

**О СОТРУДНИЧЕСТВЕ МЕЖДУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМИ  
ФАКУЛЬТЕТАМИ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА И БГУ В  
ИССЛЕДОВАНИЯХ В ОБЛАСТИ ГИДРОДИНАМИКИ**

**<sup>1</sup>Конон П.Н., <sup>2</sup>Могилевский Е.И.**

*<sup>1</sup>Белорусский государственный университет*

*<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

Течения вязкой жидкости со свободной поверхностью являются важной частью многих технологических процессов, например, они используются для организации тепло- и массообмена, встречаются при нанесении покрытий на твердые поверхности. На свободной поверхности возможно образование волн, эволюция возмущений определяется силами инерции, внешними массовыми и поверхностными силами, а также поверхностным натяжением. Для управления процессами волнообразования и неустойчивости необходимо иметь инструмент влияния на указанные силы, например, создание переменного поля массовых сил с помощью вращения, поверхностных сил газовым потоком вдоль поверхности жидкости или переменного поверхностного натяжения с помощью добавления в жидкость поверхностно-активного вещества.

Решению некоторых задач управления процессами неустойчивости и определению фундаментальных механизмов, влияющих на характер течения, посвящены научные проекты: «Гидродинамическая неустойчивость и волны в стекающей пленке при воздействии неравновесной адсорбции-десорбции летучего растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ)» (поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, №18-01-00762, руководитель - проф. В.Я. Шкадов); «Гидродинамические и тепловые процессы производства минеральных и металлических волокон для получения теплоизоляционной ваты, материалов дымоуловителей и фильтров ГРЭС и ТЭЦ, армирующих добавок тормозных колодок большегрузных автомобилей» (ГПНИ «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48», № 20161423, руководитель - проф. М.А. Журавков, отв. исполнитель доц. П.Н. Конон); «Стационарные и волновые капиллярные течения во вращающихся объемах жидкости» (поддержан Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований № Ф18Р-225 и Российским фондом фундаментальных исследований №18-51-00006, соруководители П.Н. Конон и Е.И. Могилевский).

Для координации исследований белорусскими и российскими был организован семинар по динамике вязких жидкости на механико-математических факультетах БГУ и МГУ имени М.В. Ломоносова, проходивший в режиме видеоконференции, под руководством профессора В.Я. Шкадова, доцентов А.Н. Белоглазкина, П.Н. Конона, Е.И. Могилевского, ассистента А.И. Алексюка. Информация о видеосеминаре: программа заседаний, аннотации докладов — размещается в сети Интернет по адресу <http://new.math.msu.su/department/aeromech/research.php?p=viscousfluidsdynamics>.

В конце первого полугодия совместной работы 7-8 декабря 2018 года на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета состоялся Международный семинар по динамике вязких жидкостей, который являлся заключительным в 2018 году заседанием совместного семинара групп БГУ и МГУ имени М.В. Ломоносова. Были заслушаны следующие сообщения:

1. Алексюк А.И. (МГУ им М.В. Ломоносова), Шкадов В.Я. (МГУ им М.В. Ломоносова). Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью.

2. Белоглазкин А.Н. (МГУ им М. В. Ломоносова), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова), Кулаго А.Е. (РЭУ им. Г.В. Плеханова). Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости.

3. Могилевский Е.И. (МГУ им М. В. Ломоносова), Конон П.Н. (БГУ), Кулаго А.Е. (РЭУ им. Г.В. Плеханова), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова). Равновесные формы капель во внешних полях.

4. Конон П.Н. (БГУ), Жук А.В. (БГУ), Шкадов В.Я. (МГУ им М. В. Ломоносова). Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

5. Ермоленко А.И. (БГУ), Конон П.Н. (БГУ). Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил.

В работе семинара принимали участие сотрудники МГУ имени М.В. Ломоносова, Института тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, сотрудники, аспиранты и студенты БГУ (рис. 1).



*Рис. 1. Некоторые участники работы семинара*

Ниже приводятся аннотации всех сообщений.

