая $A_1(\partial_1) = 1$, получим:

$$\varphi_1 = [\sin(y \partial_1) - y \partial_1 \operatorname{ch}(y \partial_1 - \operatorname{tg}(a \partial_1) \cos(y \partial_1 + (y \partial_1 \sin(y \partial_1)))] * \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x / a) \right]$$

Аналогично находим:

$$\varphi_2 = [\sin(x \partial_2) - x \partial_2 \cos(x \partial_2) - \operatorname{tg}(a \partial_2) (\cos(x \partial_2) - x \partial_2 \sin(x \partial_2))] * \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^g \sin(\pi n y / a) \right]$$

Действуя в соответствии с изложенным в [1] алгоритмом раскроем скобки.

$$\begin{aligned} \sin(y \partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= y \partial_1 (1 - (y \partial_1)^2 / 3! + (y \partial_1)^4 / 5! + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} (y \partial_1)^{2(n-1)} / (2n-1)! + \dots) * [\sin(\pi n x / a)] = \operatorname{sh}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \\ y \partial_1 \cos(y \partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= (\pi n y / a) \operatorname{ch}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \\ \operatorname{tg}(a \partial_1) \cos(y \partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= \operatorname{th}(\pi n) \operatorname{ch}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \\ \operatorname{tg}(a \partial_1) y \partial_1 \sin(y \partial_1) * [\sin(\pi n x / a)] &= \operatorname{th}(\pi n) (\pi n y / a) \operatorname{sh}(\pi n y / a) \cos(\pi n x / a) \end{aligned}$$

И тогда выражение для φ_1 и граничные условия (2) перепишем в виде:

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f [\operatorname{sh}(\pi n y / a) - (\pi n y / a) \operatorname{ch}(\pi n y / a) - \operatorname{th}(\pi n) (\operatorname{ch}(\pi n y / a) - (\pi n y / a) \operatorname{sh}(\pi n y / a))] \cos(\pi n x / a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x = \pm a) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f (-1)^n n^2 [\operatorname{th}(\pi n) (\operatorname{ch}(\pi n y / a) + (\pi n y / a) \operatorname{sh}(\pi n y / a)) - \\ &- \operatorname{sh}(\pi n y / a) - (\pi n y / a) \operatorname{ch}(\pi n y / a)] \quad \tau_{xy}(x = \pm a) = \tau_{yx}(y \pm a) = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_y(y = \pm a) = q(x^2 - a^2) \Rightarrow \frac{\pi^3}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \frac{n^3}{\operatorname{sh}(\pi n)} \cos(\pi n x / a) = q(x^2 - a^2) \quad (8)$$

Здесь были учтены два тождества $\cos(\pi n) = (-1)^n$ и $\operatorname{ch}^2(\pi n) - \operatorname{sh}^2(\pi n) = 1$

Далее из тригонометрического ряда Фурье (8) находится искомый коэффициент c_n^f . Таким образом, задача как бы решена с некоторой дополнительной нагрузкой $\sigma_x(x = \pm a) = g(y)$. Зная коэффициенты ряда Фурье функции $f(x) = q(x^2 - a^2)$, функцию $g(y)$ можно воспроизвести по этим коэффициентам таблично, а затем при помощи аппроксимации и аналитически. Чтобы выполнить условие $g(y) = 0$ потребуются коэффициенты еще одного ряда Фурье, а для этого понадобится привлечь другую бигармоническую функцию φ_2 . Отметим тот факт, что первое граничное условие выполнено точно за счет разложения в ортогональный ряд Фурье, а второе и третье удовлетворяются тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. *Теория упругости и пластичности*. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -416 с.
2. Акимов В.А. *Операторный метод решения задач теории упругости*. -Мн.: 2003.- 101 с.

РАСЧЕТ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

д. ф.-м. н. ^{1,2} Щербаков С.С., м. н. с. ² Шемет Л.А.

¹Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь, Минск,

²Белорусский государственный университет, Минск

Введение. На сегодняшний день метод граничных элементов и метод конечных элементов широко используются для решения задач механики деформированного твердого тела. У каждого из этих методов имеются свои достоинства и недостатки. Преимуществом метода граничных элементов перед методом конечных элементов является то, что при дискретизации модели построение расчетной сетки происходит не по всему объему тела, а только по его границе, т.е. размерность задачи уменьшается на единицу. С другой стороны, при гранично-элементном моделировании матрица результирующей системы линейных алгебраических уравнений полностью заполнена в отличие от метода конечных элементов, при применении которого матрица содержит большое количество нулей [1]. В данной работе представлено сравнение этих двух методов на примере расчета повреждаемости стандартного образца для исследования трещиностойкости. Исследование повреждаемости основано на понятии опасного объема, под которым понимается область тела, в которой действующие напряжения превышают некоторую предельную величину.

Схема нагружения. Схема нагружения образца представлена на рисунке 1: к верхней и нижней полуокружности приложена равномерно распределенная растягивающая нагрузка p_n .

Геометрические характеристики и свойства материала были приняты следующими: $B=0,05$ м, $H=0,06$ м, $L=0,04$ м, $R=0,00625$ м, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Осевая нагрузка P изменяется от 17 500 Н до 20 000 Н с шагом 1250 Н, равномерно распределенная нагрузка $p_n = P/(\pi R)$.

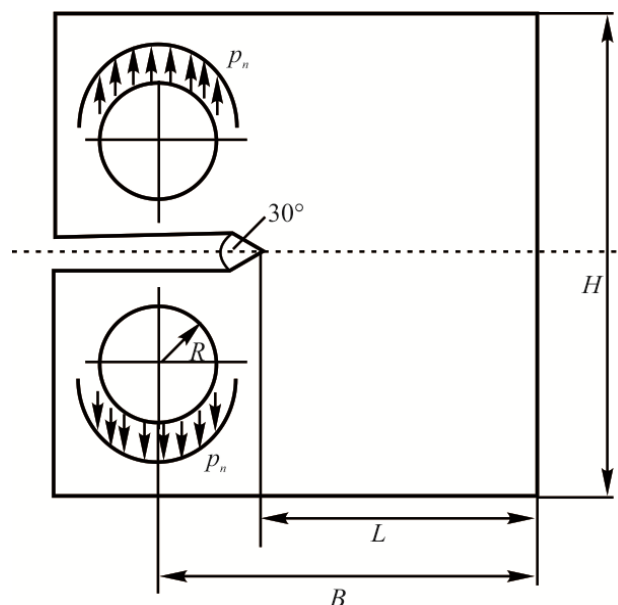


Рис. 1. Расчетная схема для образца

Поскольку на поверхности образца S_σ заданы распределения усилий p_i , то граничные условия принимаю вид

$$\sigma_{ij} a_j |_{S_\sigma} = p_{i2}, i = 1, 2,$$

где a_j – направляющие косинусы, $i=1$ определяет касательное к поверхности направление, а $i=2$ – нормальное.

Отметим, что на свободных поверхностях нормальные и касательные к ним усилия $p_{22} = p_n$ и $p_{12} = p_\tau$ равны нулю.

Алгоритм гранично-элементного моделирования. Для решения нашей задачи на основе метода граничных элементов воспользуемся фундаментальным решением задачи Кельвина для плоскости в перемещениях и напряжениях в случае действия сосредоточенных нормальной (верхний индекс n) и касательной (верхний индекс τ) к некоторой линии в плоскости сил в перемещениях и напряжениях [2-4]. Для построения алгоритма гранично-элементного моделирования проинтегрируем фундаментальные решения вдоль некоторой линии приложения равномерно распределенных нормальных p_n и касательных p_τ усилий (см. рисунок 2):

$$u_1^{(n)} = p_n G_1^{(n,u)} = \frac{-p_n x_2}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (1)$$

$$u_1^{(\tau)} = p_\tau G_1^{(\tau,u)} = \frac{p_\tau}{8\pi\mu(1-\nu)} (4(1-\nu)(2a - x_2 \Theta) - (3-4\nu)((a-x_1) \ln r_1 + (a+x_1) \ln r_2)),$$

$$u_2^{(n)} = p_n G_2^{(n,u)} = \frac{-p_n}{8\pi\mu(1-\nu)} (2x_2(1-2\nu) \Theta + (3-4\nu)(-2a + (a-x_1) \ln r_1 + (a+x_1) \ln r_2)), \quad (2)$$

$$u_2^{(\tau)} = p_\tau G_2^{(\tau,u)} = \frac{-p_\tau x_2}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

$$\sigma_{11}^{(n)} = p_n G_{11}^{(n,\sigma)} = \frac{p_n x_2}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{a-x_1}{r_1^2} + \frac{a+x_1}{r_2^2} - 2\nu\Theta \right),$$

$$\sigma_{11}^{(\tau)} = p_\tau G_{11}^{(\tau,\sigma)} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (3-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{22}^{(n)} = p_n G_{22}^{(n,\sigma)} = \frac{-p_n y}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{a-x_1}{r_1^2} + \frac{a+x_1}{r_2^2} + \frac{2(1-\nu)}{y} \Theta \right),$$

$$\sigma_{22}^{(\tau)} = p_\tau G_{22}^{(\tau,\sigma)} = \frac{-p_\tau}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{12}^{(n)} = p_n G_{12}^{(n,\sigma)} = \frac{-p_n}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right),$$

$$\sigma_{12}^{(\tau)} = p_\tau G_{12}^{(\tau,\sigma)} = \frac{p_\tau}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - (1-2\nu)\Theta + \ln \frac{r_1}{r_2} \right), \quad (5)$$

где $G_{ij}^{(n,\sigma)}, G_{ij}^{(\tau,\sigma)}, G_i^{(n,u)}, G_i^{(\tau,u)}$ – функции влияния и

$$r_1^2 = (a-x_1)^2 + x_2^2, \quad r_2^2 = (a+x_1)^2 + x_2^2, \quad \Theta = \arctg \frac{a-x_1}{x_2} + a-x_1.$$

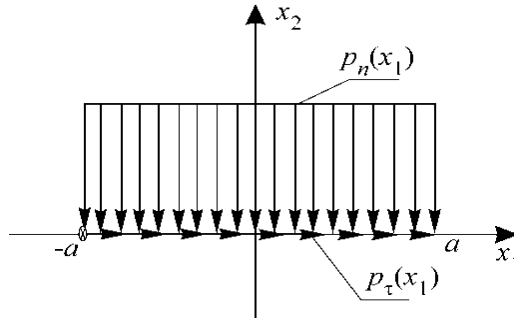


Рис. 2. Равномерное распределение усилий на граничном элементе

Суперпозиция решений (1)–(5) позволяет решать задачу для любого распределения усилий в пространстве [5-7].

Пусть $O^k x_1^k x_2^k$ и $O^\gamma x_1^\gamma x_2^\gamma$ локальные системы координат, связанные с граничными элементами k и γ и $a_{ij}^{k\gamma} = \cos(x_i^k x_j^\gamma)$. Тогда перемещения и напряжения в центре элемента γ O^γ в координатах \mathbf{x}^k , связанных с элементом k , примут вид

$$\begin{aligned} u_i^\gamma [O^\gamma (\mathbf{x}^k)] &= p_n^\kappa G_i^{(n,u)} [O^\gamma (\mathbf{x}^k)] + p_\tau^\kappa G_i^{(\tau,u)} [O^\gamma (\mathbf{x}^k)], \\ \sigma_{ij}^\gamma [O^\gamma (\mathbf{x}^k)] &= p_n^\kappa G_{ij}^{(n,\sigma)} [O^\gamma (\mathbf{x}^k)] + p_\tau^\kappa G_{ij}^{(\tau,\sigma)} [O^\gamma (\mathbf{x}^k)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $i, j=1, 2$.

$$\sigma_{i2}^\gamma [O^\gamma (\mathbf{x}^\gamma)] = \sigma_{i2}^\gamma [0] = \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^k a_{\beta 2}^k \sigma_{\alpha\beta}^k [O^\gamma (\mathbf{x}^\gamma)] = p_{i2}^\gamma, \quad i=1, 2,$$

где $\gamma = \overline{1, N}$, N – количество граничных элементов.

Пусть $Ox_1 x_2$ глобальная система координат и $a_{ij}^k = \cos(x_i x_j^k)$. Тогда перемещения и напряжения в некоторой точке глобальной системы координат $M(\mathbf{x})$ будут следующими:

$$\begin{aligned} u_i [M(\mathbf{x})] &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^2 a_{ij}^k (p_n^\kappa G_j^{(n,u)} [M(\mathbf{x}^k)] + p_\tau^\kappa G_j^{(\tau,u)} [M(\mathbf{x}^k)]), \\ \sigma_{ij} [M(\mathbf{x})] &= \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^k a_{\beta j}^k (p_n^\kappa G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)} [M(\mathbf{x}^k)] + p_\tau^\kappa G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)} [M(\mathbf{x}^k)]), \end{aligned} \quad (7)$$

где $i, j, \alpha, \beta=1, 2$.

Опасный объем. Рассмотрим тензор механического параметра φ_{ij} , конкретизациями которого являются тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} . Для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения $\varphi_n^{(*\text{lim})}$ и $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$ тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})}$, а также предельное главное значение тензора $\varphi_1^{(*\text{lim})}$ и предельную интенсивность $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ [8, 9]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV, i} (|\varphi_{ii}(F_{\text{lim}}, dV)|), \quad i = x, y, z, \\ \varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV, i, j} (|\varphi_{ij}(F_{\text{lim}}, dV)|), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\ \varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} (|\varphi_1(F_{\text{lim}}, dV)|), \\ \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} [\varphi_{\text{int}}(F_{\text{lim}}, dV)], \end{aligned} \quad (8)$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор φ_{ij} в каждом элементарном объеме dV тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа относительных повреждающих напряжений [8, 9]: компонентные, главные и

октаэдрические:

$$\begin{aligned}\Psi_{ij} &= \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \\ \Psi_i &= \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \\ \Psi_{\text{int}} &= \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}.\end{aligned}\quad (9)$$

Соотношения (9) представляют собой показатели локальной повреждаемости элементарного объема тела.

Условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned}V_{ij} &= \left\{ dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, i, j = x, y, z, \\ m &= \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ V_i &= \left\{ dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, i = 1, 2, 3, \\ V_{\text{int}} &= \left\{ dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

где V_k – рабочий объем нагруженного тела.

Расчет опасных объемов (10) в общем случае осуществляется следующим образом [8, 9]:

$$V_q = \int_{\Psi_q \geq 1} dV, \quad q = x, y, z, 1, 2, 3, \text{int}.\quad (11)$$

Опасные объемы (10) являются интегральными показателями абсолютной повреждаемости тела, содержащими сведения как о напряженно-деформированном состоянии, так и предельном.

Опасный объем (площадь) в компактном образце. Расчет напряженно-деформированного состояния образца на основе метода конечных элементов проводился в пакете Ansys. Для выполнения расчетов опасных объемов была создана программа на базе встроенного в Ansys языка APDL. Алгоритм работы программы заключается в сохранении массива данных значений напряжений и деформаций по всем конечным элементам и использования их в дальнейших вычислениях значений локальной повреждаемости, как отношений действующих и предельных напряжений или деформаций, в нашем случае:

$$\Psi_q^i = \sigma_q^i / \sigma_q^{\text{lim}}, \quad q = 1, \text{int}.\quad (12)$$

Величины объемов элементов, для которых выполняется условие $\Psi^i \geq 1$, суммируются в соответствии с (11) для получения значения опасного объема V для всей расчетной модели.

Реализация гранично-элементного моделирования производилась с использованием программы Mathematica. Все компоненты тензора напряжений определялись в точках компактного образца с фиксированным шагом $h=0,00001$ м. Для получения опасного объема в образце, объем всего образца умножался на Nq/N , $q=1, \text{int}$, где Nq – количество точек, в которых действующее напряжение превышает предельное, а N – общее количество точек. В двумерной постановке, опасный объем V принимает вид опасной площади S .

Стоит отметить, для конечно-элементного расчета (КЭ) использовалось 187 660 элементов, а для гранично-элементного (ГЭ) – 4590 элементов.

Ниже представлены результаты расчетов при нагрузке на образец $P=20\,000$ Н (см. рисунки 3 а-г и 4 а-г). На рисунках 3 а, б представлены графики распределения напряжений в образце по линии симметрии для гранично-элементного и конечно-элементного расчета. Из данных рисунков видно хорошее соответствие ГЭ и КЭ расчетов друг другу [10].

На рисунках 3 в-е представлены зависимости опасной площади S от величины

предельных значений напряжений и графики относительной погрешности ε , которая вычислена по формуле:

$$\varepsilon = \frac{|S_q^{(\Gamma\mathcal{E})} - S_q^{(K\mathcal{E})}|}{S_q^{(K\mathcal{E})}} \cdot 100\%, \quad q = 1, \text{ int},$$

где $S_q^{(\Gamma\mathcal{E})}$ – опасный объем, полученный при гранично-элементном моделировании;

$S_q^{(K\mathcal{E})}$ – опасный объем, полученный при конечно-элементном моделировании;

Из рисунков 3 д, е видно, что для всех рассматриваемых нагрузок и предельных значений напряжений большинство значений относительной погрешности лежит в диапазоне от 4 до 8 %.

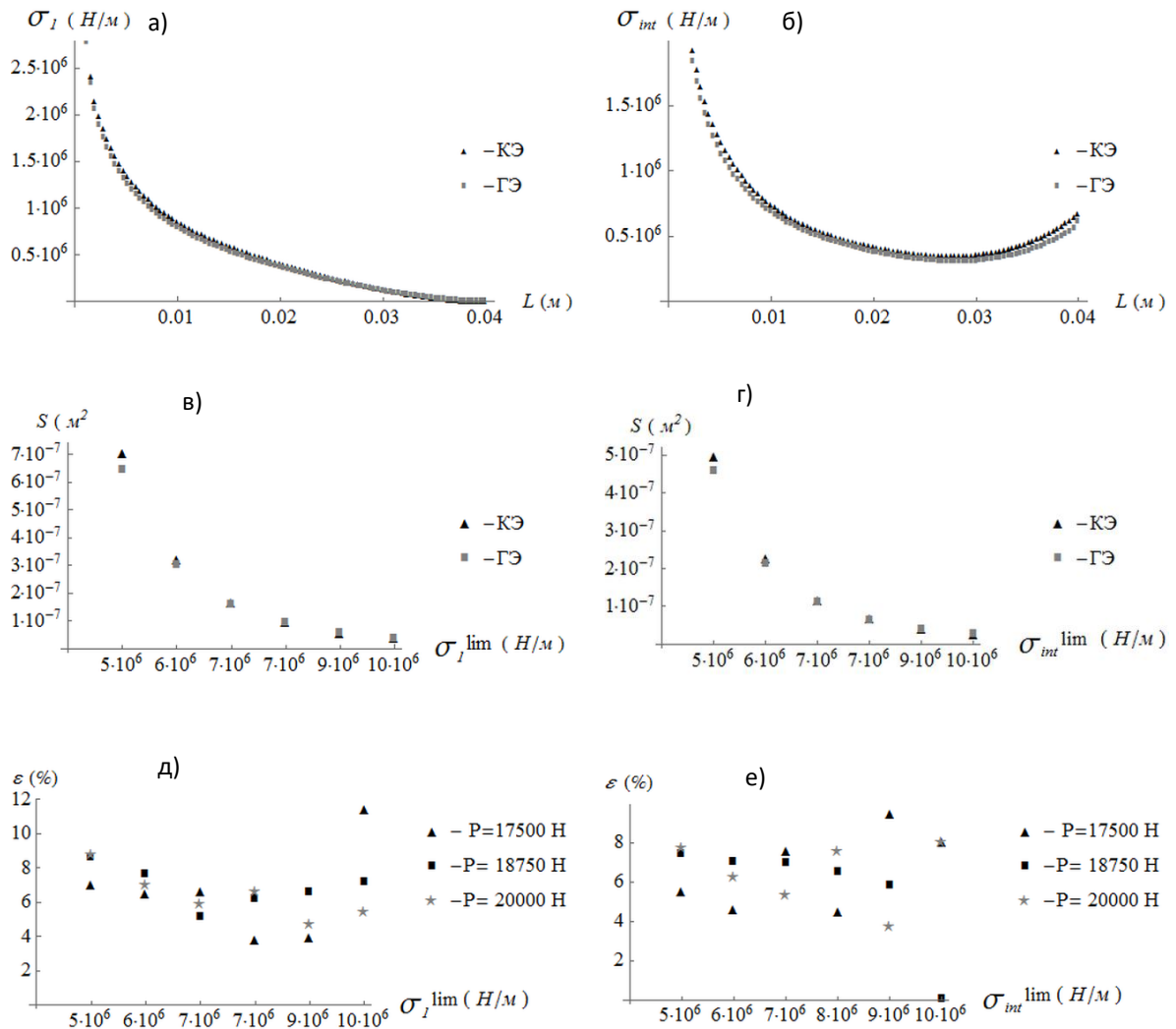


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений (а) и первых главных напряжений (б) в рабочем теле образца, зависимость опасного объема от величины предельных значений интенсивности напряжений (в) и первых главных напряжений (г)

На рисунке 4 представлены опасные площади для гранично-элементного и конечно-элементного моделирования. Видно, что площади имеют одинаковую форму и размер для соответствующих критериев.

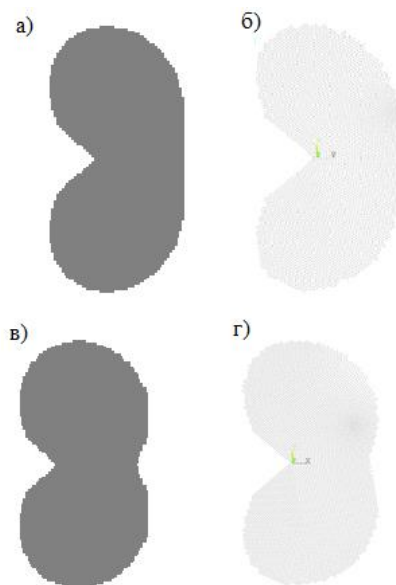


Рис. 4. Формы опасного объема (площади) для $\psi_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}} / \sigma_{\text{int}}^{\text{lim}}$ (а – ГЭ, б – КЭ) и $\psi_1 = \sigma_1 / \sigma_1^{\text{lim}}$ (в – ГЭ, г – КЭ)

Вывод. Представлены результаты моделирования повреждаемости стандартного образца для исследования трещиностойкости методом конечных элементов и методом граничных элементов. Исследование повреждаемости в окрестности вершины трещины проводилось на основе оценки величин опасных объемов, под которым понимается область тела, в которой действующие напряжения превышают некоторую предельную величину.

Анализ результатов показал хорошее соответствие гранично-элементного моделирования напряженного и объемной повреждаемости, основанного на предварительном интегрировании фундаментальных решений, конечно-элементному моделированию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М.А. Гранично-элементное моделирование в механике / М.А. Журавков, А.В. Круподеров, С.С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2014. – 272 с.
2. Zhuravkov, M.A. Modeling of volumetric damage of multielement clamp-knife-base tribo-fatigue system / M.A. Zhuravkov, S.S. Sherbakov, A.V. Krupoderov // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM). – 2017. – P. 60–69.
3. Sherbakov, S.S. Contact interaction, volume damageability and multicriterial limiting states of multielement tribo-fatigue systems / S. Sherbakov, M. Zhuravkov, L. Sosnovskiy // In book: Selected Problems on Experimental Mathematics, ed. by R. Witula, B. Bajorska-Harapińska, E. Hetmaniok, D. Słota, T. Trawiński. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2017. – pp. 17–38.
4. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М.: Мир, 1987. – 328 с.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
6. Щербаков С.С. Напряженно-деформируемое состояние и поврежденность трибофатической системы прижим-нож-опора режущего инструмента комбайна / С.С. Щербаков // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 2. – С 75–80.
7. Мармыш, Д.Е. Граничноэлементное моделирование напряженно-

- деформированного состояния статически неопределимой балки/Д.Е. Мармыш// Теоретическая и прикладная механика: Международный сборник научно-методических статей. – Вып. 28. – Минск: БНТУ, –2013. – С. 219-223.*
8. *Сосновский, Л.А. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2011. – 488 с.*
 9. *Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.*
 10. *Щербаков, С. С. Гранично-элементное моделирование напряженного состояния образца для исследования трещиностойкости/ С. С. Щербаков, Л. А. Шемет, О. А. Насань// Прикладные задачи математики: материалы XXVI междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 17–21 сент. 2018 г. / СевГУ; науч. ред. Ю. Э. Обжерин. – Севастополь, 2011. – С. 174–179.*

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

¹Захарчук Ю.В.

¹Белорусский государственный университет транспорта

Приведены постановка и аналитическое решение задачи об изгибе упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтен поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб изменяются линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат r , φ , z . Решение выписано в функциях Бесселя.

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных, элементов конструкций посвящены многочисленные исследования. Динамическое нагружение исследовалось в статьях [1–4], изотермическое квазистатическое, в том числе переменное – в работах [5–7]. Результаты, связанные с поведением трехслойных конструкций в температурном поле, опубликованы в статьях [8–11].

Следует отметить, что в основном публикации по деформированию трехслойных круговых пластин не учитывают сжимаемость наполнителя. В статьях [12–15] отражены постановка и решение задачи об изгибе упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Здесь приводятся уравнения равновесия и их аналитическое рекуррентное решение для упругопластической круговой трехслойной пластины.

1 Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругопластическую круговую трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем (рисунок 1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r , φ , z . Систему координат свяжем со срединной плоскостью наполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами h_1 , h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности своего слоя. В наполнителе $h_3=2c$, воспринимающем нагрузку в вертикальном и тангенциальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Деформируемость по толщине наполнителя принимается линейной.

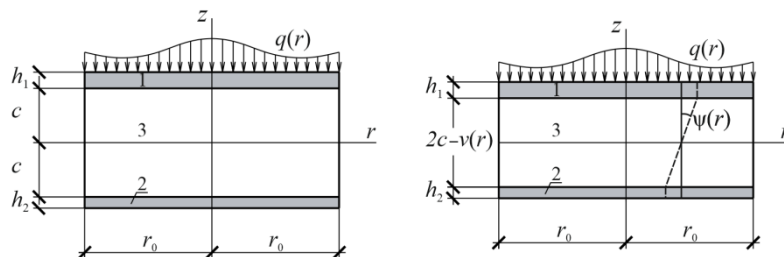


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя (ψ

$= 0, v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция обжатия заполнителя, h_k – толщина k -го слоя.

Радиальные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

▪ в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r) \quad (-c - h \leq z \leq -c);$$

▪ в заполнителе 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right], \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c); \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z \left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z + c) \right], \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right] \right\},$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_{,r} \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}. \quad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),$$

$$s_z^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) [10], которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность сжимаемого заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $s_z^{(3)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_z^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – девиаторы тензоров в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{rz}^2)}.$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем интенсивности обобщенных внутренних усилий и моментов в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad (4)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через дивергентную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)} - 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.\end{aligned}\quad (5)$$

Выделим в тензоре напряжений (5) упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_{\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \quad \sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \\ \sigma_{ze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.\end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «е») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_{\alpha}^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha}^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad S_{\alpha}^{(3)} = S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha \omega}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (7)$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ и $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$) из соотношений (6).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$\begin{aligned}T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha} = M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha} &= H_{\alpha e} - H_{\alpha \omega}, \quad H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}), \\ D_{\alpha} &= D_{\alpha e} - D_{\alpha \omega}, \quad D_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)}, \quad D_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha \omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha \omega}^{(3)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (4), описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем, была получена с помощью принципа Лагранжа в [14] без применения соотношений связи напряжений и деформаций. Поэтому ее можно использовать здесь как исходную. Выделив в обобщенных внутренних усилиях, входящих в нее, линейные и нелинейные составляющие в соответствии с формулами (8), получим:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) = p_{\omega}, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) = h_{\omega}, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_{\omega}, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q + g_{\omega}. \end{cases} \quad (9)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned}T_r &= T_r^0 + T_{\omega}, \quad H_r = H_r^0 + H_{\omega}, \quad M_r = M_r^0 + M_{\omega}, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_{\varphi}) = M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}), \\ D_r &= D_r^0 + D_{r\omega}, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_{\varphi}) = D_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(D_{r\omega} - D_{\varphi\omega}).\end{aligned}\quad (10)$$

где нижний индекс «е» для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (9), (10) и включенные в слагаемые с нижним индексом «ω», будут определяться формулами:

$$p_{\omega} = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_{\omega} = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad g_\omega = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}). \quad (11)$$

2 Разрешающая система дифференциальных уравнений. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, приведенными в [14], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), приводится к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r} - a_4v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_5\psi - a_6w_{,r} - a_7v_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3u + a_6\psi - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) &= -q + q_\omega, \\ L_3(a_4u + a_7\psi - a_9w_{,r} - a_{10}v_{,r}) + \frac{c}{6}K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \\ a_4 &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+, \quad a_5 = c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_6 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \quad a_7 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \\ a_8 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad a_9 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \\ a_{10} &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{4}{15} c^3 K_3^+, \quad L_2(g) = \frac{1}{r}((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (12) силовых (11) или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке контура пластины при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = v_{,r} = 0,$$

при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = v = w_{,rr} = v_{,rr} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений равновесия (12) является существенно нелинейной. Для ее решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. В результате система принимает итерационный вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w^{(n)}_{,r} - a_4v^{(n)}_{,r}) + K_3^- v^{(n)}_{,r} &= p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w^{(n)}_{,r} - a_7v^{(n)}_{,r}) &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3u^{(n)} + a_6\psi^{(n)} - a_8w^{(n)}_{,r} - a_9v^{(n)}_{,r}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_4u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_9w^{(n)}_{,r} - a_{10}v^{(n)}_{,r}) + \frac{c}{6}K_3^- \left(v^{(n)}_{,rr} + \frac{v^{(n)}_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки в (14) вычисляются по результатам предыдущего приближения. Они определяются соотношениями ($\alpha = r, \psi$)

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \quad h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \\ q_\omega^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)}_{,r}), \quad g_\omega^{(n-1)} = D_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - D_{\varphi\omega}^{(n-1)}_{,r}), \end{aligned}$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz, \quad M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz,$$

$$S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} = 2G_3 \int_{-c}^c \omega_3 (\varepsilon_u^{(3,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(3,n-1)} z^2 dz, \quad H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}),$$

$$D_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}.$$

Итерационное решение системы дифференциальных уравнений (14) будет

$$\psi^{(n)} = -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r},$$

$$u^{(n)} = b_1 v^{(n)},_r + b_2 L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) + b_3 L_3^{-1}(q - g_{\omega}^{(n-1)}) - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) -$$

$$- b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + b_4 L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) + b_5 L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r},$$

$$v^{(n)} = -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right.$$

$$\left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)},$$

$$w^{(n)} = b_6 \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) dr -$$

$$- \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) dr + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10}^{(n)} \frac{r^2}{4} + C_{11}^{(n)} \ln r + C_{12}^{(n)}, \quad (15)$$

где $q_1^{(n-1)}(r)$ – функция, зависящая от вида нагрузки.

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0.$$

Если контур заделан, то из принятых граничных условий типа (13) получим:

$$C_3^{(n)} = \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \quad C_5^{(n)} = -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} -$$

$$- \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \quad C_7^{(n)} = -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right.$$

$$\left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right), \quad C_9^{(n)} = \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \right.$$

$$\left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right),$$

$$C_{10}^{(n)} = \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0^2} L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},$$

$$C_{12}^{(n)} = \left(\frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 b_6 \right) \int L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} + \left(\frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - b_4 b_6 \right) \int L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} -$$

$$- b_5 b_6 \int L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_3 b_6 \int L_3^{-1}(q - g_{\omega}^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_6 C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}.$$

В случае шарнирного опирания контура имеем

$$C_3^{(n)} = \left(\frac{2a_6}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \frac{1}{r_0} L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \frac{2a_8}{a_6^2 - a_5 a_8} \frac{1}{r_0} L_2^{-1}(h_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{r_0} \left(\frac{a_9}{a_6} - \frac{a_8(a_6 a_7 - a_5 a_9)}{a_6(a_6^2 - a_5 a_8)} \right) \left[C_7^{(n)} J_1(\beta r_0) + \frac{\pi}{2} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} \right) \right] - \frac{a_8}{a_6} C_{10}^{(n)}, \\
C_5^{(n)} &= -\frac{2b_1 C_7^{(n)} J_1(\beta r_0)}{r_0} - \frac{b_1 \pi}{r_0} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
& \quad \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \\
& \quad - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \\
C_7^{(n)} &= \frac{\pi}{2 \left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} J_1(\beta r_0) \right)} \left[\left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} J_1(\beta r_0) \right) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
& \quad \left. - \left(\beta Y_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} Y_1(\beta r_0) \right) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} + J_1(\beta r_0) Y_1(\beta r_0) q_1^{(n-1)}(r_0) r_0 - \right. \\
& \quad \left. - Y_1(\beta r_0) J_1(\beta r_0) q_1^{(n-1)}(r_0) r_0 \right], \\
C_9^{(n)} &= \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \, dr \Big|_{r=r_0} - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \, dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
C_{10}^{(n)} &= -2 \left(\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_1 - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) C_7^{(n)} \left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} J_1(\beta r_0) \right) - \\
& \quad - \left(\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_1 - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \pi \left[\left(\beta Y_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} Y_1(\beta r_0) \right) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} + \right. \\
& \quad \left. + Y_1(\beta r_0) J_1(\beta r_0) q_1^{(n-1)}(r_0) r_0 - \left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{1}{r_0} J_1(\beta r_0) \right) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r \, dr \Big|_{r=r_0} + \right. \\
& \quad \left. + J_1(\beta r_0) Y_1(\beta r_0) q_1^{(n-1)}(r_0) r_0 \right] - 2 \left(\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_2 - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \left(L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{r=r_0} - \\
& \quad - 2 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_3 L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - 2 \left(\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_4 - \frac{a_6}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \left(L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{r=r_0} - \\
& \quad - 2 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_5 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5^{(n)}, \\
C_{12}^{(n)} &= -\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \left(b_2 \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + b_3 \int L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + \right. \\
& \quad \left. + b_4 \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + b_5 \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} \right) + \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + \\
& \quad + \frac{a_6}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *Strength of Materials*. 2003. Vol. 35. N 4. P. 346-352.

2. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
3. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. N 1. P. 86-93.
4. Starovoitov, E.I. Vibrations of Circular Composite Plates on an Elastic Foundation under the Action of Local Loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol. 52, N 5. – pp. 665–672. DOI: 10.1007/s11029-016-9615-y.
5. Старовойтов, Э.И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех.* – 1980. – № 2. С. 92–96.
6. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / Москвитин В.В. Старовойтов Э.И. // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 1. С. 116–121.
7. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2001. № 4. С. 37–40.
8. Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Старовойтов Э.И. // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91–98.
9. Starovoitov, É.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials / É.I. Starovoitov// *Strength of materials*. – 1988 – Vol. 20, N 4. – P. 426–431.
10. Старовойтов Э.И. Термосиловое нагружение пологих трехслойных оболочек / Э.И. Старовойтов // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1989. Т. 5. С. 114–119.
11. Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – No. 9. – Pp.1032–1040.
12. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – №4 (33). – С. 53–57.
13. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – №10. – С. 55–66.
14. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск: БНТУ. – 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
15. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

**ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕСУРСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОТВЕТСТВЕННЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ТРАНСМИССИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ, ФОРМИРУЕМЫХ ЛАЗЕРНЫМИ
ТЕХНОЛОГИЯМИ**

¹ Девойно О.Г., ¹ Швец И.В.

¹ *Белорусский Национальный Технический Университет, Минск, Беларусь*

Одними из наиболее важных элементов механических трансмиссий являются зубчатые колеса, которые работают в широком диапазоне режимов и зачастую их ресурс лимитирует долговечность механизма в целом. От качества их работы зависят такие характеристики как кинематическая точность и уровень шума. Поэтому обеспечение высокого уровня физико-механических свойств зубчатых колес во многом определяет качество работы всей машины.

Для решения указанных задач предлагается использовать наиболее универсальный способ получения требуемых характеристик зубчатых колес при любой серийности производства с использованием современных высокоскоростных методов обработки концентрированными потоками энергии, наиболее перспективным из которых является лазерная обработка. Современный уровень развития лазерной техники позволяет расширить сферу ее эффективного применения в машиностроении и в частности добиться решения задачи обеспечения высокого уровня физико-механических свойств и долговечности зубчатых колес при снижении себестоимости упрочнения.

В частности, лазерная закалка рассматривается в качестве альтернативы поверхностного упрочнения цементацией и последующей объемной закалке для снижения коробления зубьев, а также ионно – плазменному азотированию (рис. 1). При цементации технология изготовления состоит из шести этапов (улучшение, черновая и чистовая обработки, цементация, закалка + отпуск и шлифование), при ионно-плазменном азотировании из пяти (улучшение, черновая обработка, отжиг, чистовая обработка, азотирование), а при лазерном упрочнении поверхности из четырех (улучшение, черновая и чистовая обработки, лазерная закалка), что неизбежно приведет к уменьшению себестоимости изготовления. Технология лазерной закалки сканирующим лучом без оплавления позволяет отказаться от шлифования поверхности после упрочнения, а также нет необходимости в закалке с отпуском и отжиге.

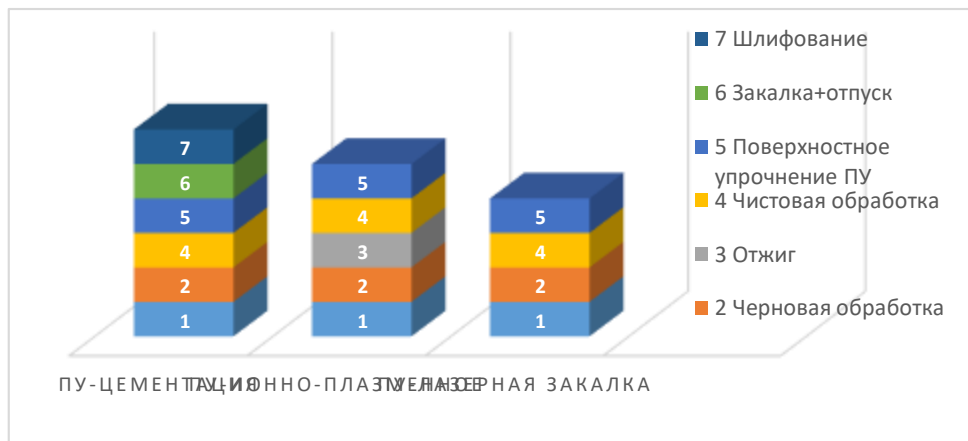


Рис. 1. Технологические этапы изготовления зубчатых колес

Лазерная закалка боковых поверхностей зубчатых колес с использованием сканирующего излучения позволяет обеспечить оптимальный энерговклад в каждый элемент поверхности и, соответственно, эффективное распределение свойств согласно распределению факторов износа по рабочей поверхности зубьев. Следует обратить внимание на наиболее нагруженные локальные зоны, подвергающиеся наибольшему износу. Возможности лазера позволяют дополнительно обработать данные зоны (рис 2). Также сформировать управляемое распределение твердости и глубины упрочненной поверхности за счет варьирования режимами обработки для передач с определенной геометрией и условиями работы.

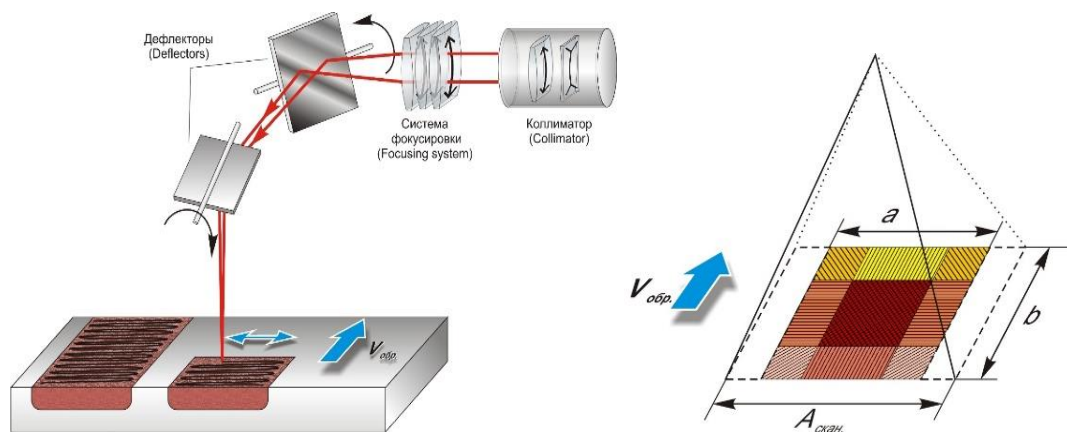


Рис. 2. Оптическая сканирующая система и пятно лазерного сканирования

Для обеспечения эффективности лазерной закалки зубчатых колес на первый план выходит необходимость предварительного расчета требуемой твердости и толщины упрочненного слоя для конкретных условий работы передачи. По результатам этих расчетов далее производится выбор материала зубчатых колес и режимов лазерной закалки на конкретном оборудовании.

Расчет колес на глубинную контактную прочность при залегании опасной зоны в упрочненном слое или на границе слоя позволяет определить вариант упрочнения, когда глубину закалки можно минимизировать и обеспечить при этом эффективную и долговечную работу зацепления. Если опасная зона находится в закаленном слое, то необходимую глубину упрочнения можно найти, используя выражение, полученное из расчетов на допустимое глубинное контактное напряжение [2]

$$h_i \geq h_{\text{eff}} \sqrt{\frac{\sigma_H S_H (H_o - H_K)}{H_K (3,6H_o - \sigma_H S_H)}}.$$

Выполняя расчеты на прочность зубчатых колес средней нагруженности с поверхностным упрочнением до твердости поверхностного слоя более 55 HRC установили, что условие глубинной контактной прочности выполняется, если зона наибольших глубинных касательных напряжений находится в пределах толщины упрочненного слоя, а не в более мягкой сердцевине. При этом глубина этой зоны обычно составляет до 1 мм и не превышает толщины упрочненного слоя. Вариант расположения зоны наибольших глубинных касательных напряжений в сердцевине не рассматриваем, так как твердость сердцевины заведомо невелика, а глубину упрочняемого слоя при лазерной закалке можно варьировать за счет режимов обработки в пределах более 1 мм. Поэтому целью исследований являлось проверить условие глубинной контактной прочности при расположении зоны наибольших глубинных касательных напряжений в пределах упрочненного слоя, удовлетворяющего условию работоспособности передачи.

Для изучения лазерного воздействия на поверхностные слои была выбрана сталь 40X в улучшенном и закаленном виде, которая получила широкое распространение при изготовлении зубчатых колес. Закалку производили на волоконном иттербиевом лазере мощностью 1 кВт с объективом для фокусировки лазерного излучения, системой перемещения и сканирующей лазерный луч головкой.

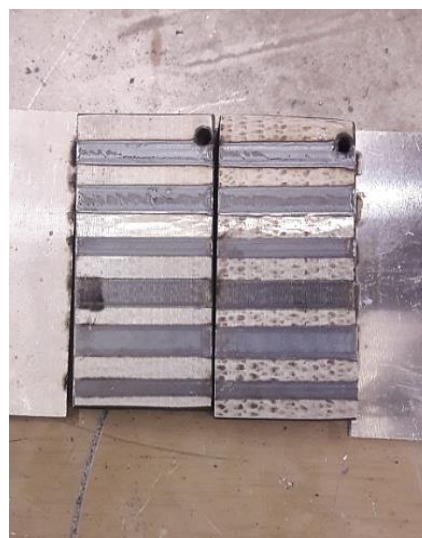
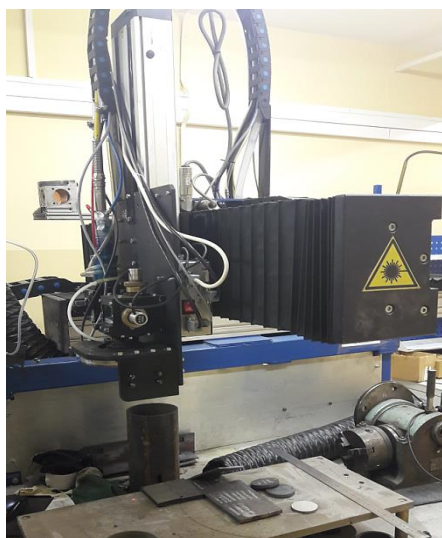


Рис. 3. Волоконный иттербиевый лазер со сканирующей системой и образцы из стали 40X после воздействия сканирующим лучом с варьируемыми параметрами

По приведенной методике выполнен расчет на глубинную контактную прочность подвергнутых лазерной закалке зубчатых колес из стали 40X с твердостью поверхностного слоя шестерни 62 HRC, колеса 60 HRC, частотой вращения колеса 258 мин^{-1} , частотой вращения шестерни 100 мин^{-1} , передаточное число $n = 2,85$, ресурс привода $L_h = 10000 \text{ ч}$, модулем $m = 2 \text{ мм}$, с окружной скоростью $0,972 \text{ м/с}$, 9-ой степени точности, межосевым расстоянием 140 мм, шириной шестерни 44 мм, шириной колеса 48 мм, делительным диаметром шестерни 72 мм, колеса 208 мм, приведенный радиус кривизны профиля 9,0935 мм для различных значений передаваемого крутящего момента. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Расчетная глубина упрочнения зубьев колес из стали 40X при различных величинах крутящего момента

Передаваемый крутящий момент, Нм	Окружная сила, Н	Удельная окружная сила, Н/мм	Эффективная толщина упрочненного слоя, мм	Необходимая глубина упрочнения, мм
500	4807,7	117,4	0,527	0,645
1000	9615,4	234,8	0,662	0,81
1500	14423	352,1	0,766	0,938
2000	19230,8	469,5	0,854	1,046
2500	24038,5	586,9	0,93	1,138

Анализируя параметры, используемые для определения глубины наибольших глубинных касательных напряжений, можно заметить, что необходимая глубина упрочнения увеличивается с ростом нагруженности передачи и модуля зацепления. Также важным является твердость поверхности и сердцевины колес, особенно в высоконагруженных передачах. Для конкретных условий работы передачи необходимо производить расчет требуемой глубины упрочнения и делать вывод о возможности обеспечения заданной долговечности лазерной закалкой на лазерной установке с определенными технологическими параметрами.

Расчет колес на глубинную контактную прочность при залегании опасной зоны на границе слоя позволяет определить вариант упрочнения, когда глубину закалки можно минимизировать и обеспечить при этом эффективную и долговечную работу зацепления.

Возможность упрочнения и модифицирования поверхностей широчайшей номенклатуры материалов с повышением их эксплуатационных характеристик позволяет во многих случаях заменять дорогостоящие, сложнолегированные материалы, используемые часто с целью обеспечения необходимой износостойкости поверхностей, на более простые, дешевые и доступные с приданием им нужных эксплуатационных характеристик. Лазерное упрочнение обеспечивает распределение твердости по глубине так, что по всей ширине зуба твердость превышает величины напряжений, возникающих в процессе работы передачи. Хорошие качественные показатели обработанной лазером поверхности, такие как мелкозернистая структура, отсутствие трещин на поверхности, повышенная сопротивляемость контактными нагрузкам, уменьшение коэффициента трения позволяет получить твердость поверхности у среднеуглеродистых низколегированных сталей 40X, 40XH и др. 63...65 HRC, при которой достигается максимальное сопротивление выкрашиванию, в широком диапазоне геометрических размеров зубчатых колес. Традиционно добиться такой твердости возможно для сталей 20X, 20XH2M, 18XГТ, 25XГМ с помощью улучшения, цементации, нитроцементации или азотирования поверхности с последующим низкотемпературным отпуском. Возникающие при химико-термической обработке дефекты микроструктуры, снижающие контактную и изгибную прочность, отсутствуют при лазерной закалке, а обработанный слой обладает некоторой пластичностью, способствующей повышенной сопротивляемости усталостным разрушениям и перегрузкам.

