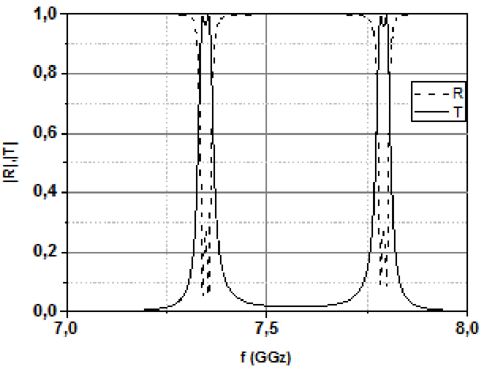

Рисунок 6 – Частотная зависимость коэффициентов отражения и прохождения плоской волны. Электрическая компонента поля параллельна стержням

Литература

1. Будай А.Г., Кныш В.П. Малый С.В., Рудницкий А.С. Частотно-селективные экраны на основе связанных полосковых резонаторов // Материалы 7-й Международной научно-технической конференции «Приборостроение-2014», 19-21 ноября 2014 г., Минск, 2014. – С. 262-263.

2. Малый С.В. Непоглощающие радиомаскирующие покрытия // Сборник научных статей Международной военно-научной конференции учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь» «Обеспечение военной безопасности государства: проблемы и перспективы», Минск, 2017. – С. 53–57.

УДК 530.182

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ТИПА WOBBLING KINK В ТЕОРИИ ϕ^4 ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Князев М.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

Для изучения решения типа wobbling kink в модели ϕ^4будем использовать аналитический подход, развитый в работе [1]. Уравнение движения в модели запишем следующим образом [2]:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi - \phi^3 = 0. \qquad (1)$$

Здесь для частных производных приняты обозначения $\phi_{tt} = \partial^2\phi/\partial t^2$ и $\phi_{xx} = \partial^2\phi/\partial x^2$. Использование таких обозначений в последующих вычислениях будет очевидно и дополнительно не оговаривается. Статическое решение этого уравнения хорошо известно: Оно имеет вид:

$$\phi(x,0) = \tanh\left(\frac{x - x_{in}}{\sqrt{2}}\right). \qquad (2)$$

С целью упрощения вычислений выберем начало координат таким образом, чтобы параметр x_{in}, описывающий начальное положение статического решения (2), был равным нулю.

В настоящее время удается получить только асимптотические разложения для решений типа wobbling kink. Для того, чтобы это сделать, используется представление искомого решения в виде:

$$\phi(x,t) = \phi(x,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x,t). \qquad (3)$$

Соотношение (3), по сути дела, представляет собой ряд теории возмущений. Здесь ε – параметр порядка в той или иной конкретной задаче, который считается малой константой, а $\phi_n(x,t)$ – некоторые неизвестные функции, которые предстоит определить. Для определения этих функций удается построить бесконечную систему уравнений, последовательное решение которых, в принципе, позволяет найти все ϕ_n. Особенностью получаемых таким образом выражений для этих функций является то, что они носят осциллирующий характер, причем частоты осцилляций как временной, так и пространственной составляющих каждой функции ϕ_n, во-первых, различны, а, во-вторых, фиксированы.

Поскольку здесь ставится задача исследовать влияние возмущения на уже известное представление для решения типа wobbling kink в модели ϕ^4, то в качестве начального состояния будем использовать суперпозицию статического кинка (2) и возмущения, имеющего гауссов профиль [3],:

$$\phi(x,0) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + A\exp(-b(x - x_0)^2), \qquad (4)$$

где A – амплитуда возмущения (считаем, что она достаточно мала; это, в свою очередь, означает, что и возмущение будет малым), b – величина, обратная ширине возмущения, x_0 – начальное положение возмущения. Выбор такой формы возмущения связан с тем, что профиль гауссовой функции является гладким, и к тому же, его с достаточной для практических целей точностью можно считать локализованным в ограниченной области пространства

Соотношение (4), описывающее начальное состояние возмущенного решения типа wobbling kink, можно использовать с целью определения условий на параметры возмущения A и b. Для этого необходимо подставить (4) в статическое уравнение

$$\phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0, \qquad (5)$$

которое следует из уравнения (1). Это можно сделать, так как, поскольку соотношение (4) выполняется в начальный момент времени, то оно может быть использовано в качестве начального условия и для последующих моментов времени, то есть для динамической задачи. В результате после некоторых алгебраических преобразований получим следующее уравнение:

$$2b[1-2b(x-x_0)^2]-3\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-$$
$$3A\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\exp[-b(x-x_0)^2]$$
$$-A^2\exp[-2b(x-x_0)^2]+1=0. \qquad (6)$$

