

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕНИЙ МАТРИЦ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭНДО- И ЭКЗОСКЕЛЕТА ПО УРАВНЕНИЯМ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

¹Борисов А.В., ²Чигарев А.В.

¹ Филиал ГОУ ВО НИУ «Московский энергетический институт
(Технический университет)» в г. Смоленске

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение

Моделирование движений антропоморфных механизмов и экзоскелетов является важной фундаментальной задачей, имеющей при этом много практических приложений, что определяет актуальность данного исследования. Научная новизна исследования заключается в том, что в отличие от имеющихся моделей механизмов с абсолютно твердыми звеньями, модели со звеньями переменной длины позволяют приблизить их движения к реальным процессам происходящих в опорно-двигательном аппарате человека во время движения. Значимость исследования заключается в увеличении количества степеней свободы в модели антропоморфного механизма и открываемых этим возможностей для синтеза новых алгоритмов управления движением. Управление осуществляется в шарнирах с помощью управляющих моментов и в стержнях за счет изменения длины под действием управляющей продольной силы. Перемещение реализуется при помощи сил трения, обеспечивающих связь с опорной поверхностью, по которой движется антропоморфный механизм и изменения конфигурации механизма под действием внутренних управляющих усилий.

Цель исследования – разработать метод получения систем дифференциальных уравнений движения для пространственной стержневой системы, составленной из звеньев переменной длины с сосредоточенными массами по дифференциальным уравнениям движения плоской механической системы аналогичной структуры.

1. Описание модели звена с массами в шарнирах-суставах и между ними и составление дифференциальных уравнений движения.

Рассмотрим модель одного подвижного звена длиной $AB = l_1(t)$ с управлением в точке шарнирного крепления в виде одного невесомого стержня переменной длины и трех точечных масс, две из которых размещены на стержне в шарнирах-суставах A и B на концах стержня, третья масса C расположена между точками A и B (рис. 1). Массами в шарнирах-суставах, кроме самих подвижных соединений, может моделироваться сустав или электродвигатель, установленный на оси шарнира, имеющий значительную массу и создающий управляющий момент [1].

Положение звена однозначно определяется углом $\varphi_1(t)$ между горизонталью и звеном, отсчитываемым от горизонтали против хода часовой стрелки, и длиной стержня $l_1(t)$. Система имеет две степени свободы. Пусть M_1 – момент, развиваемый в шарнире. Продольную силу, приложенную на конце стержня и действующую вдоль стержня, обозначим F_1 . Так как в дальнейшем будем рассматривать многозвенные системы, введем двухиндексные обозначения: первый индекс – номер звена, второй – номер точечной массы на этом звене. В точке A расположена масса m_{10} , в точке C – масса m_{11} , в точке B – масса m_{12} . Положение массы в точке C , не совпадающей с концом стержня, будем задавать с помощью постоянного множителя n_{11} ($0 < n_{11} < 1$). Тогда

длина $AC = n_{11}l_1(t)$ – функция времени, т.е. точечная масса, находящаяся на стержне между его концами, совершает сложное движение: вращательное вокруг нижней точки A и поступательное вдоль AB . Такое же движение совершает и точечная масса, расположенная в точке B .

Так как теоретическая модель невесомого стержня переменной длины с сосредоточенными массами на нем при практическом создании экзоскелета может быть реализована, например, в виде телескопического стержня, то продольная сила $F_1(t)$ может быть реализована в виде двигателей, обеспечивающих поступательное движение одной части звена относительно другой. Управляющий момент $M_1(t)$ можно реализовать в виде двигателя, обеспечивающего вращательное движение звена [1].

Требуется получить дифференциальные уравнения движения для однозвенной и многозвенных систем, выявить их структуру и представить в векторно-матричном виде, установить закономерности построения матриц и получить обобщения выражений элементов матриц для создания эффективного матричного и рекуррентного алгоритмов записи дифференциальных уравнений движения для многозвенных систем.

Учитывая выражение для кинетической энергии звена (сумма кинетических энергий каждой сосредоточенной на звене массы) и для потенциальной энергии

$$T = \frac{1}{2} \zeta_1 (\dot{l}_1^2 + l_1^2 \dot{\phi}_1^2), \quad \Pi = \eta_1 g l_1 S_1, \quad \zeta_1 = m_{11} n_{11}^2 + m_{12}, \quad \eta_1 = m_{11} n_{11} + m_{12}, \quad (1)$$

запишем используя уравнения Лагранжа второго рода, систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемой стержневой модели:

$$l_1^2 \zeta_1 \ddot{\phi}_1 + g l_1 \eta_1 C_1 + 2 l_1 \zeta_1 \dot{l}_1 \dot{\phi}_1 = M_1, \quad -l_1 \zeta_1 \dot{\phi}_1^2 + g \eta_1 S_1 + \zeta_1 \ddot{l}_1 = F_1 \quad (2)$$

и начальные условия $t = 0$: $\phi_1 = \phi_{1_0}$, $\dot{\phi}_1 = \omega_{1_0}$, $l_1 = l_{1_0}$, $\dot{l}_1 = \dot{l}_{1_0}$,

где: $C_1 = \cos \phi_1$, $S_1 = \sin \phi_1$.