Однако, остаются не достаточно изученными вопросы связи технологии упрочнения на лазерной установке с определенными технологическими параметрами в

зависимости от условий работы передачи с учетом требуемой глубины упрочнения и возможности обеспечения заданной долговечности, точности эвольвентных профилей после фазовых превращений в поверхностном слое, а также необходимости обеспечения оптимального распределения свойств по поверхности зуба с учетом неравномерного нагружения зубчатых передач и лазерной закалкой.

Целью дальнейшего изучения будет исследование закономерностей формирования упрочненных слоев боковых поверхностей зубчатых колес в зависимости от варьируемых технологических параметров лазерного сканирующего излучения в совокупности с анализом оптимальной требуемой глубины упрочнения для обеспечения ресурсных параметров механических трансмиссий, а также получение регрессионных зависимостей влияния технологических характеристик лазерной обработки на геометрические и точностные параметры зубчатых колес различных размеров с учетом режимов нагружения.

Проанализированные данные будут использованы для разработки технологического процесса изготовления зубчатых колес механических трансмиссий с лазерной закалкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда А.Т. *Детали машин и основы конструирования: учебник / А.Т. Скойбеда, А.В. Кузьмин, Н.Н. Макейчик; под общ. Ред. А.Т. Скойбеда. – 2-е изд., перераб. – Мн. 6 Выш. Шк., 2006. – 560 с.*
2. ГОСТ 21354-87. *Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность, 1988.*
3. Девойно О.Г. и др. *Расчет на контактную прочность для эффективного лазерного упрочнения зубьев зубчатых колес. Теоретическая и прикладная механика: межд. научно-техн. сб. - Мн., 2016. - Вып. 31, с.129-135.*
4. Devoino O.G. и др. *The features of gear teeth laser hardening process. Beam Technologies and Laser Application: Proceedings of the international scientific and technical conference. SPb.: Publishing house SPbSPU, 2016. – P. 158-163.*
5. Девойно О.Г. и др. *Эффективность использования лазерной закалки для увеличения прочности зубчатых колес. Сб. трудов восьмой международной конференции «Лучевые технологии в сварке и обработке материалов», 11-15 сентября 2017 г., Одесса, Украина. Киев: Международная Ассоциация «Сварка», с. 83-86.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕЗКИ, ПРИМЕНЯЕМОГО В ОБОРУДОВАНИИ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

¹ Шанин В.А., ¹ Кончина Л.В.

¹ Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ", Смоленск

Резание - вид механического измельчения материала, основанное на разделении материала при помощи сжатия и сдвига части материала под режущей кромкой инструмента и его разламывание при превышении предела прочности.

Если говорить о пищевой и сельскохозяйственной промышленности, резание применяется для формования полуфабриката или готового изделия.

Большое конструктивное разнообразие резательных установок обусловлено широким диапазоном видов материалов и технологических задач, решаемых при помощи данного оборудования. В связи с этим, машины одного типа, применяющиеся в разных промышленных отраслях, будут значительно отличаться.

В пищевой промышленности операция резания, как правило, применяется на этапе формования продукта. Пищевые материалы, подвергаемые резке, обладают определенным набором характеристик, влияющих на выбор конфигурации и технических параметров машины.

Например, нож должен обладать достаточной прочностью для предотвращения механических повреждений при высоких нагрузках, высокой твердостью, повышающей эксплуатационные характеристики инструмента (долгое сохранение остроты заточки, равномерность износа режущей кромки), а также стойкостью к химически агрессивным средам.

Подобные свойства могут быть достигнуты путем использования в качестве материала ножа легированных пищевых сталей (08X18H10, 12X18H10T). Также, в ряде случаев может потребоваться термическая обработка стали: закалка, отпуск, отжиг, нормализация.

Перспективным направлением является использование поверхностных покрытий, тонким слоем наносимых на рабочую часть резательного инструмента, повышая его эксплуатационные характеристики. Это особенно эффективно при резании высокоадгезионных, вязких и плотных материалов, таких как: мармелад, тесто, ирис и другие кондитерские массы. Например, покрытие из фторопластов (тефлон), позволяет снизить трение боковых поверхностей ножа при прохождении его сквозь толщу материала. Алмазное покрытие повышает срок службы режущей кромки за счет повышения ее твердости.

Помимо вида материала и его термической или поверхностной обработки, использующихся для изготовления резательного инструмента, важное влияние имеет и его геометрическая конфигурация. Правильно спроектированный исполнительный орган резательной машины позволяет максимально эффективно использовать потенциал материала и производительности машины, обеспечивая высокое качество реза, надежность и стабильность работы установки.

От геометрической конфигурации поперечного сечения (профиля) ножа напрямую зависит распределение силовых нагрузок, возникающих при резании. Так как со стороны разрезаемого материала на инструмент действуют различные силы сопротивления (сила упругости сдавленного слоя материала под режущей кромкой, давление на боковую часть ножа, трение о поверхность инструмента), степень их

влияния при процессе резки можно скорректировать путем применения инструмента с наиболее оптимальным поперечным сечением [1, 2].

На рисунке 1 изображены три конфигурации поперечного разреза ножа. Инструмент подобного типа используется в гильотинных машинах для резки различных пищевых масс. При работе в составе такой установки нож совершает вертикальное движение, разрезая материал при перемещении вниз. На схеме (рис.1) изображены силовые факторы, возникающие со стороны материала при давлении лезвий разной формы.

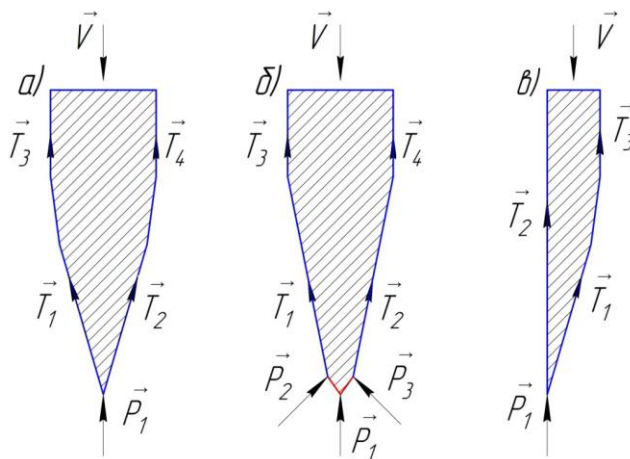


Рис.1. Распределение силовых факторов при разных конфигурациях поперечного сечения клинка

Так, в случае использования ножа с двусторонней клиновидной заточкой на режущую кромку будет воздействовать сила сопротивления материала – P_1 , а на боковые грани клинка – силы трения (T_1, T_2, T_3, T_4). В целом, такая конфигурация довольно сбалансирована и подходит для резки довольно твердых и крепких продуктов. Инструмент, при этом, обладает достаточной надежностью и высокой прочностью, что положительно сказывается на эксплуатационных характеристиках резательной машины. [3]

При применении клинка с двусторонней клиновидной заточкой с подводами необходимо учесть, что усилие от сопротивления материала (P_1, P_2, P_3), возрастает, по сравнению с предыдущей схемой заточки. Подводы, образуя режущую кромку, распределяют нагрузку от сил сопротивления материала по площади. За счет этого, материал не просто разрезается ножом, а дополнительно раздвигается в стороны, облегчая прохождение клинка сквозь толщу продукта. Это свойство особенно важно при обработке вязких и высоко адгезионных продуктов.

Рассмотрим процесс вертикального резания при помощи гильотинной машины, в которой нож жестко закреплен в верхней части и движется в вертикальных направляющих.

Графическое изображение силовых факторов, возникающих в ноже под нагрузкой во время разрезания образца, можно представить в виде эпюр. Гильотинный нож, закрепленный с двух сторон на вертикальных направляющих, представляет собой балку с распределенной нагрузкой на двух опорах (рис.2.)

Так как к ножу приложено только вертикальное усилие, то горизонтальные составляющие реакций опор A и B будут равны нулю. Общий вид эпюр внутренних поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x даёт возможность определить характер распределения напряжений в материале ножа.

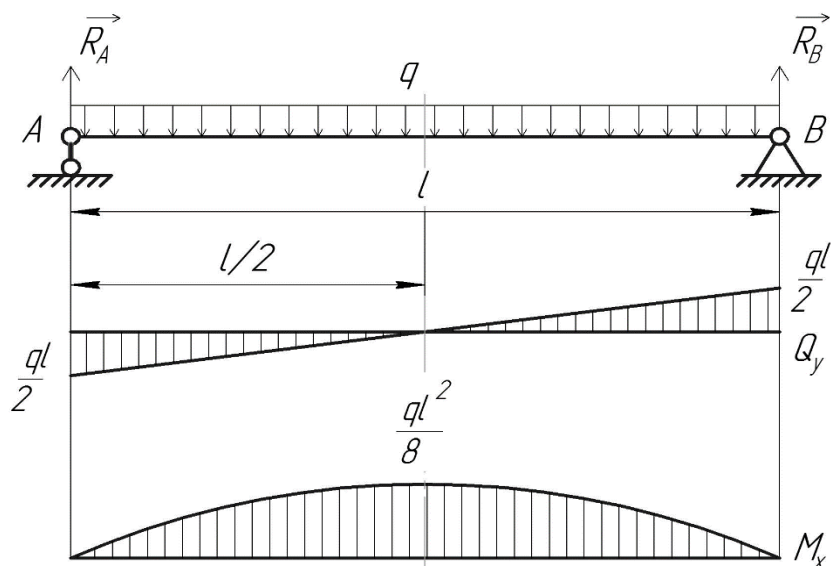


Рис.2. Распределение силовых нагрузок при вертикальном резании

В ходе работы по изучению зависимости эффективности резки пищевых продуктов от конфигурации резательного органа была создана установка, позволяющая проводить эксперименты по определению основных параметров процесса вертикального резания.

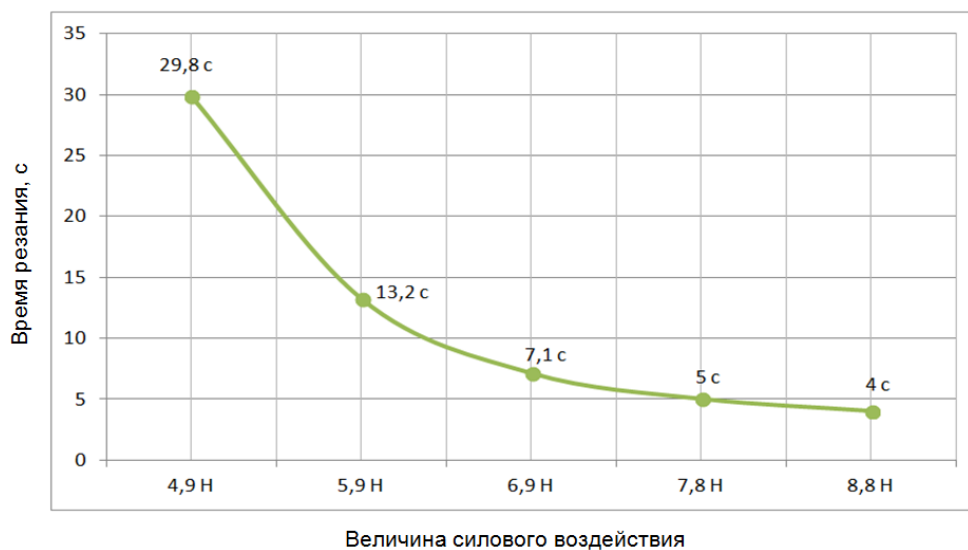


Рис.3. Зависимость времени резания желейного мармелада от величины прикладываемой нагрузки

Установка состоит из станины с вертикальными направляющими, по которым строго вертикально может перемещаться закрепленный нож. Вместе с ножом установлена платформа, на которую может помещаться груз известной массы.

Таким образом, можно варьировать величину статического усилия, с которым нож воздействует на материал. Это позволяет определять: минимальное усилие, необходимое для разрезания образца; время полного разрезания образца при определенной весовой нагрузке; глубину вхождения ножа в образец при известной величине усилия.

Результаты экспериментальных исследований процесса резки желейного мармелада, проведенных при помощи данной лабораторной установки, представлены на рисунке 3.

Подобные эксперименты позволяют подобрать оптимальную конфигурацию резательного инструмента для определенных технологических задач и задаться требуемым усилием, с которым нож должен выполнять качественный рез продукта.

Экспериментально определив величину силы резания и зная устройство резательной машины, можно выяснить, какие параметры электродвигателя и механических передач будут наиболее подходящими для резки определенного материала.

В ходе испытаний желеинового мармелада было определено время t разрезания образца известной высоты $\delta_{обр}$ при заданной нагрузке F_p . Обозначив скорость центра масс ножа $V_{нож}$ при прохождении сквозь материал, используя теорему об изменении количества движения механической системы в проекции на ось, совпадающей с направлением движения ножа, можно записать:

$$-MV_{нож} = (F_{нож} + F_{рез} - F_{сопр})t, \quad (1)$$

где M – масса ножа, $F_{нож}$ – сила, действующая на нож вертикально вниз, $F_{рез}$ – сила резания, $F_{сопр}$ – проекция силы сопротивления материала на вертикальную ось, которая на практике может учитывать и силы трения в проекции на вертикаль.

Из (1) следует:

$$F_{сопр} = F_{нож} + F_{рез} + MV_{нож}/t. \quad (2)$$

Запишем выражение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, учитывая, что движение ножа является поступательным:

$$-M \frac{V_{нож}^2}{2} = F_{нож} \delta_{обр} + F_{рез} \delta_{обр} - F_{сопр} \delta_{обр}, \quad (3)$$

где $\delta_{обр}$ – высота образца, произведение $F_{рез} \delta_{обр}$ – определяет работу силы резания, направленной на разрезание образца и преодоление сил сопротивления материала.

Зная вес подвижной части исполнительного органа резательной установки, скорость и время хода ножа, а также силы сопротивления материала, можем определить величину $F_{рез}$ – силы резания:

$$F_{рез} = F_{нож} + M \cdot \frac{V_{нож}^2}{2\delta_{обр}} - F_{сопр}. \quad (4)$$

Силу резания можно выразить через μ – коэффициент, характеризующий сопротивление материала.

$$F_{рез} = \mu V_{нож}. \quad (5)$$

Выражения (1), (3) позволяют, зная силы, действующие на лезвие ножа, связать между собой скорость хода ножа, время его движения и высоту образца для резания.

Определив коэффициент μ при различных конфигурациях резательного органа, можно построить зависимость коэффициента сопротивления от изменения определенного параметра ножа (угол заточки, площадь поперечного сечения клинка, шаг зубьев серрейторной заточки и т.д.), что позволяет объективно оценить эффективность тех или иных конструктивных изменений, дает возможность максимально оптимизировать процесс разработки исполнительного органа резательной машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В. Процессы и аппараты пищевых производств / А.Н. Остриков, О.В. Абрамов, А.В. Логинов под ред. А.Н. Остриков -СПб.:ГИОРД, 2012.-616 с.*
2. *Антипов С. Т., Машины и аппараты пищевых производств / С. Т. Антипов, И. Т. Кретов, А. Н. Остриков, В. А. Панфилов, О. А. Ураков - М.: «Высш. шк.», - 2001.- 680с.*

3. *Борисенко А.А., Барян А.Г., Борисенко Л.А., Режущие механизмы пищевой промышленности. Ставрополь, СевКав ГТУ, 2004. - 208 с.*

ВИРТУАЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ КАБИНЫ КАРЬЕРНОГО САМОСВАЛА НА СООТВЕТСТВИЕ НОРМАТИВНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ К УСТРОЙСТВАМ ЗАЩИТЫ ПРИ ОПРОКИДЫВАНИИ

¹Лисовский Э.В., ²Шмелев А.В., ¹Калина А.А.

¹*Белорусский национальный технический университет, Минск*

²*ГНУ «Объединенный институт машиностроения» НАН РБ, Минск*

Карьерная техника обычно работает в условиях, характеризующихся низкой несущей способностью грунтов, наличием больших уклонов и различного рода препятствий. С учетом возможных ошибок оператора, имеется высокая вероятность опрокидывания машин в эксплуатации. Поэтому при проектировании карьерной техники особое внимание уделяется силовым конструкциям, предназначенным для защиты оператора в случае опрокидывания машины.

Основные требования к безопасности карьерной техники при опрокидывании изложены в международном стандарте ISO 3471 «Машины землеройные. Устройства защиты при опрокидывании. Технические требования и лабораторные испытания», [1]. Норматив устанавливает технические требования к металлическим устройствам защиты при опрокидывании (Roll Over Protection System [ROPS]), а также единообразные и воспроизводимые методы оценки соответствия этим требованиям в лабораториях, проводящих испытания с использованием статического нагружения представленного образца. Норматив применяется для бульдозеров, фронтальных погрузчиков, экскаваторов-погрузчиков, карьерных самосвалов, трубоукладчиков, комбинированных машин, грейдеров, уплотнителей мусора, катков, траншейных экскаваторов и др.

При разработке новых кабин приходится сталкиваться с прямой задачей обеспечения достаточной прочности конструкции и обратной задачей - минимизацией ее массы. Поэтому очень важно определить конструктивные решения для кабины таким образом, чтобы она обеспечила максимум прочности при минимуме массы. Кроме того, при современном уровне конкуренции в машиностроении, ключевую роль играет время разработки новых конструкций. Перед инженерами стоит задача минимизации времени проектирования.

Наиболее эффективное, комплексное решение перечисленных инженерных задач возможно с использованием компьютерного (виртуального) моделирования испытаний проектируемых конструкций. Для реализации применяются специально разработанные программные средства, основанные на использовании метода конечных элементов для расчетного исследования напряженно-деформированного состояния деталей и конструкций. На данный момент одними из наиболее распространенных программ для компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов можно считать ANSYS и LS-DYNA.

Таким образом, виртуальное моделирование различных режимов нагружения проектируемой кабины карьерного самосвала позволяет еще на стадии разработки оценить соответствие несущих свойств кабины заданным требованиям и в случае несоответствия выполнить доработку конструкции с последующей расчетной оценкой эффективности изменений, [2]. Такой подход позволяет избежать необходимости изготовления в металле прототипов конструкций и проведения их натурных

испытаний. Это, в свою очередь, дает значительную экономию времени и материальных затрат.

Соответствие результатов виртуальных испытаний процессам, протекающим в реальной конструкции кабины при натурных испытаниях, напрямую зависит от адекватности разработанной компьютерной модели реальному объекту. Учитывая, что нагружение конструкции при испытаниях происходит со значительными пластическими деформациями, то особую значимость имеет достоверность параметров модели материала. С целью определения таких параметров проводится компьютерное моделирование лабораторных испытаний образцов материалов. На рисунке 1 показана диаграмма деформирования материала для реального образца и компьютерной модели.

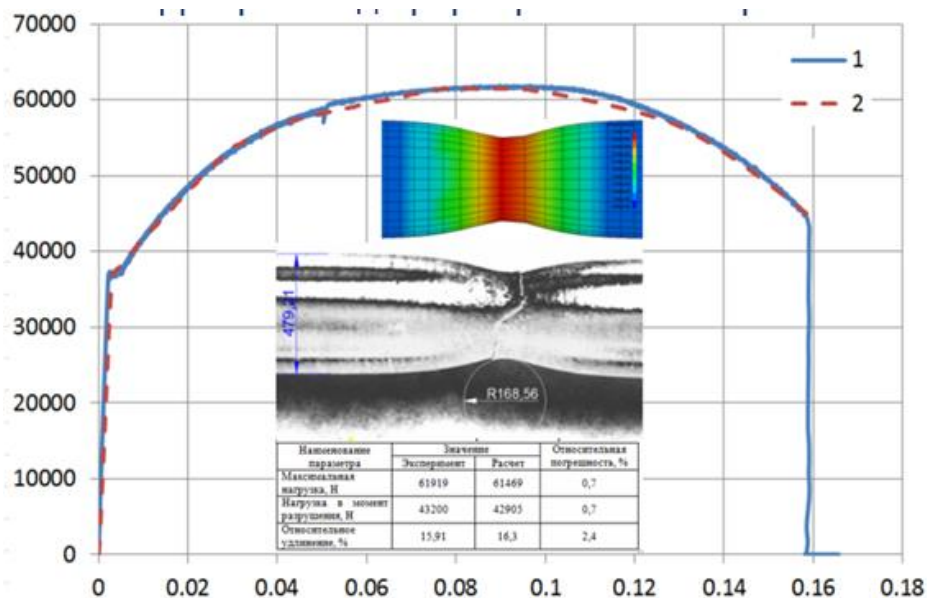


Рис. 1. Диаграмма деформирования материала

1 – компьютерная модель,

2 – реальный образец

Для того, чтобы систематизировать порядок выполняемых операций и исключить возможные ошибки при создании компьютерной модели кабины для проведения виртуальных испытаний на соответствие требованиям ROPS, была разработана методика проведения виртуальных испытаний (рисунок 2). Методика пошагово описывает последовательность необходимых действий для создания корректной компьютерной модели кабины и проведения последующих виртуальных испытаний.

Оценка достоверности результатов моделирования, полученных с применением методики, выполнялась путем сопоставления с данными экспериментального определения показателей прочности кабины карьерного самосвала по требованиям ROPS при боковом нагружении.

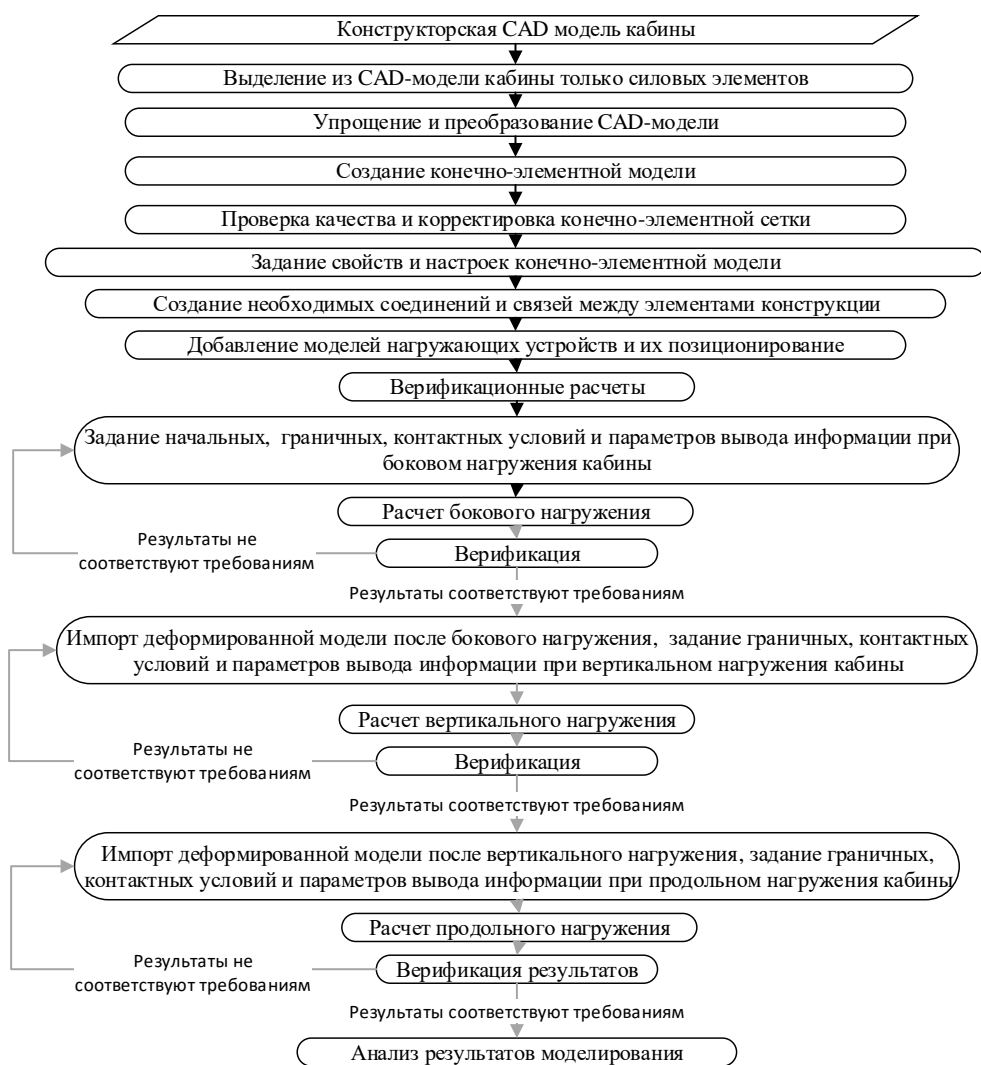


Рис. 2. Структурная схема методики проведения виртуальных испытаний кабины на соответствие техническим требованиям ROPS

Оценка достоверности результатов моделирования, полученных с применением методики, выполнялась путем сопоставления с данными экспериментального определения показателей прочности кабины карьерного самосвала по требованиям ROPS при боковом нагружении.

Конечно-элементная модель исследуемой кабины карьерного самосвала разработана в программном комплексе ANSYS. Далее модель передавалась в программу препроцессор LS-PrePost, где уточнялись настройки контактного взаимодействия конструкций, описания механических свойств материалов, граничных условий и т.п. Разработанная модель кабины представлена на рисунке 3.

Результаты компьютерного моделирования испытаний конструкций кабины для режима бокового нагружения в виде картины перемещений приведены на рисунке 4. Максимальное перемещение нагружающего устройства при виртуальном моделировании составило 263,6 мм, а в ходе натурного эксперимента – 269,5 мм. Таким образом, погрешность моделирования составила около 2%.

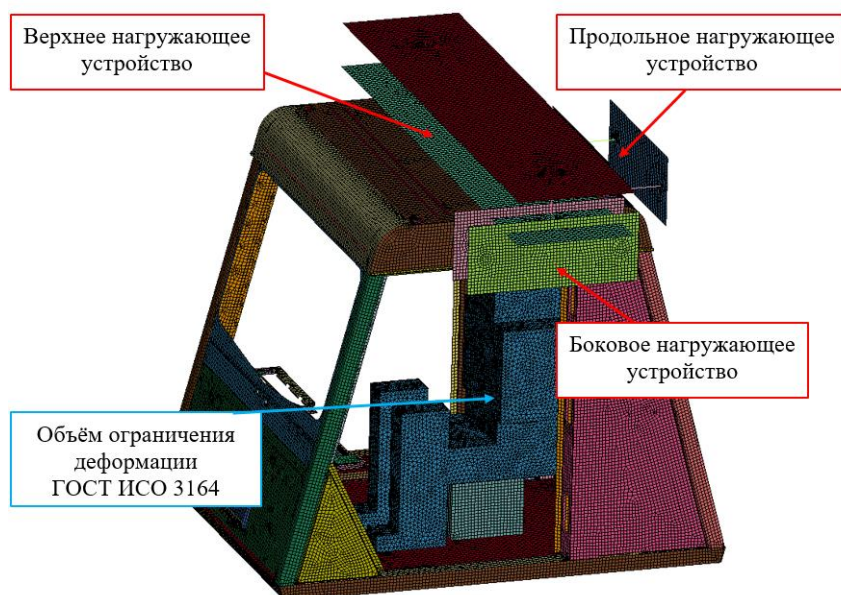


Рис. 3. Конечно-элементная модель кабины карьерного самосвала с нагружающими устройствами

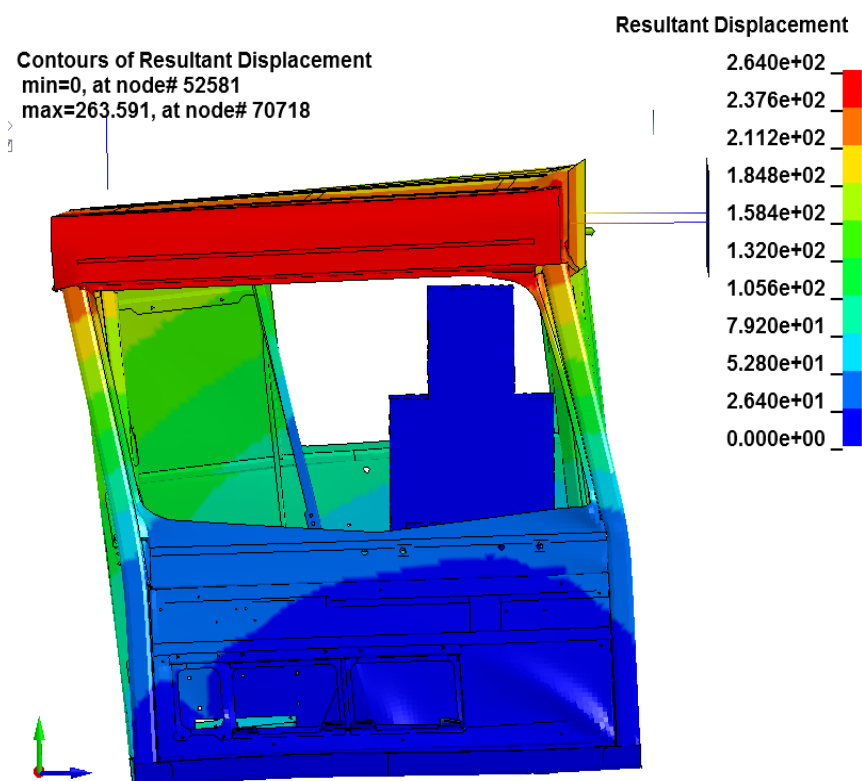


Рис. 4. Картина перемещений конструкций кабины при боковом нагружении

Использование разработанной методики проведения виртуальных испытаний кабин карьерных самосвалов на соответствие требованиям безопасности ROPS позволило с достаточно высокой достоверностью оценить искомый показатель прочности кабины при боковом нагружении. Планируется дальнейшая работа по моделированию продольного и вертикального нагружения кабины, сопоставление с соответствующими результатами натуральных испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ ISO 3471– 2015. Машины землеройные. Устройства защиты при опрокидывании. Технические требования и лабораторные испытания. Взамен – ГОСТ ISO 3471– 2013; введ. 01.03.2016.
2. Шмелев, А. В. Основы методики виртуального моделирования испытаний кабин грузовых автомобилей по требованиям пассивной безопасности/ А. В. Шмелев, Э. В. Лисовский, В.С. Короткий // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2015. – № 3 (32). – с.64–72.

РОЛЬ ПРОЦЕССА ВИЗУАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

¹ Гольцев И.Ю., ¹ Гончарова И.А., ¹ Маслова К.С.

¹ Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ", Смоленск

В настоящее время выпускники технических вузов должны обладать развитым творческим воображением, системным мышлением, креативным подходом к решению производственных задач. И на наш взгляд, выпускник кафедры ТМО филиала ФГБОУ «НИУ «МЭИ» должен уметь достойно реализовывать задачи инженерно-конструкторской деятельности. В процессе обучения студент получает все необходимые знания, изучая различные предметы. Кроме того, учащийся развивает свои способности, такие как пространственное воображение, техническое мышление и другие. Развитию таких навыков способствуют различные методы получения информации на специальных дисциплинах. Преподавателю важно донести до студента материал в удобной для изучения форме, которую студент может не только обработать, но и хорошо запомнить. Для лучшего усвоения учебного материала часто используют процесс визуализации.

Визуализация информации - это процесс представления абстрактных деловых или научных данных в виде изображений, которые могут помочь в понимании смысла данных. С ее помощью человек гораздо быстрее воспринимает информацию и хорошо ее запоминает. При возрастающем массиве информации именно визуализация становится лучшим современным инструментом эффективной коммуникации. Сегодня визуализация особенно важна, так как люди теряются в обилии окружающей информации и на ее восприятие тратится слишком много времени. Поэтому скучные непонятные тексты часто остаются без внимания. Читатель не будет тратить время, чтобы в них разобраться. Физиологически, восприятие визуальной информации является основной для человека. Все эти знания о визуализации мы используем при реализации педагогической компетенции в магистерской подготовке.

Перед нами стояла задача проведения лабораторных работ по дисциплине «Технохимический контроль производства нефтегазопереработки» у группы ТМ2-15. Темой первых двух лабораторных работ являлось определение качества нефтепродуктов. Цель этих работ заключалась в закреплении знаний по качеству бензинов, знакомстве с нормативно-технической документацией по качеству бензинов и приобретении навыков по контролю и оценке качества бензинов. При выполнении первой лабораторной работы у студентов возникли некоторые трудности. Во-первых, время на изучение теоретического материала каждый студент затратил различное. Это приводило к замедлению процесса проведения работы. Кроме этого, у студентов возникали разногласия в понимании задания лабораторной работы. Во-вторых, при выполнении экспериментальной части у студентов часто возникали вопросы о правильности ее выполнения. Время проведения опытной части также увеличивалось.

Наличие таких трудностей поставило перед нами вопрос – как избежать следующее их появление? Для лучшего эффекта было необходимо решить ряд задач в методике проведения лабораторной работы. И мы решили провести активизацию в изложении теоретической части материала. Для решения этой задачи нам потребовалось изучить некоторые методические пособия, отражающие современные теории обучения. Современная методика обучения предлагает различные средства в

организации педагогического процесса. Мы согласны, что все многообразие средств обучения можно классифицировать на материальные объекты, знаковые системы, логические регулятивы обучающей деятельности. Данная классификация представлена на рисунке 1.

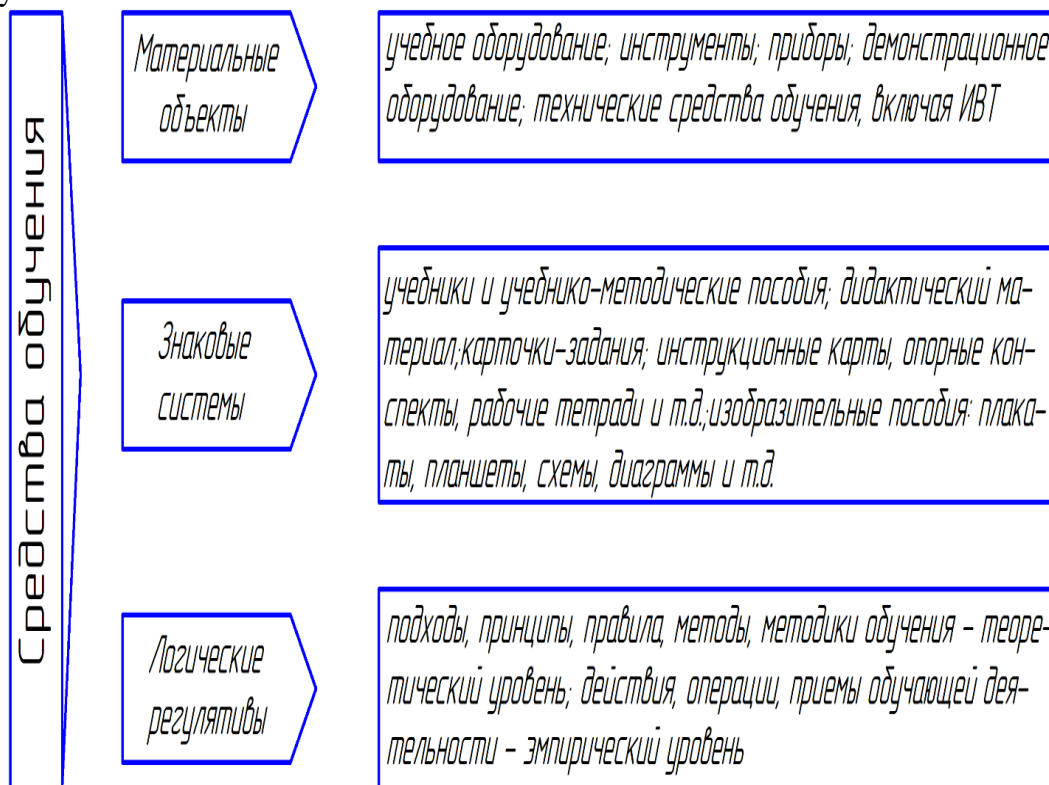


Рис. 1. Средства обучения

Создали небольшое видео, в котором была описана теория, необходимая для выполнения лабораторной работы, и проведен эксперимент. Данный фильм был показан студентам второй группы. В ходе просмотра данного видео, студенты изучили необходимую теорию и приступили к выполнению экспериментальной части. Вопросов по ходу проведения эксперимента у студентов возникало намного меньше. И мы решили сравнить эффективность проведения двух лабораторных работ. Полученные знания у студентов были одинаковые, но при выполнении второй лабораторной работы студенты потратили на 20% меньше времени, чем при выполнении первой лабораторной работы. После мы спросили у студентов, какой подход выполнения работы им больше всего понравился. Все студенты ответили, что в процессе визуализации, они лучше усвоили и теорию, и практику.

Анализируя данную ситуацию, мы убедились, что процесс визуализации играет огромную роль в проведении лабораторных работ по дисциплине «Технохимический контроль производства нетегазопереработки». Данный процесс позволил студентам легко и быстро обработать и запомнить всю информацию. Вывод – следующую лабораторную работу по теме «Анализ качества дизельного топлива» мы проведем следующим образом: определим главную задачу работы, визуализируем ее в формате видео и начнем эксперимент. Данная тема является актуальной, и в дальнейшем мы будем ее рассматривать, применительно к методике преподавания и других профессиональных дисциплин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Визуализация информации. Каталог 2010-2011, - М.: Полимедиа, 2010-113 с..

2. Валеева Ю.И. 3D-РЕДАКТОР BLENDER//Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. - 2009. -№ 4. - С. 9-13.
3. Кончина Л.В., Куликова М.Г., Гончарова И.А. Экспериментальная апробация внедрения межпредметных связей при проектировании объектов машиностроения//Естественные и технические науки. 2018. № 8 (122). С. 158-159.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ В ПЛАСТИНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

¹ Капуста П.П., ² Вихренко Д.В., ² Воронько Ю.А.

¹ Белорусский национальный технический университет,

² Минский автомобильный завод

(г. Минск, Республика Беларусь)

При конструировании сложных деталей машиностроения необходимо учитывать влияние на прочность и долговечность детали концентраторов напряжений. Игнорирование этого влияния приводит к преждевременному выходу деталей из строя. Так, при неудачном расположении отверстий в детали между ними может пойти трещина даже в том случае, если отверстия находятся не в самой напряженной зоне детали.

Так, в лонжеронах клепаных рам грузовых автомобилей расположение отверстий часто диктуется компоновочными условиями, и не всегда можно привести группу отверстий к табличному виду, чтобы правильно определить коэффициент концентрации напряжений. Достаточно действенным методом прогнозирования нагруженности на стадии проектирования является использование численных методов решения, в частности метода конечных элементов (МКЭ) или метода граничных элементов (МГЭ). Некоторые авторы [4] настоятельно рекомендуют использовать МГЭ, а не МКЭ. Однако проведенная нами работа позволяет утверждать, что использование известных пакетов расчета МКЭ, таких, как MSC\Nastran, позволяет с достаточной точностью учитывать концентраторы в виде круглых отверстий в пластине.

Расчетная модель выполнена в виде пластины с круглым отверстием посередине. Размер пластины 400×200 мм (длина намного больше ширины), толщина пластины 10 мм, диаметр отверстия 20 мм. С одной стороны пластина закреплена, с другой стороны прикладывается растягивающая сила. С целью экономии ресурсов выполнена половинная конечноэлементная модель из двумерных четырехузловых пластинчатых элементов первого порядка, по линии «разреза» наложены симметричные граничные условия, с одной стороны все узлы закреплены, с другой – к узлам приложена сила, причем сила в крайних узлах в 2 раза меньше, чем в средних для того, чтобы добиться равномерного распределения растягивающей силы (рисунок 1).

Согласно теории упругости, номинальные напряжения в сечении равны:

$$\sigma_{НОМ} = F/t(H-d),$$

где F – растягивающая сила; $F=9000$ Н; t – толщина пластины; $t=10$ мм;

H – ширина пластины; $H=200$ мм; d – диаметр отверстия; $d=20$ мм.

Таким образом, $\sigma_{НОМ}=5$ МПа.

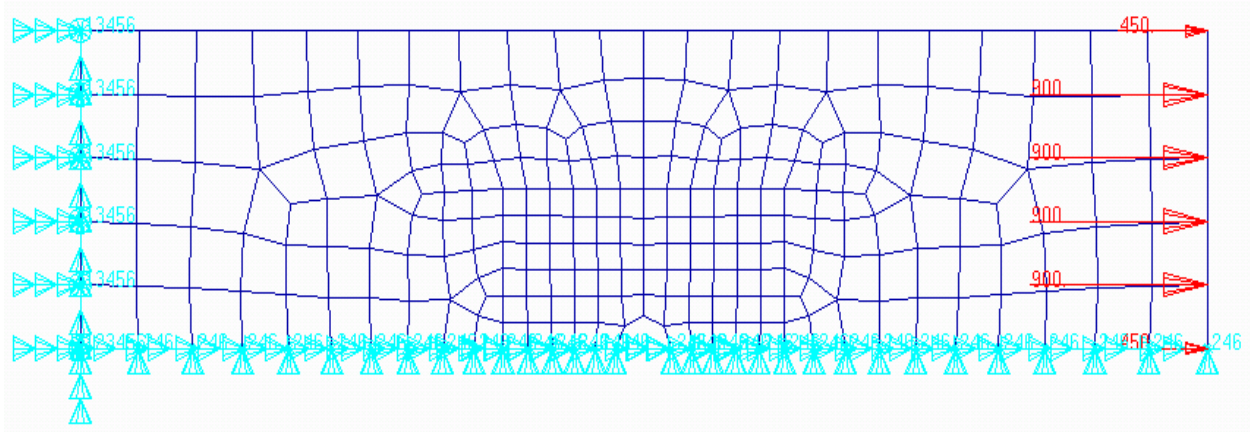


Рис. 1. Расчетная конечноэлементная модель пластины

Максимальные напряжения σ_{MAX} можно определить, зная коэффициент концентрации k_σ :

$$\sigma_{MAX} = k_\sigma \sigma_{НОМ.}$$

Для данного типа концентратора при соотношении $d/H=0,1$ коэффициент концентрации равен $k_\sigma = 2,7$ согласно [1, с.59], $k_\sigma = 2,73$ согласно [3, с. 143], $k_\sigma = 2,75$ согласно [2, с. 47, 5, с.29]. Таким образом, получаем $\sigma_{MAX} = 13,5 \dots 13,75$ МПа.

В общем случае на точность расчета влияет количество точек интегрирования, иначе говоря, количество конечных элементов в интересующей области. Для определения необходимого количества элементов будем последовательно увеличивать их количество до тех пор, пока результаты (напряжения) не станут стабильными. Как видно из графика на рисунке 2, необходимое число элементов составило 11 на четверть отверстия.

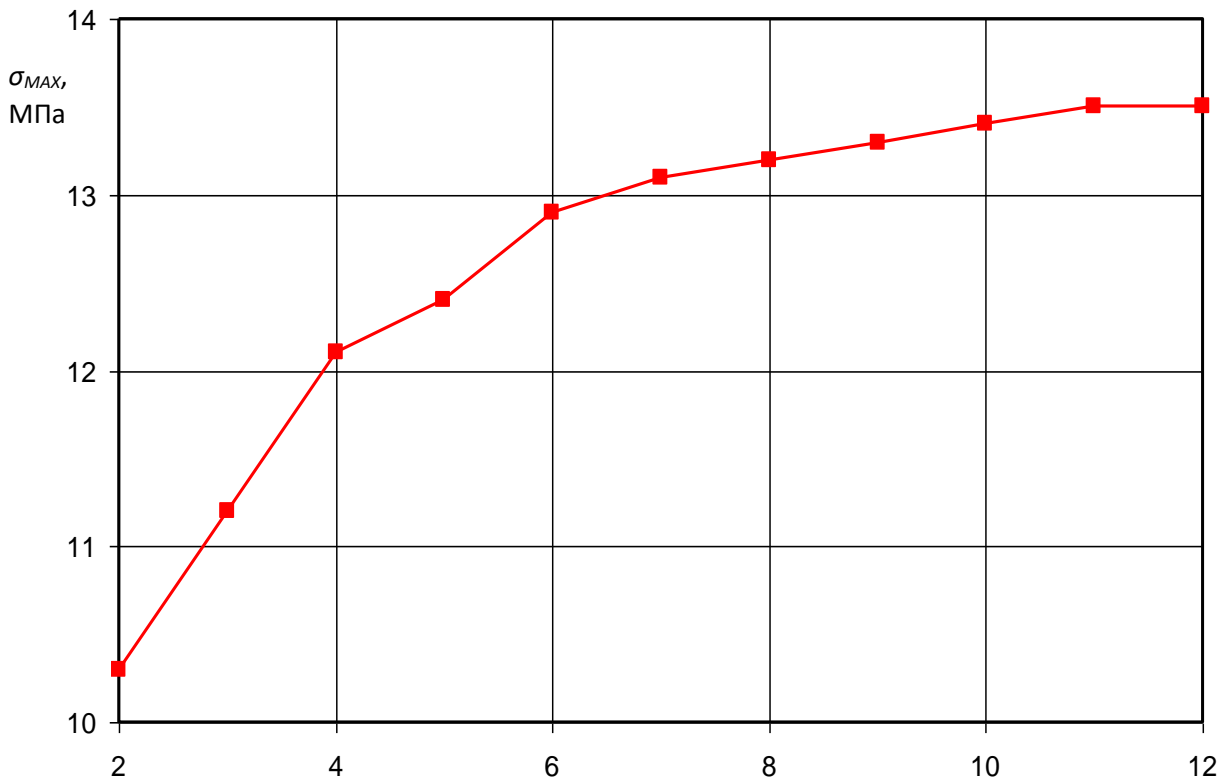


Рис. 2. Зависимость максимальных напряжений от количества элементов на четверти отверстия

На рисунке 3 показано распределение первых главных напряжений σ_1 , которые достигают 13,6 МПа ($k_\sigma = \sigma_{MAX}/\sigma_{НОМ} = 2,72$), что попадает в диапазон 13,5...13,75 МПа, определенный ранее.

