

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКИ

¹ Яровая А.В.

¹ Белорусский государственный университет транспорта

Трехслойные элементы конструкций широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета при квазистатических и динамических нагрузках. В монографиях [1, 2] приведены постановки и решения ряда задач статики и динамики трехслойных стержней и пластин. Резонансные колебания круговых трехслойных пластин при равномерно распределенной нагрузке изучены в [3]. Результаты, связанные с колебаниями трехслойных элементов конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, получены в работах [4–8]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных стержней, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрено в статьях [9–14].

Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной круговой пластины, возбужденные резонансной поверхностной кольцевой нагрузкой.

1. Постановка начально-краевой задачи

Постановка задачи и ее решение приводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении. Нумерация слоев показана на рис. 1.

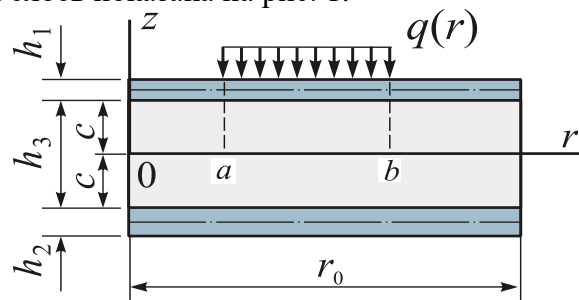


Рис. 1.

Внешняя вертикальная нагрузка произвольной формы осесимметрична: $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Для изотропных несущих слоёв стержня приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы в поперечном направлении. В легком, не сопротивляющемся тангенциальному сдвигу несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе Z , нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу r_0 .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned}$$

где z – координата от рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая малые вынужденные поперечные колебания рассматриваемой круговой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона [10]:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= 0; \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3)r_0^2$; $h_1, h_2, h_3 = 2c$ – толщины несущих слоев и заполнителя; ρ_k плотность материала k -го слоя; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2\right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+\right), \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2}h_1\right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2}h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \end{aligned}$$

где G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации материала; две точки вверху – вторая производная по времени t .

Задача нахождения функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к (1) граничных

- при заделке контура пластины

$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1),$$

- при шарнирном опирании пластины

$$(u = \psi = w = M_r = 0 \quad \text{при } r = 1);$$

и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r),$$

где $w(r, 0), \dot{w}(r, 0)$ – начальные прогиб и скорость пластины.

2. Общее решение задачи

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки следует из (1) при $q = 0$. В [21] приведено ее решение и построена система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (2)$$

где J_n, I_n – функции Бесселя n -го порядка от действительного и комплексного аргументов; β_n – собственные числа; d_n – коэффициенты, нормирующие систему (2)

$$d_n^2 = \int_0^1 \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r) \right]^2 r dr = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)] -$$

$$- \frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n I_0(\beta_n)} [J_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + J_0(\beta_n) I_1(\beta_n)] + \frac{J_0^2(\beta_n)}{2I_0^2(\beta_n)} [I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)].$$

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t),$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad (3)$$

где

$$\phi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)) \right],$$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr; \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения β_n следуют из граничных условий. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0.$$

Удовлетворяя два последние из них с помощью представления (3), получим трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел

$$I_1(\beta) J_0(\beta) = -J_1(\beta) I_0(\beta).$$

После этого частоты колебаний ω_n получим из соотношения:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}. \quad (4)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (3) и использования линейной связи функций v_n, ϕ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (5)$$

Общее решение этого уравнения можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t). \quad (6)$$

где $y_n(t)$ – частное решение уравнения (5).

Задача исследования вынужденных, в том числе резонансных, колебаний сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$ для каждого вида динамической нагрузки (прямоугольная, синусоидальная, параболическая).

3. Круговая и кольцевая нагрузки

На внешнюю поверхность несущего слоя действует резонансная поверхностная гармоническая нагрузка, *равномерно распределенная по кругу* относительного радиуса $b \leq 1$:

$$q(r, t) = q_0 H_0(b - r) (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)) \quad (q_0, D, E, k - \text{const}). \quad (7)$$

Здесь $H_0(r)$ – функция Хевисайда нулевого порядка, обращающаяся в ноль при отрицательном аргументе, и равная единице на остальной числовой оси; частота

внешней возмущающей силы ω_k совпадает с одной из собственных частот ω_n колебаний круговой трехслойной пластины.

Решение соответствующей начально-краевой задачи предполагаем в виде (3), т. е., раскладываем в ряд по системе собственных ортонормированных функций $v_n(r, \beta_n)$. Тогда параметры $q_n(t)$ разложения в ряд нагрузки (7) будут

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t), \quad (8)$$

$$D_n = \frac{q_0 D b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right),$$

$$E_n = \frac{q_0 E b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right).$$

При $b = 1$ следуют коэффициенты для пластины, у которой резонансная нагрузка распределена по всей поверхности внешнего слоя.