Данное уравнение содержит три параметра возмущения: A, b и x_0 Традиционно считается, что параметр x_0 можно выбирать произвольным образом из соображений удобства вычислений и анализа результатов. Обычно его принимают равным нулю. Таким образом, в уравнении остаются только два очень важных параметра, характеризующих возмущение, а именно, A и b. На этом основании уравнение (6) можно рассматривать как уравнение связи между этими параметрами. Это означает, что мы не сможем построить возмущенное решение типа wobbling kink в модели ϕ^4 при возмущении гауссова типа с произвольными значениями параметров. Это удастся сделать только для тех случаев, для которых амплитуда возмущения и величина, обратная ширине возмущения, будут удовлетворять уравнению (6).

Уравнение (6) является трансцендентным. Точное аналитическое решение этого уравнения построить не удается. Можно найти его приближенное решение или решить это уравнение при помощи численных методов. К тому же, уравнение одно. А неизвестных параметров в нем – два. Поэтому, исходя из уравнения (8), можно найти только один параметр. Другой параметр надо определить независимым способом или принять, что он будет иметь произвольное значение (которое, однако, будет определяться рассматриваемой задачей).

Можно оценить рассматриваемые параметры для некоторых частных случаев, используя представления для предельных случаев [4]. Пусть, например, значение координаты x достаточно велико. В этом случае из уравнения (8) можно получить соотношение вида $b\sim\frac{1}{x}$. Данная оценка хорошо согласуется с допущением о малости параметра b, учитывая диапазон значений координаты. Ещё для одного частного случая, когда система находится в начале координат ($x=x_0=0$) из уравнения (6) можно получить достаточно простое соотношение вида $2b+1=A^2$ между параметрами возмущения.

Уравнение (6) можно получить и непосредственно из динамического уравнения (1). Для этого нужно подставить соотношения (3) и (4) в уравнение (1). В результате, если выписать коэффициенты при одинаковых степенях ε получим систему уравнений для функций ϕ_n. Отличительной особенностью развиваемого в настоящей работе подхода по сравнению с подходом, представленным в работе [1], является следующее обстоятельство. В работе [1], вследствие отсутствия возмущающего слагаемого, удается, несмотря на нелинейный характер задачи, представить уравнение (1) в виде бесконечной суммы уравнений для каждой степени n параметра ε, начиная с $n=1$. Наличие возмущения в нашем случае приводит к появлению дополнительного уравнения – уравнения, соответствующего ε в нулевой степени. Это уравнение получается, если приравнять нулю все слагаемые, которые стоят при коэффициентах ε^0. Оказывается, это в точности будет уравнение (6).

Теперь на это уравнение можно взглянуть с другой точки зрения, по сравнению с тем, что было отмечено выше. Можно сказать, что для каждой конкретной системы, описываемой уравнением (1) и имеющей в качестве начального приближения условие (4), параметры возмущения имеют некоторые фиксированные значения (по крайней мере, в линейном приближении). Следовательно, в этом случае уравнение (6) будет определять множество значений координаты x, для которых возможно существование решения типа wobbling kink. Относительно случая, рассмотренного в работе [1], такое приближение определялось обычным кинком (2).

Дальнейшее исследование показывает, что и при наличии возмущения, по крайней мере, в линейном приближении для решения типа wobbling kink будет характерно наличие осцилляций как временной, так и пространственной составляющих решения. Однако, если в отсутствие возмущения частоты колебаний для обеих составляющих не менялись, то при наличии возмущения фиксированной остается только частота колебаний временной компоненты решения. Частота же колебаний пространственной составляющей решения оказывается зависящей от координаты x.

Следует отметить, что фиксированная частота колебаний временной составляющей решения типа wobbling kink является следствием соотношения (3), которое фактически представляет собой разложение по стоячим волнам. Последующий учет ангармоничности колебаний приведет к тому, что и частота колебаний временной составляющей решения будет переменной величиной.

Литература

1. Segur, H. Wobbling kink in ϕ^4 and sine-Gordon theory / H. Segur // J. Math. Phys. – 1983. – V. 24, № 6. – P. 1439–1443.

2. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М. : Мир, 1985. – 416 с.

3. Piragua, H. Studying the topological stability of the $\lambda\phi^4$ kink / H. Piragua, P.S. Letelier // http://xxx.lanl.gov (arXiv:nlin/1004.4643).

4. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. : Наука, 1978. – 228 с.