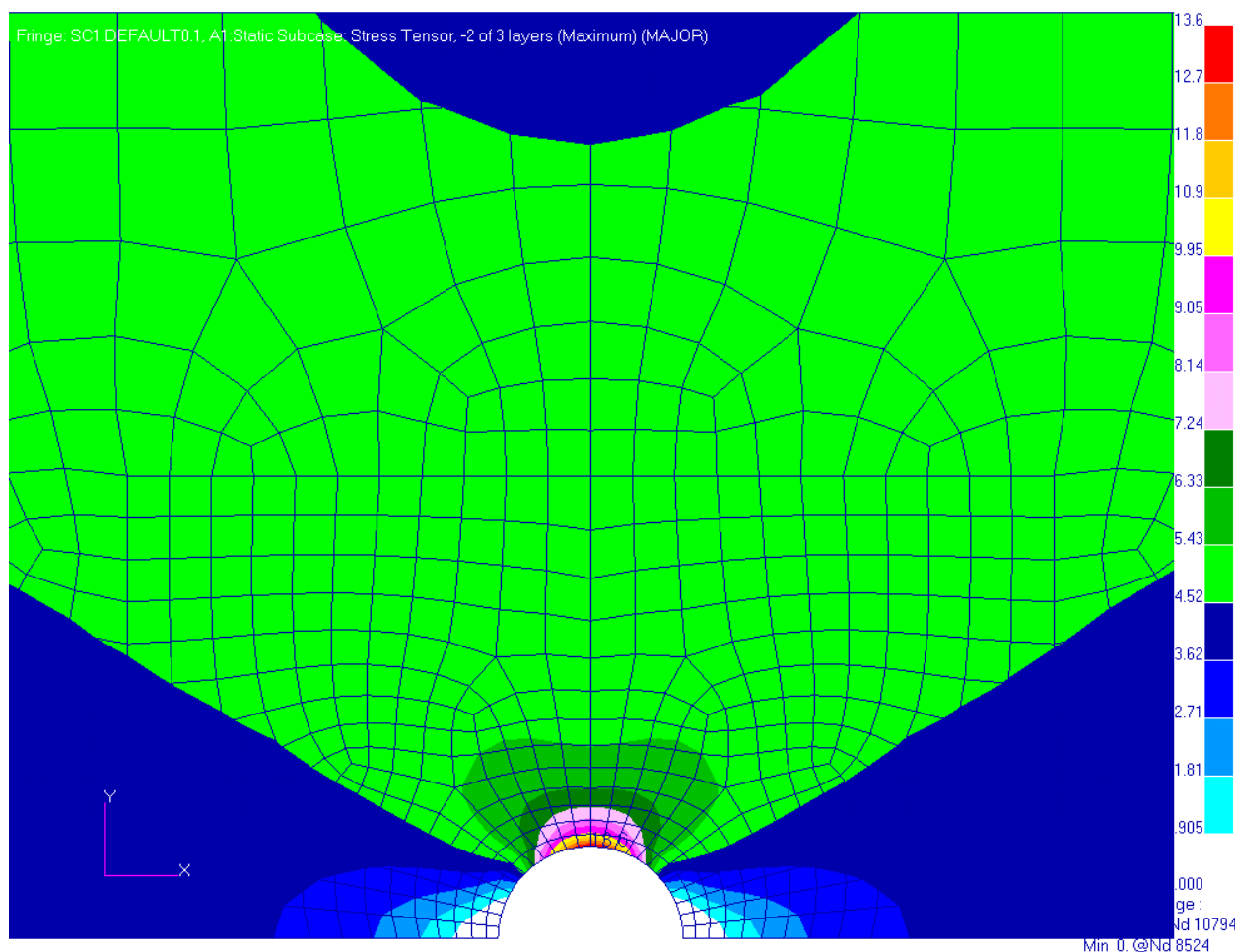


Рис. 3. Распределение первых главных напряжений σ_1 (МПа) при растяжении

При увеличении соотношения d/H до 0,4 коэффициент концентрации по литературным источникам равен $k_\sigma = 2,25$ согласно [1, с.59], $k_\sigma = 2,24$ согласно [3, с. 143], $k_\sigma = 2,27$ согласно [2, с. 47, 5, с.29]. Расчетный коэффициент концентрации оказался равен $k_\sigma = 2,22$, что несколько меньше, чем указано в литературных источниках, однако по сравнению со значением 2,24 погрешность составляет менее 1%, что вполне приемлемо.

Графики на рисунке 4,а показывают изменение отношения локального напряжения к номинальному по мере удаления от отверстия согласно испытаниям [2, с. 47], а на рисунке 4,б – полученные расчетным путем в настоящей работе. Как видно, градиент напряжений также достаточно точно определяется расчетным путем с помощью МКЭ.

Рассмотрим также изгиб исследуемой пластины с отверстием. Номинальные напряжения равны

$$\sigma_{НОМ} = 6Fl / (H-d)t^2,$$

где l – расстояние до центра отверстия; $l = 200$ мм.

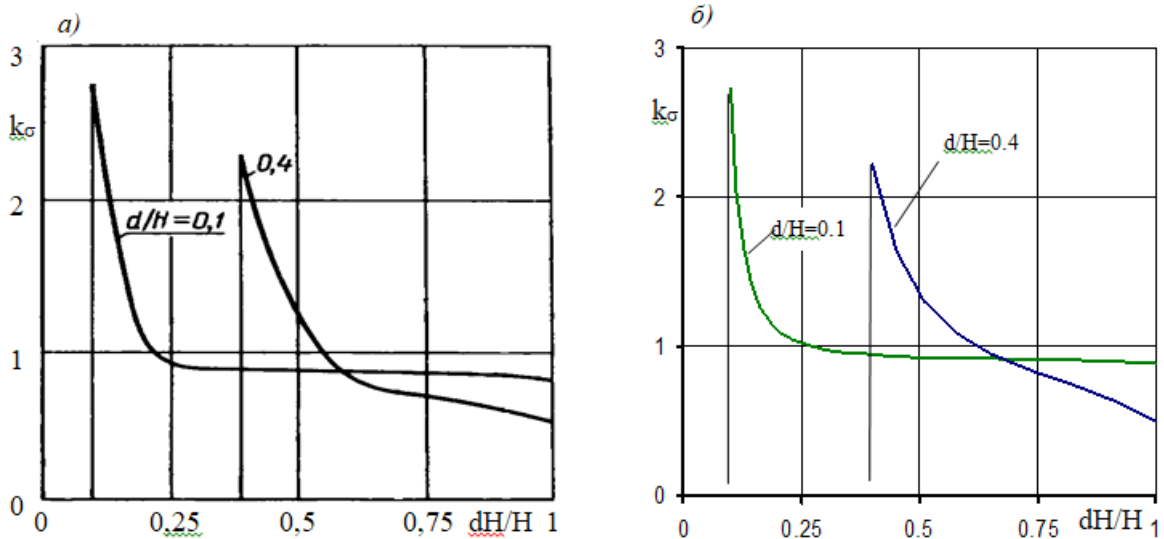


Рис. 4. Изменение отношения локального напряжения к номинальному:

- а) согласно испытаниям [2, с. 47]
 б) согласно проведенному расчету

Таким образом, при изгибающей силе $F=90$ Н $\sigma_{НОМ}=6$ МПа. Коэффициент концентрации равен $k_\sigma = 1,85$ согласно [1, с. 60, 3, с.224]. По расчету первые главные напряжения σ_1 достигают 11,1 МПа (рисунок 5),

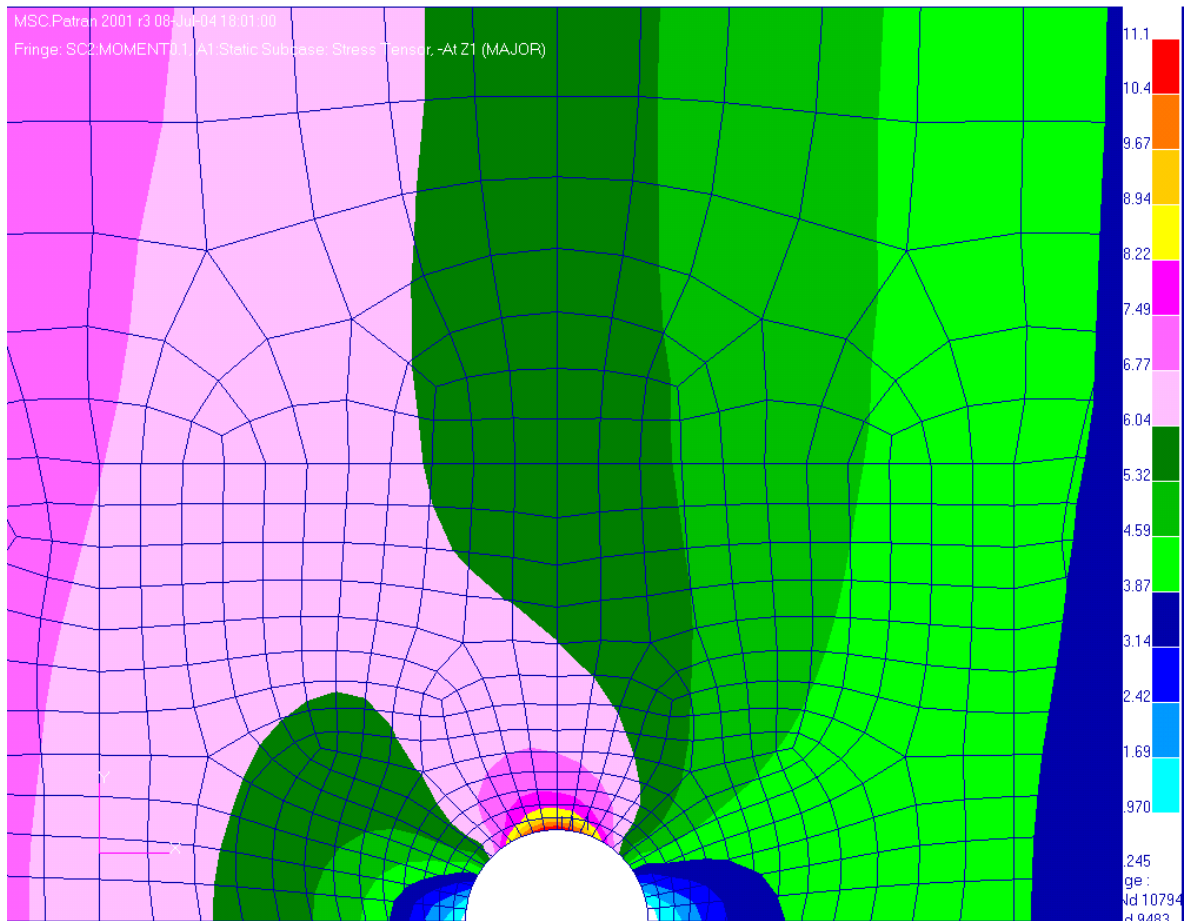


Рис. 5. Распределение первых главных напряжений σ_1 (МПа) при изгибе коэффициент концентрации равен $k_\sigma = \sigma_{МАХ}/\sigma_{НОМ} = 1,85$, что в точности до третьего знака включительно равно указанному в литературных источниках.

Аналогично для соотношения $d/H=0,4$ коэффициент концентрации равен $k_\sigma = 1,50$ как согласно литературным источникам [1, с. 60, 3, с.224], так и по расчету.

Отметим еще одну особенность использования МКЭ при расчете напряжений в пластинах. При использовании в этих целях объемных восьмиузловых кубических элементов первого порядка получены следующие результаты в зависимости от количества элементов по высоте пластины:

1. При растяжении напряжения (рисунок 6) изменяются по высоте сечения – увеличиваются от края к центру, и максимальное значение оказывается больше (14 МПа для 5 элементов по высоте), чем в пластинчатых элементах, хотя среднее значение по сечению совпадает (13,6 МПа);

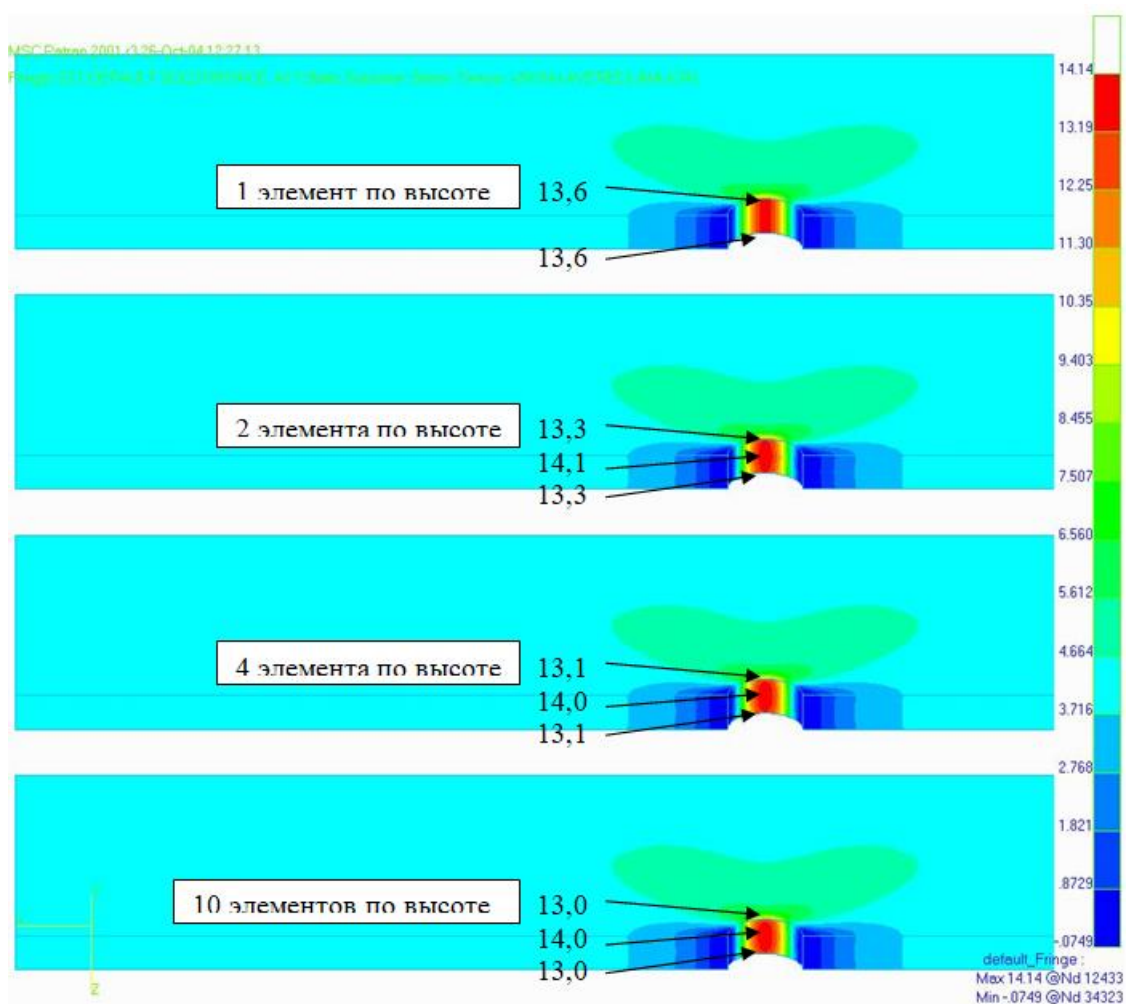


Рис. 6. Распределение первых главных напряжений σ_1 (МПа) в объемной модели при растяжении

2. При изгибе напряжения (рисунок 7) оказываются несколько меньше, чем при использовании пластинчатых элементов, причем максимальное значение в зоне концентратора уменьшается с увеличением количества элементов по высоте сечения (от 10,9 МПа для 1 элемента до 10,6 МПа для 10 элементов по сравнению с 11,1 МПа в пластинчатых элементах).

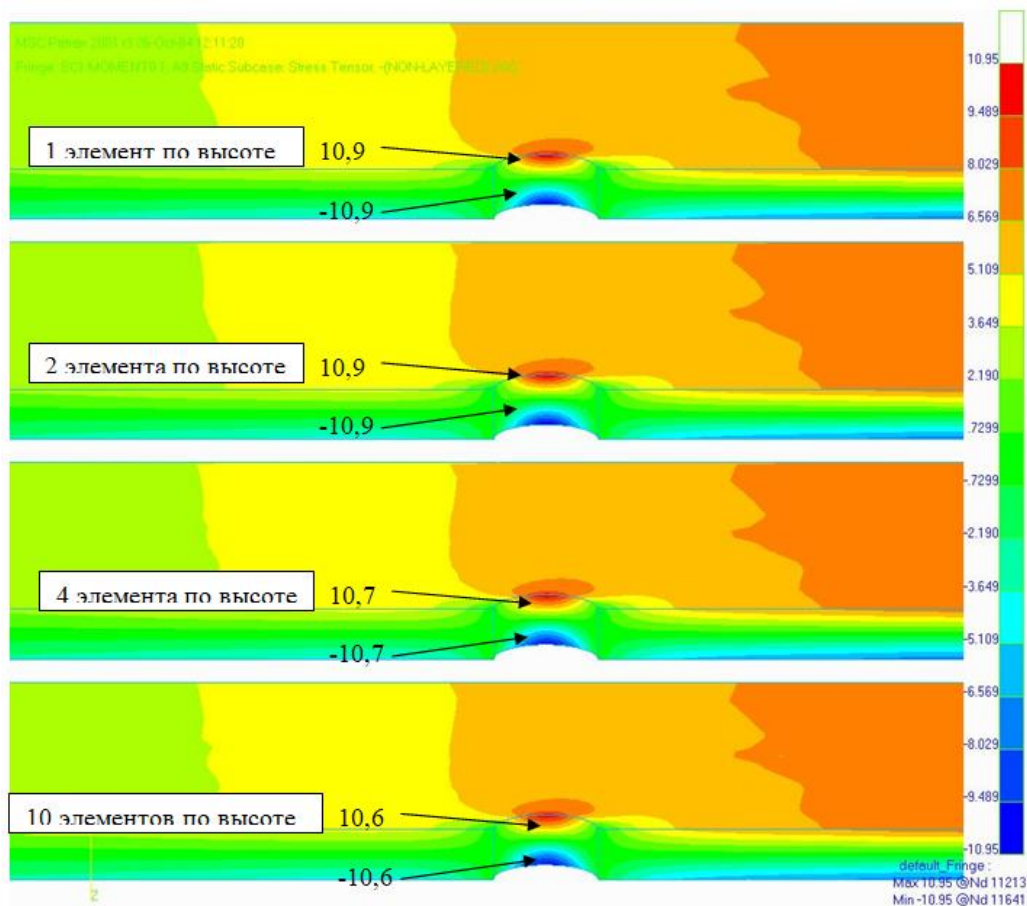


Рис. 7. Распределение осевых напряжений σ_x (МПа) в объемной модели при растяжении

Выводы:

1. Применение пакета расчетов МКЭ MSC\Nastran позволяет с достаточной точностью учитывать концентраторы в виде круглых отверстий в растягиваемой и изгибаемой пластине;
2. Использование в качестве расчетной модели плоских конечных элементов первого порядка вполне оправдано, несмотря на их малый линейный размер (в 8 раз меньше толщины);
3. Точность определения напряжений нелинейно зависит от количества элементов в рассматриваемой зоне. Так, 11...12 элементов на четверть окружности дают ошибку менее 1%, уменьшение до 6 элементов увеличивает ошибку до 5 %, 4 элемента дают погрешность 11%, а 2 элемента увеличивают ошибку до 30%.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ25.504-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. - М.: Изд-во стандартов, 1983.- 81 с.
2. Кожевников В.Ф. Концентрация и градиенты напряжений в растягиваемой полосе с отверстием/ Вестник машиностроения, 2002, №3, с. 46-48.;
3. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. - М: Мир, 1977.;
4. Сильверстов И. Н. Применение метода граничных элементов для определения относительных градиентов напряжения в элементах конструкции. «Вестник машиностроения» №4.2002, с. 50-52.;

5. Сухарев И. П., Кожевников В.Ф. Концентрация напряжений в зонах круговых и эллиптических отверстий в растягиваемой пластине. «Вестник машиностроения» №2.2001, с. 28-31.

ПОВЫШЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ УЧРЕЖДЕНИЙ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ЗА СЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЛУЖЕБНЫХ ГАДЖЕТОВ

¹ Дедович Д. К., ² Евдокименко М. Н., ² Микулик Т. Н., ² Николаенко В. Л.,
¹ Сечко Г. В.

¹ *Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники. Минск*

² *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Введение.

Сотрудники любого научного учреждения или учреждения образования в своей работе используют большой объем конфиденциальной информации и информации, составляющей коммерческую тайну. Эта информация обязательно интересует конкурентов учреждения, а ее утечка непосредственно влияет на производственную безопасность учреждения.

Производственная безопасность, под которой понимается комплекс мер, принимаемых учреждением или предприятием для обеспечения безопасного и непрерывного их функционирования и противодействующих возникающим угрозам любого характера, является составной частью экономической безопасности [1]. В свою очередь экономическая безопасность Республики Беларусь согласно статьи 4 «Концепции национальной безопасности Республики Беларусь» (Указ Президента Республики от 9 ноября 2010 г. N575 «Об утверждении Концепции национальной безопасности Республики Беларусь») – это состояние экономики, при котором гарантированно обеспечивается защищенность национальных интересов Республики Беларусь от внутренних и внешних угроз.

Основная часть.

Опасности и угрозы производственной безопасности научного учреждения или учреждения образования условно можно разделить на две группы – внутренние и внешние, а каждую группу в свою очередь на субъективные и объективные [1]. Одной из важнейших внутренних субъективных угроз производственной безопасности являются опасности: со стороны сотрудников. В частности, большинство сотрудников научного учреждения или учреждения образования используют во время работы личные гаджеты, к которым относятся: смартфоны, планшеты, ноутбуки и т. п. Эти гаджеты подключаются к сети предприятия, давая возможность злоумышленником проникнуть в эту сеть. Злоумышленник может установить на личный гаджет работника шпионскую программу, с помощью которой сможет получать доступ к служебной информации, хранящейся на гаджете сотрудника. Кроме того, сотрудник может зайти на вредоносные ресурсы в интернете. При заражении гаджета вирусом, сотрудник может утратить возможность использовать гаджет, что ведёт к потере производительности. Таким образом, использование личных гаджетов сотрудниками резко снижает производственную безопасность научного учреждения или учреждения образования.

Для устранения этого недостатка в докладе предлагается административно запретить сотрудникам во время работы использовать личные гаджеты. Вместо личных гаджетов сотрудника ему в часы его работы должен выдаваться служебный – учреждения, где ценят свою конфиденциальную и коммерческую информацию

экономически могут позволить себе затраты на это. Если средств на гаджеты для всего учреждения не хватает, гаджеты для своих сотрудников может закупить отдельное структурное подразделение учреждения, например, научно-исследовательская лаборатория с высоким доходом от реализации своих разработок. Именно в гаджетах сотрудников такой лаборатории содержится самый большой объем конфиденциальной информации и информации, составляющей коммерческую и служебную тайну, которая интересует конкурентов.

Наиболее состоятельные учреждения разных стран уже выдают своим сотрудникам служебные гаджеты. На рис. 1 приведено фото, на котором полицейские Нью-Йорка бесплатно получают в феврале 2018 года новые смартфоны модели iPhone 7 и iPhone 7 Plus [2].



Рис. 1. Фото: полицейские Нью-Йорка получают новые смартфоны

В [3] сообщается также, что в 2017 году было куплено 15000 гаджетов для «Почты России».

При использовании служебного гаджета на отдел информационной безопасности учреждения совместно с отделом администрирования сети возлагается обязанность централизованной защиты служебных гаджетов сотрудников. Во-первых, служебным гаджетам технически запрещён доступ к вредоносным сайтам. Во-вторых, атаки злоумышленников на служебные гаджеты с целью проникновения в сеть предприятия отражаются централизованно.

Для решения поставленных целей в [4] реализован функционал по ограничению доступа к файлам приложений не входящих в список разрешённых. Запрещён доступ для работы с браузерами по умолчанию. Вместо них можно использовать браузер, который встроен в приложение. Качество приложения оценивается проведением тестирования и корректности работы всех модулей.

К документам входного заполнения относятся параметры, добавляемые администратором в список разрешённых ресурсов для пользователя, а также ограничение работы с приложениями и их доступом к сети интернет.

В базе данных хранятся данные посещённых, пользователем ресурсов с отражением даты и временем их посещения. В это же базе хранятся учётные данные администратора, логин и пароль. Для разработки программного средства использована среда программирования Android Studio.

Все данные хранятся в базе данных. Несколько процессов или потоков могут одновременно без каких-либо проблем читать данные из одной базы. Запись в базу можно осуществить только в том случае, если никаких других запросов в данный момент не обслуживается; в противном случае попытка записи оканчивается неудачей, и в программу возвращается код ошибки. Другим вариантом развития событий является автоматическое повторение

Для работы программного средства требуется гаджет с операционной системой Android версии 4.4 и выше. В системе должны быть получены права суперпользователя ROOT, которые предоставляют доступ к необходимым для работы приложения функциям системы.

Для комфортной работы с приложением диагональ экрана гаджета должна составлять не менее 3,5 дюймов и разрешение экрана не менее 480x800 пикселей. Рекомендуемой конфигурацией является размер экрана 5-5,2 дюйма, разрешение экрана 720x1280 пикселей и версия операционной системы Android 5.1.1.

Контекстная диаграмма программного средства показана на рис. 2.

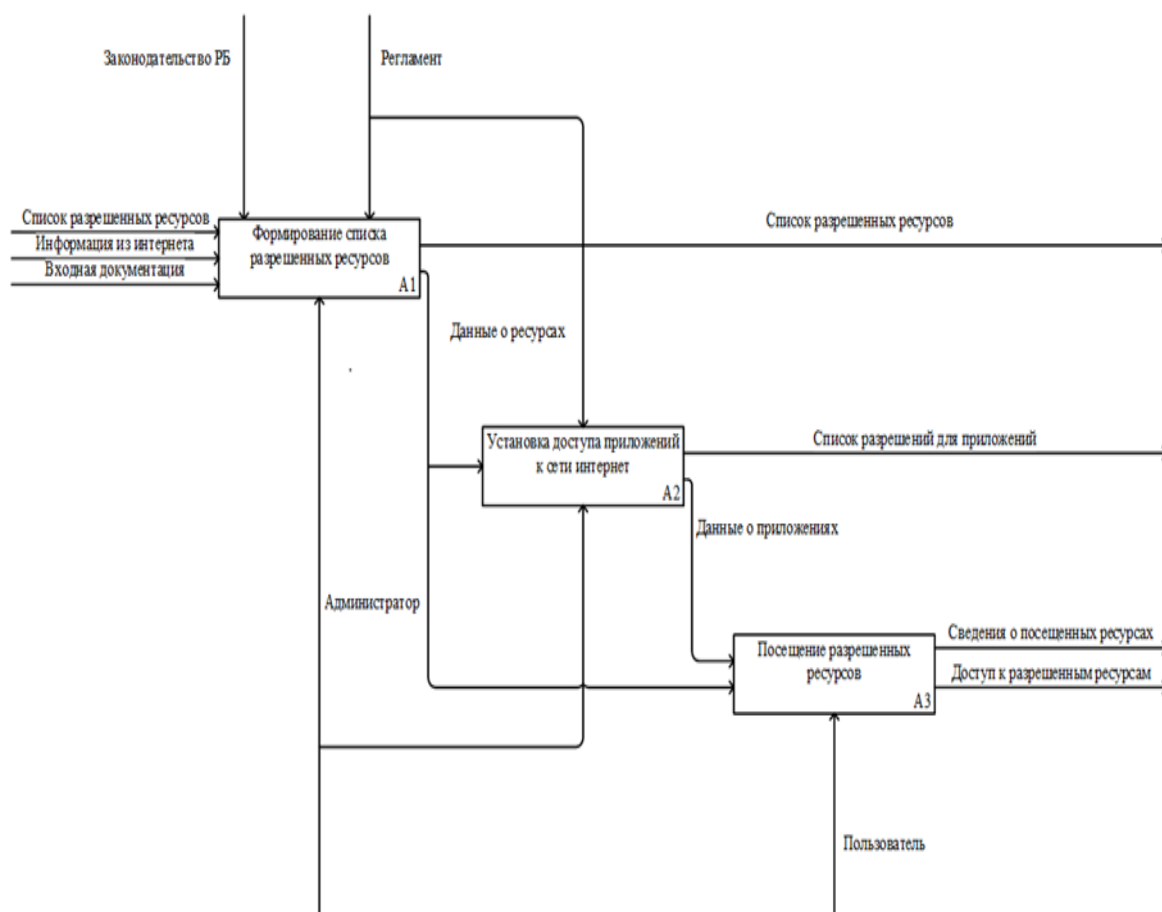


Рис. 2. Контекстная диаграмма программного средства

Алгоритм ухода с запрещенного ресурса, например, представлен в виде схемы алгоритма, изображенной на рис. 3. В качестве демонстрации интерфейса на рис. 4 изображена панель для входа под учётной записью пользователя.

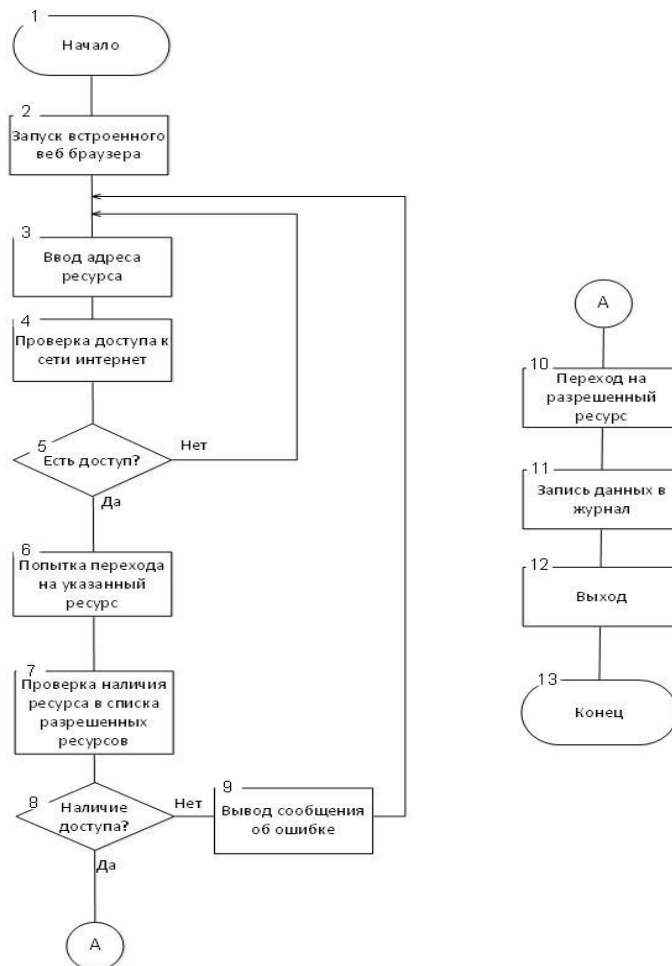


Рис. 3. Схема алгоритма ухода с запрещенного ресурса

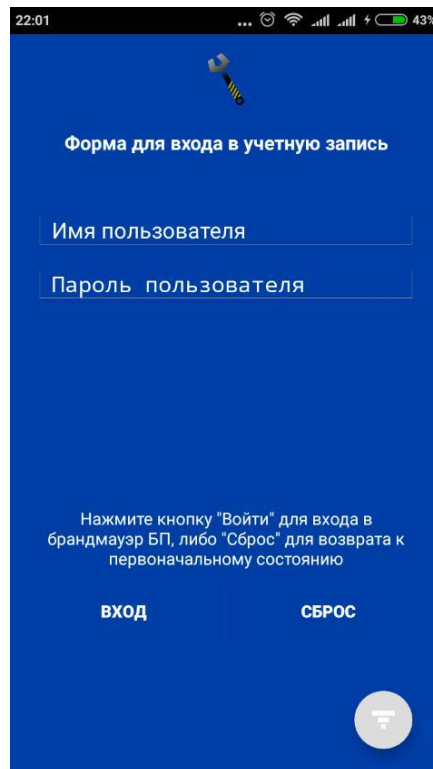


Рис. 4. Панель регистрации

Заключение.

Программное средство должно использоваться на любом предприятии, где есть необходимость ограничить доступ работников на сторонние сайты, с мобильных устройств, выданных предприятием для работы. Так же для увеличивается защищённость важной информации, за счёт контроля доступа к сети. Работники не смогут использовать трафик в личных целях, что положительно скажется на эффективности из работы.

Программное средство реализует следующие функции:

- ведение перечня ресурсов, разрешенных для посещения;
- добавление/удаление сайтов из списка разрешенных ресурсов;
- ведение списка установленных приложений и разрешений на доступ к сети;
- изменение прав приложениям на доступ к сети интернет;
- ведение журнал посещенных ресурсов и контроль за доступом к сайтам из списка разрешенных ресурсов;
- организация ограничения на доступ к настройкам и спискам ресурсов.

Практическая реализация программы, работающей на служебных гаджетах сотрудников, подтверждает возможность повышения производственной безопасности научного учреждения или учреждения образования за счёт использования служебных гаджетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Производственная безопасность предприятия как ... - КиберЛенинка [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/.../proizvodstvennaya-bezopasnost-predpriyatiya-kak-element-...> – Дата доступа: 16.12.2018.*
2. *Служебные смартфоны порой позволяют полицейским Нью-Йорка .. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ixbt.com/news/2018/02/08/sluzhebnyye-smartfony-poroj-pozvoljajut-policejskim-njujorka-okazatsja-na-meste-prestuplenija-do-poluchenija-vyzova.html>. – Дата доступа: 16.12.2018.*
3. *Федеральные чиновники будут пользоваться смартфоном на российской ОС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/post/412181/>. – Дата доступа: 16.12.2018.*
4. *Дедович, Д. К. Программное средство для делегирования доступа к веб-ресурсам на платформе ANDROID / Д. К. Дедович // 54-я науч. конф. аспирантов, магистрантов и студентов учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»: материалы конференции по направлению 8: Информационные системы и технологии (Минск, 21 апреля 2018 года). – Минск: БГУИР, 2018. – 115 с. – С. 39-40.*

КРИТЕРИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ СТАЛИ 45 ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

м.т.н. ¹ Лис И.Н.

¹ Лидский колледж УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», Лида

Долговечность образцов, работающих в условиях циклического нагружения при наибольшей амплитуде изгибающих напряжений σ_{\max} , принято оценивать количеством циклов N до предельного состояния. Для этого проводят длительные усталостные испытания. Для ускорения испытаний повышают частоту нагружения. Однако, долговечность образцов, испытанных при разных частотах нагружения f , может отличаться на 1-3 порядка [1]. Значит циклы нагружения при разных частотах оказывают различное повреждающее воздействие. Сопоставление долговечностей при статическом и циклическом нагружениях и вовсе считается сложной задачей.

В данной работе рассматривается новый подход к оценке долговечности с применением критерия предельного состояния при статическом и циклическом нагружении. В качестве критерия предельного состояния предлагается использовать площадь A (размерность МПа·с) под кривой функции напряжений от времени $\sigma(t)$ (рис.1), которая имеет смысл затраченной на повреждение или разрушение механической энергии.

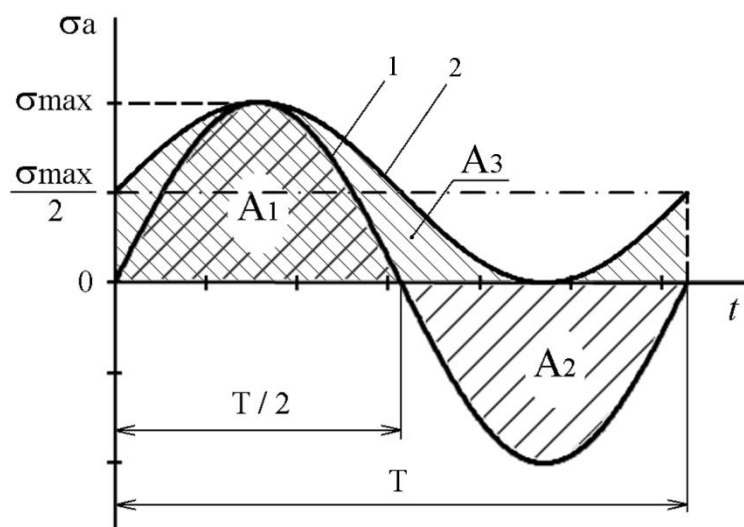


Рис. 1. Формы симметричного 1 и отнулевого 2 циклов нагружения в координатах «напряжение σ – время t »

Предварительный анализ площадей на рисунке 1 позволяет объяснить общеизвестный факт – симметричный цикл нагружения является более опасным, чем, например, отнулевой при одинаковом значении наибольшей амплитуды изгибающих напряжений σ_{\max} . Площадь $(A_1 + A_2)$ на 27% больше, чем площадь A_3 .

Увеличение частоты симметричного цикла в n раз сопровождается уменьшением в n раз площади под кривой напряжения. Известно [1-3], что образцы, испытанные при большей частоте нагружения, имеют больший (в количестве циклов) ресурс.

Площадь полуволны $A_1 = A_2$, МПа·с, (см. рис. 1) для симметричного цикла нагружения с периодом одного цикла $T = 1 / f$ определяли из выражения:

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{2 \cdot f}} \sigma_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \frac{\sigma_{max}}{\pi \cdot f}. \quad (1)$$

Тогда площадь за цикл нагружения:

$$A_1 + A_2 = \frac{2 \cdot \sigma_{max}}{\pi \cdot f}. \quad (2)$$

Умножив (2) на число циклов N до разрушения, получим общую площадь:

$$A = \frac{2 \cdot \sigma_{max}}{\pi \cdot f} \cdot N. \quad (3)$$

Наработку (время до разрушения) t , с, определяли по формуле:

$$t = \frac{N}{f}. \quad (4)$$

Таблица 1 – Сведения об образцах из Стали 45

Номер точек на рис. 2	Термообработка	Схема нагружения	Примечание	Источник данных
1	сведения отсутствуют	высокоскоростное растяжение на вертикальном копре	диаметр рабочей части образца 4мм, длина 10мм	[4]
2	закалка 850°C в воду, отпуск при 650°C	растяжение	стандартный образец с диаметром 8мм, длиной 40мм	[3]
3	нормализация 840-860°C, 30мин	симметричное растяжение-сжатие	диаметр рабочей части образца 5мм, длина 15мм	[5]
4	нормализация 840-860°C, 30мин	симметричное растяжение-сжатие	диаметр рабочей части образца 5мм, длина 15мм	[6]
5	сведения отсутствуют	консольный изгиб с вращением	диаметр рабочей части образца 10мм	ЛИИ
6	закалка 850°C в воду, отпуск при 650°C	симметричное растяжение-сжатие	полированные образцы, диаметр рабочей части 7мм, температура охлаждающей воды 8°C	[3]

Исходные данные для расчетов взяты из результатов испытаний в Лаборатории износоусталостных испытаний ЛИИ (ПО «Гомсельмаш») и литературных источников (см. таблицу 1). В таблице представлены образцы Стали 45, испытанные при статическом (при разной скорости) и циклическом (при разной частоте) нагружении.

Результаты расчетов площади A по формуле 3 в зависимости от наработки t по формуле 4 для образцов, испытанных на усталость (№3-6 в таблице 1), в двойных логарифмических координатах показаны на рисунке 2.

Площадь под кривой напряжений при статическом нагружении рассчитывали следующим образом.

Начальная длина стандартного образца с диаметром рабочей части 8мм составляет $l_0 = 40$ мм. Относительное удлинение $\delta = 25,1\%$ [3]. Значит образец удлинился на 10мм. При скорости нагружения 0,01 мм/с этот процесс занял около 1000 с. Время увеличения нагрузки до предела текучести (482 МПа) составило около 10 с, что составляет 1% от времени до разрушения, поэтому этой величиной можно пренебречь. Определили площадь трапеции с первой точкой в начале координат, вторая с координатой (0; 482), третья – (1000; 754) (от предела текучести до предела прочности провели прямую линию), четвертая – (1000; 0). Получили точку 2 на рисунке 2. Точка достаточно далеко отстоит от скопления точек 3-6, что можно связать с недостаточной точностью расчета площади под кривой статического нагружения.

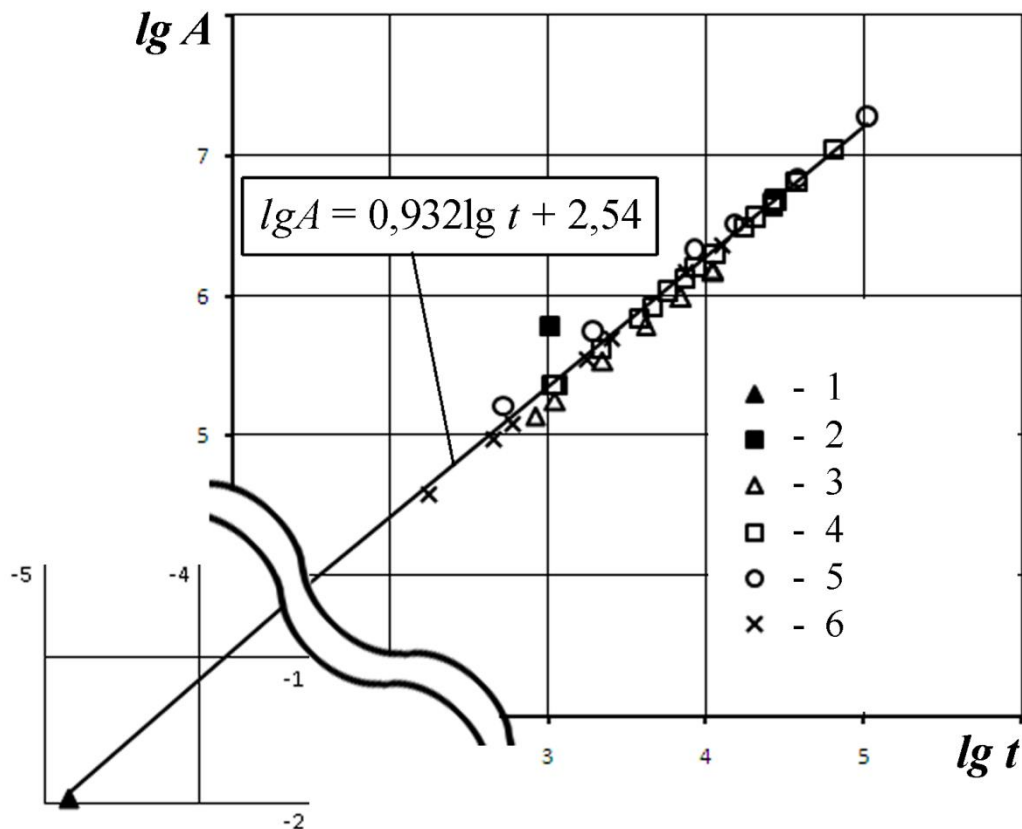


Рис. 2. Нарботка (время до разрушения) t , с, образцов из Стали 45 в зависимости от площади под кривой нагружения A , МПа·с:
статическое нагружение со скоростью: 1 – 300м/с; 2 – 0,01мм/с; циклическое нагружение с частотой: 3 – 36Гц; 4 – 36Гц; 5 – 50Гц; 6 – 20 000Гц

Для образца, растяжение которого происходило на вертикальном копре [4] со скоростью 300 м/с, время до разрушения определяли аналогично ($t = 14,3 \cdot 10^{-6}$ с). Линию изменения нагрузки приняли горизонтальной прямой с ординатой, равной пределу прочности 750 МПа. Получили точку 1 на рисунке 2.

Полученная зависимость (прямая на рисунке 2) в общем виде может быть описана уравнением:

$$\lg A = a \cdot \lg t + b, \quad (5)$$

где $a = 0,932$, $b = 2,54$ – постоянные.

Площадь A может быть определена по формуле:

$$A = \sigma_{\text{ред}} \cdot t, \quad (6)$$

где $\sigma_{\text{сп}}$ – среднее напряжение, МПа.

Подставим (6) в (5) и выразим наработку t до предельного состояния:

$$t = \left[\frac{10^b}{\sigma_{\bar{n}0}} \right]^{1-a}. \quad (7)$$

Уравнение (7) качественно согласуется с положением кинетической теории прочности [7] – чем меньше величина приложенной нагрузки, тем больше времени потребуется до разрушения. Если среднее напряжение σ_{cp} стремится к нулю, то время до разрушения стремится к бесконечности.

Для симметричного цикла нагружения можно найти число циклов N до разрушения, учитывая (3), (4), (6), (7), получим:

$$N = f \cdot \left[\frac{\pi \cdot 10^b}{2 \cdot \sigma_{max}} \right]^{1-a}. \quad (8)$$

Выражая из (8) значение наибольшей амплитуды изгибающих напряжений σ_{max} и подставляя вместо N значение базы испытаний при частоте нагружения f получим значение предела выносливости:

$$\sigma_{-1} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^b \cdot \left[\frac{N}{f} \right]^{(a-1)}. \quad (9)$$

Например, для базы испытаний $N = 10^7$ циклов при частоте нагружения $f = 50$ Гц находим предел выносливости $\sigma_{-1} = 237$ МПа (210...275 МПа в условиях экспериментов [5, 6] и результатов ЛИИ ПО «Гомсельмаш»). Для базы испытаний $N = 10^9$ циклов при частоте нагружения $f = 20\,000$ Гц – $\sigma_{-1} = 261$ МПа (285 МПа в условиях эксперимента [3]). Расчетные значения по формуле (9) получаются в запас прочности.

Наличие зависимости (5) для анализируемых данных дает право предположить, что специально поставленный эксперимент на статическое растяжение с измерением напряжения и времени до разрушения, позволит получить сведения о пределе выносливости материала без проведения длительных усталостных испытаний. Необходимо получить как минимум три точки на графике (как на рис.2) при разных скоростях нагружения, предположительно отличающихся друг от друга на порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Троценко, В.Т. *Сопротивление усталости металлов и сплавов : справочник : в 2 ч.* / В.Т. Троценко, Л.А. Сосновский ; АН УССР, Ин-т пробл. прочности. – Киев : Наук. думка. – Ч. 1. – 1987. – 503 с.
2. Фридман, Я.Б. *Механические свойства металлов : в 2 ч. – 3-е изд., перераб. и доп.* – Москва : Машиностроение, 1974. – Ч. 2 : Механические испытания : Конструкционная прочность. – 367 с.
3. Афонин, А.И. *К вопросу о влиянии частоты нагружения на усталостную прочность металлов* / А.И. Афонин, В.А. Кузьменко, А.Д. Шевчук // Проблемы прочности. – 1972. – № 4. – С. 62–74.
4. Степанов, Г.В. *Упруго-пластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок* / Г.В. Степанов. – Киев : Наук.думка, 1979. – 268 с.
5. Троценко, В.Т. *Закономерности накопления усталостного повреждения в сталях 45 и IX13 в условиях программного изменения нагрузки* / В.Т. Троценко, Ю.И. Коваль // Проблемы прочности. – 1973. – № 12. – С. 9–15.
6. Троценко, В.Т. *Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении* / В.Т. Троценко. – Киев : Наук. думка, 1981. – 343 с.
7. Регель, В.Р. *Кинетическая природа прочности твердых тел : монография* / В.Р. Регель, А.И. Слуцкер, Э.Е. Томашевский. – М. : Наука, 1974. – 560 с.

ОСОБЕННОСТИ ТАРИРОВКИ ПЕРСОНАЛЬНОГО ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

¹ Дембовский И.Н., ¹ Богданович А.В.

¹ Белорусский государственный университет, Минск

Три десятилетия назад была выделена группа механических систем, в элементах которых при эксплуатации имеют место процессы трения и изнашивания и которые при этом воспринимают и транзитно передают циклическую повторно-переменную объемную нагрузку. Это так называемые трибофатические системы, которые, как правило, являются наиболее массовыми и ответственными в современных машинах [1 – 3]. Для оценки работоспособности таких систем создан новый класс оборудования – машины для комплексных износоусталостных испытаний [4 – 7].