**Сообщение А.И. Алексюка, В.Я. Шкадова «Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью»**

Рассматриваются двухфазные течения неперемешивающихся вязких несжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения в поле силы тяжести. Движение каждой фазы описывается уравнениями Навье-Стокса. Численное решение начально-краевых задач проводится на основе стабилизированного метода конечных элементов (GLS-метод – Galerkin/Least-Squares), который ранее успешно применялся для решения двумерных и трехмерных задач обтекания тел потоком вязкой жидкости (газа) [1, 2]. Пространства пробных и весовых функций дополняются функциями, которые допускают разрывы параметров потока внутри ячеек, содержащих границу раздела (XFEM – Extended Finite Element Method) [3]. Для отслеживания перемещений границы раздела применяется метод функции уровня (level-set method). Используемые

методы позволяют моделировать течения с изменяющейся топологией свободной поверхности на неподвижных расчетных сетках.

Проведено тестирования численных алгоритмов на различных течениях со свободной поверхностью. Получено хорошее соответствие результатов расчетов задач о всплытии “двумерного пузыря” (рис. 2а) и о стекании пленки по плоской вертикальной стенке (рис. 2б) с данными [3, 4]. В качестве примера задачи с изменяющейся топологией границы раздела представлены расчеты развития неустойчивости Рэля-Тейлора из состояния равновесия (рис. 2с): покоящийся слой жидкости находится под слоем более тяжелой жидкости.

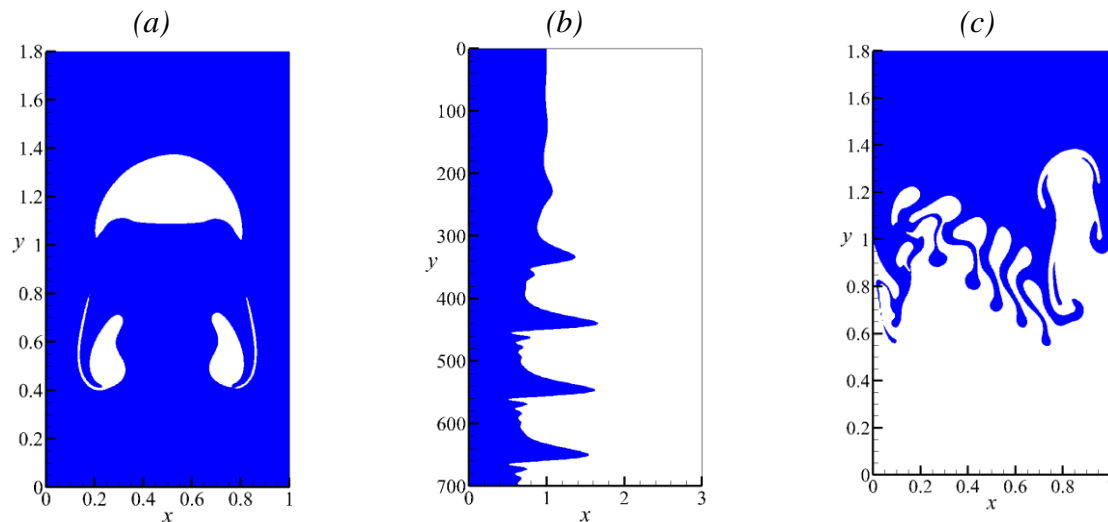


Рис. 2 Примеры тестовых расчетов: (а) всплытие “двумерного пузыря”; (б) стекание пленки по вертикальной стенке; (с) развитие неустойчивости Рэля-Тейлора

### **Сообщение А.Н. Белоглазкина, В.Я. Шкадова, А.Е. Кулаго «Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости»**

Система эволюционных уравнений Капицы-Шкадова [5], описывающая волновое течение жидких пленок, изначально допускает вариации во времени интегральных характеристик течения, будь то средняя толщина или расход. Использование инвариантных свойств эволюционных уравнений позволяет производить расчеты течений пленки, как для режимов постоянной толщины, так и для режимов постоянного расхода, что позволяет установить соответствие между характеристиками регулярной волны, наблюдаемой в эксперименте или при численных расчетах течения для всей числовой оси, и периодическим по пространству предельным решением эволюционной системы уравнений.