Частное решение дифференциального уравнения (5) для определения функции времени (6) следующее:

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k^2} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k^2} t \sin(\omega_k t), & n = k \end{cases}. \quad (9)$$

Обозначим начальные прогиб и скорость пластины $w(r, 0)$ и $\dot{w}(r, 0)$. Подставив в них выражение для прогиба (3), с учетом функций (6), (9) и ортонормированности системы функций $v_n(r, \beta_n)$, получим следующие константы интегрирования

$$A_n = \int_0^1 w(r, 0) v_n r dr = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases},$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \left[\int_0^1 \dot{w}(r, 0) v_n r dr = \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k^2}, & n = k \end{cases} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, поперечные колебания круговой трехслойной пластины под действием резонансной нагрузки (7) описываются перемещениями (3), в которых функция времени $T_n(t)$ и константы интегрирования определяются формулами (6), (8)–(10), а частоты колебаний рассчитываются по формулам (4).

Нагрузка, *равномерно распределенная по кольцу*. Пусть поверхностная равномерно распределенная гармоническая *резонансная* нагрузка воздействует локально на кольцевую поверхность трехслойной пластины $a \leq r \leq b$. Тогда ее можно записать

$$q(r, t) = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)). \quad (11)$$

Параметры разложения нагрузки (11) в ряд по системе собственных ортонормированных функций (2) будут

$$D_n = \frac{q_0 D}{M_0 d_n \beta_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right),$$

$$E_n = \frac{q_0 E}{M_0 d_n \beta_n} \left(b J_1(\beta_n b) - a J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} (b I_1(\beta_n b) - a I_1(\beta_n a)) \right). \quad (12)$$

После этого соответствующая функция времени $T_n(t)$ следует из выражения (6), где константы интегрирования A_n, B_n определяются формулами (10) с учетом (12).

4. Численные результаты.

Численная адаптация решений проведена для заземленной по контуру пластины со слоями из материалов Д16Т–фторопласт–16Т, механические характеристики которых приведены в [15]. Собственные числа взяты из работы [4], частоты колебаний ω_n вычислялись для пластины с толщинами слоев $h_1 = h_2 = 0,01, h_3 = 0,1$. Нагрузка действует на всю поверхность внешнего слоя пластины. Начальные условия движения нулевые $w(r, 0) = \dot{w}(r, 0) = 0$, что соответственно упрощает нахождение констант интегрирования (10). При вычислении прогибов суммировались первые 14 членов ряда (3), т. к. дальнейшее увеличение количества слагаемых (до 100) результат практически не изменяет.

На рис. 2 показана зависимость прогиба в центре пластины от радиуса *пятна* резонансной нагрузки с амплитудой интенсивности $q_0 = 10^4$ Па. Кривые рассчитаны в моменты $t_k = \pi/\omega_k$ и соответствуют различным значениям резонансных частот: 1 – $\omega_k = \omega_0$, 2 – $\omega_k = \omega_1$, 3 – $\omega_k = \omega_2$, 4 – $\omega_k = \omega_3$. Максимальный прогиб наблюдается при резонансе по частоте основного тона ω_0 . В этом случае увеличение радиуса пятна нагрузки вызывает нелинейный рост прогиба в центре пластины. Остальные прогибы гораздо меньше по амплитуде.

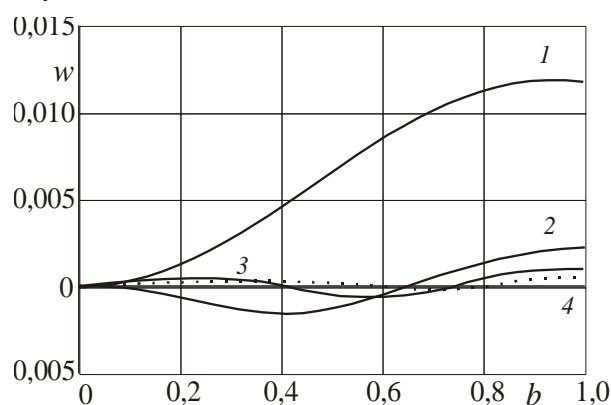


Рис. 2. Зависимость амплитуды прогиба от радиуса пятна нагрузки

Рис. 3 иллюстрирует прогиб в центре пластины в момент времени $t = \pi/\omega_0$ при частоте резонансной нагрузки ($q_0 = 10^5$ Па), совпадающей с частотой основного тона $\omega_k = \omega_0$, в зависимости от места расположения силового кольца шириной $d = b - a = 0,25$. Перемещение этого кольца от центра к контуру сначала увеличивает прогиб до максимума, затем он уменьшается до своего минимального значения.