В рамках задания ГНТП «Эталоны и научные приборы» БГУ объединил свои усилия с ООО «НПО «ТРИБОФАТИКА» и ГНУ «ОИМ НАН Беларуси» с целью разработки и внедрения в учебный процесс университетов так называемого персонального испытательного центра (ПИЦ) для износоусталостных испытаний.

ПИЦ предназначен для автоматизированных испытаний образцов материалов (черных, цветных металлов и сплавов, полимерных, композиционных материалов), унифицированных моделей пар трения и трибофатических систем при главном вращательном движении на:

- механическую усталость,
- трение скольжения (фрикционную усталость),
- трение качения (контактную усталость),
- фрикционно-механическую усталость (трение скольжения + механическая усталость),
- контактно-механическую усталость (трение качения + механическая усталость),

в комплекте с информационно-управляющей системой и программным обеспечением на базе персонального компьютера для управления процессами испытаний, прецизионного измерения основных параметров и характеристик, обработки и представления опытных данных с целью использования их для расчета и проектирования типичных деталей машин, механизмов, оборудования и приборов на прочность, усталость, износостойкость, трещиностойкость и долговечность (ресурс). Отметим, что в разработанном оборудовании нашли отражение ряд оригинальных методов износоусталостных испытаний, реализовано около десятка патентов на такие методы [4, 8 – 10].

Основные технические характеристики ПИЦ приведены в таблице 1. Главные особенности ПИЦ – существенное уменьшение габаритных размеров, массы и потребляемой мощности, что, несомненно, отразится на рыночной стоимости и сделает его привлекательным для учреждений образования и соответствующего тиражирования.

Тарировка измерительных каналов информационно-управляющей системы ПИЦ позволяет привести в соответствие напряжение, полученное в канале, и измеряемую физическую величину. При этом рассчитываются и хранятся в базе данных необходимые коэффициенты пересчета.

При проведении тарировки на конкретный датчик или первичный преобразователь оказывается воздействие, величина которого определяется стандартными измерительными приборами. Затем сличаются результаты определения

величины воздействия, полученные при ее измерении стандартным измерительным прибором и автоматизированной системой управления испытательной центра. Перечень приборов, используемых при тарировке, приведен в таблице 2.

Таблица 1 – Основные технические характеристики ПИЦ

№ п/п	Наименование параметра	Значение параметра
1.	Диаметр рабочей части образца (вала), мм	6
2.	Габаритные размеры контрообразца ролика (диаметр), мм	60
3.	Основные пара трения	цилиндр - ролик
4.	Частота вращения образца, мин ⁻¹	3000
5.	Допускаемая погрешность поддержания частоты вращения образца (контрообразца) в установившемся режиме, %	±1,5
6.	Абсолютная погрешность фиксации наработки (число оборотов вала образца, число циклов нагружения) до момента достижения предельного состояния, оборот	±1
7.	Способ задания контактной и изгибающей нагрузок	программно - регулируемый
8.	Диапазон задания контактных нагрузок, Н (МПа)	5...700 (500...6000)
9.	Диапазон задания изгибающих нагрузок, Н (МПа)	5...700 (15...2000)
10.	Допускаемая погрешность поддержания контактной и изгибающей нагрузок в установившемся режиме, %	±1
11.	Диапазон измерения момента трения, Н·м	0,2...10
12.	Допускаемая погрешность измерения момента трения, в установившемся режиме, %	±1
13.	Диапазон измерения суммарного износа (сближения осей) образца и контрообразца, мкм	5...3000
14.	Допускаемая погрешность измерения суммарного износа (сближения осей) образца и контрообразца, мкм	±15 в диапазоне 0...500; ±30 в диапазоне 500...300
15.	Диапазон измерения вибрации уровень, дБ	50...150
16.	Допускаемая погрешность измерения вибрации, %	±1
17.	Диапазон измерения температуры в зоне контакта или в произвольной области образца (контрообразца), °С	10-1000
18.	Допускаемая погрешность измерения температуры, %	±3
19.	Количество точек замера контактной и изгибающей нагрузок, суммарного износа (сближения осей), вибрации, температуры за 1 оборот образца	8; 12; 16
20.	Установленная мощность электрооборудования, кВт, не более	1
21.	Информационно-управляющая система сбора и обработки данных	автономная на базе ПЭВМ
22.	Число каналов управления (включая резервные)	8
23.	Число измерительных каналов (включая резервные)	до 16
24.	Экранный интерфейс пользователя	диалоговый графический

Проверка диапазона задания частоты вращения образца и определение погрешности системы задания частоты вращения производится при помощи цифрового тахометра TESTO 470 или аналога. Измерение частоты вращения необходимо произ-

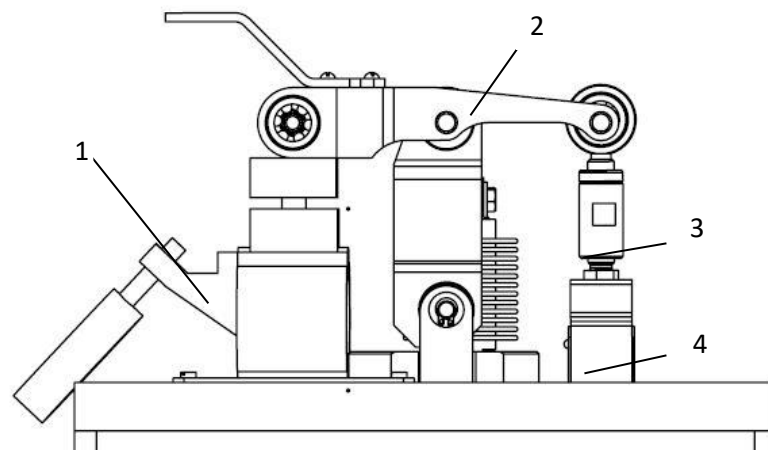
водить не менее четырех раз. Погрешность системы задания частоты вращения определяется по формуле:

$$\delta = [(\omega_3 - \omega_{\text{изм}})/\omega_3] \cdot 100\% , \quad (1)$$

где δ – погрешность в %; ω_3 – заданная частота вращения; $\omega_{\text{изм}}$ – частота вращения, измеренная тахометром.

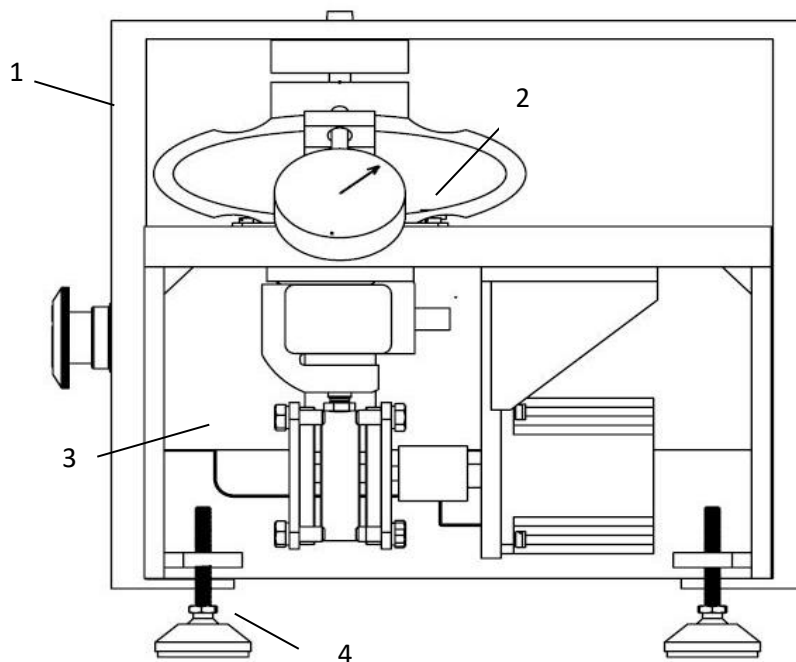
Погрешность при каждом измерении во всем диапазоне не должна превышать $\pm 2\%$.

Тарировка каналов механизмов контактной нагрузки и изгибающей нагрузки с датчиком силы С2А тензометрическим и проверка погрешности этих механизмов проводится с помощью образцового динамометра ДОСМ-3-1. Установка приспособления и динамометра при тарировке механизма контактной нагрузки показана на рисунке 1, а при тарировке изгибающей нагрузки – на рисунке 2.



1- динамометр образцовый; 2- рычаг механизма контактной нагрузки; 3- стяжка; 4- датчик силы

Рис. 1. Схема приспособления для тарировки системы измерения контактных нагрузок



1- кронштейн; 2- динамометр образцовый; 3- датчик силы; 4- привод механизма изгибающих нагрузок

Рис. 2. Схема приспособления для тарировки системы измерения изгибающих нагрузок

Величина нагрузки задается программой в ручном режиме управления (рисунок 3). Доводка нагрузки также может осуществляться вручную с помощью стяжки или упорного винта (см. рисунки 1, 2). Измерения проводят в точках 100; 300; 500; 600 Н динамометром ДОСМ-3-1.

Таблица 2 – Перечень приборов, используемых при тарировке ПИЦ

Наименование операции	Наименование прибора
Тарировка датчика контактной нагрузки.	Образцовый динамометр 3-го разряда ДОСМ-3-1 ГОСТ 9500-84.
Тарировка датчика изгибающей нагрузки.	Образцовый динамометр 3-го разряда ДОСМ-3-1 ГОСТ 9500-84.
Тарировка датчика силы трения.	Образцовый динамометр 3-го разряда ДОСМ-3-0,05 ГОСТ 9500-84.
Тарировка датчика перемещений (износа).	Индикатор 2-МИГ ГОСТ 9696-82, штатив ШМ-ПН-8, стойка С-Ш (ГОСТ 10197-70), концевые меры длины 2Н-1 (ГОСТ 9038-83)
Тарировка диапазона частоты вращения образца	Цифровой тахометр TESTO 470; предел измерений 1 - 99 999 об/мин, погрешность $\pm 0,02$ %.

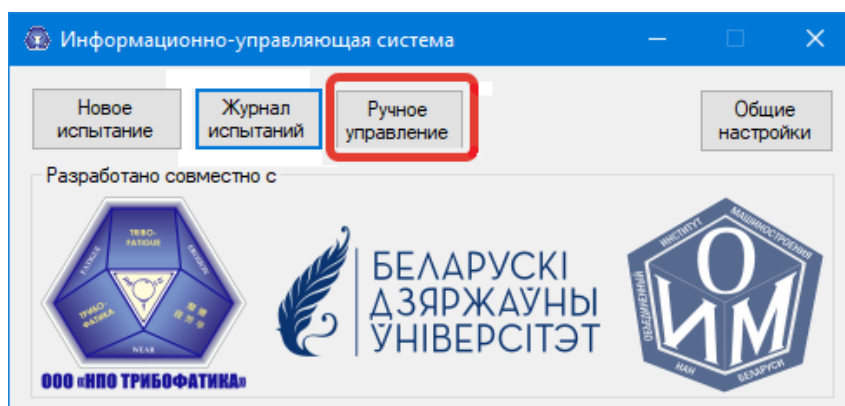


Рис. 3. Кнопка «Ручное управление» для открытия окна «Ручное управление» в главном окне программы

В программе переходим в режим тарировки (Меню «Ввод данных» -«Тарировка») и выбираем канал «Контактная нагрузка» или «Изгибающая нагрузка». С помощью кнопок управления механизмами нагрузок, также стяжки или упорного винта, добиваются, чтобы шарик динамометра касался соответствующего механизма нагрузки, при этом на шкале динамометра стрелка должна указывать на 0.

Измерение в каждой точке проводится не менее четырех раз, как при увеличении нагрузки, так и при разгрузке.

Погрешность определяется по формуле:

$$\delta = [(P_{ст} - P_{дин})/P_{пред}] \cdot 100\% , \quad (2)$$

где δ – погрешность в %; $P_{ст}$ – нагрузка, измеренная ПИЦ, Н; $P_{дин}$ – нагрузка, измеренная динамометром образцовым, Н; $P_{пред}$ – предельное значение диапазона измерений нагрузки для ПИЦ, Н.

Погрешность в каждой точке любого диапазона при каждом измерении не должна превышать $\pm 3\%$.

Тарировка канала измерения силы трения с датчиком силы NSX-A30kg тензометрическим и проверка погрешности системы измерения силы трения при качении (испытания на контактную и контактно-механическую усталость) и при скольжении (испытания на фрикционную и фрикционно-механическую усталость) проводится с помощью образцового динамометра ДОСМ-3-0,05.

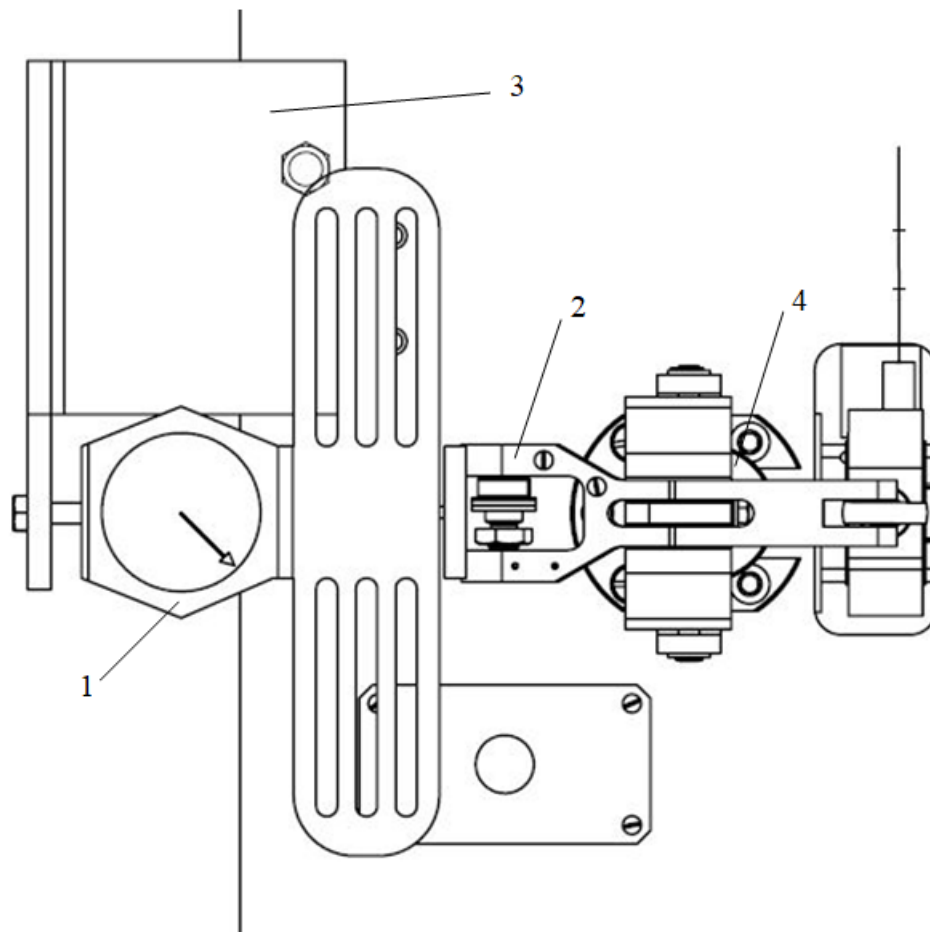
Величину силы, имитирующей трение, устанавливают с помощью

приспособления с винтом (рисунок 4), контролируя ее по образцовому динамометру ДОСМ-3-0,05.

Измерения проводят в точках 50; 100; 150; 250 Н с помощью датчика силы НSХ-А30kg, в каждой точке измерение проводят не менее четырех раз, как при увеличении нагрузки, так и при разгрузке. Погрешность определяют по формуле:

$$\delta = [(F_{ст} - F_{дин})/F_{пред}] \cdot 100\% , \quad (3)$$

где δ – погрешность в %; $F_{ст}$ – сила, измеренная датчиком ПИЦ, Н; $F_{дин}$ – сила, измеренная динамометром образцовым, Н; $F_{пред}$ – предельное значение диапазона измерений силы трения для ПИЦ, Н.



1- динамометр образцовый; 2- механизм контактных нагрузок; 3- кронштейн; 4- датчик силы измерителя силы трения

Рис. 4. Схема приспособления для тарировки системы измерения силы трения

Погрешность в каждой точке любого диапазона при каждом измерении не должна превышать $\pm 1\%$.

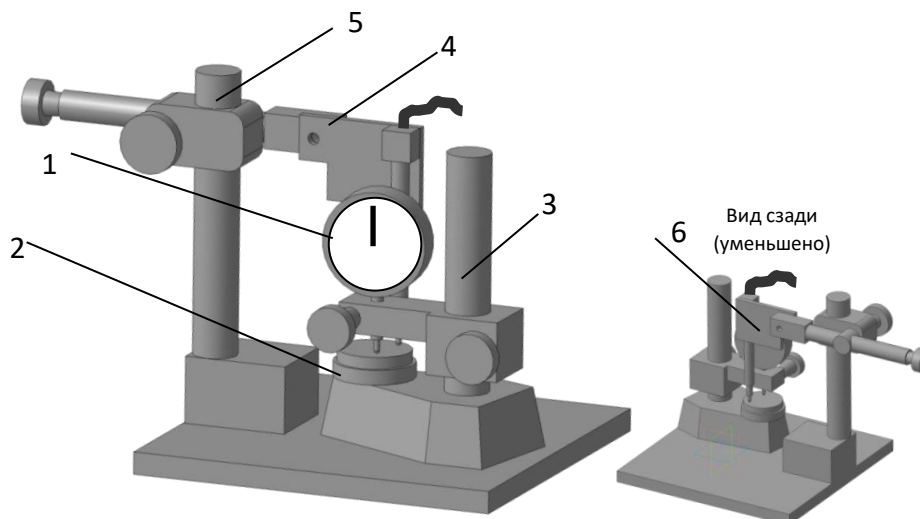
Тарировку и определение погрешности системы измерения перемещений с датчиком модели 1-WI/5MM-T производят при помощи индикатора 2-МИГ ГОСТ 9696-82, штатива ШМ-ПН-8, стойки С-Ш, плиты притирочной ГОСТ 10905-86, концевых мер длины 2Н-1 ГОСТ 9038-83 или аналогов. Установка приспособлений, индикаторных головок и штатива показана на рисунке 5. Значение показания индикаторной головки 1 устанавливают в «0». В ручном режиме управления выбирают канал измерения перемещений. Показания в графе «Значение» принимаются за «Ноль». Если в программе предусмотрено обнуление начальных показаний графы «Значение», то следует обнулить эти показания. Плавно вращая винт регулировки высоты

измерительного столика 2 стойки С-Ш 3 (см. рисунок 5), устанавливают показания индикаторной головки в контрольную точку. Результатом наблюдения считается величина, равная разности показания в графе «Значение» в контрольной точке и показания в графе «Значение», принятого за «Ноль».

Измерения проводят в точках 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 мм. Измерения в каждой точке проводят не менее четырех раз как при движении столика вверх, так и при движении вниз. Погрешность определяют по формуле:

$$\Delta = L_{ст} - L_{дин}, \quad (4)$$

где Δ – погрешность в мкм; $L_{ст}$ – показания перемещения, измеренного ПИЦ, мкм; $L_{дин}$ – значение перемещения по индикатору, мкм.



1-головка измерительная; 2- винт регулировки высоты измерительного столика; 3- стойка С-Ш; 4 – датчик модели 1-WI/5MM-T; 5- штатив; 6- кронштейн

Рис. 5. Схема приспособления для определения погрешности системы измерения перемещений

Погрешность при каждом измерении не должна превышать ± 20 мкм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л.А. *Механика износоусталостного повреждения* / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
2. *Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика)*. Науч. редактор Сосновский Л.А. / Л.А. Сосновский, В.Т. Троценко, Н.А. Махутов, Гао Ван-Чжэн, А.В. Богданович, С.С. Щербаков. – Гомель, Киев, Москва, Ухань, 2001. – 170 с.
3. Щербаков, С.С. *Механика трибофатических систем* / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2010. – 407 с.
4. Сосновский, Л.А. *Методы износоусталостных испытаний силовых систем и их моделей* / Л.А. Сосновский // *Трение и износ*. – 1993. - № 5. – С. 937 – 952.
5. Высоцкий, М.С. *Трибофатика – новые пути для повышения надежности машин* / М.С. Высоцкий, В.Н. Корешков, В.А. Марченко, Л.А. Сосновский, В.И. Стражев // *Весці АНБ. Серыя фіз.-тэхн. навук*. – 1994. - № 4. – С. 32 – 41.
6. *Трибофатика-95 : ежегодник* / под общ. ред. Л.А. Сосновского // Вып. 1 : *Машины серии СИ для износоусталостных испытаний* / под ред. М.С. Высоцкого / Ф.Ю. Белиц [и др.]. – Гомель : НПО «ТРИБОФАТИКА», 1996. – 80 с.

7. Трибофатика. Машины для износоусталостных испытаний. Общие технические требования (Стандарт Беларуси) : СТБ 1067–97. – Введ. 01.01.1998. – Мн. : ГОССТАНДАРТ, 1997. – 10 с.
8. *Methods and Main Results of Tribo-Fatigue Tests* / L.A. Sosnovskiy [et al.] // *International Journal of Fatigue*. – 2014. – V. 66. – P. 207–219.
9. Методы износоусталостных испытаний и их реализация на машине СИ / Н.А. Махутов [и др.] // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1995. – № 6. – С. 17–42.
10. Сосновский, Л.А. Экспериментальные основания трибофатика. Сообщения 1-3 / Л.А. Сосновский // Проблемы прочности. – 1997. – № 3. – С. 74–82. – № 4. – С. 17–29.

ОБЪЁМНАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ «ДИСК–АВТОМОБИЛЬНАЯ ШИНА–АСФАЛЬТОБЕТОН» ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СООТНОШЕНИЯХ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ДИСК И ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ШИНЕ

д.ф.-м.н. ¹ Щербаков С.С., асп. ¹ Грибовский Г.В.

¹ Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Сегодня для производителей автомобильных шин и автодорожных служб большое практическое значение имеют компьютерные модели, которые позволяют описать трёхмерное напряжённо-деформированное состояние (НДС) многоэлементной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» при оценке пространственной повреждаемости и износа как протектора шины, так и асфальтобетонного покрытия, работающих в условиях контактной, механической и фрикционной усталости. Много работ посвящено компьютерному или аналитическому моделированию НДС данной системы, однако большинство из них рассматривают отдельные элементы системы, не учитывая их взаимодействия во всей полноте [1–6]. Таким образом, проблема оценки одновременных контактных взаимодействий в многоэлементной системе «диск–автомобильная шина–асфальтобетон», ее трёхмерного НДС и состояния пространственной повреждаемости остаётся не полностью исследованной.

Основной задачей настоящей работы является определение объёмной повреждаемости в области контакта протектора шины и асфальтобетона на основании компьютерного конечно-элементного моделирования НДС [7] данной многоэлементной системы при различных комбинациях значений радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине.

Конечно-элементная модель системы и ее механические характеристики. Для моделирования была использована готовая геометрическая модель стального диска и грузовой шины с ромбовидным протектором радиусом 22,5 дюйма с учётом её основных конструктивных элементов [4,7] (рис. 1, табл. 1). Из модели были убраны зубья протектора, не входящие в контактное взаимодействие с асфальтобетоном, а также некоторые другие элементы, влияние которых на НДС в области контактного взаимодействия было незначительно. Асфальтобетонное покрытие было задано как прямоугольный параллелепипед размером 350x100x175 мм. Для сокращения времени расчетов и в силу симметрии модели была использована лишь ее четверть.

Таблица 1 – Механические характеристики элементов системы

Элементы системы	Модуль упругости E , Па	Коэффициент Пуассона ν	Плотность ρ , кг м ⁻³
1. Стальной диск	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
2. Бортовое кольцо	$2 \cdot 10^{11}$	0,3	7850
3. Резина	$8 \cdot 10^6$	0,49	1100
4. Резиновый протектор	$4 \cdot 10^6$	0,49	1100
5. Нейлоновый каркас	$9 \cdot 10^{10}$	0,3	1500
6. Стальной брекер	$1,7 \cdot 10^{11}$	0,3	1100
7. Асфальтобетон	$14,77 \cdot 10^8$	0,1	2510

В области контакта шины и асфальтобетона была задана более плотная конечно-элементная сетка для получения гладких распределений компонент НДС и дальнейшего определения объёмной повреждаемости. (рис. 1б).

Для более точной конечно-элементной оценки объёмной повреждаемости в зоне контакта шины и асфальтобетона, было проведено субмоделирование рассматриваемой области. Оно проводилось посредством переноса перемещений, полученных из расчета полной модели системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон», на грани субмоделируемой области (рис. 1в), и последующего решения дополнительной граничной задачи для данной области [8].

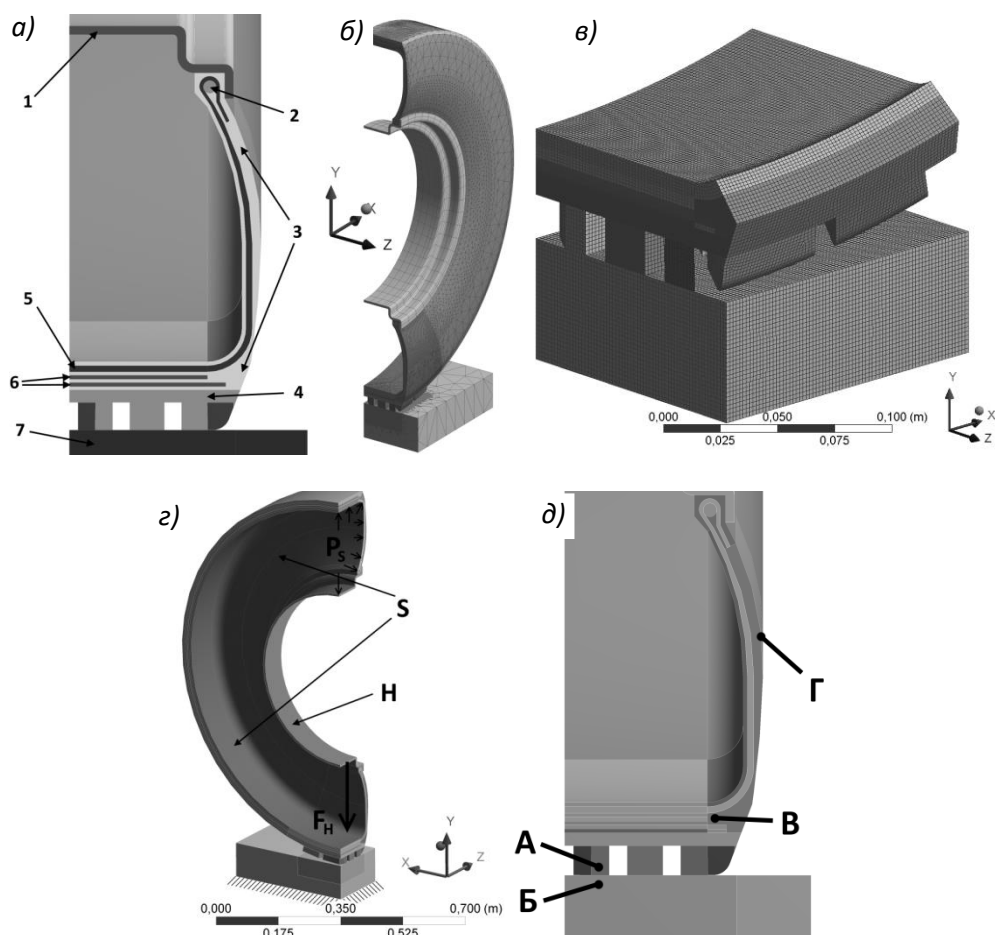


Рис. 1. Схематичное обозначение материалов (а), конечно-элементное разбиение всей модели (б) и в области субмоделирования (в), схема нагружения (з), рассматриваемые области для анализа повреждаемости (в): А – резиновый протектор, Б – асфальтобетон, В – резина пол нейлоновым каркасом, Г – резиновая бортовая часть шины

Граничные условия.

В системе были заданы следующие нагрузки и граничные условия [7,8]:

- внутреннее давление P_S (см. рис. 1в) в шине на поверхности S , которое изменялось от 6 до 10 кН с шагом в 1 кН;
- радиальная нагрузка F_H (см. рис. 1в и табл. 2) была направлена вдоль Oy , приложена к поверхности H и изменялась от 0,65 до 0,85 МПа с шагом в 0,5 МПа;
- основание асфальтобетонного покрытия было жестко зафиксировано во всех направлениях;
- на поверхностях взаимодействия элементов шины были заданы условия сцепления;

- на поверхностях контакта протектора шины и асфальтобетона были заданы условия контактного взаимодействия с трением по областям проскальзывания и сцепления (коэффициент трения шина–асфальтобетон был равен 0,6).

В итоге было рассмотрено 25 различных вариаций нагрузок, для которых были рассчитаны трёхмерные распределения компонент НДС и объёмная повреждаемость в области контакта шины и асфальтобетона, а также бортовой части шины.

Анализ объёмной повреждаемости. Расчёт интегральных показателей повреждаемости основан на использовании модели деформированного твёрдого тела с опасным объёмом. В соответствии с данной моделью, опасным объёмом является пространственная область нагруженного тела, в которой действующие напряжения превышают предельные [9]:

$$\Psi_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}} / \sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})}, \quad (1)$$

$$V_{\text{int}} = \{ \Psi_{\text{int}} \geq 1, dV \subset V_k \} \quad (2)$$

где σ_{int} – интенсивность напряжений, V_k – рабочий объём.

В работе рассматриваются опасные объёмы в области контакта шины и асфальтобетона, которые работают в условиях фрикционной усталости. Предел допускаемых напряжений $\sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})}$ для условий фрикционной усталости в зоне контакта был принят равным 0,5 МПа, а для остальных резиновых частей системы – 1 МПа.

Формулы для расчета опасных объемов и их интегральной повреждаемости имеют следующий вид [6]:

$$V_{\text{int}} = \iiint_{\Psi_{\text{int}}(V) \geq 1} dV, \quad (3)$$

$$\Psi_{\text{int}} = \iiint_{\Psi_{\text{int}}(V) \geq 1} \Psi_{\text{int}}(V) dV. \quad (4)$$

В предыдущей работе [7] было рассмотрено НДС системы в четырёх её характерных точках, где образуются наибольшие напряжения (рис. 3в):

- А) в протекторе шины в области контакта;
- Б) в асфальтобетонном покрытии в зоне контакта;
- В) в резине под нейлоновым каркасом в области контакта;
- Г) в бортовой внешней части шины.

В данной работе дальнейший анализ повреждаемости системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» также будет осуществляться по этим четырем характерным областям.

Протектор шины. Как видно из рисунка 2а, опасные объёмы образовывались непосредственно в областях наибольшего контактного давления при взаимодействии шины с асфальтобетоном. Шкала под рисунками описывает уровень локальной повреждаемости (1) в опасном объеме (3), т.е. во сколько раз действующие в конечном элементе напряжения превышают предельные, равные 0,5 МПа.

В протекторе шины, с изменением радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН, опасные объёмы увеличиваются в 2,7–3 раза, а повреждаемость в 3,3–3,6 раза. Зависимость опасных объемов от радиальной нагрузки имеет характер близкий к линейному, несмотря на зубчатый вид протектора (рис. 3а). Это может быть обусловлено тем, что модель поведения материалов является упругой и изотропной.

Выбранный диапазон рассматриваемых внутренних давлений в шине практически не влияет на изменения опасных объемов и повреждаемости в резиновом протекторе. В основном, при увеличении внутреннего давления с 0,65 до 0,85 МПа опасные объёмы и повреждаемость увеличиваются на 1–3%, и только при радиальной нагрузке на диск $F_H = 6$ кН рассматриваемые характеристики увеличиваются на 10–12%.

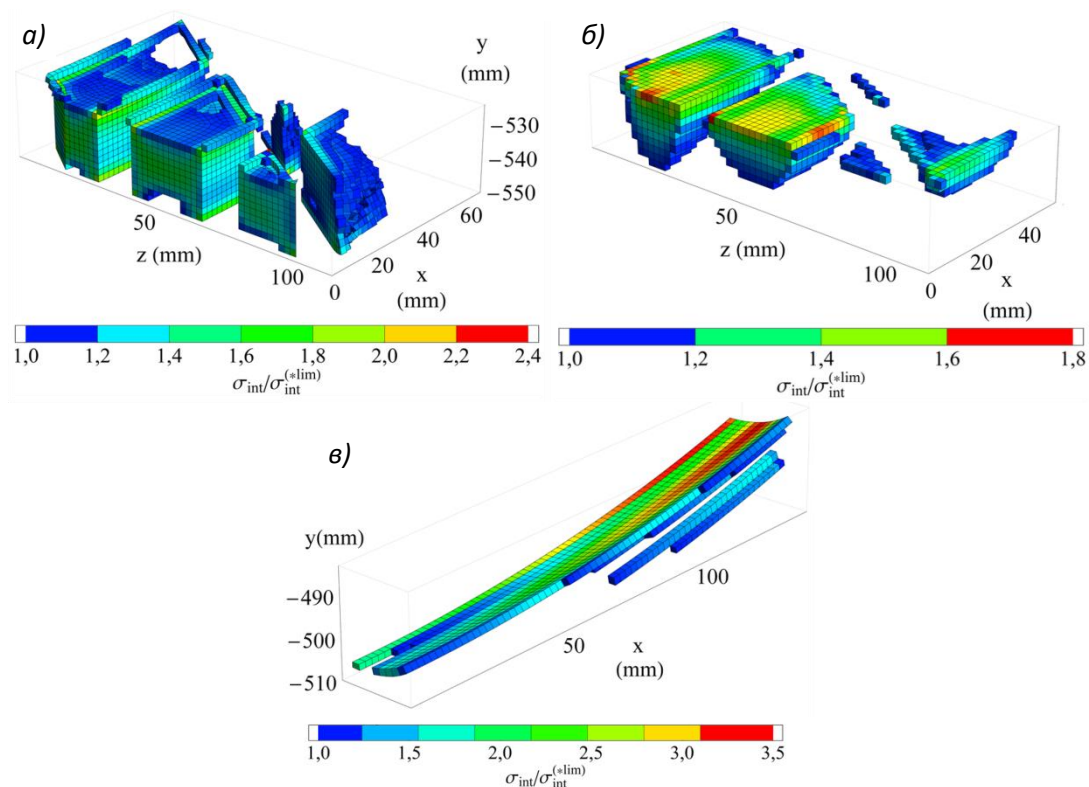


Рис. 2. Опасный объём по интенсивности напряжений V_{int} в протекторе шины (а), в асфальтобетоне (б) и в резине под нейлоновым каркасом (в) при $P_S = 0,85$ МПа и $F_H = 10$ кН

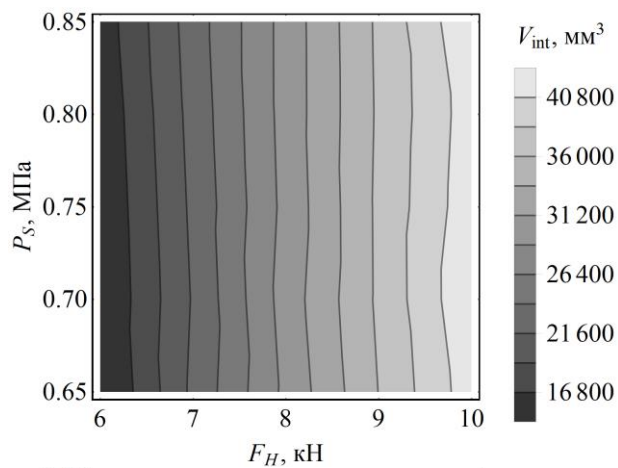
Асфальтобетон. Как и в протекторе шины опасные объёмы в асфальтобетоне концентрируются в области наибольшего контактного давления (рис. 2б).

С изменением радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН опасные объёмы и повреждаемость в асфальтобетоне увеличиваются нелинейно в 6–7,5 раз и в 6,6–8,2 раза соответственно (рис. 3б). Это может быть связано с тем, что контактное давление в асфальтобетоне концентрируется в малой области контактного взаимодействия с шиной, т.е. в зубцах протектора, через которые передаётся влияние радиальной нагрузки на диск.

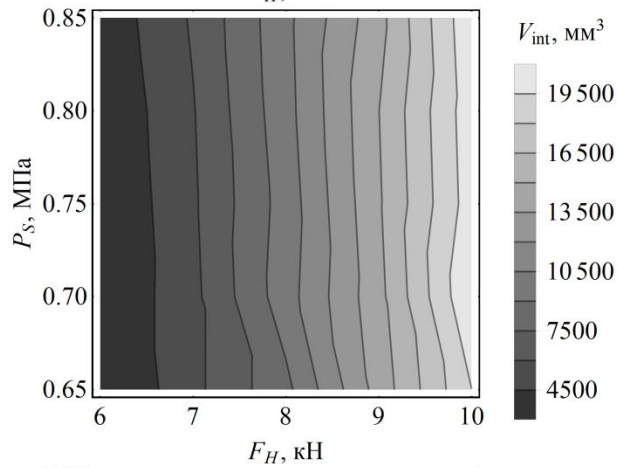
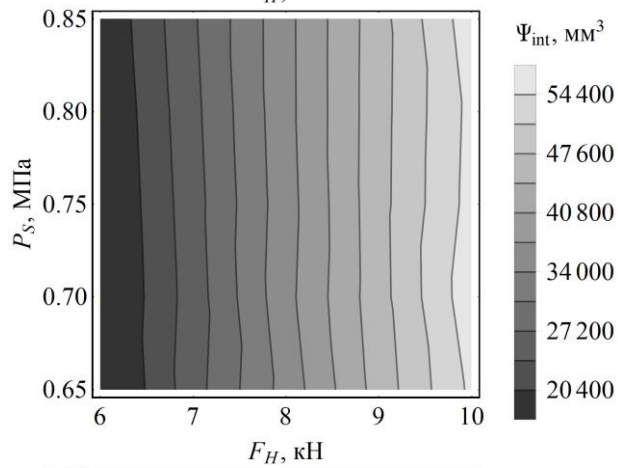
Опасные объёмы и повреждаемость в асфальтобетоне, при изменении внутреннего давления с 0,65 до 0,85 МПа изменяются на 3–30% в зависимости от значения радиальной нагрузки на диск. Наименьшие изменения наблюдаются при $F_H = 9$ кН, а максимальные при $F_H = 6$ кН.

Как видно из рисунков 3а и 3б, опасные объёмы и повреждаемость в резине протектора примерно в 2,5 раза больше чем в асфальтобетоне. Большая повреждаемость резины протектора, по сравнению с асфальтобетоном, в области контакта обусловлена тем, что жёсткость асфальта гораздо выше жёсткости резины. Кроме того, повреждаемость асфальтобетона концентрируется лишь в малой области контактного взаимодействия.

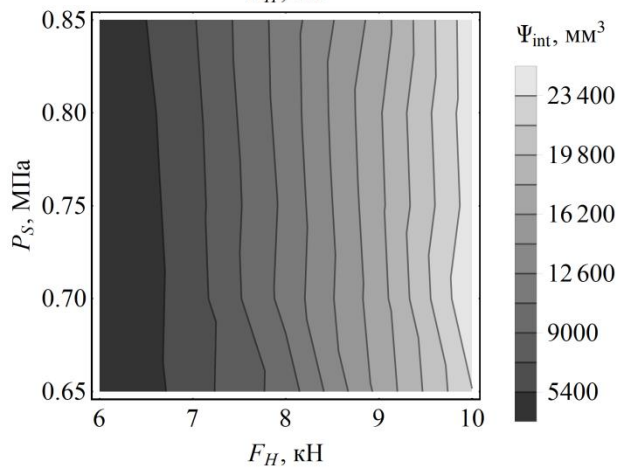
a)



б)



в)



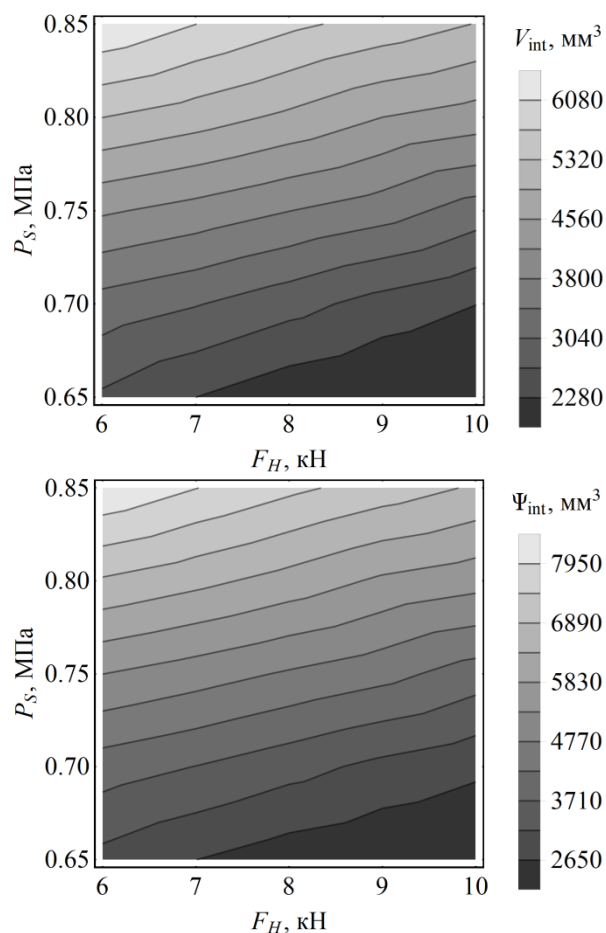


Рис. 3. Опасные объёмы V_{int} и повреждаемость Ψ_{int} для протектора шины (а), асфальтобетона (б) и резины под нейлоновым каркасом (в) при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск F_H и внутреннего давления в шине P_s

Резина под нейлоновым каркасом в области контакта. Опасные объёмы в резине под нейлоновым каркасом возникают в зоне её взаимодействия с нейлоновым каркасом, а также внутри рассматриваемой области, за счёт того, что данная область шины испытывает наибольшие изгибающие нагрузки при деформировании шины (рис. 2в).

Опасные объёмы и повреждаемость в резине под нейлоновым каркасом с ростом радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН уменьшаются примерно на 17–34% несмотря на незначительное уменьшение напряжений в данной области (рис. 3в). Это связано со сложным характером перераспределения напряжений в данной области и взаимодействием с другими элементами шины, такими, как нейлоновый каркас и стальной бреккер.

При увеличении внутреннего давления в шине с 0,65 до 0,85 МПа опасные объёмы и повреждаемость возрастают примерно в 2,4–3,1 и 2,7–3,4 раза соответственно в зависимости от значения радиальной нагрузки на диск.

Резина в бортовой части. По интенсивности напряжений опасные объёмы в резиновой бортовой части шины не образуются, т.е. при рассматриваемых внутренних давлениях в шине и радиальных нагрузках на диск в данной части шины образуются напряжения меньше 1 МПа.

Заключение. Проведено компьютерное моделирование трёхмерного напряжённо-деформированного состояния многокомпонентной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон», нагруженной различными комбинациями внутреннего давления в шине и радиальной нагрузки на диск (табл. 2).

Получены распределения напряжений в системе с учетом контактного взаимодействия между шиной и асфальтобетоном. На основании полученных данных было проведено моделирование опасных объемов по интенсивности напряжений в шине и асфальтобетонном покрытии в зоне контакта, а также в резине под нейлоновым каркасом и в бортовой зоне. Полученные опасные объемы в асфальтобетоне оказались примерно 2-2,5 раза меньше, чем в резиновом протекторе, в силу большей жёсткости асфальтобетона. В резине бортовой части шины опасные объемы при различных рассмотренных нагрузках не образуются.

Практически во всех областях с увеличением нагрузок, опасные объемы и повреждаемость возрастают. Однако, при увеличении радиальной нагрузки на диск, опасные объемы для резины под нейлоновым каркасом уменьшаются, что может быть вызвано сложным характером перераспределения напряжений в данной области.

При изменении внутреннего давления в шине с 0,75 до 0,85 МПа опасные объемы и повреждаемость, в среднем, изменяются не более чем на 10%, за исключением резины под нейлоновым каркасом, где данные характеристики увеличиваются примерно в 2,4–3,1 раза и 2,7–3,4 раза соответственно, т.к. данная зона испытывает большие изгибающие нагрузки при радиальной нагрузке на диск в условии взаимодействия с нейлоновым каркасом и стальным брекером.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин А.А. Исследование закономерностей деформирования пневматических шин в контакте с дорогой с учётом наличия эксплуатационной деградации материала / А.А. Ларин, Ю.В. Арефин // *Механика та Машинобудування*. – 2011. – №2 – С. 52.
2. Namjoo M. Numerical simulation of tire/soil interaction using a verified 3D finite element model / M. Namjoo, H. Golbakhshi // *Journal of Central South University of Technology*. – 2014. — №21. — P. 817-821.
3. Al-Qadi, Imad L. Prediction of Tire-Pavement Contact Stresses and Analysis of Asphalt Pavement Responses: A Decoupled Approach / Imad L. Al-Qadi, Hao Wang // *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*. – 2011. – №80. – С. 289–316.
4. Lopez, I. Tire/road friction modeling / I. Lopez, B. de Bruijn, A.J.C. Schmeitz – Eindhoven: TU/e, 2007. – С. 9.
5. Шейкина, В.А. Математическое моделирование контактного взаимодействия авиационной шины с жёстким покрытием / В.А. Шейкина – Иваново: ИГЭУ, 2012.
6. Вайнштейн, Е.В. Исследование изменения касательных напряжений и вертикальных перемещений от лесовозного автопоезда в конструкции дорожной одежды и земляного полотна / Е.В. Вайнштейн, В.М. Вайнштейн, П.А. Нехорошков // *Инженерный вестник Дона*. – 2012. – №4–2. – Т. 23. – С. 39.
7. Щербаков С. С. Напряжённно-деформированное состояние многокомпонентной системы «диск–шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине / С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 33. Минск: БНТУ, 2018. –С. 281 – 286.*
8. Грибовский, Г. В. Объёмная повреждаемость трибофатической системы диск–многокомпонентная шина–асфальтобетон / Г. В. Грибовский, С. С. Щербаков // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 32. Минск: БНТУ, 2017. –С. 277 – 282.*
9. Щербаков С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИЙ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

¹ Авсиевич А.М., ¹ Кудин В.В., ¹ Шашко А.Е., ¹ Кругликов А.А.

¹ Белорусский национальный технический университет, Минск

Долговечность машин и оборудования лимитируется долговечностью их отдельных элементов. Вибрации приводят к появлению существенных динамических знакопеременных нагрузок, которые способствуют развитию усталостного разрушения материалов и способны значительно снизить долговечность. Поэтому следует учитывать влияние обусловленных вибрациями динамических нагрузок на усталостную долговечность деталей и узлов.

Для каждого элемента долговечность определяется по своим методикам. Нормативно-технические документы регламентируют расчет для типовых узлов и деталей: валов, подшипников, зубчатых колес и прочих. Во всех существующих методиках формулы для расчета долговечности включают в себя конструктивные параметры, коэффициенты свойств материалов, величины действующих сил или нормальные и тангенциальные напряжения.