На основе анализа глобального аттрактора (множества предельных решений динамической системы, соответствующих периодическим по пространству решениям системы эволюционных уравнения) было проведено сравнение свойств волновых режимов и полученных характеристик регулярных волн с данными экспериментов по возбуждению волн на поверхности пленки жидкости заданной частотой, численного решения соответствующей пространственной краевой задачи [4].

Приведенные расчеты демонстрируют не только хорошее соответствие формы волны и характеристик возникающего пленочного течения, но и позволяют объяснить наблюдаемую в некоторых расчетах и экспериментальных данных перестройку течения вблизи нейтрального значения возбуждаемой частоты. Представлена неединственность характеристик пленки жидкости при ее возбуждении частотой из области промежуточных семейств. Проведено сравнение с экспериментальными данными для тонкой пленки сильновязкой жидкости [6].

**Сообщение Е.И. Могилевского, П.Н. Конона, А.Е. Кулаго, В.Я. Шкадова  
«Равновесные формы капель во внешних полях»**

Рассматривается равновесие конечного объема жидкости под действием капиллярных сил и внешних полей: гравитационного, электрического (для модели идеального проводника), поля центробежной силы. Обсуждаются численные методы решения краевой задачи для уравнения Юнга-Лапласа.

На примере задачи о форме висящей капли показана возможность неединственного решения задачи, для выбора физически реализуемого варианта используется критерий устойчивости [7].

При решении задачи о равновесной форме капли идеального проводника в вертикальном постоянном электрическом поле применяется итерационный метод, идея которого заключается в последовательном решении задачи электростатики для данного приближения формы поверхности и задачи о равновесии жидкости под действием гравитационных, капиллярных и максвелловских напряжений, в предположении, что распределение заряда по поверхности — заданная функция [8]. Показано, что неустойчивые равновесные формы не воспроизводятся при таком методе расчета. Обнаружено, что при наличии электрического поля становятся неустойчивыми формы капель, содержащие «шейку»: у которых радиус пятна соприкосновения с твердой поверхностью меньше наибольшего радиуса горизонтального сечения.

Решена задача о равновесии капли на поверхности горизонтального вращающегося диска. Показано, что достаточно большие капли под влиянием центробежной силы форма трансформируются из почти плоского слоя с закруглением на концах в сравнительно узкий обод с тонкой пленкой внутри. Для фиксированного объема жидкости равновесная форма капли существует только для значений угловой скорости, не превосходящих критическое. Определена зависимость критической угловой скорости от объема капли.

Приводятся результаты наблюдений поведения капли вязкой жидкости на вращающемся диске для докритических и сверхкритических угловых скоростей. При превышении критической скорости капли малого объема утекают в одну сторону, причем форма следа, который она оставляет на поверхности диска зависит от вязкости жидкости (определяется значением числа Экмана). При больших значениях объема капля разрывается на некоторое количество ручейков.

Обсуждаются постановки задач, позволяющие предсказать количество ручейков. Получены неосесимметричные стационарные формы капель как возмущения осесимметричной. Показано, что в случае малой кривизны возмущения представляют собой линейную комбинацию функций Бесселя [9]. Выведено выражение для второй вариации энергии в окрестности осесимметричного решения. Предполагается, что возмущения, искажающие форму капли, отвечают наибольшему по модулю уменьшению энергии при фиксированном значении нормы возмущений в пространстве непрерывных функций. Так как возможны равновесные возмущения, выражающиеся через функции Бесселя, именно эту систему функций предлагается использовать в качестве базиса.

Рассматривается постановка задачи для уравнений Стокса, в которой не предполагается равновесие жидкости относительно подвижной вращающейся системы отсчета. Поле течений может быть найдено с помощью теории потенциала [10], а для определения эволюции использован тот же метод, что и при вычислении равновесной формы капли в электрическом поле.