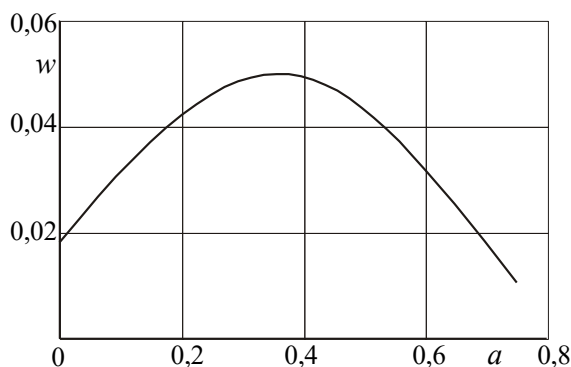
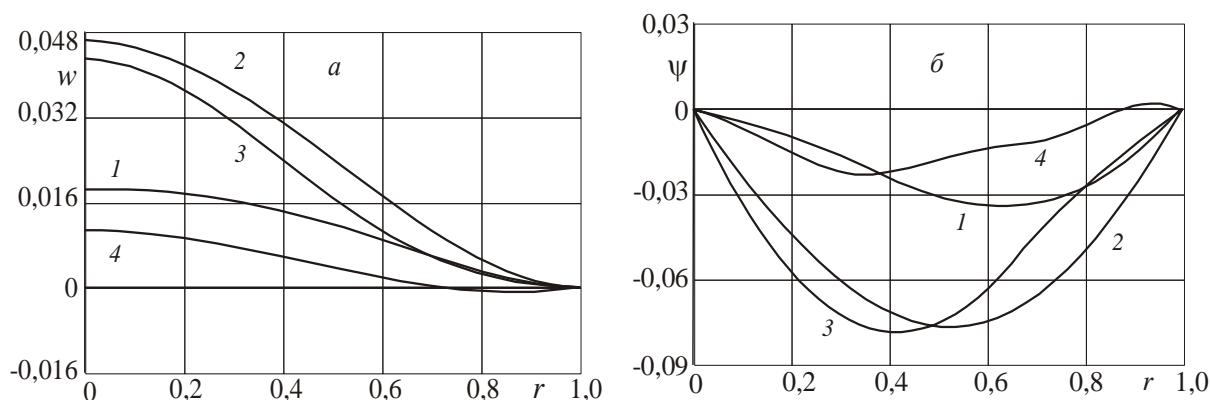


Рис. 3. Изменение максимального прогиба в зависимости от места расположения кольца нагрузки

Изменение прогиба (a) и относительного сдвига в заполнителе (b) вдоль радиуса пластины в тот же момент времени, при той же *кольцевой* нагрузке и частоте показаны на рис. 4. Кривые соответствуют различному положению кольца нагрузки: 1 – $a = 0, b = 0,25$, 2 – $a = 0,25, b = 0,5$, 3 – $a = 0,5, b = 0,75$, 4 – $a = 0,75, b = 1$. Здесь прогиб и относительный сдвиг максимальны, когда кольцо нагрузки внешним контуром касается срединного радиуса пластины (2).



Следует подчеркнуть, что приведенные решения справедливы в области малых упругих деформаций. Резонансные явления описываются подобной моделью только на начальной стадии нарастания амплитуды колебаний, пока деформации не стали конечными или не начались в пластине процессы пластического деформирования и расслаивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю.М. *Динамика металлополимерных систем* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.
2. Плескачевский, Ю.М. *Деформирование металлополимерных систем.* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. 342 с.
3. Яровая, А.В. *Резонансные воздействия на круговые трехслойные пластины* / А.В. Яровая // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* № 4, 2003. С. 62–66.
4. Starovoitov, E.I. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *Strength of Materials.* 2003. Vol. 35. N 4. P. 346-352.
5. Горшков, А.Г. *Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм* / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2004. № 1. С. 45–52.
6. Starovoitov, E.I. *Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, V.D. Kubenko, D.V. Tarlakovskii // *Russian Aeronautics.* 2009. Vol. 52. N 2. P. 151–157.
7. Starovoitov, E.I. *Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics.* 2011. Vol. 47, N. 5. P. 580–589.
8. Leonenko, D.V. *Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation* / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids.* 2012. Vol. 47, N. 1. P. 111–118.
9. Старовойтов, Э. И. *О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек* / Э.И. Старовойтов // *Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех.* 1980. № 2. С. 92–96.

10. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
11. Горшков, А. Г. Циклические нагрузки упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 79–85.
12. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2001. № 4. С. 37–40.
13. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.
14. Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 3. С. 91–99.
15. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // Пробл. прочности. 1988. № 4. С. 11–15.