Так согласно ГОСТ 18855-94 долговечность подшипников (расчетный ресурс) определяется по формулам вида

$$L = \left(\frac{C_r}{P_r} \right)^n, \quad (1)$$

где C_r – динамическая расчетная грузоподъемность;

P_r – эквивалентная динамическая нагрузка;

n – эмпирический показатель степени ($n = 3 \dots 3,33$ для разных типов подшипников).

В свою очередь эти параметры определяются как:

$$C_r = b_m f_c \times (i \cos \alpha)^{0,7} \times Z^{2/3} \times D_w^{1,8}, \quad (2)$$

где b_m – коэффициент, учитывающий свойства материала;

f_c – коэффициент, учитывающий точность изготовления и конструктивные параметры;

i – число рядов тел качения;

α – угол контакта подшипника;

Z – число тел качения;

D_w – диаметр тел качения.

Динамическая сила определяется по формуле

$$P_r = XF_r + YF_a, \quad (3)$$

где X и Y – некоторые коэффициенты;

F_r и F_a – соответственно радиальная и осевая нагрузка.

С точки зрения взаимосвязи с вибрационными процессами в машинах все коэффициенты и конструктивные параметры остаются постоянными, а от уровня вибраций зависят радиальная и осевая нагрузки. Коэффициенты X и Y зависят от соотношения радиальной и осей нагрузок, которое может меняться при вибрационном воздействии. Тогда формулу для расчета ресурса подшипников можно упрощенно свести к виду:

$$L = \frac{C}{XF_r + YF_a} \quad (4)$$

где C – константа, учитывающая все независимые от вибраций постоянные коэффициенты.

Таким образом, при расчете долговечности варьируемыми параметрами, зависящими от вибрационных характеристик, являются радиальная и осевая нагрузки. Эти нагрузки определяются возникающими виброускорениями. Для определения динамических нагрузок в виде сосредоточенных сил, обусловленных вибрациями следует использовать классическую формулу:

$$F = m_n a, \quad (5)$$

где a – амплитуда виброускорения;

m_n – приведенная масса.

Эти динамические нагрузки определяются в различных направлениях, радиальном или осевом. В некоторых случаях радиальные нагрузки целесообразно раскладывать по координатным осям. Аналогично усилиям F при наличии крутильных колебаний можно определить значения динамических нагрузок в виде моментов сил.

Определение приведенной массы m_n и момента инерции I_n является достаточно сложной задачей, имеющей существенные особенности для каждого частного случая. Для конкретных узлов с определенными массово-геометрическими параметрами необходимо выявить инерционность в точках, для которых определены значения виброускорений.

Совершающие колебания массы не всегда находятся непосредственно в тех узлах, для которых нужно определить расчетную долговечность. Например, если возбуждаются колебания вала, установленного в корпусе на подшипниках, то шейки вала под кольцами подшипников вероятнее всего не будут совершать колебания. Но динамические нагрузки от колеблющихся с некоторой амплитудой элементов будут восприниматься подшипниками и передаваться далее на корпус. Для расчета реакций от динамических нагрузок, непосредственно влияющих на долговечность тех или иных элементов следует использовать уравнения статики.

Таким образом, алгоритм оценки влияния вибраций на долговечность подшипников, корпусных опор и иных элементов конструкций можно представить в виде следующей последовательности действий: 1) определение линейных и угловых виброускорений; 2) определение приведенных подверженных колебаниям масс и моментов инерций в точках, для которых найдены виброускорения; 3) определение динамических нагрузок в виде сил и моментов сил; 4) нахождение обусловленных динамическими нагрузками реакций в элементах конструкции; 5) расчет долговечности в количестве циклов нагружений с учетом найденных динамических реакций; 6) по частоте вибраций и вероятному периоду их возникновения можно определить долговечность элементов конструкций в единицах времени.

Расчет долговечности валов при сохранении принципиального подхода производится по отличной от описанной выше методики. Согласно стандартизированной методике в соответствии с рекомендациями РД 50-83-88 «Расчеты и испытания на прочность. Расчет на прочность валов и осей» расчет их усталостной долговечности производится на основе определения нормальных и касательных напряжений. Напряжения определяются согласно классическим теориям прочности и пропорциональны приложенным усилиям.

Таким образом для определения долговечности валов и осей при влиянии вибраций необходимо учитывать в расчетах напряжений нагрузки, рассчитанные по соответствующим линейным и угловым виброускорениям и приведенным массам и моментам инерции.

Для расчетов напряжений целесообразным может быть использование CAE-систем, специально предназначенных для вибрационного анализа (в частности ANSYS). Результатами расчетов в них являются распределения амплитуд виброперемещений и напряжений, обусловленные деформациями элементов при колебательном процессе. Расчеты в CAE-системах позволяют получить формы колебаний элементов и выявить точки с наибольшими амплитудами виброперемещений. Учитывая геометрию деталей, точки в которых наиболее вероятно усталостное разрушение материала, могут не совпадать с точками приложения нагрузок и точками с максимальными амплитудами. Частота пульсации напряжений при этом принимается равной частоте колебаний.

Частота вибраций в совокупности с максимальными значениями динамических нагрузок и напряжениями напрямую будут обуславливать расчетное время появления усталостных разрушений и выхода из строя элементов конструкций.

Проблемой является правильное наложение разночастотных факторов нагружения: динамических нагрузок, обусловленных вибрациями, и внешних периодически действующих сил. Решением данного вопроса согласно рекомендациям РД 50-83-88 может быть сведение всех существующих факторов к блочному методу нагружения. Также существует возможность анализа многочастотного колебательного процесса в CAE ANSYS.

Расчет на долговечность носит вероятностный характер, достигаемая точность расчетов позволяет оценить скорее качественное влияние на долговечность тех или иных параметров. Вибрации как фактор долговечности как правило исключаются на номинальных режимах работы машин и оборудования. Они могут возникнуть на переходных режимах, при пуске и остановке. В сложносоставных системах как правило реализуется множественность режимов работы среди которых будут переходные режимы, на которых вибрации окажутся неизбежными. Даже кратковременные вибрации при переходных режимах могут привести к существенному развитию усталостных процессов и снижению долговечности отдельных узлов и машины в целом. Поэтому для обеспечения равноресурсности оборудования рекомендуется провести анализ влияния вибрационных воздействий на долговечность в диапазоне режимов его работы.

На рисунке 1 показаны радиальные виброускорения в подшипниках ведущего вала редуктора. Максимальные значения виброускорений достигают 25 м/с^2 . Увеличение амплитуд виброускорений на участке установившегося движения свидетельствует о резонансных явлениях. Разложение зависимости виброускорения от времени в спектр позволяет увидеть пик с амплитудой 7 м/с^2 на частоте $31,2 \text{ Гц}$. Эта частота не совпадает с частотами гармоник колебаний внешних воздействий – на графиках угловой скорости и крутящего момента на входном валу. Таким образом очевидно, что это собственная частота системы. Для этих условий выполним оценку влияния вибрационных нагрузок на долговечность подшипникового узла данного ведущего вала.

При расчетных амплитудах виброускорений 20 м/с^2 на резонансной частоте и приведенной к подшипниковому узлу массе 10 кг динамическая нагрузка составляет 200 Н . Рассчитанная по ГОСТ 18855-94 динамическая расчетная грузоподъемность C_r однорядного радиального подшипника с числом тел качения 10 и их диаметром 100 мм составляет 15750 Н . Тогда долговечность составит:

$$L = \left(\frac{15750}{200} \right)^3 = 488 \times 10^9 \text{ циклов} .$$

При резонансной частоте $31,2 \text{ Гц}$ долговечность в единицах времени составит $0,26 \cdot 10^9$ минут.

Сравним рассчитанные значения с долговечностью, обусловленной действием силы реакции 400 Н от передаваемой нагрузки

$$L = \left(\frac{15750}{400} \right)^3 = 61000 \text{ млн. циклов} = 61 \times 10^9 \text{ циклов} .$$

При частоте вращения 200 об/мин долговечность в единицах времени составит $0,3 \cdot 10^9$ минут. Из приведенных оценок следует, что обусловленные вибрациями нагрузки при значительных частотах колебаний могут оказывать влияние на долговечность не меньшее, чем

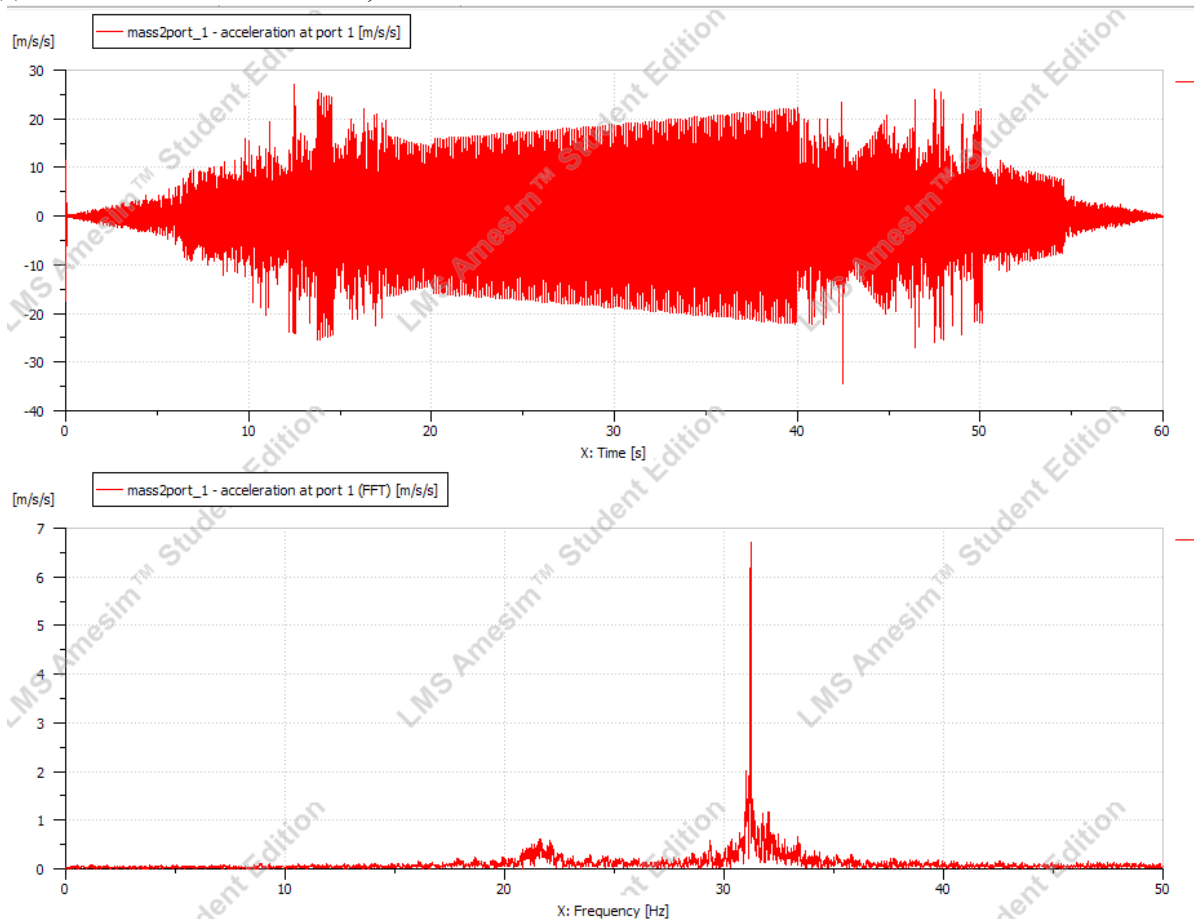


Рис. 1. График виброускорения на подшипниковом узле с разложением в спектр

силы реакций, вызванные действием внешних сил, обусловленных передачей проектных нагрузок. Влияние даже относительно небольших вызванных вибрациями динамических нагрузок на долговечность тем весомее, чем выше их частота, так как со сдвигом вибраций в высокочастотную область растет количество циклов нагружения в единицу времени.

МЕТОДИКА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИБРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

¹ Авсиевич А.М., ¹ Кудин В.В., ¹ Кругликов А.А., ¹ Шашко А.Е.

¹ *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Предлагаемая методика предназначена для использования в процессе конструирования сложного технологического оборудования. Ее применение позволит разработать конструкцию механическую системы, рассчитать и конструктивно обеспечить минимальный или допустимый уровень виброактивности в заданном диапазоне режимов работы и оптимизировать систему по критериям [1]:

- минимизации вибрационных характеристик (амплитуды выносов, виброперемещений, виброускорения, виброускорения);
- устойчивости колебательных процессов;
- долговечности.

Сложносоставная механическая система должна рассматриваться как многофакторная совокупность многосторонних динамических взаимодействий входящих в нее элементов. При проектировании должна быть предусмотрена возможность расчета всех вибрационных параметров для выбранных деталей и узлов системы, вибрационное состояние которых определяет надежность и долговечность работы оборудования [2].

Процесс проектирования включает в себя следующие этапы:

I. Разработка схемы (модели). Данный этап должен включать в себя следующие последовательные действия.

1. Отбор элементов (деталей и узлов) системы, включаемых в структурную схему и динамическую модель. В число отобранных элементов включаются все массивные звенья. Отдельные узлы могут укрупненно заменяться сосредоточенными массами. Все отобранные элементы обладают реальными или приведенными массами, или моментами инерции и в последующем соединяются с другими упруго-диссипативными связями.

2. Определение диапазона изменения параметров внешних возмущающих воздействий и описание их в виде математических функций. Определение направлений внешних воздействий и элементов системы, к которым они непосредственно приложены. Внешние воздействия могут быть как силовыми, так и кинематическими [1,3].

3. Составление структурной схемы сложносоставной технологической системы, создание на ее основе динамической и математической модели. Элементы на схеме представляются в виде блоков, существующие упруго-диссипативные связи – в виде линий. Упругие элементы (пружины) устанавливаются между инерционными звеньями, массами пружин как правило допустимо пренебречь, либо привести их массы к инерционным звеньям. Отдельно на схеме могут быть выделены элементы обратной связи, обеспечивающие функции управления и корректировки вибрационного состояния. В качестве управляющих элементов могут выступать отдельные звенья-актюаторы с переменными инерционными и жесткостными параметрами. Также на данном этапе оценивается возможность варьирования инерционными и жесткостными параметрами звеньев с целью оптимизации свойств всей системы [2].

Созданная таким образом динамическая модель является адекватной, так как основные узлы механических систем представляют собой массивные и достаточно жесткие тела. Деформации же в них в основном сосредоточены в стыках и соединениях узлов.

4. Определение усредненных ожидаемых значений инерционных, жесткостных и диссипативных характеристик элементов системы, включенных в структурную схему и модель системы.

5. Выбор системы координат. Определение числа степеней свободы и оптимизация системы с целью минимизации ее обобщенных координат. За обобщенные координаты принимаются возможные направления колебательных движений выбранных элементов системы. Уменьшение количества обобщенных координат за счет объединения звеньев в элементы с общей приведенной инерционностью и жесткостью [3].

II. Математическое моделирование колебательных процессов системы.

1. В основе моделирования лежит запись и решение основного дифференциального уравнения колебательного движения, которое имеет вид [3]:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t), \quad (1)$$

где $F(t)$ – функция, описывающая возмущающее внешнее воздействие,

a – матрица инерционных коэффициентов системы (масс либо моментов инерции),

b – матрица коэффициентов диссипации в направлении данной обобщенной координаты,

c – матрица коэффициентов жесткости объекта в направлении обобщенной координаты.

\ddot{q}, \dot{q}, q – виброускорение, виброскорость и виброперемещение в направлении возмущающего воздействия.

В сложносоставных системах как правило назначается несколько обобщенных координат. Тогда необходимо составлять и решать систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + \dots + a_{1n}\ddot{q}_n + b_{11}\dot{q}_1 + \dots + b_{1n}\dot{q}_n + c_{11}q_1 + \dots + c_{1n}q_n = F_1(t) \\ \dots \\ a_{n1}\ddot{q}_1 + \dots + a_{nm}\ddot{q}_n + b_{n1}\dot{q}_1 + \dots + b_{nm}\dot{q}_n + c_{n1}q_1 + \dots + c_{nm}q_n = F_n(t) \end{cases}, \quad (2)$$

Количество уравнений системы будет равно количеству обобщенных координат. Коэффициенты уравнений a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} определяются исходя из анализа конкретной системы и представляют собой как правило приведенные к конкретным элементам инерционные, диссипативные и жесткостные параметры. Приведение масс производится по условию равенства кинетических энергий. Определение приведенной жесткости узла выполняется на основе равенства потенциальных энергий, а приведенного коэффициента диссипации – из условия равенства функции Релея.

Решение системы дифференциальных уравнений по заданным начальным условиям позволит получить зависимости всех обобщенных координат от времени.

2. Модальный анализ. Данная система уравнений (1) может быть применена для определения собственных колебаний системы. Для этого правые части уравнений следует приравнять нулю. Построение зависимостей собственных колебаний от времени позволит выявить собственные частоты и, соответственно, избегать совпадения их с частотой вынуждающей силы для недопущения резонансных явлений.

3. Решение системы уравнений (1) рекомендуется провести, используя преобразование Лапласа, посредством которого систему дифференциальных уравнений приводят к системе алгебраических уравнений. Из системы алгебраических уравнений непосредственно получают выражения для зависимостей координат в форме

изображений. Проводим обратное преобразование и получаем необходимые функции [4].

Для решения рекомендуется использовать систему символьной алгебры “Mathematica” (программный пакет Wolfram Mathematica 9.0). Также численное решение системы уравнений (1) можно получить, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Сопоставление зависимостей всех указанных координат от времени позволит определить влияние колебаний ответственных элементов системы на точность обработки.

4. Гармонический анализ. Полученные решения по каждой обобщенной координате должны быть записаны в виде математических функций. Далее функции обобщенных координат и функции внешних воздействий в зависимости от времени, записанные в математической форме раскладываются в ряд Фурье. Это позволяет получить для каждой частоты ω собственную амплитуду $A(\omega)$ и начальную фазу колебаний $\theta(\omega)$, построить амплитудно-частотные (АЧХ) и фазо-частотные (ФЧХ) характеристики.

5. Далее строится годограф частотной передаточной функции, представляющей собой отношения комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний $A(i\omega)$ к комплексной амплитуде вынуждающей силы $a(i\omega)$.

$$W(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{F(i\omega)}. \quad (3)$$

Она является собственной характеристикой системы, зависящей только от типа уравнений движения и параметров системы.

На годографе модуль вектора равен амплитуде вынужденных гармонических колебаний, а угол, отсчитываемый от положительного направления абсцисс против хода часовой стрелки, равен начальной фазе.

Этот годограф строится на комплексной плоскости. Тогда амплитуда A представляет комплексную амплитуду $A(i\omega)$. Действительная часть $U(\omega)$ равна $U(\omega) = A(\omega) \times \cos\theta(\omega)$, а мнимая часть $iV(\omega)$ соответственно равна $V(\omega) = A(\omega) \times \sin\theta(\omega)$.

6. Построение амплитудно-фазо-частотной характеристики (АФЧХ) частотной передаточной функции. Анализ такой характеристики позволяет определить устойчивость колебательных процессов. Если на полученном годографе кривая охватывает точку с координатой « - 1 », то процесс колебания являются неустойчивыми и механическая система не может обеспечить надежную реализацию технологического процесса. Любая точка, находящаяся в левой полуплоскости построенной АФЧХ указывает на ограниченную устойчивость колебаний на данной частоте, когда при некоторых изменениях внешних воздействий возможен неустойчивый колебательный процесс. Пример анализа АФЧХ шпинделя обрабатывающего центра показан на рисунке 1. Из него следует, что данная механическая система обладает запасом устойчивости, но на всех частотах, для которых точки АФЧХ лежат в левой полуплоскости относительно вертикальной оси координат, этот запас ограничен и увеличение интенсивности внешних воздействий может привести к потере устойчивости.

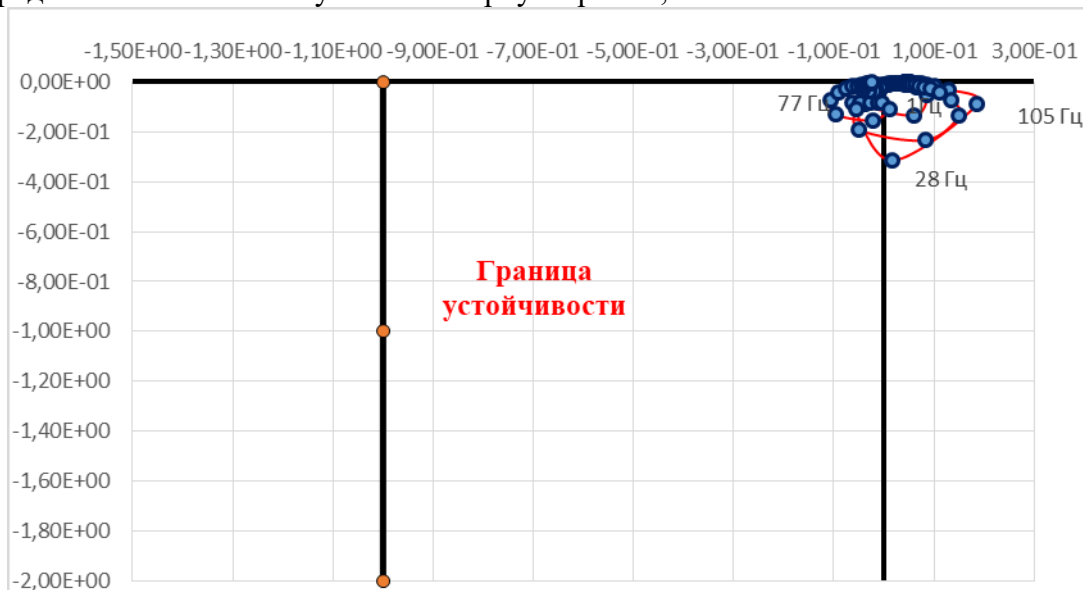
7. Для определения комплекса вибрационных параметров (виброперемещение, виброскорость, виброускорение) каждого элемента системы достаточно воспользоваться зависимостями амплитуд колебаний, т.к. виброскорости и виброускорения вычисляются как производные функций амплитуд (виброперемещений).

8. Для оптимизации проектируемой конструкции по критерию устойчивости необходимо определить диапазон изменения конструктивных параметров, влияющих

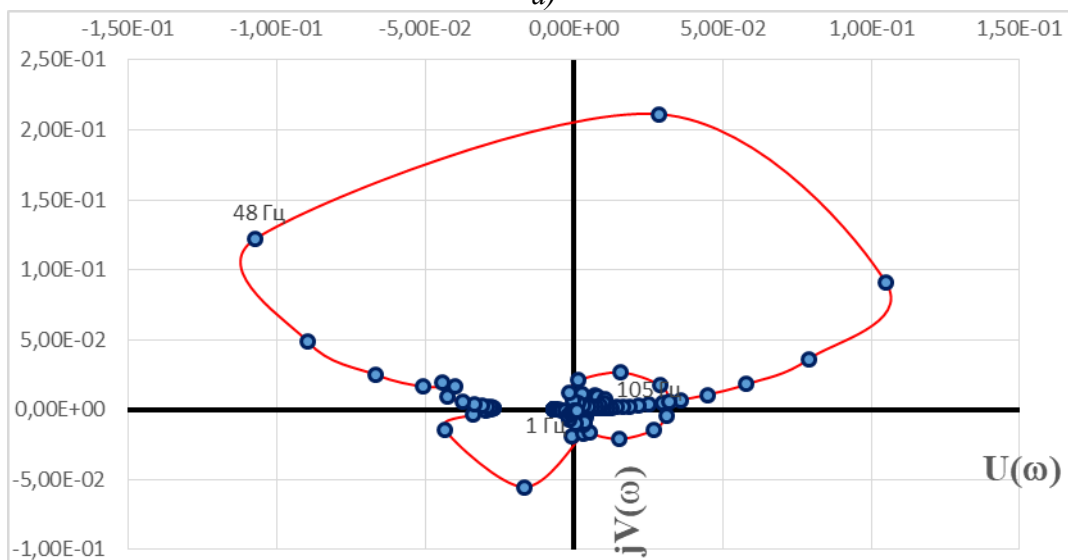
на инерционные, жесткостные и диссипативные характеристики системы. Затем на основе повторения шагов 3 – 6 найти диапазон конструктивных параметров, обеспечивающих устойчивость системы.

9. Для оценки влияния вибраций на долговечность элементов конструкций необходима следующая последовательность действий:

- определение линейных и угловых виброускорений;



а)



б)

Рис. 1. Характерные амплитудно-фазо-частотная характеристика шпинделя металлорежущего станка:

а – расположение относительно границы устойчивости; б – общий вид

- определение приведенных подверженных колебаниям масс и моментов инерций в точках, для которых найдены виброускорения;
- определение динамических нагрузок в виде сил и моментов сил;
- нахождение обусловленных динамическими нагрузками реакций между звеньями;
- расчет долговечности в количестве циклов нагружений с учетом найденных динамических реакций.
- по частоте вибраций и вероятному периоду их возникновения можно определить долговечность элементов конструкций в единицах времени.

Для систем с одной степенью свободы в случае необходимости повторения расчетов по пунктам 3- 9 для диапазона внешних условий с целью повышения производительности проектирования целесообразно пользоваться передаточными функциями между начальными звеньями, и теми, для которых производится расчет параметров. Передаточная функция есть отношение функций рассчитанных координат звеньев для определенного набора внешних факторов:

$$U_{ij} = \frac{q_i(t)}{q_j(t)}. \quad (4)$$

Эта функция зависит только от свойств системы и не изменяется в зависимости от внешних условий. При изменении внешних факторов достаточно знать функцию обобщенной координаты $q_j(t)$ для начального звена. Тогда для любого i -го звена функция $q_j(t)$ определится как:

$$q_j(t) = U_{ij} \times q_i(t). \quad (5)$$

III. Создание геометрической модели механической системы.

Наличие рассчитанных оптимизированных инерционных и жесткостных параметров позволяет строить геометрическую модель по заданным критериям, подбирая соответствующим образом размеры и материалы звеньев механической системы. Алгоритмизированный и компьютеризированный расчет по приведенной методике позволяет быстро просчитать вибрационное состояние системы при любом изменении инерционных, жесткостных и диссипативных параметров ее элементов. Тем самым существенно повышается производительность и качество проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А.В. Чигарев, К. Циммерманн, В.А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388с.
2. Коловский, М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, – 1989. – 263 с.
3. Левитский, Н.И. Колебания в механизмах: учебное пособие для вузов. – Москва: Наука, 1988. – 336 с.
4. Греков, В.П. Теория автоматического управления. – Учебн. Пособие для вузов. – М.: Наука, 2003. – 93 с.

ОБЪЕМНАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА НЕФТЕПРОВОДА С ВНУТРЕННИМИ КОРРОЗИОННЫМИ ПОВРЕЖДЕНИЯМИ И РЕМОНТНОЙ СТЕКЛОПОЛИМЕРНОЙ МАНЖЕТОЙ

д.ф.-м.н. ¹Щербаков С.С., ¹Насань О.А., ¹Подгайская Д.А.

¹ Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Анализ напряженно-деформированного состояния моделей неповрежденных участков трубопровода обычно основывается на гипотезе о его большой длине. Это позволяет перейти к двумерной постановке граничной задачи, в которой поперечное сечение моделируют кольцом. Данная постановка обычно заключается в рассмотрении влияния внутреннего давления и/или перепада температуры между стенками трубы. Решение поставленных таким образом задач дает приемлемые результаты при сравнительно несложной процедуре расчета как аналитического, так и численного. Для учета влияния коррозионного повреждения на напряженно-деформированное состояние и состояния объемной повреждаемости необходим переход к трехмерной постановке, что также связано с определением геометрических характеристик повреждения.

Постановка задачи. В работе анализируется влияние различных внутренних коррозионных дефектов на напряженно-деформированное состояние характерной секции трубы, расположенного на участке ННС Пинск нефтепровода Мозырь – Брест 3. Рассматривается труба с наиболее распространенным внешним диаметром 720 мм и толщиной стенки 8,8 мм [1]. Учитывается действие на нее внутреннего давления на воздухе и при заглублении в грунт на 0,8 м с учетом гравитационного поля и различных типов коррозионных дефектов, а также с учетом ремонта стеклополимерной манжетой «Акварэп» (см. табл. 1, 2) [2]. В качестве существенно различных внутренних дефектов выбрано одно протяженное и множество мелких, равных ему по объему, повреждений.

На рисунке 1 представлены схема нагружения, общий вид систем после ремонта на воздухе и развертка множественных внутренних повреждений. Для анализа напряженно-деформированного состояния секции трубы в силу симметрии модели использовалась лишь ее четверть.

Протяженное повреждение моделировалось как эллипсоид вращения, расположенный в центре нижней части секции трубопровода [3] с полуосями 117 мм, 1146 мм, 1,5 мм, характеризующими ширину, длину и глубину дефекта, соответственно.

Множество мелких повреждений моделировалось на основе предположения об их эллипсоидальной форме. По данным о расположении и геометрических характеристиках дефектов в секциях трубопровода были определены параметры распределений Вэйбулла, описывающих длины, ширины и глубины повреждений. Угловое положение на внутренней окружности трубы описывалось распределением Гаусса. Распределение повреждений в продольном направлении секции трубы задавалось равномерным.

Таблица 1 – Кодификация расчетов

Условия нагружения	Стальная труба на воздухе/в грунте	С композитной манжетой с ее утяжкой (при высыхании) на воздухе/в грунте
Стальная труба с протяженным внутренним повреждением	DT/DTG	DTSP/DTSPG
Стальная труба с множественными внутренними повреждениями	MDT/MDTG	MDTSP/MDTSPG

Подробные геометрические характеристики трубы и описание построения повреждений приведены в [1, с. 353, 4].

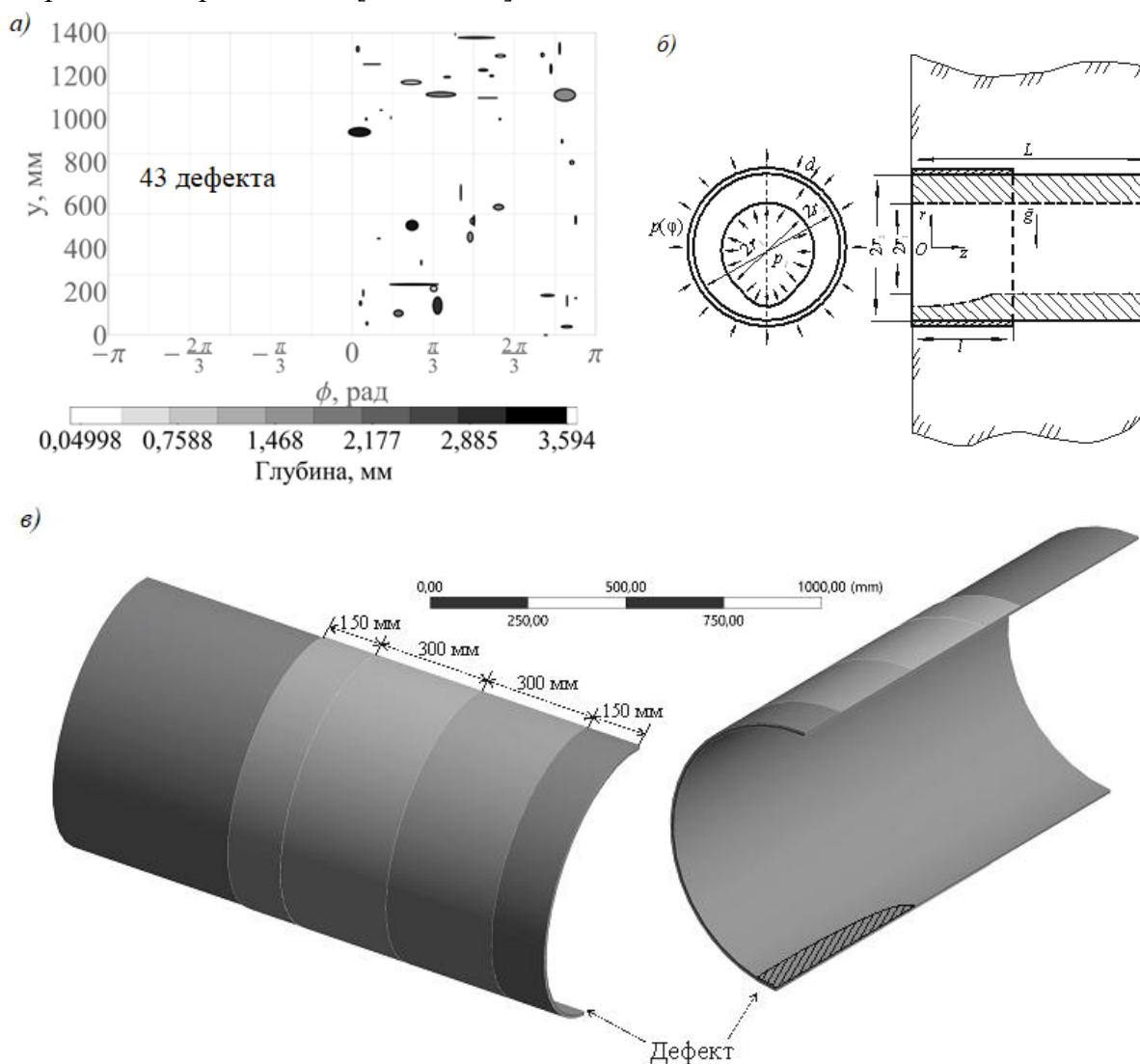


Рис. 1. Модели секции трубы: а) развертка со множественными внутренними повреждениями; б) расчетная схема; в) с повреждением и стеклополимерной манжетой

Граничные условия схемы нагружения рис. 1, в задаются следующими соотношениями

- для жесткой сцепки контактных поверхностей между композитной манжетой и секцией трубопровода:

$$\mathbf{u}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]} = \mathbf{u}^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]}, \quad (1)$$

- для верхней, нижней и боковых поверхностей грунта:

$$\sigma_n \Big|_{y=3r} = 0, \sigma_{n\tau} \Big|_{y=3r} = 0, \mathbf{u}^{(3)} \Big|_{y=-3r_1} = 0, u_x^{(3)}, u_z^{(3)} \Big|_{x=-3r_1, -3r_1 \leq y \leq 3r_1} = 0, \quad (2)$$

- для внутренней поверхности секции трубопровода:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_1} = p_1, \quad (3)$$

- для контактных поверхностей между композитной манжетой длины l и грунтом, секцией трубопровода и грунтом:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]} &= -\sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]}, \sigma_{r\tau}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]} = -\sigma_{r\tau}^{(2)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]} \leq f_{12} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z \in [0;l]}, \\ \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0;l]} &= -\sigma_r^{(3)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0;l]}, \sigma_{r\tau}^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0;l]} = -\sigma_{r\tau}^{(3)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0;l]} \leq f_{12} \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_2+d, z \in [0;l]}, \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l} &= -\sigma_r^{(3)} \Big|_{r=r_2, z > l}, \sigma_{r\tau}^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l} = -\sigma_{r\tau}^{(3)} \Big|_{r=r_2, z > l} \leq f_{13} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2, z > l}, \end{aligned} \quad (4)$$

где индекс 1 соответствует трубе, 2 – манжете, 3 – грунту, d – толщина манжеты, $\tau = \varphi, z, f$ – соответствующие коэффициенты трения, определяемые из таблицы 3.

Таблица 2 – Механические характеристики материалов системы

Название материала	Механические характеристики			
	E , ГПа	ν	σ_T , МПа	ρ , кг/м ³
17ГС (секция трубопровода)	210	0,3	360	7850
Грунт [4]	0,0051	0,25	–	2500
Стеклополимерная лента «Акварэп»[5]	25,786	0,4	–	1800

Таблица 3 – Коэффициенты трения скольжения

Пара трения	Коэффициент трения	Пара трения	Коэффициент трения
«Акварэп» – «Акварэп»	0,4	«Акварэп» – грунт	0,8
17ГС – грунт	0,8	«Акварэп» – 17ГС	жесткая сцепка

Напряженно-деформированное состояние. Напряжения максимальной интенсивности сосредоточены в области повреждений во всех моделях. В области ремонтных работ происходят значительные как количественные, так и качественные изменения в напряженно-деформированном состоянии. На рисунке 2 показано, что множественные повреждения по сравнению с одним протяженным приводят к увеличению интенсивности напряжений σ_{int} на 46 % и 37 % для расчетов со свободной поверхностью и в грунте соответственно. Максимальные значения эквивалентных напряжений σ_{int} в области ремонта увеличиваются на 17,7 % и 15,3 % при сравнении единичного крупного протяженного повреждения с множественными для расчетов DTSP и MDTSP, DTSPG и MDTSPG соответственно. На напряженно-деформированное состояние модели с множественными повреждениями грунт оказывает меньшее воздействие, чем на модель с внутренним протяженным дефектом.

Подробный анализ напряженно-деформированного состояния секции магистрального нефтепровода с учетом различных видов коррозионных дефектов и ремонтных работ представлен в [5].

Объёмная повреждаемость. Оценка повреждаемости проводилась на основе модели деформируемого твёрдого тела с опасным объёмом [6]. В связи с тем, что в области дефектов напряженно-деформируемое состояние секций трубы является существенно трехмерным, их оценка проводилась с помощью четвертой, энергетической, теории прочности в напряжениях:

$$\sigma_{int} = \sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}. \quad (5)$$

Опасный объём рассчитывался как сумма объёмов конечных элементов, в которых действующие напряжения превышают предельные значения. В этом случае функции локальной повреждаемости единицы объёма имели вид:

$$\psi_{IV} = \sigma_{IV} / \sigma_{IV}^{(lim)}. \quad (6)$$

Тогда формулы для расчета опасных объёмов и интегральной повреждаемости будут следующими:

$$V_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} dV, \quad \Psi_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} \psi_{IV}(V) dV \quad (7)$$

где $\sigma_{IV}^{(lim)}$ – предельное напряжение, V_{IV} – рабочий объём деформированного тела.

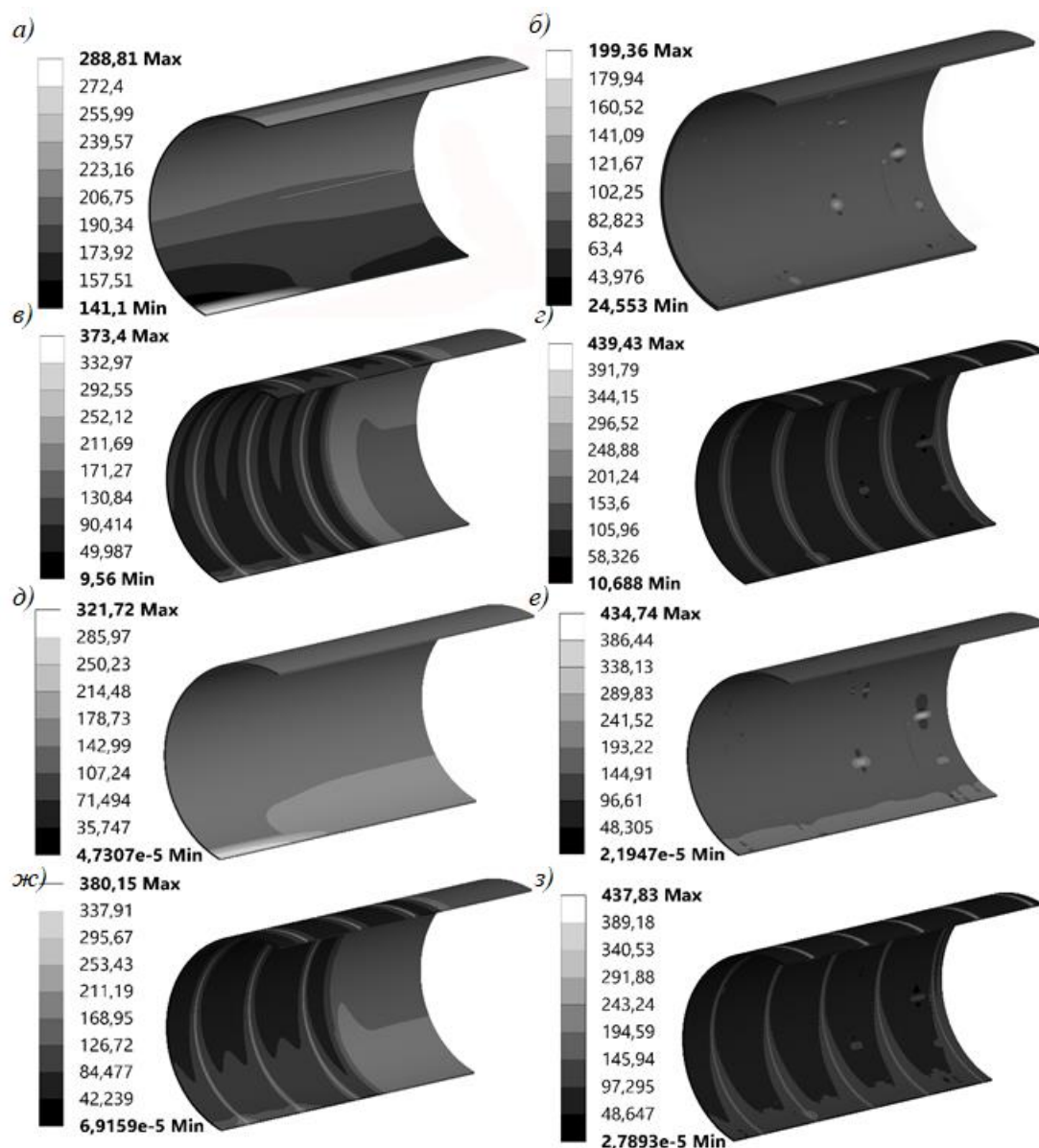


Рис.2. Распределения интенсивности напряжений σ_{int} в сечении трубы: а) DT; б) MDT; в) DTSP; г) MDTSP; д) DTG; е) MDTG; ж) DTSPG; з) MDTSPG

По результатам испытаний предел выносливости $\square-1$ образцов с надрезом из стали 09Г2С равен 120 МПа, для гладких лабораторных образцов предел выносливости составляет около 235 МПа. В случае предельного напряжения $\sigma = 235$ МПа были получены распределения опасных объемов и интегральной повреждаемости для всех исследованных моделей. Из рисунка 3 видно, что несмотря на то, что по абсолютному значению максимальные величины компонент тензора напряжений сечения трубы с множественными дефектами MDT значительно превышают величины соответствующих распределений модели трубы с протяженным дефектом DT, опасные объемы модели DT больше, чем те же показатели модели MDT, составляя 62283,4 мм³ против 24235,4 мм³. Учет влияния веса грунта на стенку трубы приводит к увеличению значения опасных объемов на 8,3 % для единичного протяженного повреждения и к уменьшению на 68,28% для множественных. Использование композитной манжеты в качестве ремонтной конструкции приводит к уменьшению величин опасных объемов на 85,04 % и 85,27 % для расчетов сечения трубы с протяженным повреждением на воздухе и в грунте соответственно, а также к увеличению на 34,8 % и на 654,8 % для расчетов

секции трубы с множественными повреждениями на воздухе и в грунте соответственно.

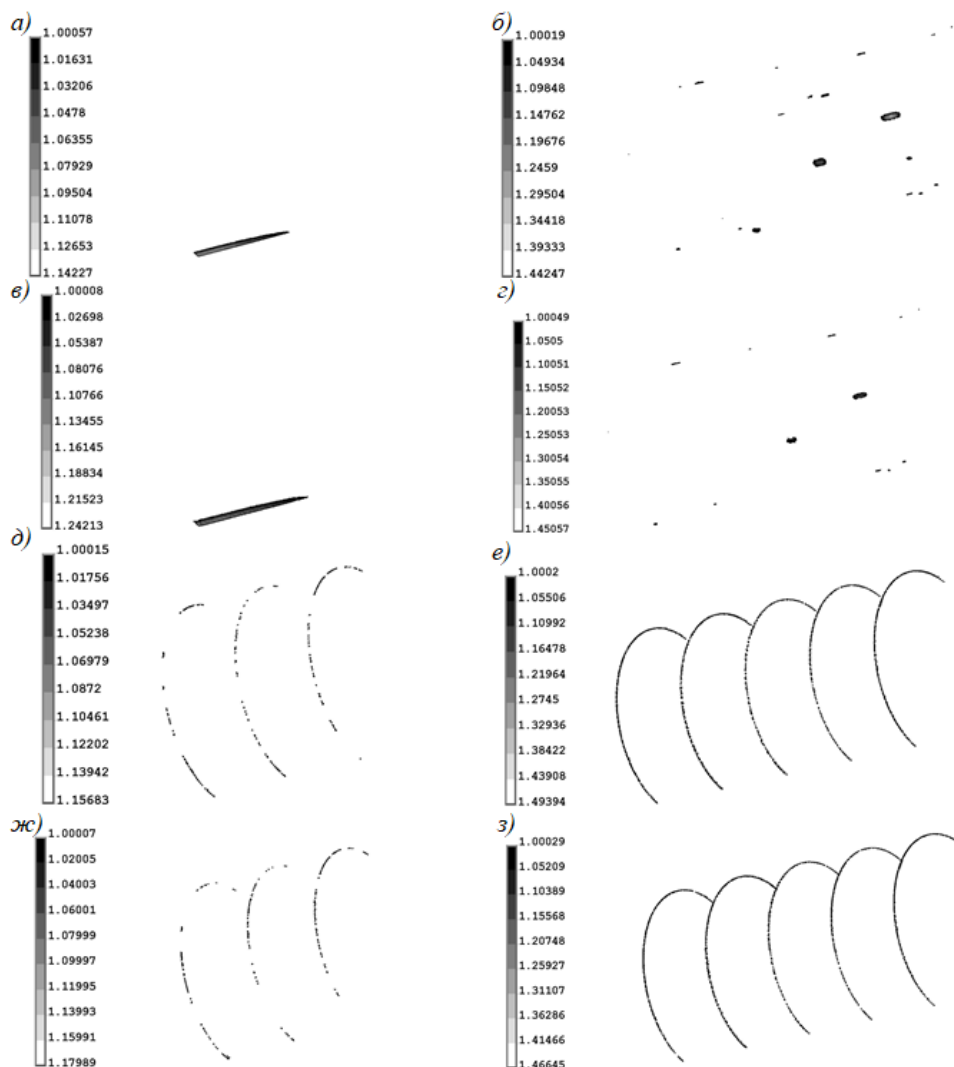


Рис.3. Характерные виды опасных объемов, рассчитанных по четвертой теории прочности при $\sigma_{lim} = 235 \text{ МПа}$: а) DT; б) MDT; в) DTG; г) MDTG; д) DTSP; е) MDTSP; ж) DTSPG; з) MDTSPG

При применении стеклополимерной композитной манжеты одинаковой длины для всех расчетов на внешней поверхности трубы возникают значительные концентраторы осевых напряжений и опасных объемов на границах полос манжеты. Данный эффект наблюдается вследствие усадки манжеты при ее высыхании в статической упругой постановке задачи для жесткой сцепки внешней поверхности трубы и манжеты и вносит значительный вклад в модели с множественными дефектами. Значения опасных объемов увеличиваются на 250,8 % и 237 % при сравнении моделей DTSP и MDTSP, DTSPG и MDTSPG соответственно.