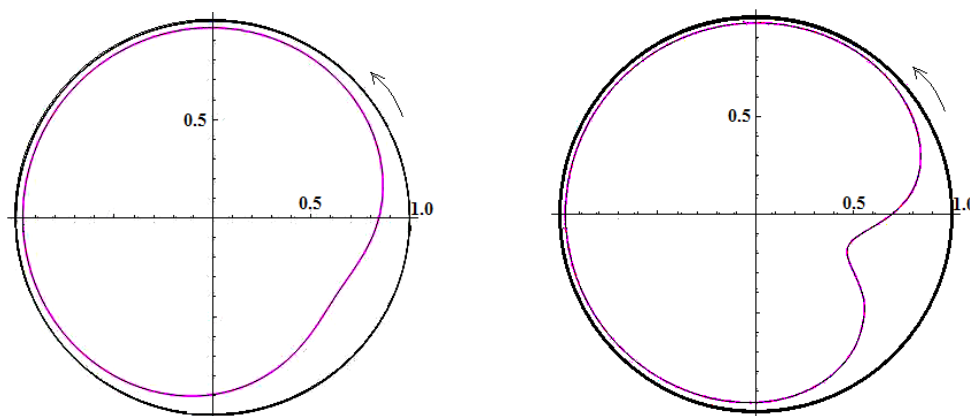
Результаты работы могут применяться для оптимизации процессов нанесения покрытий, а также производства металлических волокон центробежным способом.

**Сообщение П.Н. Конона, А.В. Жука, В.Я. Шкадова «Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра»**

С целью изучения процессов центробежного литья металлов в работе исследовано неизотермическое плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции.

Решение изотермической задачи рассмотрено в [11-13]. Движение вязкой жидкости рассматривается в относительной полярной системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, и описывается уравнениями Навье-Стокса с переменной вязкостью, энергии, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. В уравнении энергии учтены конвективные составляющие и диссипативные члены. В случае достаточно быстрого вращения цилиндра получены уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Решения полученной системы ищется прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра, отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности и теплообменом по условиям 3-го рода.

В результате исследований получена и численно решена система дифференциальных уравнений в частных производных определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса  $Re$  в поле центробежных сил с учетом изменяющегося температурного поля в жидкости (рис. 3). Проведены сравнения с экспериментами и результатами исследования изотермической задачи. Найдена зависимость времени распада слоя на цилиндре от числа  $Re$ . Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя. Основной причиной распада слоя на внутренней цилиндрической вращающейся цилиндрической поверхности является гравитационная неустойчивость, вызванная значительным влиянием силы тяжести по сравнению с центробежными силами.



*Рис.3. Пример одного из расчетов: поднятие и провисание слоя глицерина в различные моменты времени при заполнении жидкостью в 16,5% объема вращающегося цилиндра*

**Сообщение А.И. Ермоленко, П.Н. Конона «Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил»**

В работе исследовано плоское движение тонких несмешивающихся слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтально расположенного, вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил тяжести и инерции. Подобного рода течения можно использовать при нанесении двухслойных покрытий на цилиндрические поверхности. Используя условие постоянства потока в окружном направлении [14], в работах [15,16] решена задача определения вида поверхностей двух

слоев в случае установившегося движения жидкостей как на внутренней, так и на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки.

В данном исследовании получена общая трехмерная постановка задачи движения двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей в поле центробежных, поверхностных и гравитационных сил.

С помощью основных постулатов теории тонкого слоя [12] система уравнений, представляющая собой постановку двумерной нестационарной плоской задачи, была упрощена. В случае умеренного движения, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье-Стокса, получены окружные и радиальные компоненты скорости, а также взаимосвязанная система уравнений эволюции наружного и внешнего слоев в гравитационном и поверхностном поле. Разработан и реализован численный метод ее исследования, основанный на методе прямых в последующем интегрировании по формулам Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Получены и проанализированы формы раздела слоев и свободной поверхности (рис. 4) от длительного устойчивого состояния при медленном вращении до развития возмущений со временем и распада слоя при увеличении влияния центробежных сил.

