УДК 539.3

ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Захарчук Ю.В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Республика Беларусь

Современные композитные материалы, имеющие слоистую структуру, обладают высокими удельными характеристиками жесткости и прочности, создаются с заданной ориентацией свойств. Это позволило им выйти на первый план среди конструкционных материалов и получить широкое распространение во многих отраслях техники. Деформирование трехслойных круговых пластин в случае несжимаемого заполнителя в настоящее время изучено достаточно хорошо. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографии [1]. Деформирование упругих трёхслойных пластин со сжимаемым заполнителем исследовалось в работах [2, 3].

Здесь приведены постановки краевой задачи в усилиях и перемещениях о симметричном изгибе упругопластической круговой трёхслойной пластины со сжимаемым заполнителем. В тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа. Жесткий сжимаемый заполнитель воспринимает нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной и поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, деформируемость по толщине принимается линейной.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ: $q=q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя. Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция обжатия заполнителя. Обозначим через h_k толщину k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3=2c$.

Продольные и поперечные (прогибы) перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через искомые функции соотношениями:

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right),\quad w^{(1)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + v\left(r\right),$$

$$(c \le z \le c+h);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r,\quad w^{(2)}\left(r,z\right) = w\left(r\right),$$

$$(-c-h \le z \le -c);$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right],$$

$$w^{(3)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + \frac{v\left(r\right)}{2c}\left(z+c\right),\quad (-c \le z \le c);$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях будут

$$\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}\left(u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right)\right),\quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - zw,_{rr},\quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}\left(u - c\psi - zw,_r\right),$$

$$\varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,\quad \varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - z\left[w,_{rr} + \frac{v,_{rr}}{2c}\left(z+c\right)\right],$$

$$\varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{z}{2c}v,_r\right),\quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}.$$

Предположим, что материалы несущих слоев в процессе деформирования могут проявлять упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Для их описания используем соотношения теории малых упругопластических деформаций:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1-\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\text{э}_\alpha^{(k)},\quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)},$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3\text{э}_{rz}^{(3)}(1-\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})),\ (k=1,2,3,\ \alpha = r,\varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\text{э}_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объёмной деформации k-го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности материалов несущих слоев, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k-м слое (k=1, 2), $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоёв; $s_{rz}^{(3)}$, $\text{э}_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причём $\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \le \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha=r,\varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_\alpha^{(k)}\,\mathrm{d}z,\ M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_\alpha^{(k)} z\,\mathrm{d}z$$

$$,\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right),$$

$$D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 \,\mathrm{d}z .$$

Компоненты тензора напряжений в слоях представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3),$$
$$\sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k Э_\alpha^{(k)},$$
$$\sigma_z^{(3)} = 2G_3 Э_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 Э_z^{(3)},$$
$$\sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 Э_{rz}^{(3)} .$$

Обобщённые внутренние усилия, с учётом замены напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$, $\sigma_{rze}^{(3)}$, $\sigma_{rz\omega}^{(3)}$, $\sigma_{ze}^{(3)}$, $\sigma_{z\omega}^{(3)}$ будут следующими:

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\omega}^{(k)},$$
$$M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} \equiv \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha\omega}^{(k)},$$
$$H_\alpha = H_{\alpha e} - H_{\alpha\omega}, \quad H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c\left(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}\right),$$
$$H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c\left(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}\right),$$
$$D_\alpha = D_{\alpha e} - D_{\alpha\omega}, \quad D_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)},$$
$$D_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3)} .$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины с жестким сжимаемым заполнителем, была получена с помощью принципа Лагранжа в [2]. Ее можно применить здесь как исходную. Выделяя в обобщенных внутренних усилиях линейные и нелинейные составляющие, получим:

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega,$$
$$H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = h_\omega,$$
$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q + q_\omega,$$
$$D_r,_{rr} + \frac{1}{r}\left(2D_r,_r - D_\varphi,_r - \frac{1}{2c} M_{rz}^{(3)}\right) -$$
$$-\frac{1}{2c} T_z^{(3)} - \frac{1}{2c} M_{rz}^{(3)},_r = -q + g_\omega .$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий, причем нижний индекс «*e*» в дальнейшем опущен для удобства. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом «ω»:

$$p_\omega = T_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}),$$
$$h_\omega = H_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega^{(3)},$$
$$q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\varphi\omega},_r),$$
$$g_\omega = D_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}\left(2D_{r\omega},_r - D_{\varphi\omega},_r - \frac{1}{2c} M_{rz\omega}^{(3)}\right) -$$
$$-\frac{1}{2c} T_{z\omega}^{(3)} - \frac{1}{2c} M_{rz\omega}^{(3)},_r .$$

Граничные условия в усилиях:

$$T_r = T_r^0 + T_{r\omega}, \quad H_r = H_r^0 + H_{r\omega}, \quad M_r = M_r^0 + M_{r\omega},$$
$$M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0 + M_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}),$$
$$D_r = D_r^0 + D_{r\omega}, \quad D_r,_r + \frac{1}{r}\left(D_r - D_\varphi\right) - M_{rz}^{(3)} =$$
$$= M_{rz}^0 + D_{r\omega},_r + \frac{1}{r}\left(D_{r\omega} - D_\varphi\right) - M_{rz\omega}^{(3)} .$$

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам, приведенным в [2], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия будет иметь вид:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r - a_4 v,_r) + K_3^- v,_r = p_\omega,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_5\psi - a_6 w,_r - a_7 v,_r) - 2cG_3\psi = h_\omega,$$
$$\mathrm{L}_3(a_4 u + a_7\psi - a_9 w,_r - a_{10} v,_r) - K_3^-\left(u,_r + \frac{u}{r}\right) +$$
$$+\frac{c}{6}\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right)\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) - \frac{1}{2c}K_3^+ v = -q + g_\omega,$$

a_i – коэффициенты, учитывающие упругие и геометрические параметры слоев, L_k – линейные дифференциальные операторы [2].

Краевая задача по определению прогиба круглой упругопластической пластины со сжимаемым заполнителем замыкается присоединением граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № Т18Р-090).

Литература

1. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая – Минск : Бел. навука, 2004. – 342 с.

2. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации, 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

3. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика, Минск : БНТУ. – 2018. – № 33. – С. 363–369.