Заключение. Проведено моделирование опасных объемов для секции трубы с единичным протяженным и множественными мелкими повреждениями на воздухе и в грунте с учетом влияния ремонта композитной манжетой. Показано, что опасные объемы появляются в окрестности коррозионных повреждений. Кроме того, применение стеклополимерной композитной манжеты на внешней поверхности трубы привело к возникновению концентраторов осевых напряжений, что вызвало появление соответствующих опасных объемов на границах полос манжеты. Данный эффект

наблюдался вследствие усадки манжеты при жесткой сцепке внешней поверхности трубы и манжеты.

Таким образом, учитывая работу трубопровода в условиях многоциклового усталости, целесообразно предположить, что протяженный дефект является более опасным, чем конгломерат мелких до проведения ремонтных работ. Ремонт трубы с множественными дефектами рекомендуется проводить при помощи стеклополимерной манжеты только при приближении эквивалентных напряжений в области дефекта к пределу текучести материала трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С.С. *Напряженно-деформированное состояние линейного участка нефтепровода с учетом коррозионных дефектов и ремонтных работ* / С.С. Щербаков, А.Н. Козик, О.А. Насань // *Тр. 32-й Международной научно-технической конференции «Теоретическая и прикладная механика», 2017 г., Минск (Беларусь)* / Редкол.: А.В. Чигарев [и др.] – БНТУ, 2017. –381с. – С. 352 – 358.
2. *Перечень методов ремонта по РД-23.040.00-КТН-140-11 ОАО «АК «Транснефть».*
3. Тюрин, И.Г. *Технический отчет по диагностическому обследованию нефтепровода внутритрубными инспекционными приборами «Многоканальный профилемер ПРН», «Дефектоскоп внутритрубный магнитный МСК», «Комбинированный ультразвуковой дефектоскоп ДКУ»* / И.Г. Тюрин, В.П. Авдеев, М.В. Масленников // 2013. 326 с.
4. Щербаков, С.С. *Сравнительный анализ напряженно-деформированных состояний участков трубопровода с коррозионными дефектами при комплексном нагружении* / / С.С. Щербаков, А.Н. Козик, О.А. Насань // *Актуальные вопросы машиноведения, 2017. №6. С. 78 – 84.*
5. Щербаков, С.С. *Напряженно-деформированное состояние секции нефтепровода с учетом различных видов коррозионных дефектов и ремонтных работ*/ С.С. Щербаков, А.Н. Козик, О.А. Насань, Д.А. Подгайская // *Тр. 33-й Международной научно-технической конференции «Теоретическая и прикладная механика», 2018 г., Минск (Беларусь)* / Редкол.: А.В. Чигарев [и др.] – БНТУ, 2017. –450с. – С. 173 – 179.
6. *Композитные материалы «Акварэп» для ремонта трубопроводов. Технический паспорт и инструкция по применению. Лондон, 2007. 21 с.*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКА И СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

¹ Пилипчук А.П., ¹ Мишин А.А., ¹ Исак В.Г.

¹ Военная академия Республики Беларусь, Минск

Введение

Основной задачей при проектировании средств защиты личного состава и техники Вооруженных Сил является минимизация их массы при заданном стандартами уровне запреградного воздействия [1,2], а также при ограничениях на площадь защиты. Современные средства защиты высокого класса, как правило, представляют собой двухслойную структуру, состоящей из пробиваемой металлической пластины (бронепанель) и многослойного пакета баллистических тканей за ней [3]. Бронепанель должна поглотить максимум кинетической энергии пули при ударе, чтобы снизить запреградную энергию, передаваемую защищаемому объекту. Проверка качества средств индивидуальной защиты не находящегося в контакте с защищаемым объектом проводится с определением баллистического предела. В случае контакта с защищаемым объектом (тело человека), сравнение бронежилетов различных классов осуществляется по критерию тупой травмы (рис. 1) [4].



*1 - многослойная тканевая преграда (бронежилет);
2 - регистрирующая среда; W - фактический прогиб.
Рис. 1. Сертификационные испытания бронежилетов*

При разработке средств защиты актуальной задачей является определение толщин металлической пластины и пакета арамидных тканей. Для РБ данная задача имеет значение в связи с разработкой стрелкового оружия и наличием производства средств индивидуальной бронезащиты [5,6]. Решение сформулированной задачи возможно в результате применения экспериментальных, аналитических и численных методов. Результаты экспериментальных исследований удара имеют определяющее значение для принятия решения о соответствии брони требованиям заказчика. Однако результаты испытаний зависят от большого количества параметров: скорости и формы ударника, относительной твердости и массы соударяющихся тел, граничных условий, характеристик материалов и т.д. Вследствие этого разработка средств защиты требует большого количества трудоемких экспериментов [1]. В настоящее время не существует аналитических моделей, учитывающих все параметры процесса ударного

взаимодействия и, очевидно, их получение невозможно из-за сложности явлений, происходящих при ударном взаимодействии пули как с металлической пластиной, так и с тканевым пакетом. В связи с чем возрастает роль методов численного исследования, применение которых позволяет значительно сократить объем экспериментов. Численные методы позволяют проводить анализ процесса ударного взаимодействия при минимуме допущений.

По мнению авторов, для выполнения расчетной оценки эффективности средств защиты, имеющих двухслойную структуру, целесообразно использовать подход, сформулированный в работе [7]. Данный подход предполагает последовательное выполнение двух этапов: сначала расчет пробоя металлической пластины, а затем расчет взаимодействия индентора с формой носка, массой и начальной скоростью, полученными по результатам первого этапа расчета, и тканевого пакета, лежащего на пластилиновом блоке. Такое разделение оправдано, поскольку в реальных конструкциях бронежилетов не обеспечивается постоянный поджим стальной пластины к тканевому пакету.

В настоящее время существует ряд программных пакетов, предназначенных для решения задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов. Анализ работ, посвященных исследованию процесса пробивания показал, что одним из наиболее часто используемых пакетов для решения задач пробоя является LS-DYNA [1, 4,7-9]. Это вызвано возможностью решения геометрически нелинейных задач с большими деформациями и разрушением, использованием явного алгоритма интегрирования по времени. LS-DYNA - многоцелевая программа, использующая явную формулировку метода конечных элементов (*explicit finite element method*) - предназначена для анализа нелинейного динамического отклика трехмерных неупругих структур. Первая версия программы LS-DYNA была выпущена в 1976 г. LS-DYNA была и до сих пор является частью оборонной программы США. Программа была первой в своей области и послужила основой для всех современных пакетов высоконелинейного анализа, оставаясь на лидирующих позициях до сегодняшнего дня. Математический аппарат включает порядка 30 алгоритмов контактного взаимодействия, около 150 уравнений состояния (в зависимости от версии). Данные аналитические инструменты позволяют моделировать широкий круг задач на этапе проектирования технических средств. Сюда можно отнести задачи анализа динамической прочности автомобильных комплектующих, сопротивляемости элементов конструкции транспортных средств (*crash-test, drop-test,*) процессов металлообработки (штамповка, волочение, сверхпластическое формование, резка), воздействия взрывной нагрузки на изделия и пробивания преград. С 1996 г. решатель LS-DYNA встроен в пакет программ ANSYS, где используется для решения задач динамического анализа. Такая реализация решателя LS-DYNA в составе ANSYS существенно расширила применимость программы на небольших фирмах и повысила ее доступность [10-12].

Экспериментальные исследования

Для проведения эксперимента на основе анализа испытательных устройств [13], была выбрана схема маятникового копра. Скорость движения маятника в момент прохождения нижней точки определяется аналитическим методом по формуле [14]:

$$V = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}$$

где V — скорость движения маятника, м/с;

g — ускорение силы тяжести при свободном падении, м/с²;

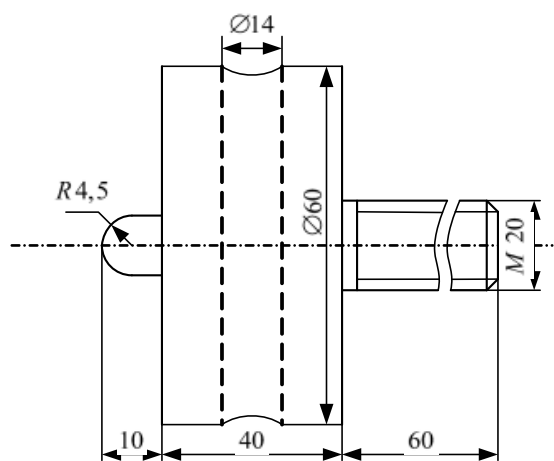
l — расстояние от оси качания до оси ударника, м;

φ — угол зарядки маятника, град.

Основанием для сборки всех составных частей копра является корпус, который по своей массе обеспечивает проведение испытаний. На опорных поверхностях

специальными винтами крепят опоры для установки образца для испытания. При данных габаритах установки ($l=1,4$ м) скорость движения маятника при прохождении нижней точки составила $\approx 5,5$ м/с.

Основная деталь данного устройства – ударник, изготовленный из стали ШХ 15 и закаленный до твердости 40 – 45 HRC (рис. 2). Особенностью данной конструкции является наличие резьбового хвостовика, предназначенного для установки и фиксации дополнительных грузов. Данная опция позволяет при неизменной скорости получать различные значения энергии. В работе моделировался удар пули пистолета ПМ с дульной энергией 330 Дж на разных дистанциях, что достигалось установкой грузов от 15 до 20 кг.



а
б
Рис. 2. Экспериментальная установка маятникового типа
а - эскиз ударника, б – внешний вид установки

Моделирование процесса взаимодействия ударника и пластины

В работе представлены результаты компьютерного моделирования процесса взаимодействия ударника и стальной пластины. Моделирование выполнено в программном продукте ANSYS/LS-DYNA. Подготовка модели и постпроцессорная обработка и представление результатов выполнены с использованием свободно распространяемого программного продукта LS-PrePost. Конечно-элементная модель процесса представлена на рис. 3. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

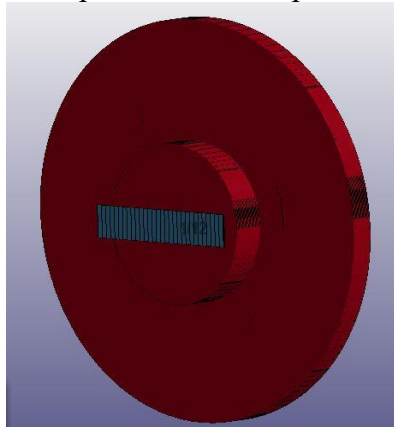


Рис.3. Конечно-элементная модель процесса

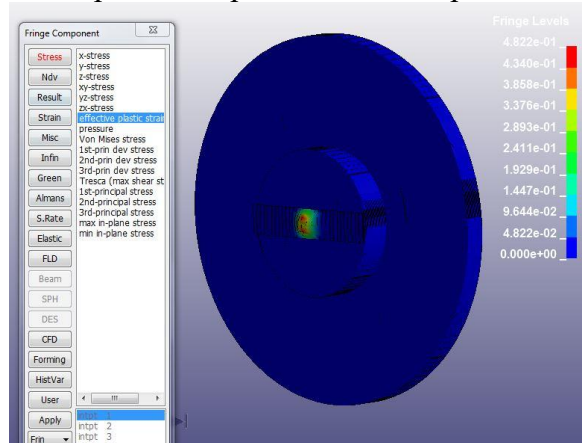


Рис.4. Результаты моделирования

Данная конечно-элементная модель включает в себя стальную пластину размерами 100x30 мм и толщиной от 1 до 3 мм и ударник с учетом дополнительных грузов. При моделировании процесса использовался элемент типа твёрдое тело, который в LS-DYNA определяется картой ELEMENT_SOLID. Для задания свойств материалов и характеристик процесса была выбрана система единиц - СИ. Модель материала Bilinear Kinematic применялась для стальной пластины (в LS-DYNA это карта MAT_PLASTIC_KINEMATIC), выполненные из стали 20 со следующими свойствами: плотность – 7800 кг/м³; модуль упругости – 2,0 10⁵ МПа; коэффициент Пуассона – 0,3; предел текучести – 250 МПа. Модель материала ударника - абсолютно твердое тело Rigid Material (карта MAT_RIGID). Свойства материала ударника соответствуют стали ШХ15: плотность - 7800 кг/м³; модуль упругости – 1,95 10⁵ МПа; коэффициент Пуассона – 0,3 с пределом текучести 1200 МПа. Начальная скорость ударника *V* моделируется *INITIAL_VELOCITY_GENERATION, а взаимодействие между пулей и мишенью моделируется *CONTACT_SURFACE TO SURFACE [10].

Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния пластины в результате взаимодействия. Измерение действительных деформаций выполнялось при помощи штангенциркуля, для определения расчетных значений деформации использовалась функция Fcomp – Fringe Component – Ndv – z-displacement препроцессора LS-PrePost (рис. 6). Расчетные картины деформации образцов близки к экспериментальным.

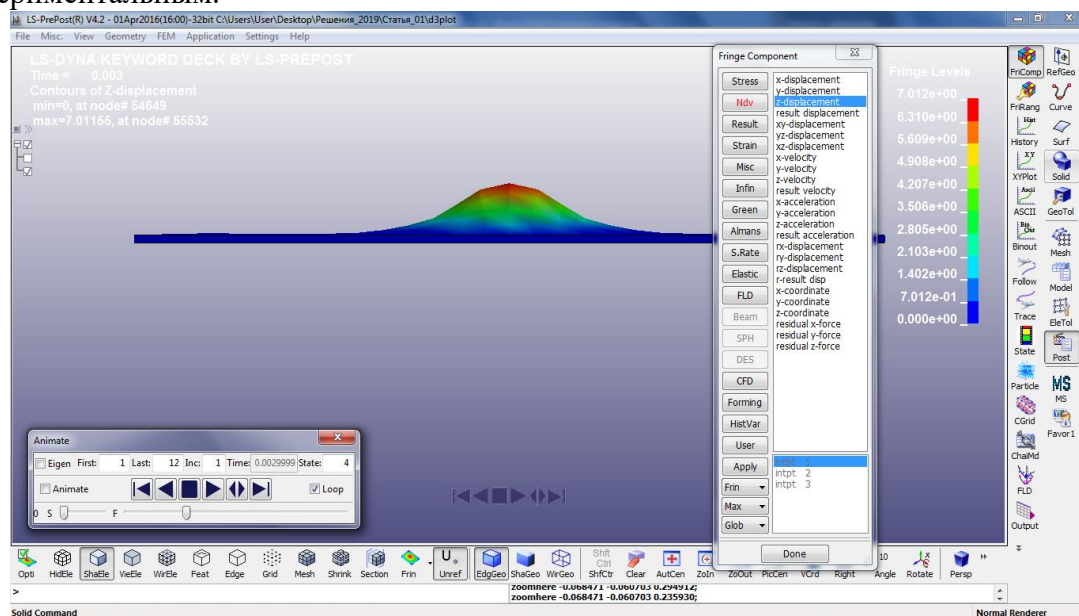


Рис. 5. Деформация пластины

На рис. 6, 7 представлены распределение деформаций по оси удара (слева) в сопоставлении с результатом эксперимента (справа) для двух вариантов сетки. Как и ожидалось, увеличение числа элементов сетки повышает адекватность модели. Для рассмотренных в работе пластин можно рекомендовать использовать конечно-элементные модели с числом элементов не менее 9000.

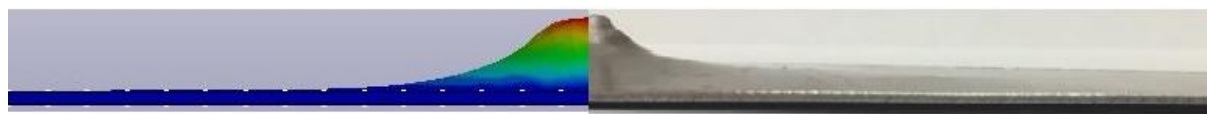


Рис. 6. Расчетная деформация пластины и экспериментальная (9375 элементов)

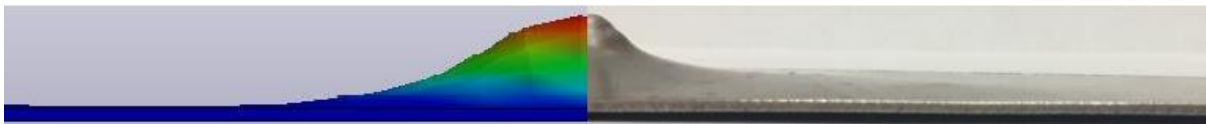


Рис. 7. Расчетная деформация пластины и экспериментальная (900 элементов)

Выводы

Выполнено экспериментальное и численное исследование процесса взаимодействия ударника и стальной пластины с использованием разработанной экспериментальной установки маятникового типа и программного комплекса LS-DYNA. Представлены результаты экспериментальных исследований и численного моделирования.

Установлено, что экспериментальные и расчетные данные хорошо согласуются между собой. Предложено использовать при моделировании процесса взаимодействия ударника и стальной пластины конечно-элементные модели с числом элементов не менее 9000.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бхатнагара, А. Мир материалов и технологий. Легкие баллистические материалы / А. Бхатнагара. — Москва: Техносфера, 2011. — 18 с.
2. Защита броневая автомобилей. Общие технические требования (с Изменениями N 1,2,3,4): ГОСТ Р 50963-96. — Введ. 01.09.13. — Москва: Акционерное общество Научно-исследовательский институт стали: Госстандарт России, 1996. — 33 с.
3. Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования / В.А. Григорян, И.Ф. Кобылкин, В.М. Маринин, Е.Н. Чистяков. Под ред В.А. Григоряна. - М.: Изд. РадиоСофт, 2008. - 406 с.: ил 123 ISBN 978-5-93274-013-2
4. Моделирование ударных процессов в тканевых бронежилетах и теле человека на вычислительном кластере «СКИФ Урал» / Н.Ю. Долганина, С.Б. Сапожников, А.А. Маричева – Вычислительные методы и программирование 2010 Т. 11 Вып. 1 С. 117-126
5. Пистолет белорусской разработки представлен на MILEX-2017 // БЕЛТА [Электронный ресурс]. 2018. — Режим доступа: <https://www.belta.by/society/view/pistolet-belorussoj-razrabotki-predstavlen-na-milex-2017-248445-2017/>. — Дата доступа: 21.12.2018.
6. Научно-производственный центр "ТЕХНОМАГ" ФТИ НАН Беларуси // Военно-промышленный комплекс [Электронный ресурс]. 2018. — Режим доступа: http://www.vpk.gov.by/catalog/defense_sector/. — Дата доступа: 21.12.2018.
7. Форенталь, М.В. Динамика локального деформирования и разрушения металлической пластины / М.В. Форенталь // Вестник ЮУрГУ, № 33, 2009 С.4-11
8. Муйземнек, А. Ю. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS-DYNA : учебное пособие / А. Ю. Муйземнек, А. А. Богач. - Пенза : Информационно- издательский центр ПГУ, 2005. - 106 с.
9. Шаш, Н.Численное моделирование проникания пуль стрелкового оружия в пластины из алюминиевых сплавов с использованием модифицированной модели Джонсона-Кука / Н. Шаш, В.Н. Зузов // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон, журн. 2017. № 01. С. 1-19. DOI: 10.7463/0117.0000922
10. Илюшкин, М.В. Моделирование процессов обработки металлов давлением в программе LS-DYNA. Теория и семинары. Материалы для подготовки курса лекций для повышения квалификации специалистов по моделированию процессов ОМД / М.В. Илюшкин. – Ульяновск, 2017 г -125 с.

11. *Лекции по ANSYS/LS-DYNA и основам LS-PREPOST с примерами решения задач [Электронный ресурс]: курс лекций для студ. мех.-мат. фак. обучающихся по специальное и 1-31 03 02 «Механика (по направлениям)».* В 3 ч. Ч. 1. ANSYS/LS-DYNA. Общая характеристика интерфейса и средств создания твердотельной модели детали. Использование моделей материалов и типов конечных элементов LS- DYNA / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. - Электрон, текстовые дан. - Минск : БГУ, 2013. - 161 с. : ил. - Библиогр.: с. 158-159. - Загл. с тит. экрана. - № 001918062013. Деу. в БГУ 18.06.2013.
12. ANSYS LS-DYNA // CADFEM [Электронный ресурс]. 2018. – Режим доступа: <http://www.cadfem-cis.ni/products/ansys/simulation/structural/explicit-dynamics/ls-dyna/>. – Дата доступа: 21.12.2018.
13. Динамика удара: Пер. с англ./ Дж. А. Зукас [и др]. – М.: Мир, 1985.-296 с.
14. Копер маятниковый 2083 КМ-0,4 Паспорт Г62. 774. 030 ПС – М.: Точприбор, 1985.— 36 с.

РАСЧЕТ КОНТУРНОГО УСИЛИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

¹ Мартыненко Т.М., ² Скляр О.Н., ² Мартыненко И.М.

¹ Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

² УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Одной из основных задач, возникающих при проектировании строительных конструкций, является задача определения полей перемещений и напряжений от действия заданных на конструкцию нагрузок. При этом поле напряжений имеет первостепенное значение. В общем случае, в соответствии с теорией упругости [1-4], решение такой задачи сводится к системе дифференциальных уравнений равновесия и совместности перемещений, при выполнении граничных условий для напряжений и перемещений. При этом напряжения и деформации связаны уравнениями состояния материала или законом Гука. При больших растягивающих усилиях возможно возникновение краевых эффектов, исследование которых позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки как суперпозицию основного и дополнительного [4]. Основное напряженно-деформированное состояние, как правило, описывается уравнениями безмоментной теории, дополнительное – линеаризованной системой уравнений относительно исходной системы уравнений движения [7]. Настоящая работа развивает это актуальное направление исследований и посвящена определению полей перемещений и напряжений, возникающих в непологий сферической оболочке от действия заданных нагрузок.

В качестве координатных линий будем рассматривать меридианы и параллели сферы, являющиеся линиями главных кривизн сферической оболочки. При этом оба главных радиуса кривизны R_1 и R_2 равны друг другу и равны радиусу сферы r_0 ; положение любой точки на меридиане определяется углом θ , отсчитываемым от вершины сферы. В соответствии с технической теорией оболочек Кирхгофа–Лява [1-6] уравнения равновесия осесимметричной деформации сферической оболочки представим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(T_1 \sin(\theta)) - T_2 \cos(\theta) + N_1 \sin(\theta) &= 0, \\ \frac{d}{d\theta}(N_1 \sin(\theta)) - (T_1 + T_2) \sin(\theta) &= pr_0 \sin(\theta), \\ \frac{d}{d\theta}(M_1 \sin(\theta)) - M_2 \cos(\theta) - N_1 r_0 \sin(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где T_1 – нормальное усилие, направленное по касательной к меридианному кругу; T_2 – нормальное усилие, направленное по касательной к параллельному кругу; M_1 – изгибающий момент, действующий в площадках, перпендикулярных меридиану; M_2 – изгибающий момент, действующий в площадках, перпендикулярных параллельному кругу; θ – окружная координата; N_1 – касательные усилия, отнесенные к единице длины срединной поверхности; p – интенсивность равномерно распределенной нагрузки нормального к поверхности сферической оболочки; r_0 – радиус сферы.

Таким образом, для сферической оболочки, нагруженной поперечной радиальной равномерно распределенной нагрузкой p , получим следующие частные решения:

$$T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = -\frac{Pr_0}{2}, \quad N_1 = M_1 = M_2 = 0, \quad (1.2)$$

где $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ – нормальное усилие, направленное по касательной к меридианному кругу посередине пролета, соответственно.

Согласно закону Гука [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta}(T_1 - \mu T_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta}(T_2 - \mu T_1). \quad (1.3)$$

Здесь E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, δ – толщина срединной поверхности оболочки.

Из соотношений (1.3) следуют выражения для компонентов деформации, соответствующие частному решению (1.2)

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = -\frac{Pr_0}{2E\delta}(1 - \mu). \quad (1.4)$$

Вектор перемещений любой точки срединной поверхности оболочки разложим на три составляющих u – перемещение в направлении касательной к меридиану, v – перемещение в направлении касательной к параллельному кругу, ω – перемещение в направлении нормали к срединной поверхности (к центру сферы). При осесимметричном деформировании срединной поверхности оболочки соотношения, связывающие деформации и перемещения срединной поверхности (u , ω – проекция перемещения точки срединной поверхности) имеют вид [4, 7]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{du}{d\theta} - \omega \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} (u \operatorname{ctg}(\theta) - \omega), \quad (1.5)$$

Отсюда с учетом (1.6) следует

$$u_0 = 0, \quad \omega_0 = \frac{Pr_0}{2E\delta}(1 - \mu). \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что радиус сферы изменяется на величину ω_0 . Заметим, что окружное перемещение v_0 тождественно равно нулю. Для замкнутой сферы, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, безмоментное решение является общим решением, так что безмоментное напряженное состояние является единственно возможным. Если же мы имеем не полную сферу, а лишь ее часть, для обеспечения безмоментного состояния этого сферического сегмента необходимо помимо внешнего давления p загрузить сферу на краю $\theta = \theta_0$ распределенными по всему контуру нормальными усилиями, касательными к меридианам и равными:

$$T_1^0 = \frac{Pr_0}{2}. \quad (1.7)$$

При этом, оболочка, должна обеспечить нормальное перемещение ω на её краю $\theta = \theta_0$, равное:

$$\omega = \omega_0 = \frac{Pr_0}{2E\delta}(1 - \mu). \quad (1.8)$$

Обозначим проекцию этого нормального перемещения на направление любого радиуса опорного контура сферической оболочки через Δ_0 , тогда:

$$\Delta_0 = \omega_0 \sin \theta_0 = \frac{Pr_0}{2E\delta}(1 - \mu) \sin \theta_0. \quad (1.9)$$

Величина Δ_0 есть ни что иное, как изменение радиуса опорного контура сферической оболочки.

Для нахождения истинного напряженного состояния необходимо к частному решению системы (1.1) добавить решение соответствующей системы однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(T_1 \sin(\theta)) - T_2 \cos(\theta) + N_1 \sin(\theta) &= 0, \\ \frac{d}{d\theta}(N_1 \sin(\theta)) - (T_1 + T_2) \sin(\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отсюда после соответствующих преобразований получим

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg}(\theta) + \frac{C}{\sin^2(\theta)} \quad (1.11)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

С учетом равенства (1.11) первое уравнение системы (1.10) принимает вид

$$\frac{dN_1}{d\theta} - \frac{C}{\sin^2 \theta} - T_2 = 0,$$

или

$$T_2 = \frac{dN_1}{d\theta} - \frac{C}{\sin^2 \theta}. \quad (1.12)$$

Поскольку из выражений (1.11) и (1.12) следует, что при $\theta=0$ (в вершине сферы) усилия T_1 и T_2 обращаются в бесконечность при любых заданных на краю усилиях, неизвестную постоянную интегрирования C примем равной нулю. Таким образом, решения однородных уравнений (1.10) принимают вид:

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg}(\theta), \quad T_2 = \frac{dN_1}{d\theta}. \quad (1.13)$$

Для нахождения перерезывающего усилия N_1 используем третье уравнение системы (1.1). С учетом выражений для изгибающих моментов $M_1 = D(x_1 + \mu x_2)$, $M_2 = D(x_2 + \mu x_1)$ и кривизн (1.2) это уравнение примет вид:

$$\frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \frac{d\chi}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - \chi(\mu + \operatorname{ctg}^2 \theta) = \frac{N_1 r_0^2}{D}. \quad (1.14)$$

Здесь $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, χ – угол поворота меридиана.

Уравнение (1.14) следует дополнить условием неразрывности срединной поверхности оболочки. Для этого выпишем выражения для компонентов деформации ε_1 , ε_2 и угла поворота меридиана χ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{du}{d\theta} - \omega \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} (u \operatorname{ctg}(\theta) - \omega), \quad \chi = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d\omega}{d\theta} + u \right). \quad (1.15)$$

Из второго и третьего равенств (1.15)

$$r_0 \chi = \left(\frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg}(\theta) \right) \operatorname{ctg}(\theta) - r_0 \frac{d\varepsilon_2}{d\theta}.$$

Из первых двух равенств (1.17) следует, что $r_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg}(\theta)$, поэтому

$$\chi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg}(\theta) - \frac{d\varepsilon_2}{d\theta}.$$

Отсюда, последовательно учитывая (1.15) и (1.13), будем иметь уравнение, связывающее перерезывающую силу N_1 с углом поворота χ , и дополняющее уравнение (1.14)

$$\frac{d^2 N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta} \operatorname{ctg}(\theta) + N_1 (\mu - \operatorname{ctg}^2(\theta)) = -E\delta\chi. \quad (1.16)$$

Решение поставленной задачи сводится к интегрированию системы уравнений (1.14), (1.16).

Уравнение (1.16) и есть второе уравнение, связывающее перерезывающую силу N_1 с углом поворота χ и вытекающее из условий сплошности сферической оболочки. Таким образом, мы пришли к следующей системе двух уравнений:

$$\frac{d^2 N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta} \operatorname{ctg}(\theta) + N_1 (\mu - \operatorname{ctg}^2(\theta)) = -E\delta\chi; \quad \frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \frac{d\chi}{d\theta} \operatorname{ctg}(\theta) - \chi (\mu + \operatorname{ctg}^2(\theta)) = \frac{N_1 r_0^2}{D}.$$

к интегрированию которой и сводится решение поставленной задачи.

Определив T_1 и χ мы можем легко определить все усилия и моменты, а также изменения кривизны и изменение радиуса опорного контура по формулам:

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg} \theta, \quad T_2 = \frac{dN_1}{d\theta}. \quad (1.17)$$

$$x_1 = \frac{1}{r_0} \frac{d\chi}{d\theta}; \quad x_2 = \frac{1}{r_0} \chi \operatorname{ctg} \theta. \quad (1.18)$$

$$M_1 = D(x_1 + \mu x_2) = \frac{D_0}{r_0} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \mu \chi \operatorname{ctg} \theta \right);$$

$$M_2 = D(x_2 + \mu x_1) = \frac{D_0}{r_0} \left(\chi \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \quad (1.19)$$

Что касается величины Δ , (полное перемещение) то если учесть нормальное перемещение $\omega_0 = -r_0 \varepsilon_2$, а также зависимости (1.3) и (1.17), для случая загрузки сферической оболочки контурными усилиями она будет равна:

$$\Delta_0 = -r_0 \varepsilon_2 \sin(\theta_0) = -\frac{r_0}{E\delta} (T_2 - \mu T_1) \sin(\theta_0) = -\frac{r_0 \sin(\theta_0)}{E\delta} \left(\frac{dN_1}{d\theta} - \mu N_1 \operatorname{ctg}(\theta_0) \right). \quad (1.20)$$

Формула (1.20) показывает, что в районе опорного контура в сферической оболочке возникают значительные изгибающие моменты, однако эти изгибающие моменты и им соответствующие изгибающие напряжения быстро затухают по мере удаления от опорного контура.

Заключение. Для обеспечения достаточной прочности относительно небольшой участок у опорного контура сферической оболочки необходимо сделать утолщенным, поэтому оболочка должна иметь ступенчато-переменную толщину. Анализ точного решения показывает, что у сферических оболочек, центральный угол который превышает $20-30^\circ$, деформации, вызываемые приложенными к ее контуру внешними силами, очень быстро затухают по мере удаления от этого контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В. Н., Хампке Э., Рауэ Э. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1990.-232 с.

2. Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: STT, 2004.- 465с.
3. Bangash M. Y. H. *Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies* // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.
4. Власов В.З. *Общая теория оболочек.* – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
5. Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. *Расчет пластин методом конечных элементов.* – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука , 1966г.
7. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек.* – Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.
8. *Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution.* Publisher Simulia, 2008. 711 p.
9. Matsagar Vasant A. *Computing stress and displacement response of composite plates under blast. Disaster Advances.* 2014. Vol. 7, No 1. P. 23–38.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ ДЕТАЛИ В УСЛОВИЯХ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

¹Вакулюк В.С., ¹Кирпичёв В.А., ¹Павлов В.Ф., ¹Сазанов В.П.

¹ ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королёва», г. Самара

Для оценки влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости деталей с концентраторами по остаточным напряжениям используются два критерия. Первым критерием [1,2] являются осевые остаточные напряжения $\sigma_z^{\text{пов}}$ на поверхности концентратора. Зависимость для определения приращения предела выносливости при изгибе в случае симметричного цикла $\Delta\sigma_{-1}$ упрочнённых деталей в этом случае имеет вид

$$\Delta\sigma_{-1} = \psi_{\sigma} \cdot |\sigma_z^{\text{пов}}|, \quad (1)$$

где ψ_{σ} – коэффициент влияния упрочнения по критерию $\sigma_z^{\text{пов}}$ на предел выносливости по разрушению.

Для определения второго критерия в работе [3] использовалось решение задачи [4] о дополнительных остаточных напряжениях в наименьшем сечении детали после нанесения на упрочнённую поверхность надреза полуэллиптического профиля. Выделив основную часть решения [4], был получен второй критерий $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ влияния упрочнения на предел выносливости детали в виде

$$\bar{\sigma}_{\text{ост}} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{\sigma_z(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (2)$$

где $\sigma_z(\xi)$ – осевые остаточные напряжения в опасном сечении детали, $\xi = a/t_{\text{кр}}$ – расстояние от дна концентратора до текущего слоя, выраженное в долях $t_{\text{кр}}$, a – расстояние от дна концентратора до текущего слоя, $t_{\text{кр}}$ – критическая глубина нераспространяющейся трещины усталости, возникающей при работе детали на пределе выносливости.

Критерий $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$, который называется критерием среднеинтегральных остаточных напряжений [3], имеет чётко выраженный физический смысл – это остаточное напряжение на дне нераспространяющейся трещины усталости с точностью до постоянного коэффициента, зависящего от радиуса у дна трещины и её глубины. Приращение предела выносливости $\Delta\sigma_{-1}$ при изгибе в случае симметричного цикла с использованием критерия $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ определяется по следующей формуле:

$$(\Delta\sigma_{-1}) = \bar{\psi}_{\sigma} |\bar{\sigma}_{\text{ост}}|, \quad (3)$$

где $\bar{\psi}_{\sigma}$ – коэффициент влияния упрочнения по критерию $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ на предел выносливости по разрушению.

В исследовании изучалось влияние концентраторов напряжений в виде надрезов различного радиуса при поверхностном пластическом деформировании образцов из стали 20 ($\sigma_{\text{в}} = 522$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 395$ МПа, $\delta = 26,1\%$, $\psi = 65,9\%$,

$S_k = 1416$ МПа) на предел выносливости при изгибе. Гладкие образцы диаметром 25 мм подвергались пневмодробеструйной обработке (ПДО) дробью диаметром 1,5-2 мм при давлении воздуха 0,25 МПа в течение 10 минут, а также обкатке роликом (ОР) диаметром 60 мм и профильным радиусом 1,6 мм при усилии $P = 0,5$ кН и $P = 1,0$ кН с подачей 0,11 мм/об и скоростью вращения образца 400 об/мин. Затем на упрочнённые и неупрочнённые гладкие образцы наносились круговые надрезы полукруглого профиля трёх радиусов: $R = 0,3$ мм, $R = 0,5$ мм и $R = 1,0$ мм.

Остаточные напряжения в гладких образцах определялись экспериментально методом колец и полосок [5]. Распределение осевых σ_z остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя a гладких образцов приведено на рис. 1. В гладких образцах после ПДО толщина поверхностного слоя со сжимающими остаточными напряжениями составила 0,32 мм, после ОР при $P = 0,5$ кН – 0,52 мм, при $P = 1,0$ кН – 0,70 мм.

Из данных рис. 1 следует, что после нанесения на упрочнённые ПДО образцы надрезов с радиусами $R = 0,3$ мм и $R = 0,5$ мм материал на дне концентраторов находился в ненаклёпанном состоянии. Такое же состояние наблюдалось после нанесения на упрочнённые обкаткой роликом образцы при $P = 0,5$ кН надрезов с радиусом $R = 0,5$ мм. Для образцов с надрезами $R = 1,0$ мм во всех случаях упрочнения материал на дне концентраторов находился в ненаклёпанном состоянии. В остальных случаях обкатки роликом материал на дне надрезов находился в наклёпанном состоянии ($P = 0,5$ кН – $R = 0,3$ мм; $P = 1,0$ кН – $R = 0,3$ мм и $R = 0,5$ мм).

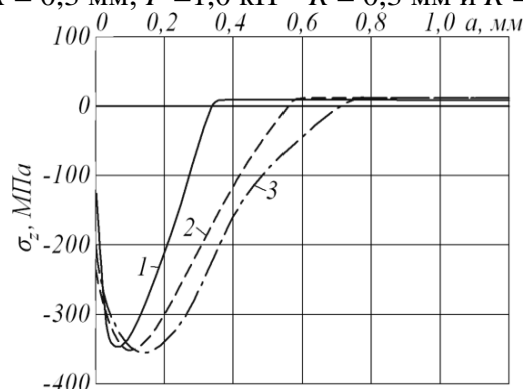


Рис. 1. Осевые σ_z остаточные напряжения в упрочнённых гладких образцах после: 1 – ПДО; 2 – ОР, $P = 0,5$ кН; 3 – ОР, $P = 1,0$ кН

Остаточные напряжения в упрочнённых образцах с надрезами определялись аналитическим методом – суммированием дополнительных остаточных напряжений за счёт перераспределения остаточных усилий при нанесении надреза и остаточных напряжений гладких образцов [4], а также численным методом с использованием программного комплекса Nastran/Patran. Следует отметить, что остаточные напряжения в образцах с надрезом, определённые аналитическим и численным методами, имели хорошее совпадение. Распределение осевых σ_z остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя a наименьшего сечения образцов приведено на рис. 2, 3.

Анализируя данные рис. 1–3, можно видеть, что при практически одинаковых максимальных остаточных напряжениях гладких образцов, в образцах с надрезом одного радиуса остаточные напряжения тем выше, чем больше толщина поверхностного слоя гладких образцов со сжимающими остаточными напряжениями. Эта закономерность объясняется концентрацией остаточных напряжений в области дна надреза в результате его нанесения на предварительно упрочнённую поверхность.

Необходимо обратить внимание на величину наибольших сжимающих остаточных напряжений на дне надреза, достигающих при $R = 0,3$ мм – 908 МПа (ОР,

$P = 1,0$ кН), которая превышает не только предел текучести, но и предел прочности материала образцов. Наблюдаемому явлению дано объяснение в работе [6], в которой показано, что наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений в упрочнённом поверхностном слое при плоском напряжённом состоянии может превышать даже сопротивление разрыву S_k материала детали на 15%. Этот предел в исследуемом случае ($S_k = 1416$ МПа) не достигнут.

Испытания на усталость при поперечном изгибе в случае симметричного цикла образцов с надрезами проводились на машине УММ-01 [7], база испытаний – $3 \cdot 10^6$ циклов нагружения. Результаты определения предела выносливости σ_{-1} представлены в таблице. Выстоявшие базу испытаний упрочнённые образцы при напряжении, равном пределу выносливости, доводились до разрушения при большем напряжении.

Во всех упрочнённых образцах были обнаружены нераспространяющиеся трещины усталости, средняя глубина $t_{кр}$ которых для каждой партии образцов представлена в таблице.

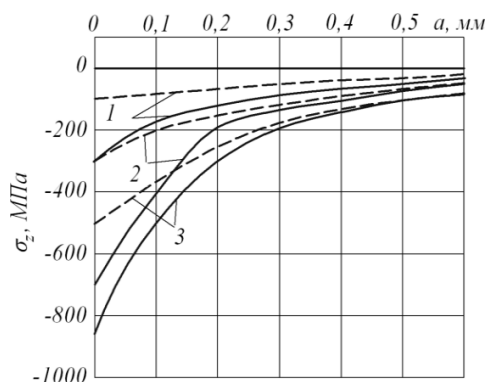


Рис. 2. Осевые σ_z остаточные напряжения в упрочнённых образцах с надрезами (— $R = 0,3$ мм; - - - $R = 0,5$ мм) после: 1 – ПДО; 2 – ОР, $P = 0,5$ кН; 3 – ОР, $P = 1,0$ кН

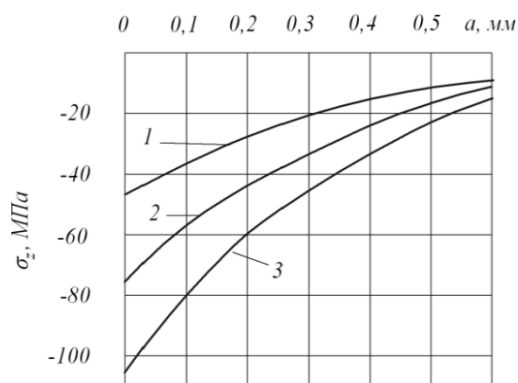


Рис. 3. Осевые σ_z остаточные напряжения в упрочнённых образцах с надрезами $R = 1,0$ мм после: 1 – ПДО; 2 – ОР, $P = 0,5$ кН; 3 – ОР, $P = 1,0$ кН

Следует отметить, что значения $t_{кр}$ хорошо согласуются с установленной ранее [8,9] зависимостью

$$t_{кр} = 0,0216 \cdot D, \quad (4)$$

где D – диаметр опасного сечения упрочнённого образца (детали) с концентратором напряжений.

Из данных таблицы видно, что с увеличением радиуса надреза приращение предела выносливости образцов за счёт упрочнения снижается, так как уменьшаются сжимающие остаточные напряжения в опасном сечении. Поэтому для сохранения эффекта упрочнения при опережающем поверхностном пластическом деформировании

с увеличением радиуса надреза необходимо увеличивать толщину слоя гладкой детали со сжимающими остаточными напряжениями.

Таблица 1 – Результаты испытаний на усталость и определения остаточных напряжений

Концентратор R , мм	K_σ	Неупроч. образцы σ_{-1} , МПа	Упрочнённые образцы						
			обработка	σ_{-1} , МПа	$\sigma_z^{\text{пов}}$, МПа	Ψ_σ	$t_{\text{кр}}$, мм	$\bar{\sigma}_{\text{ост}}$, МПа	$\bar{\Psi}_\sigma$
надрез 0,3	2,7	107,5	ПДО	137,5	-343	0,087	0,540	-87	0,345
			ОР, $P = 0,5$ кН	165	-787	0,073	0,510	-171	0,336
			ОР, $P = 1,0$ кН	175	-908	0,074	0,520	-202	0,334
надрез 0,5	2,6	112,5	ПДО	130	-142	0,123	0,525	-52	0,337
			ОР, $P = 0,5$ кН	150	-349	0,107	0,530	-111	0,338
			ОР, $P = 1,0$ кН	172,5	-515	0,117	0,520	-169	0,355
надрез 1,0	2,2	112,5	ПДО	120	-46	0,163	0,490	-21	0,357
			ОР, $P = 0,5$ кН	130	-92	0,190	0,510	-46	0,380
			ОР, $P = 1,0$ кН	142,5	-145	0,207	0,495	-79	0,380

Результаты испытаний на усталость указывают на то, что распределение сжимающих остаточных напряжений в поверхностно упрочнённых деталях должно быть наиболее полным по толщине поверхностного слоя, равной критической глубине $t_{\text{кр}}$ нераспространяющейся трещины усталости.

Значения остаточных напряжений на поверхности концентраторов $\sigma_z^{\text{пов}}$ и среднеинтегральных остаточных напряжений $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ приведены в таблице. По результатам испытаний на усталость неупрочнённых и упрочнённых образцов по формулам (1) и (3) вычислялись коэффициенты Ψ_σ и $\bar{\Psi}_\sigma$, значения которых представлены в таблице. Из данных таблицы можно видеть, что оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости образцов по первому критерию – остаточным напряжениям на поверхности концентратора $\sigma_z^{\text{пов}}$ – приводит к значительному рассеянию коэффициента Ψ_σ . Этот коэффициент в настоящем исследовании изменяется в широких пределах – от 0,073 до 0,207, то есть почти в три раза, что неприемлемо для прогнозирования предела выносливости поверхностно упрочнённых деталей.

Оценка влияния поверхностного упрочнения по второму критерию – среднеинтегральным остаточным напряжениям $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$ – приводит к существенно меньшему рассеянию соответствующего коэффициента $\bar{\Psi}_\sigma$. Это объясняется тем, что критерий среднеинтегральных остаточных напряжений учитывает влияние на сопротивление усталости не только величины сжимающих остаточных напряжений, но и характера их распределения по толщине поверхностного слоя опасного сечения детали (образца). Коэффициент $\bar{\Psi}_\sigma$ в проведённом исследовании изменяется от 0,334 до 0,380 и практически совпадает со значением $\bar{\Psi}_\sigma$, вычисленным по следующей формуле, полученной на основании обработки большого количества экспериментальных данных [10]:

$$\bar{\Psi}_\sigma = 0,514 - 0,065 K_\sigma, \quad (5)$$

где K_σ – эффективный коэффициент концентрации напряжений, значения которого определялись по справочным данным [11, 12] и представлены в таблице.

Таким образом, коэффициент $\bar{\Psi}_{\sigma}$, вычисленный с учётом степени концентрации напряжений по формуле (5), представляется возможным использовать для прогнозирования приращения предела выносливости поверхностно упрочнённых деталей с концентраторами напряжений по критерию среднеинтегральных остаточных напряжений $\bar{\sigma}_{\text{ост}}$.

Необходимо отметить, что на значения коэффициентов Ψ_{σ} и $\bar{\Psi}_{\sigma}$ не оказывает влияние состояние материала на поверхности концентраторов. Из данных таблицы видно, что не наблюдается определённой зависимости между величинами коэффициентов Ψ_{σ} и $\bar{\Psi}_{\sigma}$ и наклёпанным или ненаклёпанным состоянием материала образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов С.И. Влияние остаточных напряжений и наклёпа на усталостную прочность / С.И. Иванов, В.Ф. Павлов // Проблемы прочности. – 1976. – № 5. – С. 25-27.
2. Серенсен С.В. К вопросу об оценке сопротивления усталости поверхностно упрочнённых образцов с учётом кинетики остаточной напряжённости / С.В. Серенсен, С.П. Борисов, Н.А. Бородин // Проблемы прочности. – 1969. – № 2. – С. 3-7.
3. Павлов В.Ф. О связи остаточных напряжений и предела выносливости при изгибе в условиях концентрации напряжений / В.Ф. Павлов // Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – № 8. – С. 29-32.
4. Иванов С.И. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / С.И. Иванов, М.П. Шатунов, В.Ф. Павлов // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. – Куйбышев: КуАИ. – 1974. – Вып. 1. – С. 88-95.
5. Иванов С.И. К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок / С.И. Иванов // Остаточные напряжения. – Куйбышев: КуАИ – 1971. – Вып. 53. – С. 32-42.
6. Радченко В.П. Наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений при поверхностном упрочнении деталей / В.П. Радченко, В.Ф. Павлов // Прочность материалов и элементов конструкций: тр. МНТК. – Киев: ИПП им. Г. С. Писаренко, НАНУ. – 2011. – С. 354-357.
7. Филатов Э.Я. Универсальный комплекс машин для испытания материалов и конструкций на усталость. / Э.Я. Филатов, В.Э. Павловский – Киев: Наукова Думка, 1985. – 92 с.
8. Павлов В.Ф. Влияние на предел выносливости величины и распределения остаточных напряжений в поверхностном слое детали с концентратором. Сообщение I. Сплошные детали / В.Ф. Павлов // Известия вузов. Машиностроение. – 1988. – № 8. – С. 22-25.
9. Павлов В.Ф. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. / В.Ф. Павлов, В.А. Кирпичёв, В.С. Вакулюк – Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2012. – 125 с.
10. Кирпичёв В.А. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочнённых деталей при различной степени концентрации напряжений / В.А. Кирпичёв, А.С. Букатый, А.П. Филатов, А.В. Чирков // Вестник УГАТУ. – 2011. – Т. 15. – №4(44). – С. 81-85.
11. Серенсен С.В. Несущая способность и расчёт деталей машин на прочность. / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович – М.: Машиностроение, 1975. –

- 488 с.
12. *Петерсон Р.Е. Коэффициенты концентрации напряжений. / Р.Е. Петерсон – М.: Мир, 1977. – 304 с.*

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ НАГРУЗОЧНЫХ БЛОКОВ И ПРОЕКТНЫЙ РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОГО РЕСУРСА ДЕТАЛЕЙ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

¹ Капуста П.П.