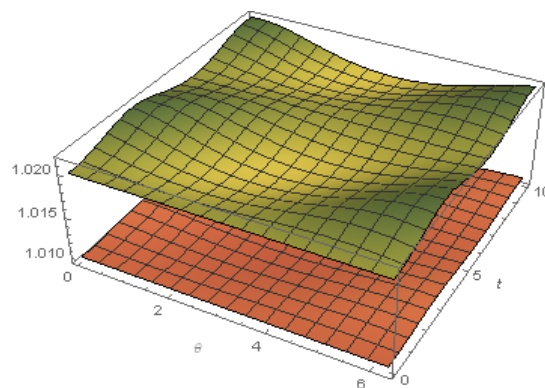


Рис.4. Пример одного из численных расчетов формы раздела двух слоев и свободной поверхности, когда внешний слой меньшей плотности и вязкости

**Заключение.** В ходе работы семинара были подведены итоги совместной работы групп МГУ имени М.В. Ломоносова и БГУ. Были определены направления дальнейших исследований, обсуждены возможности применения численных методов, представленных в сообщении А.И. Алексюка, В.Я. Шкадова, к решению задач, рассмотренных в докладах П.Н. Конона и др. и А.И. Ермоленко, П.Н. Конона. Результаты, полученные А.Н. Белоглазкинским и др. могут использоваться при изучении устойчивости и нелинейных волн, возникающих при движении жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Предполагается совместное экспериментальное исследование устойчивости капли на вращающемся диске в развитие работы Е.И. Могилевского и др.

Принято решение продолжить работу в течении года в форме видеосеминара, а также провести аналогичный семинар в конце 2019 года.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-01-00762, 18-51-00006), Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18Р-225)*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aleksyuk A.I. Analysis of three-dimensional transition mechanisms in the near wake behind a circular cylinder/ Aleksyuk A.I., Shkadov V.Ya. // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. - 2018. - V. 72, -P.456–466

2. Aleksyuk A.I. Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder/ Aleksyuk A.I., Osipov A.N. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. - 2018. - V.119. - P. 665–677.
3. Sauerland H. The extended finite element method for two-phase and free-surface flows: A systematic study/ Sauerland H., Fries T.-P. // *Journal of Computational Physics*, 2011. V. 230 (9), P. 3369–3390.
4. Nosoko T. The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film/ Nosoko T., Miyara A. // *Physics of Fluids*. 2004. -V. 16 (4). - P. 1118–1126.
5. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести/ Шкадов В.Я. // *Изв. АН СССР. МЖГ*. - 1967. - № 1. - С. 43-51.
6. Panga M.K.R. Long-wavelength equation for vertically falling films/ Panga M.K.R., Mudunuri R.R., Balakotaiah V. // *Phys. Rev. E*. - 2005.- V.71. - P. 036310.
7. Гидродинамика невесомости/ под ред. А.Д. Мышкиса — М. Наука.- 1976. - 576 с.
8. Могилевский Е.И. Равновесные формы висящей капли в электростатическом поле/ Могилевский Е.И., Шкадов В.Я., Шутов А.А. // *Изв. РАН. МЖГ*. - 2012. - № 5. - С. 23-31.
9. Конон П.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске/ Конон П.Н. и др. // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*.-2016. - Вып. 31.- С. 87-94.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 288 с.
11. Епихин В.Е. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Шкадов В.Я. // *ИФЖ*. -1994. -Т.66. -№6. - С. 689-694.
12. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести/ Пухначев В.В. // *ПМТФ*. -1977.- № 3. - С. 78-88.
13. Конон П.Н. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки частично заполненной жидкостью/ Конон П.Н., Жук А.В.// *Механика машин и механизмов*. 2013.- №4(25). - С.32-37.
14. Hansen E. B. Steady, viscous free-surface flow on a rotating cylinder/ Hansen E. B., Kelmanson M. A. // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1994. - V. 272. - P. 91-107.
15. Конон П.Н. Исследование двухслойного течения пленок вязких жидкостей на внутренней поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Ермоленко А.И. // *Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт*. –2016. –№ 1(32). – С. 334-337.
16. Конон П.Н. Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра/ Конон П.Н., Ермоленко А.И.// *Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика»*. Минск –2017. – Вып. 32. – С. 46-51.