¹ Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Постановка задачи. Большинство конструкций и деталей машин, в т.ч. - мобильных, в эксплуатации испытывает случайное нагружение (Рисунок 1).

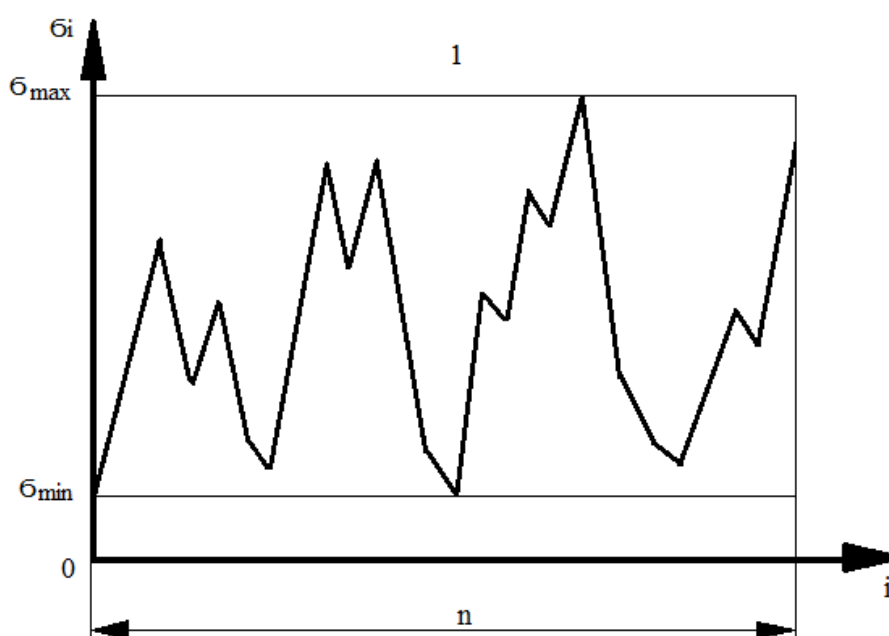


Рис. 1. Схема случайного нагружения

При вероятностных расчетах на долговечность актуальным является вопрос учета всех повреждающих напряжений эксплуатационного нагружения в процессе снижения предела выносливости с выработкой ресурса. Накопление повреждений в расчетах долговечности, при подключении все более низких напряжений нагрузочного блока, учитывают с помощью гипотез суммирования усталостных повреждений [1...11]. Однако, не выясненными остаются вопросы методики формирования нагрузочного блока и перехода между режимами разной степени тяжести нагружения, как в случае одного материала и конструкции детали, так и при их проектном изменении, в.ч. – при использовании степенного уравнения кривой усталости, наиболее приемлемого для проектных расчетов ресурса [2...3].

Методика исследования. Системный анализ эксплуатационной и аналитической динамики различных классов машин, процессов случайного нагружения их несущих систем, агрегатов, узлов, конструкций и деталей. Обоснование принципов универсального способа формирования нагрузочных блоков, назначения их основных характеристик на стадиях проектирования и “прочностной доводки” машин и методических оснований проектных расчетов усталостного ресурса с учетом степени тяжести процессов случайного нагружения. Алгоритмизация и программирование расчетов характеристик формируемых нагрузочных блоков и усталостного ресурса

деталей машин и конструкций. Верификация разработанных методов на результатах натурных и вычислительных компьютерных экспериментов.

Результаты исследований и их обсуждение.

Приводятся принципы, методика и методы формирования и аппроксимации нагрузочных блоков и расчета усталостного ресурса, при использовании степенного уравнения кривой усталости, наиболее приемлемого на стадии проектирования деталей машин и элементов конструкций при случайном нагружении в зависимости от эксплуатационных условий их функционирования.

1. Методы анализа эксплуатационной нагруженности и приведения асимметричных циклов напряжений к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным или отнулевым [5...8].

При анализе случайного нерегулярного нагружения, которое характеризуется переменным коэффициентом асимметрии цикла $R = \left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)$, для построения

нагрузочных блоков и расчета ресурса несущих систем, конструкций и деталей машин требуется приведение циклов с переменным коэффициентом асимметрии к эквивалентным по повреждению циклам с постоянным коэффициентом асимметрии. Предпочтительным, но не обязательным, является приведение к симметричным циклам, но рассматриваемый ниже подход может быть использован для приведения циклов с переменным коэффициентом асимметрии к циклам с постоянным коэффициентом асимметрии в диапазоне $-1 \leq R < +1$, например, к отнулевым циклам при $R=0$. Необходимость приведения к отнулевым циклам возникает, например, в случаях конструкций, работающих в условиях пульсирующего давления, где симметричные циклы не реальны. Для целей приведения к эквивалентным циклам используют различные уравнения кривых усталости [1, 3, 5, 7].

При проектных расчетах распространение получило степенное уравнение [4, 5, 6, 8 ... 11]. Запишем его следующим образом:

$$N = N_G \cdot \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_R} \right)^{-m}, \quad (1)$$

где N - число циклов до предельного повреждения; N_G - число циклов до нижнего перелома кривой усталости; σ_R - предел выносливости при коэффициенте асимметрии R ; m - показатель наклона левой ветви кривой усталости в логарифмической системе координат; σ_{\max} - максимальное напряжение цикла.

В уравнении (1) - отношение $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_R}$ - степень перегрузки.

Если число циклов N_G и показатель степени m не зависят от асимметрии нагружения, то принцип приведения асимметричных циклов к эквивалентным по повреждению симметричным σ_{E-1} формулируется как равенство степенной нагрузки

$$\frac{\sigma_{E-1}}{\sigma_{-1}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_R}. \quad (2)$$

Из последнего уравнения

$$\sigma_{E-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_R} \cdot \sigma_{\max}. \quad (3)$$

Или, с учетом уравнения (2),

$$\sigma_{E_{-1}} = \frac{\sigma_{-1}}{a_{E_{-1}} \cdot \sigma_{-1}} \cdot \sigma_{\max} = \frac{1}{a_{E_{-1}}} \cdot \sigma_{\max}, \quad (4)$$

где: $a_{E_{-1}}$ – коэффициент приведения асимметричных циклов к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным, определяемый по формуле (5)

$$a_{E_{-1}} = \frac{2}{[2 - (1 - \psi) \cdot (1 + R)]}, \quad (5)$$

a_{E_0} – коэффициент приведения асимметричных циклов к эквивалентным по повреждающему воздействию отнулевым, определяемый по формуле (6)

$$a_{E_0} = \frac{(1 + \psi)}{[2 - (1 - \psi) \cdot (1 + R)]} \quad (6)$$

После подстановок и несложных преобразований получено уравнение (7) приведения асимметричных циклов к эквивалентным по повреждению симметричным:

$$\sigma_{E_{-1}} = \sigma_{\max} \cdot \left[1 - \frac{(1 - \psi) \cdot (1 + R)}{2} \right]. \quad (7)$$

Аналогично получено уравнение (8) приведения асимметричных циклов к эквивалентным по повреждению отнулевым:

$$\sigma_{E_0} = \sigma_{\max} \cdot \left[\frac{2 - (1 - \psi) \cdot (1 + R)}{1 + \psi} \right]. \quad (8)$$

Отметим, что в уравнениях (7) и (8), по сравнению с уравнениями используемыми ранее [1 ... 3], эквивалентные напряжения не зависят от величины пределов выносливости, что является существенным преимуществом при накоплении банка данных о нагруженности конструкций.

В качестве примера выполнены расчеты эквивалентных напряжений для образцов стали 10ХСНД: $\sigma_{-1} = 221$ МПа; $\psi = 0,44$ (испытания проведены Почтенным Е.К. с учениками) с использованием уравнений (7) и (8) при $\sigma_{\max} = 500$ МПа со значениями коэффициента асимметрии R равными: $-0,5$; 0 ; $+0,5$, а результаты сведем в таблицу 1.

Таблица 1 – Приведенные эквивалентные напряжения σ_{E_R} при различных коэффициентах асимметрии циклов напряжений R

R	0,5	0	+0,5
σ_{E_R}	430	360	280

В заключение отметим, что уравнения (7) и (8) рекомендуется использовать при приведении асимметричных циклов к эквивалентным по повреждению симметричным или отнулевым, если расчет ресурса ведется как по результатам натурных усталостных испытаний конструкций, так и при проектных расчетах в случае описания кривой

усталости степенной функцией, что обеспечивает наиболее приемлемые сопоставимые оценки характеристик нагруженности и усталостного ресурса.

2. Разработка методических принципов прогнозирующего расчета усталостного ресурса деталей машин и элементов конструкций в зависимости от проектируемых условий их эксплуатационной нагруженности.

Для обеспечения требуемой надежности на стадии проектирования деталей машин и элементов конструкций, испытывающих нерегулярное нагружение, необходима методика прогнозирующего вероятностного расчета долговечности в зависимости от проектируемых условий нагружения, т.е. режимов, которые будут испытывать реальные детали в эксплуатации.

На основании проведенных исследований, методические принципы расчета можно представить по следующей схеме: определение характеристик сопротивления усталости в вероятностном аспекте [4, 9 ... 10]; схематизация и приведение рядов напряжений со случайными значениями коэффициентами асимметрии к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным или отнулевым циклам [5]; вероятностная проектная оценка нагруженности [6]; вычисление долговечности с учетом суммирования усталостных повреждений в процессе снижения предела выносливости [10, 11]. При этом, на всех стадиях расчета будем считать справедливыми гипотезы о постоянстве числа циклов до точки нижнего перелома кривой усталости N_G и показателя наклона левой ветви кривой усталости m [9 ... 11].

Для экспериментальной проверки разрабатываемой методики использованы результаты экспериментов по испытанию локальных моделей рам тракторных прицепов при регулярном нагружении [2, 3], характеристики сопротивления усталости которых, в случае описания кривой усталости степенной функцией, определены ранее [9 ... 10]: $\bar{\sigma}_{R_{p=0,5}} = 63,84 \text{ МПа}$; $N_G = 3,2 \cdot 10^6$ циклов; $m = 4,09$. Характеристики эксплуатационной нагруженности, полученные путем тензометрирования опасных с точки зрения усталости локальных элементов рам тракторных прицепов [2, 3] в виде параметров распределения Вейбулла приведены в таблице 2. При этом на основании указанных экспериментов, размер блока нагружения для двух приведенных в таблице 1 эксплуатационных нагрузочных режимов принят $n = 10^4$ циклов, а количество циклов напряжений приходящихся на 1 км пробега равнялось $l = 250$ циклов/км.

Таблица 2 - Характеристики эксплуатационной нагруженности рам прицепов

Эксплуатационный режим нагружения	σ_{\max} , МПа	σ_{\min} , МПа	σ_w , МПа	$\frac{\sigma_w}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}$	w
1. Движение по спрофилированной грунтовой дороге с грузом	118,00	24,00	23,00	0,2447	1,58
2. Движение по бездорожью с грузом	170,00	21,00	40,00	0,2685	1,68

3. Основные положения методики расчета усталостного ресурса деталей машин и конструкций.

Основные положения методики расчета на долговечность деталей машин при нерегулярном нагружении, в т.ч. – с применением степенного уравнения кривой

усталости, разработанные автором, опубликованы в [10, 11] и др. – более ранних работах.

Исходными данными для расчета деталей и элементов конструкций, подверженных в эксплуатации нерегулярному нагружению, являются: начальное значение предела выносливости $\overline{\sigma}_R$ (или σ_{RP} - начальное значение предела выносливости, соответствующее заданной вероятности неразрушения P); показатель наклона левой ветви кривой усталости m ; значение максимального напряжения нагруженного блока σ_{\max} ; значение минимального напряжения нагруженного блока σ_{\min} ; значения параметров σ_w и w ; значение числа циклов до точки нижнего перелома кривой усталости N_G при регулярном нагружении.

Расчет включает в себя:

- определение (уточнение) размера нагруженного блока по формуле

$$n = \exp \left[\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_w} \right)^w \right]; \quad (9)$$

- вычисление всех значений σ_i – х напряжений нагруженного блока размером n (i изменяется от 1 до n) по формуле

$$\sigma_i = \sigma_{\min} + \sigma_w \cdot \left[\ln \left(\frac{n}{i} \right)^{\frac{1}{w}} \right]; \quad (10)$$

- вычисление относительной доли каждого σ_i – го напряжения n_i в нагруженном блоке по формуле

$$\beta_i = \frac{n_i}{n} = \text{const}; \quad (11)$$

- вычисление конечного (минимального) значения предела выносливости, соответствующего моменту долома

$$\sigma_{RK} = \sigma_{Rj=k} = \sigma_{\max} \cdot \left(\frac{1}{N_G} \right)^{\frac{1}{m}}; \quad (12)$$

- вычисление долговечности (суммарного числа циклов до разрушения) с использованием метода линейного суммирования Почтенного Е.К., развитого в более ранних совместных [4, 5, 8 и др.] и персональных работах автора статьи, применительно к уравнению степенной функции кривой усталости (1) в записи (13), используемой в [9 ... 11] и др. более ранних работах,

$$N = N_G \cdot \left(\frac{\sigma_R}{\sigma} \right)^m, \quad (13)$$

где σ_R - предел выносливости при заданном коэффициенте асимметрии циклов напряжений R [9 ... 11], МПа;

σ - напряжение (в МПа), соответствующее долговечности N (в циклах).

Суммарное число циклов, необходимое для снижения предела выносливости от начального значения σ_{RH} до конечного σ_{RK} , соответствующего моменту долома, определяется по формуле

$$N_{\Sigma} = \sum_{j=1}^k \Delta N_{\Sigma j}, \quad (14)$$

где $\Delta N_{\Sigma j}$ - суммарное число циклов, необходимое для снижения предела выносливости на величину $\Delta \sigma_R$, определяемое по формуле (15)

$$\Delta N_{\Sigma j} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\Delta N_{Ti}} \right)^{-1}, \quad (15)$$

где β_i - относительная продолжительность действия σ_i - го напряжения блока, равная

$$\beta_i = \frac{N_i}{n}, \quad (16)$$

где N_i - число циклов в блоке n действия σ_i -го напряжения;

n - число циклов всех напряжений, действующих в данном нагрузочном блоке.

Число циклов ΔN_{Ti} , необходимое для снижения предела выносливости на величину $\Delta \sigma_R = \sigma_{Rj} - \sigma_{R(j+1)}$, определяется по уравнению (17)

$$\Delta N_{Ti} = N_G \cdot \left[\left(\frac{\sigma_{Rj}}{\sigma_i} \right)^m - \left(\frac{\sigma_{R(j+1)}}{\sigma_{(i+1)}} \right)^m \right]. \quad (17)$$

Выходными данными расчета являются: размер нагрузочного блока n , σ_{RK} и долговечность (суммарное число циклов до разрушения) N_{Σ} .

Разработаны схема алгоритма и программа расчета долговечности по предлагаемой методике. В результате расчета, средневероятная при ($P = 0,5$) долговечность рам в условиях движения по бездорожью с грузом (режим 2 по таблице 2), при $\bar{\sigma}_{RP=0,5} = 63,84$ МПа, $m=4,09$ и $N_G = 3,2 \cdot 10^6$ циклов, составила $N_{\Sigma} = 2480562$ цикла. При этом, в расчете учитывался каждый цикл напряжений нагрузочного блока с общим количеством экстремумов в блоке равным $n = 10^4$. Очевидно, что такой подход дает наибольшую точность суммирования. Ошибка может быть обусловлена лишь погрешностью аппроксимации реального убывающего ряда напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_i > \dots > \sigma_n$ с помощью распределения Вейбулла.

Следует отметить, однако, большую длительность расчета на ПЭВМ IBM386DX-40МГц. Общее время расчета составило около 25 часов, что, естественно, затруднит использование метода в КБ и САПР при использовании более мощных компьютеров.

В связи с изложенным, встает вопрос разработки методики формирования нагрузочного блока и выбора шага напряжений $\Delta \sigma$ при суммировании повреждений, обеспечивающих уменьшение времени счета с сохранением достаточной точности определения N_{Σ} .

4. Методика формирования нагрузочного блока.

На начальной стадии исследований, предложены 2 варианта формирования нагрузочного блока и определения приемлемого с точки зрения точности значения долговечности N_{Σ} . Схемы предложенных вариантов приведены на рисунке 2.

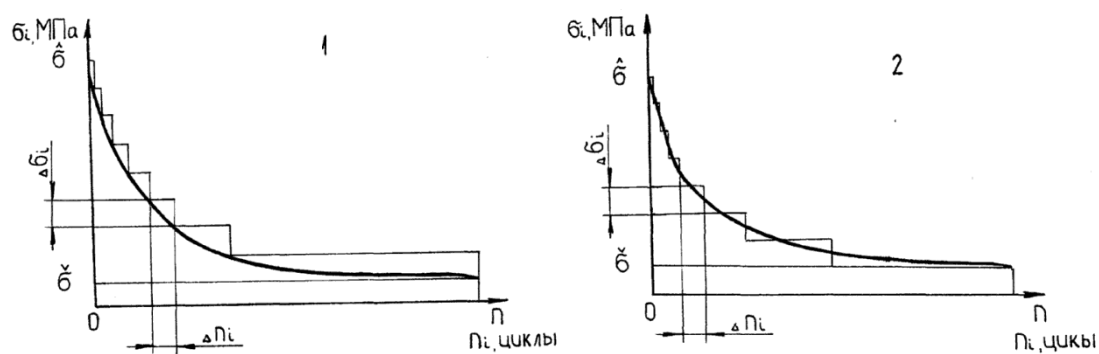


Рис. 2. Варианты формирования нагрузочных блоков

Как видно из рисунка 2, сущность формирования нагрузочных блоков заключается в определении требуемого с точки зрения точности расчета шага напряжений $\Delta\sigma_i$ в аппроксимированном распределении Вейбулла нагрузочном блоке. Очевидно, что при увеличении $\Delta\sigma_i$ от нуля и выше, мы пренебрегаем учетом каждого напряжения нагрузочного блока, уменьшая тем самым количество уровней напряжений, по которым осуществляется расчетное суммирование усталостных повреждений в процессе снижения предела выносливости.

Расчет в данном случае отличается от расчета с использованием ступеньчатых блоков, например - в [6, 11], тем, что после вычисления убывающего ряда σ_i -ых напряжений по формуле (10), последний разбивается на интервалы с одинаковым шагом $\Delta\sigma_i$. Далее подсчитывается количество экстремумов σ_i -ых напряжений Δn_i , приходящихся на каждый интервал $\Delta\sigma_i$. После этого определяется относительная доля каждого интервала напряжений в новом ступенчатом нагрузочном блоке по формуле (16).

Очевидно, что, при таком подходе, с ростом шага напряжений $\Delta\sigma_i$ скорость счета будет возрастать при одновременном снижении точности вычисления долговечности N_Σ .

Для двух предложенных на рисунке 1 вариантов формирования нагрузочных блоков (1 и 2) разработаны схемы алгоритма и программы определения долговечности на ПЭВМ. С целью определения приемлемого варианта проведен сравнительный машинный эксперимент по определению оптимального с точки зрения точности и времени счета шага напряжений для обоих вариантов. Результаты расчета приведены на рисунке 3.

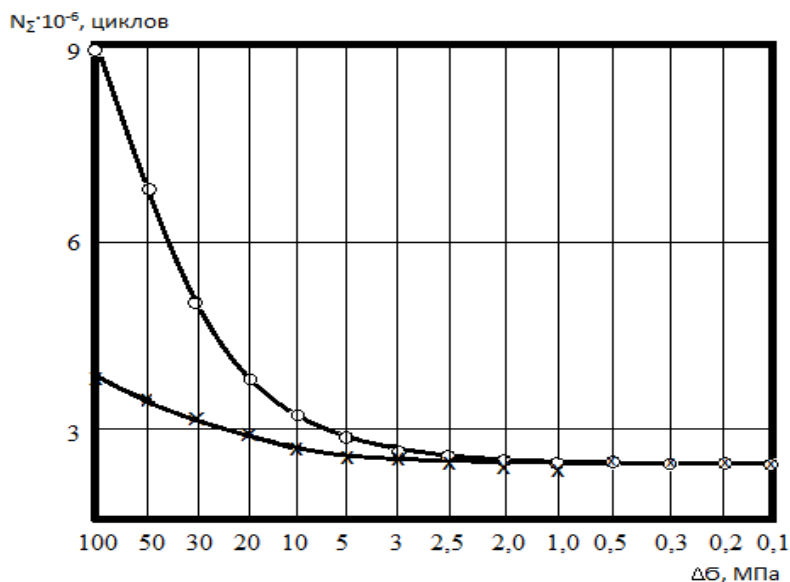


Рис. 3. Зависимость усталостного ресурса при нерегулярном нагружении рам от шага напряжений в нагрузочном блоке (по рис. 2: ○ - вариант 1; × - вариант 2)

Совместный анализ рисунков 2 и 3 позволяет сделать вывод о целесообразности использования в расчетной практике метода формирования нагрузочного блока 2 (по рисунку 2), т.к. в этом случае требуемая точность определения N_{Σ} до 100 циклов (соответствует точности измерений числа циклов до разрушения со счетчиков испытательных машин) достигается при шаге напряжений $\Delta\sigma \leq 0,2\text{МПа}$ и времени расчета около 4,5 мин. Аналогичная точность по методу 1 достигается при шаге напряжений $\Delta\sigma \approx 0,1\text{МПа}$ и времени счета около 14 часов.

Схема расчетного блока случайного нагружения приведена на рисунке 4.

Таким образом, в отличие от ранее принятой расчетной пратики, эксплуатационный ступенчатый блок заменен блоком, аппроксимированным по предложенной методике [6], что позволит при расчете долговечности учесть каждое напряжение блока, имея в арсенале средств автоматизации работы конструкторов и расчетчиков быстродействующие персональные компьютеры. Отметим, что в данном случае нагруженность задается в вероятностном аспекте, что весьма важно при вероятностных расчетах долговечности.

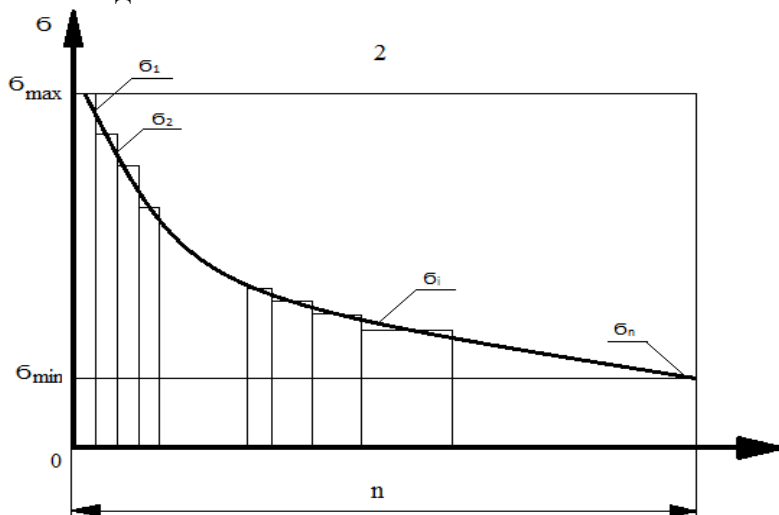


Рис.4. Схема расчетного блока случайного нагружения

С целью автоматизации разработанной методики анализа случайных процессов нагруженности и построения нагрузочных блоков разработаны схема алгоритма и программа для расчета усталостного ресурса деталей машин и конструкций с формированием нагрузочного блока по методу 2 (рисунок 4).

5. Заключение. На основании проведенных исследований разработаны: методы формирования и аппроксимации нагрузочных блоков и расчета усталостного ресурса, в.ч. – при использовании степенного уравнения кривой усталости, наиболее приемлемого на стадии проектирования деталей машин и элементов конструкций при случайном нагружении в зависимости от эксплуатационных условий их функционирования; схема алгоритма и программа для расчета усталостного ресурса деталей машин и конструкций с формированием нагрузочных блоков, в.ч. – обоснованием их основных характеристик (шага напряжений и др.). Выполнена верификация разработанных методов на результатах натуральных и вычислительных компьютерных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Почтенный Е.К. Упрощенный метод линейного суммирования усталостных повреждений с учетом снижения предела выносливости // Вестник машиностроения. - 1986. - №8. - С. 33 - 37.
2. Вероятностная оценка долговечности рам транспортных средств: оперативно-информационные материалы / Е.К. Почтенный, А.И. Журавель, К.В. Щурин, В.И. Миркитанов и др.- Минск: Изд. ИНДМАШ АН БССР, 1985. - 38 с.
3. Почтенный Е.К. Вероятностная оценка долговечности деталей машин при нерегулярном нагружении по результатам испытаний при регулярном нагружении // Надежность и контроль качества. - 1988. - №10. - С. 25 - 29.
4. Почтенный Е.К., Капуста П.П. Вероятностные диаграммы многоциклового усталости деталей машин // Вестник машиностроения. - 1993. - № 12.- С. 5 - 7.
5. Почтенный Е.К., Капуста П.П. Приведение асимметричных циклов к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным или отнулевым // Весці НАН Беларусі: Серыя фізіка-тэхнічных навук.- 2000. - №2. - С. 59 - 61.
6. Капуста П.П. Методика оценки нерегулярной нагруженности деталей и конструкций машин // Вестник машиностроения. – 2005. - №6. – С. 13-18.
7. Почтенный Е.К., Капуста П.П. Прогнозирование эксплуатационного нагружения несущих конструкций автомобилей-самосвалов // Горная механика. – 2005. - № 3. - С. 47-60.
8. Почтенный Е.К., Капуста П.П. Экспериментально-аналитическая методика ускоренных испытаний конструкций при регулярном многоцикловоом нагружении и оценка их ресурса при случайном многочастотном и многорежимном нагружении // Вестник машиностроения. – 2006. - №1. – С. 28-40.
9. Капуста П.П. Вариация характеристик сопротивления усталости сталей на разных уровнях напряжений при проектных оценках ресурса // Материалы, технологии, инструменты. – 2009, том 14, № 4, - С. 22-29.
10. Капуста П.П. Вариация характеристик сопротивления усталости при регулярном нагружении стали в процессе развития повреждений и снижения предела выносливости при проектной оценке ресурса // Материалы, технологии, инструменты. - 2011, том 16, № 1, – С. 11 – 15.
11. Капуста П.П. Проектные кинетические диаграммы усталости стали и вероятностная оценка ресурса при нерегулярном нагружении с учетом снижения предела выносливости // Материалы, технологии, инструменты. - 2011, том 16, № 2, – С. 14 – 21.

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.374

Плескачевский Ю.М., Журавков М.А., Старовойтов Э.И. **Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 3-9. Рассмотрено деформирование в температурном поле круговой трехслойной пластины. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Аналитическое решение приведено в функциях Бесселя для случаев локальной сплошной и кольцевой нагрузок. Проведена численная апробация решений при различных температурах. – **Ил. 4. Библиогр. – 15 назв.**

УДК 532.5

Конон П.Н., Могилевский Е.И. **О сотрудничестве между механико-математическими факультетами МГУ им. М.В. Ломоносова и БГУ в исследованиях в области гидродинамики** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 10-16. Приводится информация о проведенном в декабре 2018 года на механико-математическом факультете БГУ семинаре с участием исследователей из Белоруссии и России. Излагаются аннотации докладов. – **Ил. 4. Библиогр. – 16 назв.**

УДК 621.313.13

Карпович С.Е., Кузнецов В.В., Войтов А.Ю. **Мехатронные системы параллельной кинематики для фотолитографического оборудования** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 17-22. Рассмотрена система перемещений на кольцевом приводе прямого действия, предназначенная для юстировки оптических элементов фотолитографического оборудования. Выполнено имитационное моделирование исполнительного механизма параллельной кинематики. – **Ил. 4. Библиогр. – 8 назв.**

УДК 539.4

Чигарев А.В., Поленов В.С. **Искривление лучей гравитационных и оптических волн в атмосфере массивных тел** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 23-27. Рассмотрены основные закономерности искривления лучей гравитационных и оптических волн вблизи массивных тел. – **Ил. 1. Библиогр. – 7 назв.**

УДК 621.0: 621.3

Гаст С., Циммерманн К., Минченя В.Т., Лысенко В.Г. **Моделирование и симмуляция магнитного поля тактильного датчика на основе магниточувствительных эластомеров** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 28-35. В этой работе предложена концепция для тактильного датчика, использующего магниточувствительные эластомеры (MSE) в качестве чувствительного и одновременно активного материала. Эта система датчиков, разделенная на два слоя с различными функциями и жестким соединением, предназначена для демонстрации возможностей MSE для тактильного восприятия. В то время как первый слой отвечает за измерение деформации, второй слой активно усиливается за счет приложенного тока. С помощью упрощенной механической модели определены показатели и параметры материала для экспериментальных исследований. Кроме того, представлена возможность оценки жесткости мягкой неизвестной пружины, соединенной с индентором. В целях оптимизации магнитного поля в активированном слое проводятся теоретические исследования с помощью анализа методом конечных элементов. Во-первых, вводится новая геометрия MSE, которая приводит к концентрации линий магнитного потока. Во-вторых, в модель добавлены тонкие пластины из высокопроницаемого сплава. Эти улучшения приводят к более однородному полю с более высокой плотностью потока. – **Рис. 11. Табл. 1. Библиогр. – 18 назв.**

УДК 536

Сосновский Л.А., Щербаков С.С. **Второй закон термодинамики и его развитие** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 36-44. Выполнен анализ развития трактовки второго закона термодинамики. Этот закон характеризует рассеяние энергии, что ограничивает его содержание. Анализируется понятие трибофатической энтропии, которая характеризует, напротив, поглощение энергии в среде. Объединение этих трактовок позволяет определить обобщенную механотермодинамическую энтропию, согласно которой энтропия

Вселенной неограниченно возрастает и не имеет мыслимых границ. Тем самым выполняется объединение механики и термодинамики в обобщенный раздел физики – механотермодинамику. Обсуждаются перспективы построения глобальной эволюции систем. – **Ил. 2. Библиогр. – 35 назв.**

УДК 539:373

Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Неумержицкая Е.Ю., Федотов Д.А. **Результаты экспериментальных исследований по определению радиального модуля упругости в цилиндрической оболочке из препрега** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 45-52. Приведена постановка задачи определения радиального модуля упругости в цилиндрической оболочке из препрега. – **Ил. 4. Табл. 6. Библиогр. – 4 назв.**

УДК 539.3+ 678.073

Гавриленко С.Л., Шилько С.В., Панин С.В. **Определение вязкоупругих параметров СВМПЭ композитов на основе идентификации модели Прони по результатам краткосрочных релаксационных испытаний на сжатие** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 53-56. Представлена методика идентификации вязкоупругой модели Прони на основе кратковременных испытаний на релаксацию при сжатии. Определены параметры модели в двух экспоненциальном случае для 2 марок СВМПЭ и 10 композитов на их основе. – **Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. – 11 назв.**

УДК 539.3+61

Босяков С.М., Николайчик М.А., Матвеев А.Л. **Оценка предельной нагрузки на бедренную кость с армирующим имплантом в проксимальном отделе** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 57-61. В работе представлена оценка величины предельной нагрузки, соответствующей возникновению патологического перелома в проксимальном отделе интактной бедренной кости и кости с установленными армирующими имплантом 3 типов. Оценка предельной нагрузки была проведена с помощью метода конечных элементов, на основании определения параметра поврежденности элемента, с учетом нелинейного распределения механических свойств костной ткани. – **Ил. 4. Библиогр. – 11 назв.**

УДК 621.835-41

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. **Сравнительный анализ кинематики и динамики процесса буксования колесно-шагающего движителя и колеса** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 62-68. В статье рассматривается процесс буксования колесно-шагающего движителя и обычного колеса. Проведенные теоретические исследования обосновали преимущества колесно-шагающего движителя по сравнению с обычным колесом при движении в режиме буксования. – **Табл. 1. Библиогр. – 6 назв.**

УДК 338.27

Щербakov С.С. **О создании комплексного индекса для прогноза перспективности областей научно-технического развития** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 69-77. В работе рассмотрено создание S-индекса прогнозирования перспективности научно-технической деятельности на основе ряда моделей и показателей. При построении данного комплексного показателя использовались количество и динамика фундаментальных, прикладных и опытно-конструкторских работ, объем их финансирования и число публикаций. Учитывались влияние государственных программ, переходы от фундаментальных к прикладным и от прикладных к опытно-конструкторским работам, соотношения публикаций к количеству работ и объему их финансирования. Данный индекс был применен для прогноза перспективности исследований в некоторых областях математического моделирования, вычислительной математики и механики. Следующие три области получили наибольшие значения (в порядке убывания) большинства частных показателей и S-индекса: трибофатика, трибология, механика жидкости и газа. – **Ил. 4. Табл. 5. Библиогр. – 6 назв.**

УДК 539.4; 691.175.2

Шилько С.В., Рябченко Т.В., Романович С.И., Чоё Н. **Определение сдвиговой прочности направленно-армированных углепластиков** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 78-83. Стандартизованными методами механических испытаний исследованы деформационно-прочностные свойства направленно-армированных углепластиков. Проанализированы диаграммы деформирования и особенности

разрушения, определены прочностные характеристики указанных композиционных материалов при сдвиге. – **Ил. 5. Табл. 3. Библиогр. – 9 назв.**

УДК 539.3

Яровая А.В. **Колебания трехслойной пластины под действием кольцевой резонансной нагрузки** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 84-90. Исследованы осесимметричные резонансные колебания упругой круговой трехслойной пластины под действием кольцевых поверхностных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. Заполнитель – легкий. Система дифференциальных уравнений движения получена вариационным методом. Аналитическое решение задачи построено методом разложения по собственным функциям. Проведен его численный анализ. – **Ил. 4. Библиогр. – 15 назв.**

УДК 531.3

Борисов А.В. Чигарев А.В. **Применение обобщений матриц для построения дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей эндо- и экзоскелета по уравнениям плоских механизмов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 91-104. Используя разработанные матричный метод и рекуррентный алгоритм в работе впервые предложен метод построения систем дифференциальных уравнений движения трехмерного механизма по соответствующим матрицам для модели плоского механизма, имеющей аналогичную структуру. Это позволяет приблизить движения экзоскелета и антропоморфного робота к реальным движениям эндоскелета. – **Ил. 9. Библиогр. – 5 назв.**

УДК 531.1

Ковалевский А.С., Грода Я.Г., Вихренко В.С. **Привод катящегося колеса при изменяющемся наклоне нити по отношению к плоскости качения** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 105-111. Рассмотрен привод простого или составного катящегося колеса посредством охватывающей его нити в случае, когда нить не параллельна плоскости, по которой катится колесо. Установлены кинематические соотношения между угловыми скоростями и ускорениями колеса и блока. Показано, что передаточное отношение от блока к колесу не является постоянным. Получены соотношения между геометрическими параметрами системы. С помощью уравнения Лагранжа сформулированы нелинейные дифференциальные уравнения движения трех различных конструктивных вариантов системы. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме получены первые интегралы этих уравнений. Показано, что при определенных условиях в системе может возникнуть автоколебательный режим. – **Ил. 4. Библиогр. – 3 назв.**

УДК 621.762

Дудяк А.И., Хвасько В.М. **Определение величин радиального и осевого натягов при изготовлении блок-матрицы аппарата высокого давления** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 112-117. В статье рассмотрен блок из двух стальных колец, запрессованных друг в друга по конусной поверхности. Предложена методика для расчета необходимых размеров и величин предварительных осевых натягов колец при сборке составных блоков цилиндров, а также полных контактных давлений в зоне сопряжения. По этой методике произведен расчет блок-матрицы из трех стальных колец с определением максимальных контактных давлений на боковую поверхность матрицы. – **Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.**

УДК 620.178.16; 620.178.3

Сосновский Л. А. **Объединенный закон трения и изнашивания в трибофатических системах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 118-127. Представлена и решена задача об определении силы и коэффициента трения в трибофатической системе, на которую – дополнительно к традиционной контактной нагрузке – действует внеконтактная (объемная) нагрузка. Сформулирован и экспериментально обоснован объединенный закон трения для таких систем. Показано, что закон аппроксимирует экспериментальные данные с погрешностью $\pm 6\%$. Установлено, что относительная разность между оценками коэффициента трения по классическому и объединенному закону достигает 60...70% и более. Рекомендуется использовать дополнительную внеконтактную нагрузку как эффективный параметр управления процессами трения и изнашивания. – **Ил. 6. Библиогр. – 17 назв.**

УДК 620.16

Сурин В.М., Дзержинский С.М. **Исследование влияния параметров случайного вибронагружения на усталостную прочность элементов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 128-133. Рассмотрено влияние уровня и параметра широкополосности случайной нагрузки на долговечность элементов. Предложено уравнение для определения связи долговечности с параметрами уровня воздействия и широкополосности частотного диапазона испытаний. – **Табл. 3. Библиогр. – 3 назв.**

УДК 539:373

Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Неумержицкая Е.Ю., Скворцов К.Г. **Расчет напряжения в препреге при химической усадке связующего, находящегося в твердом состоянии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 134-142. Выполнен расчет напряжения в препреге при химической усадке связующего, находящегося в твердом состоянии. – **Библиогр. – 5 назв.**

УДК 539.3

Леоненко Д.В. **Собственные колебания трехслойной круговой пластины, скрепленной с инерционным основанием** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 143-149. Рассмотрено влияние инерционности упругого основания на частоты собственных колебаний трехслойной круглой пластины. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа; в несжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Основание описывается инерционной моделью Винклера. Уравнения равновесия получены вариационным методом. Предложена методика решения соответствующих начально-краевых задач. Получены аналитические решения для перемещений и частот. Проведен их численный анализ. – **Ил. 3. Библиогр. – 14 назв.**

УДК 539.3:534.1

Поленов В.С., Чигарев А.В. **Распространение сферически-симметричных волн в двухкомпонентных пористых средах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 150-153. В статье рассмотрены вопросы распространения сферически-симметричных волн в двухкомпонентных пористых средах. – **Библиогр. – 10 назв.**

УДК 539.3

Нестерович А.В. **Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 154-159. Выведены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении. Предложена постановка соответствующей краевой задачи. – **Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.**

УДК 539.3

Миронов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П. **Исследование совместного воздействия тепловых и силовых нагрузок, приложенных на внешней и внутренней границах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 160-164. В работе получены зависимости для определения свойств плоской, сферической и цилиндрических волн от различных параметров среды и начальных параметров импульса. Данные зависимости позволяют описать напряженно-деформированное состояние упругой среды и спрогнозировать дальнейшее поведение волны. – **Библиогр. 3 назв.**

УДК 539.3

Козел А.Г. **Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 165-171. Предложена математическая модель описания осесимметричного деформирования несимметричной по толщине упругопластической трёхслойной круговой пластины на двухпараметрическом основании Пастернака. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом несжимаемом по толщине легком заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол; не учитывается работа касательных напряжений. Физические уравнения связи напряжений с деформациями в слоях соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях и перемещениях получены с помощью

вариационного метода Лагранжа. Аналитическое итерационное решение получено методом упругих решений. – **Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.**

УДК 539.3

Зеленая А.С. **Изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 172-178. Исследован изгиб несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при воздействии температуры. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. – **Ил. 1. Библиогр. – 9 назв.**

УДК 68.1.3.06

Блинов А.О., Гончарова И.А., Куликова М.Г. **Вопросы визуализации в процессе проектирования при изучении общепрофессиональных дисциплин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 179-183. В статье проведен обзор возможностей САПР для решения учебных задач магистерской подготовки. – **Библиогр. – 3 назв.**

УДК 539.374.4:539.214.9

Сосенушкин Е.Н., Кадымов В.А., Яновская Е.А., Архипов А.А., Гуреева Т.В., Гусев Д.С. **Математическое моделирование затекания пластически деформируемого слоя в рёбра** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 184-189. Поставлена и решена краевая задача затекания в рёбра пластически деформируемого, относительно тонкого слоя. Получены аналитические зависимости для оценки контактных давлений, компонент скорости течения и сил деформирования. Проведены расчет и анализ полученных данных для конкретной поковки типа оребренный фланец. Для наглядности результаты представлены в графическом виде. – **Ил. 3. Библиогр. – 12 назв.**

УДК 378

Гончарова И.А., Кончина Л.В., Куликова М.Г., Маслова К.С. **Реализация метапредметного подхода в вопросах интеграции образовательной и профессиональной подготовки** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 190-194. В статье рассмотрены перспективы развития метапредметного подхода в учебном процессе. – **Библиогр. – 3 назв.**

УДК 621.313.13

Кузнецов В.В. **Алгоритмизация прямой задачи кинематики мехатронной системы на шестикоординатном гибридном приводе прямого действия** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 195-200. Представлена алгоритмизация прямой задачи кинематики мехатронной системы на шестикоординатном гибридном приводе прямого действия, основанная на предложенном алгоритме сведения системы из девяти нелинейных трансцендентных уравнений, получаемых известными методами к трём уравнениям той же структуры. Проведенная компьютерная верификация инструментами MATLAB показала полную адекватность предложенной модели. – **Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.**

УДК 621.313.13

Марко А.Ф., Манин А.С., Нестеренко В.Н. **Версионирование и контроль целостности программного обеспечения при управлении многокоординатными системами реального времени** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 201-205. Представлено программное обеспечение версионирования и контроля целостности, которое позволяет при управлении многокоординатными системами на планарных приводах прямого действия реализовать режим реального времени. Предназначена для программирования автоматических установок тестирования печатных плат. – **Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.**

УДК 539.4:620.2+519.621.64

Ершова А.И., Босяков С.М. **Моделирование длинных трубчатых костей с анизотропным распределением упругих свойств** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 206-211. В настоящей работе предложен подход к конечно-элементному моделированию нелинейного анизотропного и изотропного распределения упругих свойств трубчатых костей. Получены зависимости модулей Юнга, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от пространственных координат, определяющие упругие свойства элемента

костной ткани, на основе экспериментальных данных. Проведен сравнительный конечно-элементный анализ главных напряжений и деформаций для нелинейных анизотропных и изотропных распределений упругих свойств под действием собственного веса человека на бедренную кость. – **Ил. 1. Библиогр. – 14 назв.**

УДК 519.6:517.5

Мелешко И.Н., Ласый П.Г., Ширвель П.И. **О приближенном представлении логарифмами решения одной дифференциальной вариационной задачи** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 212-216. Рассмотрен алгоритм решения дифференциальной задачи посредством приближенного представления логарифма. – **Библиогр. 6 назв.**

УДК 621.313.13

Войтов А.Ю., Форутан М.М., Салманзадех Г.Й. **Моделирование в MATLAB системы управления гибридным приводом мехатронной системы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 217-221. Предложена структурная схема и алгоритм её реализации системы управления мехатронной системой перемещений на многокоординатном гибридном приводе прямого действия. Выполнено моделирование в среде MATLAB. – **Ил. 4. Библиогр. – 5 назв.**

УДК 621.313.13

Поляковский В.В. **Построение и алгоритмизация транспортного модуля технологического оборудования микро- и нанoeлектроники** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 222-226. Представлен разработанный алгоритм управления транспортными системами на базе мультикоординатных планарных систем перемещений, позволяющий обеспечивать требования мультиплицирования, то есть использования в системе любого произвольного количества базовых элементов планарных шаговых двигателей. – **Ил. 2. Библиогр. – 6 назв.**

УДК 537.312.6:624.042.5

Агаев В.Н., Мартыненко Т.М., Скляр О.Н., Мартыненко И.М. **Устойчивость несущих элементов конструкции при сопряженных воздействиях физических температурных полей и механических локализованных и распределенных внешних силовых нагрузок** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 227-231. В результате расчетов для пластин и оболочек, можно сделать следующие выводы о характере напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек, подвергаемых локальному нагреву. При локальном нагреве тонкостенного элемента возникает температурное поле, характеризуемое локализацией в области пятна нагрева. При решении задачи в стационарной постановке максимум интенсивности приходится на центр пятна нагрева. При решении нестационарной задачи максимум интенсивности нестационарных напряжений приходится в начальное время на область края пятна нагрева, и по мере прогрева максимум переходит в центр пятна нагрева. – **Библиогр. – 9 назв.**

УДК 621.313.13

Поляковский В.В., Лахвич М.Н., Голунова В.М., Хмель О.В. **Алгоритмы группового управления промышленными роботами на автоматизированном складе** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 232-236. В работе рассмотрен подход к построению архитектуры алгоритмов группового управления складскими роботами, позволяющий реализовать оптимизированные по времени алгоритма перемещений и алгоритм бесколлизийных движений. – **Ил. 4. Библиогр. – 3 назв.**

УДК 621.313.13

Дедков А.И. **Методы улучшения качества лазерного исправления дефектов оригиналов топологий на фотошаблонах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 237-241. В данной статье рассмотрены основные ограничения и проблемы, с которыми приходится сталкиваться при конструировании и производстве оборудования устранения дефектов на фотошаблонах, работающего в диапазоне глубокого ультрафиолета (ГУФ) образца. Использование предложенных алгоритмов и методик позволило получить значительное улучшение технологических характеристик оборудования с малыми экономическими затратами. Также было получено доказательство успешного применения описанных методик в реальных технологических процессах ремонта как бинарных, так и фазосдвигающих фотошаблонов. – **Ил. 5. Библиогр. – 4 назв.**

УДК 621.313.13

Титко Д.С. **Методы контроля оригиналов топологии полупроводниковых приборов на фотошаблонах, основанные на моделировании процессов фотолитографии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 242-248. В статье приводится описание новых методов контроля оригиналов топологии полупроводниковых приборов на фотошаблонах, основанных на моделировании процессов фотолитографии. Описан класс дефектов, обнаружение которых затруднено без моделирования процессов проекционного переноса топологии с фотошаблона на полупроводниковую пластину, показаны преимущества представленного метода для других классов дефектов. Показано место указанного метода в технологии контроля топологии фотошаблонов в совокупности с автоматическим контролем топологии на соответствие проектным данным. – **Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.**

УДК 539.3

Акимов В.А., Гончарова С.В. **Расчет плоского напряженно деформируемого состояния операторно символическим методом** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 249-251. В статье рассмотрен расчет плоского напряженного деформируемого состояния операторно символическим методом. – **Библиогр. – 2 назв.**

УДК 539.3

Щербаков С.С., Шемет Л.А. **Расчет опасных объемов в окрестности вершины трещины методами граничных и конечных элементов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 252-258. Представлены результаты сравнения гранично-элементного и конечно-элементного расчета напряженного состояния компактного образца и соответствующих опасных объемов (площадей). Анализ показал хорошее соответствие результатов гранично-элементного моделирования напряженного состояния и объемной повреждаемости, основанного на предварительном интегрировании фундаментальных решений, результатам конечно-элементного расчета. – **Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.**

УДК 539.3

Захарчук Ю.В. **Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 259-265. Рассмотрен изгиб круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем под действием распределенной осесимметричной нагрузки. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии. Сжимаемость наполнителя линейна по толщине. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Итерационное аналитическое решение приведено в функциях Бесселя для случаев локальной сплошной и кольцевой нагрузки. – **Ил. 1. Библиогр. – 15 назв.**

УДК 621.793

Девойно О.Г., Швец И.В. **Обеспечение ресурсных параметров ответственных элементов механических трансмиссий с использованием поверхностных слоев, формируемых лазерными технологиями** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 266-270. Представлена возможность обеспечения ресурсных параметров трансмиссий за счет увеличения твердости активных поверхностей зубьев передач воздействием лазерной закалки сканирующим лучом. Рассчитана необходимая глубина упрочнения зубчатых колес для различных режимов нагружения. – **Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. – 5 назв.**

УДК 664.143.85

Шанин В.А., Кончина Л.В. **Моделирование процесса резки, применяемого в оборудовании пищевой промышленности** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 271-275. В статье проведены исследования влияния режущих сил на оптимизацию процесса разработки исполнительного органа пищевого оборудования. – **Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.**

УДК 624.042

Лисовский Э.В., Шмелев А.В., Калина А.А. **Виртуальные испытания кабины карьерного самосвала на соответствие нормативным требованиям к устройствам защиты при опрокидывании** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 276-280. В статье описаны виртуальные испытания кабины карьерного самосвала на соответствие нормативным требованиям к устройствам защиты при опрокидывании. – **Ил. 4. Библиогр. – 2 назв.**

УДК 68.1.3.06

Гольцев И.Ю., Гончарова И.А., Маслова К.С. **Роль процесса визуализации учебного материала при изучении технических дисциплин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 281-283. В статье рассмотрены перспективы применения визуализации в образовательных дисциплинах в ходе учебного процесса. – **Библиогр.** – 3 назв.

УДК 629.113; 658.512

Капушта П.П., Вихренко Д.В., Воронько Ю.А. **Моделирование концентраторов напряжений в виде круглых отверстий в пластине с использованием метода конечных элементов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 284-290. Показано, что применение пакета расчетов МКЭ MSC.Nastran позволяет с достаточной точностью учитывать концентраторы в виде круглых отверстий в растягиваемой и изгибаемой пластине. Использование в качестве расчетной модели плоских конечных элементов первого порядка вполне оправдано, несмотря на их малый линейный размер (в 8 раз меньше толщины). Точность определения напряжений нелинейно зависит от количества элементов в рассматриваемой зоне. Так, 11-12 элементов на четверть окружности дают ошибку менее 1%, уменьшение до 6 элементов увеличивает ошибку до 5 %, 4 элемента дают погрешность 11%, а 2 элемента увеличивают ошибку до 30%. Разработанный метод использован при ресурсном проектировании рамы автомобиля-тягача, перспективных типажа осей и элементов подвесок прицепного состава и других несущих конструкций автомобильной техники Минского автозавода. – **Ил. 7. Библиогр.** – 5 назв.

УДК 004.421

Дедович Д.К., Евдокименко М.Н., Микулик Т.Н., Николаенко В.Л., Сечко Г.В. **О повышении производственной безопасности учреждений образования и науки за счёт использования служебных гаджетов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 291-295. В этой статье рассматривается специально разработанное программное средство, которое защищает мобильные устройства сотрудников от вредоносных или шпионских программ. Это сейчас очень актуально в связи с быстро развивающейся сферой мобильных устройств. – **Ил. 4. Библиогр.** – 4 назв.

УДК 620.169.1

Лис И.Н. **Критерий предельного состояния образцов из стали 45 при статическом и циклическом нагружении** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 296-299. Предлагаемый критерий предельного состояния позволяет связать наработку (время до разрушения) при статическом и циклическом нагружении. Является простым в определении и применении, включает величины, не требующие специальных средств для их измерения. К недостаткам можно отнести то, что критерий не учитывает температуру и размеры образцов в явном виде, что затрудняет его использование (без дополнительных испытаний) при разработке конструкций. – **Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.** – 7 назв.

УДК 539.4

Дембовский И.Н., Богданович А.В. **Особенности тарировки персонального испытательного центра** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 300-306. В докладе дано краткое описание и технические характеристики установки для износоусталостных испытаний материалов – персонального испытательного центра. Сформулированы некоторые особенности тарировки измерительных каналов информационно-управляющей системы персонального испытательного центра и определения погрешности измерений. – **Ил. 5. Табл. 2. Библиогр.** – 10 назв.

УДК 539.3

Щербаков С.С., Грибовский Г.В. **Объёмная повреждаемость многокомпонентной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 307-313. В работе представлены результаты компьютерного моделирования напряжённо-деформированного состояния многоэлементной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон», нагруженной различными комбинациями радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине. Были рассчитаны опасные объёмы и повреждаемость в области контакта шины и асфальтобетона. Представлены зависимости опасных объёмов и повреждаемости в области контакта от различных значений радиальной нагрузки и внутреннего давления в шине. – **Ил. 3. Библиогр.** – 9 назв.

УДК 60.001.11:531.8

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Шаико А.Е., Кругликов А.А. **Взаимосвязь параметров вибраций с показателями долговечности сложных технологических систем** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 314-317. Вибрации создают дополнительные знакопеременные нагрузки на звенья, которые влияют на их долговечность. Для различных элементов конструкции методики расчета долговечности отличаются, но во всех случаях в них могут быть учтены динамические нагрузки, обусловленные виброускорениями. Для определения таких нагрузок рекомендуется учитывать приведенные к соответствующим звеньям инерционные параметры. Обусловленные вибрациями нагрузки могут оказывать влияние на долговечность не меньшее, чем силы реакций, обусловленные передачей проектных нагрузок. – **Ил. 1.**

УДК 60.001.11:531.8

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Кругликов А.А., Шаико А.Е. **Методика многокритеральной оптимизации технологической системы на основе определения вибрационных параметров** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 318-322. Предлагаемая методика позволяет разработать конструкцию механической системы, рассчитать и конструктивно обеспечить минимальный или допустимый уровень виброактивности в заданном диапазоне режимов работы и оптимизировать систему по критериям минимизации вибрационных характеристик, устойчивости колебательных процессов, долговечности. Она включает в себя этапы расчетов параметров системы на уровне схемы и затем на их основе создания трудоемких реальных геометрических моделей систем. Этапы моделирования позволяют подобрать оптимизированные инерционные и жесткостные параметры элементов системы, что позволит ускорить процесс создания геометрических моделей и заложить в конструкцию максимально возможное высокое качество и надежность функционирования. – **Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.**

УДК 517.958:531.12; 541.43/.49; 539.62; 532.516; 539.375.6; 539.4:620.2

Щербаков С.С., Насань О.А., Подгайская Д.А. **Объемная повреждаемость линейного участка нефтепровода с внутренними коррозионными повреждениями и ремонтной стеклополимерной манжетой** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 323-329. Проведено моделирование опасных объемов для секции трубы с единичным протяженным и множественными мелкими повреждениями на воздухе. Также для данных моделей рассматривалось влияние ремонта композитной манжетой. Показано, что опасные объемы появляются в окрестности коррозионных повреждений. Кроме того, применение стеклополимерной композитной манжеты на внешней поверхности трубы привело к возникновению концентраторов осевых напряжений, что вызвало появление соответствующих опасных объемов на границах полос манжеты. Данный эффект наблюдался вследствие усадки манжеты при жесткой сцепке внешней поверхности трубы и манжеты. – **Ил. 3. Табл. 3. Библиогр. – 6 назв.**

УДК 623.4;5

Пилипчук А.П., Мишин А.А., Исак В.Г. **Экспериментальное и численное исследование процесса взаимодействия ударника и стальной пластины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 330-335. Представлены результаты экспериментального и численного исследования процесса взаимодействия ударника и стальной пластины. Проведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных. – **Ил. 1 Библиогр. – 14 назв.**

УДК 621.317.32:624.042.2

Мартыненко Т.М., Скляр О.Н., Мартыненко И.М. **Расчет контурного усилия при осесимметричной деформации сферической оболочки** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 336-340. Выполнен анализ точного решения расчета напряженно-деформированного состояния с исследованием полей перемещений и напряжений, возникающих в непологой сферической оболочке от действия заданных нагрузок. В результате выяснилось, что в районе опорного контура в сферической оболочке возникают значительные изгибающие моменты, однако эти изгибающие моменты и им соответствующие изгибающие напряжения быстро затухают по мере удаления от опорного контура. – **Библиогр. – 9 назв.**

УДК 621.787:539.319

Вакулюк В.С., Кирпичёв В.А., Павлов В.Ф., Сазанов В.П. **Оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости детали в условиях концентрации напряжений** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 341-346. Изучено влияние глубины надреза и степени концентрации напряжений на предел выносливости поверхностно упрочнённых образцов из стали 20 в зависимости от характера распределения остаточных

напряжений поверхностного слоя. Установлено, что для прогнозирования приращения предела выносливости за счёт поверхностного упрочнения наиболее оправдано использование критерия среднеинтегральных остаточных напряжений. – **Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. – 12 назв.**

УДК 620.178; УДК 621. 81: 621 – 192; УДК 681.3.06:629.114.2

Канюта П.П. Методика формирования нагрузочных блоков и проектный расчет усталостного ресурса деталей машин и конструкций при случайном нагружении // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2019, вып. 34. С. 347-355. На основании проведенных исследований разработаны методы формирования и аппроксимации нагрузочных блоков и расчета усталостного ресурса, в.ч. – с использованием степенного уравнения кривой усталости, наиболее приемлемого на стадии проектирования деталей машин и элементов конструкций для случайного нагружения в зависимости от эксплуатационных условий их функционирования; схема алгоритма и программа для расчета усталостного ресурса деталей машин и конструкций с формированием нагрузочных блоков, в.ч. – обоснованием их основных характеристик (шага напряжений и др.). Выполнена верификация разработанных методов на результатах натурных и вычислительных компьютерных экспериментов. – **Ил. 4. Табл. 2. Библиогр. – 11 назв.**

ABSTRACTS

UDC 539.374

Pleskatshevsky Yu.M., Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. **Thermoelastic displacements in a three-layer circular metal-polymer plate under ring loads** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 3-9. The deformation in the temperature field of a circular three-layer plate is considered. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows. The system of differential equations of equilibrium is obtained by the variational method. The analytical solution is given in Bessel functions for the cases of local continuous and ring loads. Numerical testing of solutions at different temperatures is carried out. – **Fig. 4. Ref. – 15 titles.**

UDC 532.5

Konon P.N., Mogilevskiy E.I. **On cooperation between the mechanical and mathematical faculties of Moscow State University M.V. Lomonosov and BSU in research in the field of hydrodynamics** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 10-16. The paper informs about international seminar with participants from Belorussia and Russia with took place at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Belorussian state university in December 2018. Abstracts of the talks are listed. – **Fig. 4. Ref. – 16 titles.**

UDC 621.313.13

Karpovich S.E., Kuzniatsou V.U., Voitau A.Y. **Mechatronic systems of parallel kinematics for photolithographic equipment** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 17-22. Displacement system on a circle driver of direct action, used for alignment of optical elements photolithographic equipment is reviewed. Simulation of the mechanism of parallel kinematics is implemented. – **Fig. 4. Ref. – 8 titles.**

UDC 539.4

Chigarev A.V., Polenov V.S. **The curvature of the gravitational rays and optical waves in the atmosphere of massive bodies** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 23-27. The main regularities of the curvature of the gravitational rays and optical waves near massive bodies are considered. – **Fig. 1. Ref. – 7 titles.**

UDC 621.0:621.3

Simon Gast, Klaus Zimmermann, Vladimir T. Minchenya, Victor G. Lysenko **Modelling and magnetic field simulation of a tactile sensor based on magneto-sensitive Elastomers** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 28-35. In this work, a concept for a tactile sensor utilizing magneto-sensitive elastomers (MSE) as sensitive and simultaneously active material is proposed. Separated into two layers with different functions and a rigid connection, this sensor systems purpose is to demonstrate the capabilities of MSE for tactile sensing. While the first layer is responsible for measuring the deformation, the second layer is actively stiffening through an applied current. By means of a simplified mechanical model, the indicators and material parameters for experimental investigations are identified. In addition to that, the capability of estimating the stiffness of a soft unknown spring connected to the indenter is presented. For optimization purposes of the magnetic field within the actuated layer, theoretical investigations with FEM analysis are done. Firstly, a new MSE geometry is introduced, which leads to a concentration of magnetic flux lines. Secondly, thin plates of high permeable alloy are added to the model. These improvements result in a more homogeneous field with higher flux density. – **Fig. 11. Tables 1. Ref. – 18 titles.**

UDC 536

Sosnovskiy L. A., Sherbakov S. S. **The second law of thermodynamics and its development** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 36-44. The analysis of the development of the interpretation of the second law of thermodynamics is performed. This law characterizes the scattering of energy, which limits its content. The concept of tribo-fatigue entropy is analyzed, which characterizes, on the contrary, the absorption of energy in a medium. The combination of these interpretations allows one to determine the generalized mechanothermodynamic entropy, according to which the entropy of the Universe increases indefinitely and has no conceivable boundaries. Thus, the integration of mechanics and thermodynamics into a generalized branch of physics, mechanothermodynamics, is carried out. The prospects for building a global evolution of systems are discussed. – **Fig. 2. Ref. – 35 titles.**

UDC 539:373

Vasilevich Yu.V., Sahonenko V.M., Neumerzhyskaya E.Yu., Fedotov D.A. **Results of experimental researches on the determination of the radial module in the cylindrical shell from the prepreg** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 45-52. The problem of determining the radial modulus of elasticity in a cylindrical shell of prepreg is presented. – **Fig. 4. Table 6. Ref. – 4 titles.**

UDC 539.3+678.073

Gavrilenko S.L., Shil'ko S.V., Panin S.V. **The calculation of viscoelastic parameters of UHMWPE composites using the procedure of Prony model identification and data of short-term relaxation tests by compression** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 53-56. The procedure of identification of linear viscoelastic Prony model under short-term relaxation by compression is described. The parameters of two exponential model for 2 marks of UHMWPE and 10 composites on their base are determined. – **Fig. 1. Table 1. Ref. – 11 titles.**

UDC 539.3+61

Bosiakov S.M., Nikolaitchik M.A., Matveev A.L. **Assessment of the ultimate load on femur with reinforcing implant in the proximal part** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 57-61. Assessment of the ultimate load corresponding to the occurrence of a pathological fracture on the intact proximal femur and proximal femur with installed reinforcing implants of 3 types is performed in the work. The assessment of the ultimate load was carried out using finite element method, based on defining of the damage parameter of the element, taking into the account the nonlinear distribution of the mechanical properties of bone tissue. – **Fig. 4. Ref. – 11 titles.**

UDC 621.835-41

Skoybeda A.T., Zhukavets V.M. **Comparative analysis of the kinematics and dynamics of the process of slipping the wheel-step mover and wheel** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 62-68. The process of slipping the wheel-step mover and the ordinary wheel is considered in the article. The theoretical studies carried out substantiated the advantages of the wheel-step mover unit compared to the ordinary wheel when moving in the slip mode. – **Tab. 1. Ref. – 6 titles.**

UDC 338.27

Sherbakov S.S. **About the creation of complex index for forecasting promising areas of scientific and technological development** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 69-77. The paper considers the creation of the *S*-index of the promising areas of science and technology basing on the set of models and indicators. Under its construction as a complex indicator the number and dynamics of fundamental, applied and development works, amount of their funding and number of publications were used. The influence of government programs, transitions from fundamental to applied and from applied to development works, the ratio of publications to the number of works and to the amount of funding were taken into account. This index was used to forecast the prospects for research in some areas of mathematical modeling, computational mathematics and mechanics. Three following areas obtained the highest values (in descending order) of the majority of particular indicators and of the *S*-index: tribo-fatigue, tribology, fluid and gas mechanics. – **Fig. 4. Tables 5. Ref. – 6 titles.**

UDC 539.4; 691.175.2

Shil'ko S.V., Ryabchenko T.V., Romanovich S.I., Choe H. **Determination of shear strength of directional-reinforced carbon plastics** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 78-83. Using standard mechanical testing methods, the deformational and strength properties of directionally-reinforced carbon plastics by shear have been studied. The strain curves and peculiarities of failure have been analyzed. The shear strength of these composite materials has been determined. – **Fig. 5. Table 3. Ref. – 9 titles.**

UDC 539.3

Yarovaya A.V. **The vibrations of three-layer plates under the action of the ring resonant load** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 84-90. Axisymmetric resonant oscillations of an elastic circular three-layer plate under the action of ring surface loads are investigated. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack is adopted the hypothesis of a broken line. Filler is light. The system of differential equations of motion by the variational method is obtained. The analytical solution of the problem is constructed by the method of eigenfunction expansion. Its numerical analysis is carried out. – **Fig. 4. Ref. – 15 titles.**

UDC 531.3

Borisov A.V., Chigarev A.V. **Application of matrix generalizations for construction of differential equations of movement of three-dimensional models of endo and exoskeletons on equations of flat mechanisms** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 91-104. Using the developed matrix method and the recurrent algorithm in the work for the first time, a method was proposed for constructing systems of differential equations of motion of a three-dimensional mechanism using corresponding matrices for a model of a flat mechanism with a similar structure. This allows us to bring the movements of the exoskeleton and the anthropomorphic robot closer to the real movements of the endoskeleton. – **Fig. 9. Ref. – 5 titles.**

UDC 531.1

Kovalevski A.S., Groda Ya.G., Vikhrenko V.S. **The drive of the rolling wheel with a varying inclination of the thread with respect to the rolling plane** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 105-111. The drive of a simple or composite rolling wheel is considered by means of a thread embracing it in the case when the thread is not parallel to the plane along which the wheel rolls. The kinematic relations between the angular velocities and accelerations of the wheel and the block are established. It is shown that the gear ratio from the block to the wheel is not constant. The relations between the geometrical parameters of the system are obtained. Using the Lagrange equation, nonlinear differential equations of motion of three different design variants of the system are formulated. Using the theorem on the change in kinetic energy in integral form, the first integrals of these equations are obtained. It is shown that, under certain conditions, a self-oscillation mode may arise in the system. – **Fig. 4. Ref. – 3 titles.**

UDC 621.762

Dudyak A.I., Khvasko V.M. **Determination of the values of radial and axial tension in the manufacture of a block matrix of the high-pressure apparatus** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 112-117. A block of two steel rings pressed into each other along a conical surface was considered in the article. A method was proposed for calculating the required dimensions and magnitudes of preliminary axial tension of the rings when assembling composite blocks of cylinders, as well as full contact pressures in the interface zone. By this method, the calculation of the block matrix of three steel rings with the definition of the maximum contact pressure on the side surface of the matrix was made. – **Fig. 2. Ref. – 4 titles.**

UDC 620.178.16; 620.178.3

Sosnovskiy L. A. **The combined law of friction and wear in tribo-fatigue systems** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 118-127. The problem of determining the force and coefficient of friction in the tribo-fatigue system is presented and solved, which, in addition to the traditional contact load, is affected by non-contact (volume) load. The combined law of friction for such systems is formulated and experimentally justified. It is shown that the law approximates experimental data with an error of $\pm 6\%$. It was established that the relative difference between the estimates of the friction coefficient according to the classical and combined law reaches 60...70% or more. It is recommended to use additional non-contact load as an effective parameter for controlling the processes of friction and wear. – **Fig. 6. Ref. – 17 titles.**

UDC 620.16

Surin V. M., Dzerzhinsky S. M. **Investigation of the influence of random vibration loading parameters on the fatigue strength of elements** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 128-133. The influence of the level and parameter of random load broadband on the durability of elements is considered. An equation is proposed to determine the relationship of durability with the parameters of the level of impact and broadband frequency range of tests. – **Table 3. Ref. – 3 titles.**

UDC 539:373

Vasilevich Yu.V., Sahonenko V.M., Neumerzhitskaya E.Yu., Skvortsov K.G. **Calculation of voltage in pre-pregs at chemical consumption of the binder in solid state** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 134-142. The calculation of the strain in the prepreg at the chemical shrinkage of the binder, which is in solid state. – **Ref. – 5 titles.**

UDC 539.3

Leonenko D.V. **The own oscillations of a three-layer circular plate fastened to an inertial foundation** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 143-149. The influence of the inertia of the elastic foundation on the natural frequencies of a three-layer round plate is considered. For the asymmetric in thickness three-layer round plate we have accepted the kinematic hypothesis

of a broken normal. The foundation is described by the inertial Winkler model. Equilibrium equations are obtained by the variational method. A method for solving the corresponding initial-boundary value problems is proposed. Analytical solutions for displacements and frequencies are obtained. The numerical analysis of the solutions is given. – **Fig. 3. Ref. – 14 titles.**

UDC 539.3:534.1

Polenov V.S., Chigarev A.V. **Propagation of spherically symmetric waves in two-component porous media** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 150-153. The article deals with the propagation of spherically symmetric waves in two-component porous media. – **Ref. – 10 titles.**

UDC 539.3

Nesterovich A. V. **The equilibrium equations of three-layer circular plate under non-axisymmetric loading** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 154-159. The equilibrium equations in the forces and displacements of a three-layer circular plate under non-axisymmetric loading are derived. The formulation of the corresponding boundary value problem is proposed. – **Fig. 1. Ref. – 15 titles.**

UDC 539.3

Mironov D.N., Chigarev V. A., Goncharenko V.P. **The dependences for determining the properties of plane, spherical and cylindrical waves on various parameters of the medium and the initial parameters of the pulse are obtained** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 160-164. These dependences allow us to describe the stress-strain state of the elastic medium and predict the further behavior of the wave. – **Ref. – 3 titles.**

UDC 539.3

Kozel A.G. **Solving the problem of bending an elastic-plastic circular plate on the basis of Pasternak** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 165-171. A mathematical model is proposed for describing the axisymmetric deformation of an elastoplastic three-layer circular plate asymmetric in thickness on a two-parameter Pasternak base. Kirchhoff's hypotheses are accepted for isotropic carrier layers. In a relatively thick incompressible lightweight filler, the deformed normal remains straight, does not change its length, but rotates by some additional angle, and does not take into account the work of tangent stresses. The physical equations of the connection of stresses with strains in layers correspond to the theory of small elastoplastic deformations. Differential equilibrium equations in efforts and displacements are obtained using the Lagrange variational method. Analytical iterative solution obtained by the method of elastic solutions. – **Fig. 1. Ref. – 15 titles.**

UDC 539.3

Zelenaya A.S. **Bending of an elastoplastic rectangular three-layer plate with compressible filler in a temperature field** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 172-178. The bending of asymmetric in thickness of elastoplastic three-layered plates with a compressible filler is investigated. The kinematic hypotheses are based on the hypothesis of broken line: the Kirchhoff hypotheses are accepted for the outer layers, the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained. – **Fig. 1. Ref. – 9 titles.**

UDC 68.1.3.06

Blinov A.O., Goncharova I.A., Kulikova M.G. **Visualization issues in the design process in General professional disciplines** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 179-183. The article provides CAD capabilities overview during master education. – **Ref. – 3 titles.**

UDC 539.374.4:539.214.9

Sosenushkin E.N., Kadyrov V.A., Yanovskaya E.A., Arkhipov A.A., Gureeva T.V., Gusev D.S. **Mathematical modeling of the flow of a plastically deformable layer into the ribs** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 184-189. The boundary problem of leakage into the edges of a plastically deformable, relatively thin layer has been posed and solved. Analytical dependences are obtained for the evaluation of contact pressures, components of the flow velocity and deformation forces. The calculation and analysis of the obtained data for a specific finned flange type forging was carried out. For clarity, the results are presented in graphical form. – **Fig. 3. Ref. – 12 titles.**

UDC 378

Goncharova I.A., Konchina L.V., Kulikova M.G., Maslova K.S. **Realization of the meta-subject approach in the integration of educational and vocational training** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 190-194. The article discusses the prospects for the development of the meta-subject approach in the educational process. – **Ref. – 3 titles.**

UDC 621.313.13

Kuzniatsova V.U. **Algorithmization of a direct kinematics problem of a mechatronic system on six-coordinate hybrid driver of direct action** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 195-200. Algorithmization of a direct kinematics problem for the mechatronic system on the base on six-coordinate hybrid driver of direct action, based on suggested algorithm of reducing a system of nine nonlinear transcendental equations, obtained by known methods to three equations of the same structure is represented. Carried computer verification in MATLAB has showed full adequacy of the proposed model. – **Fig. 3. Ref. – 3 titles.**

UDC 621.313.13

Marko A.F., Manin A.S., Nesterenko V.N. **Versioning and integrity control of software during real time multicoordinate systems control** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 201-205. Software for versioning and integrity control, that allows during control for multicoordinate systems on planar drivers of direct action to realize real time mode, is represented. It intends for programming of automatic stations of printed circuit boards stations. – **Fig. 4. Ref. – 4 titles.**

UDC 539.4:620.2+519.621.64

Ershova A.I., Bosiakov S.M. **Modelling of long tubular bones with anisotropic distribution of elastic properties** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 206-211. In this paper, an approach to finite-element modelling of the nonlinear anisotropic and isotropic distribution of elastic properties of tubular bones is proposed. Dependences of the Young's moduli, shear moduli and the Poisson's ratios on the spatial coordinates determining the position of the element in the bone model are used. A comparative finite-element analysis of the principal stresses and deformations caused by the action of own weight on the human femur was carried out for nonlinear anisotropic and isotropic distributions of elastic properties. – **Fig. 1. Ref. – 14 titles.**

UDC 519.6: 517.5

Meleshko I.N., Lasiy P.G., Shirvel P.I. **On the approximate logarithm representation of the solution of a single differential variational problem** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 212-216. An algorithm for solving a differential problem is considered by an approximate representation of the logarithm. – **Ref. – 14 titles.**

UDC 621.313.13

Voitau A.Y., Forootan M.M., Salmazadeh G.Y. **Simulation in MATLAB of system controlling by the hybrid driver of a mechatronic system** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 217-221. Structural scheme and an algorithm of its implementation of the mechatronic displacement system on the base of multicoordinate hybrid driver of direct action are proposed. Simulation in MATLAB is implemented. – **Fig. 4. Ref. – 5 titles.**

UDC 621.313.13

Poliakovski V.V. **Constructing and algorithmization of transport module of technological devices micro- and nanoelectronics** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 222-226. Developed algorithm of controlling transport systems on the base of multicoordinate planar displacement systems, that allows requirements of multiplication, in other words using in a system of any random count of basic elements of planar step drivers is represented. – **Fig. 2. Ref. – 6 titles.**

UDC 537.312.6:624.042.5

Agayev V.N., Martynenko T. M., Sklyar O.N., Martynenko I.M. **Fixity of the bearing structural elements at the conjugate influences of physical temperature profiles and the mechanical localized and distributed external power loads** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 227-231. In calculation result for plates and envelopes, it is possible to draw the following conclusions on the nature of an intense strained state of the plates and envelopes subjected to local heating. At local heating of a thin-walled element there is a temperature profile characterized by localization in the field of a heating spot. At the solution of a task in stationary statement at most it falls intensity on the center of a spot of heating. At the solution of a non-stationary ultimate goal of intensity of non-stationary tension it is

necessary in initial time for area of edge of a spot of heating, and in process of warming up the maximum passes into the center of a spot of heating. – **Ref. – 9 titles.**

UDC 621.313.13

Poliakovski V., Lachvich M., Golunova V., Khmel O. **Algorithms grouping control of industrial robots in automated warehouse** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 232-236. An approach for creating architecture of algorithms grouping control of warehouse robots, that allows to realize optimizing by the time of algorithm displacement and algorithm of collisionless movements is proposed. – **Fig. 4. Ref. – 3 titles.**

UDC 621.313.13

Dedkov A.I. **Methods for improving the quality of laser correction of defects of topography originals on photo masks** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 237-241. This paper contains the information about laser mask repair tools development. The paper presents a method and algorithms for mask repair tools development in DUV wave length range. The paper presents also the results of use of the presented methods in the tools of KBTEM-OMO company and during the process development. – **Fig. 5. Ref. – 4 titles.**

UDC 621.313.13

Titko D.S. **Methods of reticle inspection, based on simulation of photolithography processes** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 242-248. The paper presents information on the new methods of reticle inspection, based on the software simulation of photolithography processes. The paper contains also a description of a types of defects with very low detection capability of inspection tools without simulation of photolithography processes. Advantages of new methods for another types of defects are given. Combination of new methods with main procedure of die-to-database reticle inspection are presented. – **Fig. 4. Ref. – 10 titles.**

UDC 539.3

Akimov V.A., Goncharova S.V. **Calculation of the plane stress-strain state by the operator-symbolic method** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 249-251. The article deals with the calculation of the plane stress deformable state by the operator-symbolic method. – **Ref. – 2 titles.**

UDC 539.3

Sherbakov S.S., Shemet L.A. **Calculation of dangerous volumes in the neighborhood of the crack tip by boundary finite elements methods** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 252-258. The results of comparing boundary element and finite element calculation of the stress state and corresponding dangerous volumes (areas) for the compact sample are presented. Analysis showed good agreement between the results of boundary element stress state and volume damageability modeling based on the preliminary integration of fundamental solutions with the finite element calculation. – **Fig. 4. Ref. – 10 titles.**

UDC 539.3

Zakharchuk Yu.V. **Bending of elastoplastic circular sandwich plates with a compressible filler** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 259-265. The bending of a circular three-layer plate with a compressible filler under the action of a distributed axisymmetric load is considered. To describe the kinematics of a package asymmetric in thickness, the hypotheses of the polyline are accepted. The compressibility of the filler is linear in thickness. The system of differential equations of equilibrium is obtained by the variational method. An iterative analytical solution is given in Bessel functions for the cases of local continuous and ring loads. – **Fig. 1. Ref. – 15 titles.**

UDC 621.793

Devoino O.G., Shvets I.V. **Providing resource parameters of responsible elements of mechanical transmissions by using surface layers formed by laser technologies** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 266-270. The possibility of providing the resource parameters of transmissions by increasing the hardness of the active surfaces of the gear teeth by laser hardening scanning beam. The required depth of hardening of gears for different loading modes is calculated. – **Fig. 3. Ref. – 5 titles.**

UDC 664.143.85

Shanin V.A., Konchina L. V. **Modelling of cutting process used for food processing equipment** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 271-275. In the

article researches of cutting forces for process optimization of executive element development in food equipment are carried out. – **Fig. 3. Ref. – 3 titles.**

UDC 624.042

Lisovsky E.V., Shmelev A.V., Kalina A.A. **Virtual testing of a dump truck for compliance with regulatory requirements for overturning protection devices** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 276-280. The article describes virtual tests of a dump truck for compliance with regulatory requirements for tipping protection devices. – **Fig. 4. Ref. – 2 titles.**

UDC 68.1.3.06

Goltsev I.Y., Goncharova I.A., Maslova K.S. **The role of the process of visualization of educational material in the study of technical disciplines** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 281-283. The article deals with the prospects of using visualization in educational disciplines during the educational process. – **Ref. – 3 titles.**

UDC 629.113; 658,512

Kapusta P.P., Vikhrenko D.V., Voronko Yu.A. **Simulation of tension concentrators in the form of round holes in the plate using the parameters of finite elements** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 284-290. It is shown that the use of the FEM MSC.Nastran calculation package allows one to accurately take into account the concentration in the form of round holes in a stretchable and bendable plate. Despite their small linear size (8 times less than the thickness). The accuracy of the determination of the intensity non-linearly depends on the number of elements in the zone under consideration. Thus, 11-12 elements in a quarter give an error of less than 1%, a decrease to 6 elements increases the error to 5%, 4 elements give an error of 11%, and 2 elements increase the error to 30%. The developed method used in the automotive technology resources of the Minsk Automobile Plant. – **Fig. 7. Ref. – 5 titles.**

UDC 004.421

Dedovich D. K., Evdokimenko M. N., Mikulik T. N., Nikolaenko V. L., Sechko G. V., **About improving the security of educational and science through the use of office gadgets** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 291-295. This article examines a specially developed software that infects employees mobile devices against malware or spyware. This is now very important, due to the rapidly growing field of mobile devices. – **Fig. 4. Ref. – 12 titles.**

UDC 620.169.1

Lis I.N. **Criterion for the critical state of samples of steel 45 under static and cyclic loading** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 296-299. The proposed limit state criterion allows us to relate the operating time (time to failure) under static and cyclic loading. It is easy to identify and use, includes values that do not require special means for their measurement. The disadvantages include the fact that the criterion does not take into account the temperature and dimensions of the samples in an explicit form, which makes it difficult to use it (without additional tests) in the design development. – **Fig. 2. Table 1. Ref. – 7 titles.**

UDC 539.4

Dembovski I.N., Bogdanovich A.V. **Features of the calibration of the personal test center** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 300-306. A brief description and technical characteristics of the installation for wear-fatigue tests of materials - a personal test center are given in report. Some features of the calibration of the measuring channels of the information and control system of the personal test center and the determination of measurement error are formulated. – **Fig. 5. Table 2. Ref. – 10 titles.**

UDC 539.3

Sherbakov S.S., Gribovskii G.V. **Stress-strain state of multicomponent «rim–tire–asphalt-concrete» system for different values of radial load on the rim and internal pressure in the tire** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 307-313. Computer simulation of stress-strain state of «rim–car tire–asphalt-concrete» multielement system for the various combinations of internal pressure in the tire and axle load on the rim was made. Dangerous volumes and damageability in the contact area of tire and asphalt-concrete were calculated. The dependencies of dangerous volumes and damageability on different values of radial load on the rim and internal pressure in tire are presented. – **Fig. 3. Ref. – 9 titles.**

UDC 60.001.11:531.8

Ausiyevich A.M., Kudin V.V., Shashko A.Ye., Kruhlikau A.A. **The correlation of the vibration parameters with durability of complicated technical systems** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 314-317. Vibrations create additional alternating loads on the links, which affect their durability. For different elements of the design methods of calculating the durability are different, but in all cases they can be taken into account dynamic loads due to vibration acceleration. To determine such loads, it is recommended to take into account the inertial parameters given to the corresponding links. Vibration-induced loads can have an impact on durability no less than the reaction forces caused by the transfer of design loads. – **Fig. 1.**

UDC 60.001.11:531.8

Ausiyevich A.M., Kudin V.V., Kruhlikau A.A., Shashko A.Ye. **Method of multi-criteria optimization of technological system on the basis of vibration parameters definition** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 318-322. The proposed method allows to develop the design of the mechanical system, to calculate and constructively provide the permissible level of vibration activity in a given range of operating modes and to optimize the system according to the criteria of minimizing vibration characteristics, stability of oscillatory processes, durability. It includes stages of calculation of system parameters at the scheme level and creation of labor-intensive real geometrical models of systems. The modeling stages allow to select the optimized inertial and stiffness parameters of the system elements, which will speed up the process of creating geometric models and provide high operating quality and reliability of designed machines. – **Fig. 1. Ref. – 4 titles.**

UDC 517.958:531.12; 541.43/49; 539.62; 532.516; 539.375.6; 539.4:620.2

Sherbakov S.S., Nasan A.A., Padhaiskaya D.A. **Volume damageability of the linear section of an oil pipeline with internal corrosion damage and repair glass-polymer sealing ring** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 323-329. Dangerous volumes were modeled for a pipe section with a single extended and multiple damages in air. Also for these models the effect of repair works with a composite sealing ring was considered. It was shown that dangerous volumes appeared in the vicinity of corrosion damages. In addition, the use of a glass-polymer composite sealing ring on the outer surface of the pipe led to the appearance of axial stress concentrators which caused the appearance of corresponding dangerous volumes at the boundaries of the sealing ring bands. This effect was observed due to shrinkage of the ring under its tight coupling with the outer surface of the pipe. – **Fig. 3. Tables 3. Ref. – 6 titles.**

UDC 623.4;5

Pilipchuk A.P., Mishyn A.A., Isak V.G. **Experimental and numerical study of the interaction process of a striker and a steel plate** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 330-335. The article presents the results of an experimental and numerical study of the interaction process between a striker and a steel plate. A comparison of experimental and calculated data. The calculated strain patterns of the samples are close to the experimental ones. The results obtained allow use simulation for preliminary analysis of the interaction between the striker and the steel plate. – **Fig. 3. Ref. – 14 titles.**

UDC 621.317.32:624.042.2

Martynenko T.M., Sklyar O.N., Martynenko I.M. **Calculation of planimetric effort at axisymmetric deformation of a spherical shell** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 336-340. The analysis of the exact solution of calculation of an intense strained state with a research of fields of the movements and tension arising in not flat spherical shell from action of the given loadings is made. As a result it became clear that around a basic contour in a spherical shell there are considerable moments of deflection, however these moments of deflection and to them the corresponding flexural stresses quickly fade in process of removal from a basic contour. – **Ref. – 9 titles.**

UDC 621.787:539.319

Vakulyuk V.S., Kirpichev V.A., Pavlov V.F., Sazanov V.P. **The estimation of surface hardening influence on the endurance limit of a part under stress concentration conditions** // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 341-346. The influence of cut depth and stresses concentration degree on an endurance limit of surface hardened specimens made of steel 20 depending on a character of surface layer residual stresses distribution has been examined. It's been stated, that the employment of the average integral residual stresses criterion is more acceptable for a prediction of an endurance limit increment caused by surface hardening. – **Fig. 3. Table 1. Ref. – 12 titles.**

UDC 620.178; UDC 621. 81: 621-192; UDC 681.3.06: 629.114.2

Kapusta P.P. The method of forming load blocks and the design calculation of the fatigue life of machine parts and structures under random loading // International scientific-technical collection «Theoretical and applied mechanics», Minsk, 2019, vol. 34. P. 347-355. On the basis of the conducted research, methods for the formation and approximation of load blocks and the calculation of the fatigue life, incl. - using the power equation of the fatigue curve, which is most acceptable at the design stage of machine parts and structural elements for random loading depending on the operating conditions of their operation; the algorithm and the program for calculating the fatigue life of machine parts and structures with the formation of load blocks, incl. - substantiation of their main characteristics (voltage step, etc.). Verification of the developed methods on the results of full-scale and computational computer experiments was completed. – **Fig. 4. Table 2. Ref. – 11 titles.**

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Плескачевский Ю.В., Журавков М.А., Старовойтов Э.И.</i> Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках.....	3
<i>Конон П.Н., Могилевский Е.И.</i> О сотрудничестве между механико-математическими факультетами МГУ им. М.В. Ломоносова и БГУ в исследованиях в области гидродинамики.....	10
<i>Карпович С.Е., Кузнецов В.В., Войтов А.Ю.</i> Мехатронные системы параллельной кинематики для фотолитографического оборудования.....	17
<i>Чигарев А.В., Поленов В.С.</i> Искривление лучей гравитационных и оптических волн в атмосфере массивных тел.....	23
<i>Simon Gast, Zimmermann Klaus, Minchenya Vladimir T., Lysenko Victor G.</i> Modelling and magnetic field simulation of a tactile sensor based on magneto-sensitive elastomers.....	28
<i>Сосновский Л.А., Щербаков С.С.</i> Второй закон термодинамики и его развитие.....	36
<i>Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Неумержицкая Е.Ю., Федотов Д.А.</i> Результаты экспериментальных исследований по определению радиального модуля упругости в цилиндрической оболочке из препрега.....	45
<i>Гавриленко С.Л., Шилько С.В., Панин С.В.</i> Определение вязкоупругих параметров СВМПЭ композитов на основе идентификации модели Прони по результатам краткосрочных релаксационных испытаний на сжатие.....	53
<i>Босяков С.М., Николайчик М.А., Матвеев А.Л.</i> Оценка предельной нагрузки на бедренную кость с армирующим имплантом в проксимальном отделе.....	57
<i>Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.</i> Сравнительный анализ кинематики и динамики процесса буксования колесно-шагающего движителя и колеса.....	62
<i>Щербаков С.С.</i> О создании комплексного индекса для прогноза перспективности областей научно-технического развития.....	69
<i>Шилько С.В., Рябченко Т.В., Романович С.И., Чоэ Н.</i> Определение сдвиговой прочности направленно-армированных углепластиков.....	78
<i>Яровая А.В.</i> Колебания трехслойной пластины под действием кольцевой резонансной нагрузки.....	84
<i>Борисов А.В., Чигарев А.В.</i> Применение обобщений матриц для построения дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей эндо- и экзоскелета по уравнениям плоских механизмов.....	91
<i>Ковалевский А.С., Грода Я.Г., Вихренко В.С.</i> Привод катящегося колеса при изменяющемся наклоне нити по отношению к плоскости качения.....	105
<i>Дудяк А.И., Хвасько В.М.</i> Определение величин радиального и осевого натягов при изготовлении блок-матрицы аппарата высокого давления.....	112
<i>Сосновский Л.А.</i> Объединенный закон трения и изнашивания в трибофатических системах.....	118
<i>Сурин В.М., Держинский С.М.</i> Исследование влияния параметров случайного виброн нагружения на усталостную прочность элементов.....	128
<i>Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Неумержицкая Е.Ю., Скворцов К.Г.</i> Расчет напряжения в препреге при химической усадке связующего, находящегося в твердом состоянии.....	134
<i>Леоненко Д. В.</i> Собственные колебания трехслойной круговой пластины, скрепленной с инерционным основанием.....	143

<i>Поленов В.С., Чигарев А.В.</i> Распространение сферически–симметричных волн в двухкомпонентных пористых средах.....	150
<i>Нестерович А. В.</i> Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении.....	154
<i>Миронов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П.</i> Исследование распространения волн скачков напряжений от импульсной нагрузки, приложенной к сферической и цилиндрической полостям.....	160
<i>Козел А.Г.</i> Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании пастернака.....	165
<i>Зеленая А.С.</i> Изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле.....	172
<i>Блинов А.О., Гончарова И.А., Куликова М.Г.</i> Вопросы визуализации в процессе проектирования при изучении общепрофессиональных дисциплин.....	179
<i>Сосенушкин Е.Н., Кадымов В.А., Яновская Е.А., Архипов А.А., Гуреева Т.В., Гусев Д.С.</i> Математическое моделирование затекания пластически деформируемого слоя в ребра.....	184
<i>Гончарова И.А., Кончина Л.В., Куликова М.Г., Маслова К.С.</i> Реализация метапредметного подхода в вопросах интеграции образовательной и профессиональной подготовки.....	190
<i>Кузнецов В.В.</i> Алгоритмизация прямой задачи кинематики мехатронной системы на шестикоординатном гибридном приводе прямого действия.....	195
<i>Марко А.Ф., Манин А.С., Нестеренко В.Н.</i> Версионирование и контроль целостности программного обеспечения при управлении многокоординатными системами реального времени.....	201
<i>Ершова А.И., Босяков С.М.</i> Моделирование длинных трубчатых костей с анизотропным распределением упругих свойств.....	206
<i>Мелешко И.Н., Ласый П.Г., Ширвель П.И.</i> О приближенном представлении логарифмами решения одной дифференциальной вариационной задачи.....	212
<i>Войтов А.Ю., Форулан М.М., Салманзадех Г.Й.</i> Моделирование в MATLAB системы управления гибридным приводом мехатронной системы.....	217
<i>Поляковский В.В.</i> Построение и алгоритмизация транспортного модуля технологического оборудования микро- и наноэлектроники.....	222
<i>Агаев В.Н., Мартыненко Т.М., Скляр О.Н., Мартыненко И.М.</i> Устойчивость несущих элементов конструкции при сопряженных воздействиях физических температурных полей и механических локализованных и распределенных внешних силовых нагрузок.....	227
<i>Поляковский В.В., Лахвич М.Н., Голунова В.М., Хмель О.В.</i> Алгоритмы группового управления промышленными роботами на автоматизированном складе.....	232
<i>Дедков А.И.</i> Методы улучшения качества лазерного исправления дефектов оригиналов топологий на фотошаблонах.....	237
<i>Титко Д.С.</i> Методы контроля оригиналов топологии полупроводниковых приборов на фотошаблонах, основанные на моделировании процессов фотолитографии.....	242
<i>Акимов В.А., Гончарова С.В.</i> Расчет плоского напряженно-деформируемого состояния операторно-символическим методом.....	249
<i>Щербаков С.С., Шемет Л.А.</i> Расчет опасных объемов в окрестности вершины	

трещины методами граничных и конечных элементов.....	252
Захарчук Ю.В. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.....	259
Девойно О.Г., Швец И.В. Обеспечение ресурсных параметров ответственных элементов механических трансмиссий с использованием поверхностных слоев, формируемых лазерными технологиями.....	266
Шанин В.А., Кончина Л.В. Моделирование процесса резки, применяемого в оборудовании пищевой промышленности.....	271
Лисовский Э.В., Шмелев А.В., Калина А.А. Виртуальные испытания кабины карьерного самосвала на соответствие нормативным требованиям к устройствам защиты при опрокидывании.....	276
Гольцев И.Ю., Гончарова И.А., Маслова К.С. Роль процесса визуализации учебного материала при изучении технических дисциплин.....	281
Капуста П.П., Вихренко Д.В., Воронько Ю.А. Моделирование концентраторов напряжений в виде круглых отверстий в пластине с использованием метода конечных элементов.....	284
Дедович Д. К., Евдокименко М. Н., Микулик Т. Н., Николаенко В. Л., Сечко Г. В. Повышение производственной безопасности учреждений образования и науки за счёт использования служебных гаджетов.....	291
Лис И.Н. Критерий предельного состояния образцов из стали 45 при статическом и циклическом нагружении.....	296
Дембовский И.Н., Богданович А.В. Особенности тарировки персонального испытательного центра.....	300
Щербаков С.С., Грибовский Г.В. Объёмная повреждаемость многокомпонентной системы «диск–автомобильная шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине.....	307
Авсиевич А.М., Кудин В.В., Шашко А.Е., Кругликов А.А. Взаимосвязь параметров вибраций с показателями долговечности сложных технологических систем.....	314
Авсиевич А.М., Кудин В.В., Кругликов А.А., Шашко А.Е. Методика многокритериальной оптимизации технологической системы на основе определения вибрационных параметров.....	318
Щербаков С.С., Насань О.А., Подгайская Д.А. Объёмная повреждаемость линейного участка нефтепровода с внутренними коррозионными повреждениями и ремонтной стеклополимерной манжетой.....	323
Пилипчук А.П., Мишин А.А., Исак В.Г. Экспериментальное и численное исследование процесса взаимодействия ударника и стальной пластины.....	330
Мартыненко Т.М., Скляр О.Н., Мартыненко И.М. Расчет контурного усилия при осесимметричной деформации сферической оболочки.....	336
Вакулюк В.С., Кирпичёв В.А., Павлов В.Ф., Сазанов В.П. Оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости детали в условиях концентрации напряжений.....	341
Капуста П.П. Методика формирования нагрузочных блоков и проектный расчет усталостного ресурса деталей машин и конструкций при случайном нагружении.....	347

<i>РЕФЕРАТЫ</i>	356
<i>ABSTRACTS</i>	366

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Международный научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 34

Оформление и компьютерная верстка *А.В. Дубовик*