Моделирование опорно-двигательного аппарата человека имеет особенность, отличающую его от других механизмов: звенья соединяются не только последовательно, но и с ветвлением. **Точкой ветвления** называется точка механизма в виде шарнира, из которой выходит более одного звена или после нее изменяется способ отсчета угла. Например, опорная нога и переносимая, корпус и руки. Проведем анализ влияния ветвления звеньев на дифференциальные уравнения движения. Для этого рассмотрим две модели с двумя подвижными звеньями переменной длины (рис. 2). Они различаются тем, что на левой части (рис. 2 а) звенья соединены последовательно, а на правой части (рис. 2 б) имеется точка ветвления B . Расположение масс и моментов в обеих моделях одинаково: масса m_{22} в обеих моделях находится в точке C , момент M_2 создается в точке B . Различия заключаются только в способе отсчета угла ϕ_2 .

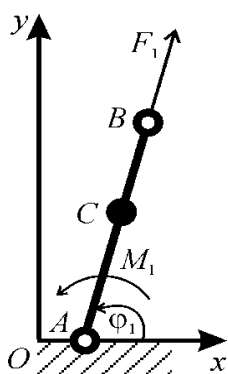


Рис. 1. Модель одного подвижного звена экзоскелета с массами в шарнирах-суставах и между ними

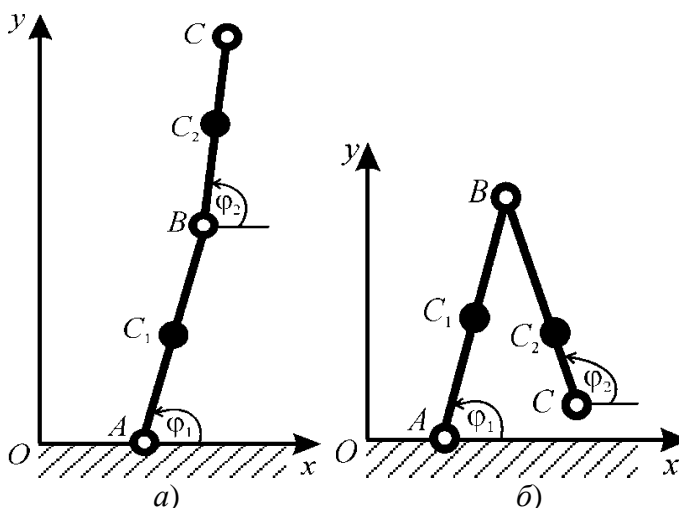


Рис. 2. Модель экзоскелета с двумя подвижными звеньями

В точке A стержня AB сосредоточена масса m_{10} , в точке C_1 – m_{11} , в точке B масса m_{12} . Стержень BC в точке A имеет массу m_{20} , в точке C_2 массу m_{21} , в точке C массу m_{22} .

Кинетическую энергию звена будем вычислять, подсчитывая кинетическую энергию каждой сосредоточенной на звене массы и затем суммируя их.

$$T = \frac{1}{2} [(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + m_{20})(\dot{l}_1^2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2) + m_{21}((\dot{l}_1S_1 \pm \dot{l}_2n_{21}S_2 + l_1C_1\dot{\varphi}_1 \pm \dot{l}_2n_{21}C_2\dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{l}_1C_1 \pm \dot{l}_2n_{21}C_2 - l_1S_1\dot{\varphi}_1 \mp l_2n_{21}S_2\dot{\varphi}_2)^2) + m_{22}((\dot{l}_1S_1 \pm \dot{l}_2S_2 + l_1C_1\dot{\varphi}_1 \pm l_2C_2\dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{l}_1C_1 \pm \dot{l}_2C_2 - l_1S_1\dot{\varphi}_1 \mp l_2S_2\dot{\varphi}_2)^2)], \quad (3)$$

где: $C_j = \cos\varphi_j$, $S_j = \sin\varphi_j$, ($j = 1, 2$).

Система дифференциальных уравнений движения моделей соответствующих (рис. 2) имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\zeta_1 + \theta_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 \pm l_1l_2\eta_2C_{12}\ddot{\varphi}_2 \pm l_1l_2\eta_2S_{12}\dot{\varphi}_2^2 + (\eta_1 + \theta_2)gl_1C_1 + \\ & + 2(\zeta_1 + \theta_2)l_1\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 \pm 2l_1\eta_2C_{12}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 \mp l_1\eta_2S_{12}\ddot{l}_2 = M_1 - M_2, \\ & \pm l_1l_2\eta_2C_{12}\ddot{\varphi}_1 + \zeta_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 \mp l_1l_2\eta_2S_{12}\dot{\varphi}_1^2 \pm \eta_2gl_2C_2 + \\ & \pm 2l_2\eta_2C_{12}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + 2\zeta_2l_2\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 \pm l_2\eta_2S_{12}\ddot{l}_1 = M_2, \\ & \pm l_2\eta_2S_{12}\ddot{\varphi}_2 - (\zeta_1 + \theta_2)l_1\dot{\varphi}_1^2 \mp l_2\eta_2C_{12}\dot{\varphi}_2^2 + (\eta_1 + \theta_2)gS_1 + \\ & \pm 2\eta_2S_{12}\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 + (\zeta_1 + \theta_2)\ddot{l}_1 \pm \eta_2C_{12}\ddot{l}_2 = F_1, \\ & \mp l_1\eta_2S_{12}\ddot{\varphi}_1 \mp l_1\eta_2C_{12}\dot{\varphi}_1^2 - \zeta_2l_2\dot{\varphi}_2^2 \pm \\ & \pm \eta_2gS_2 \mp 2\eta_2S_{12}\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 \pm \eta_2C_{12}\ddot{l}_1 + \zeta_2\ddot{l}_2 = F_2, \\ & C_j = \cos\varphi_j, \quad S_j = \sin\varphi_j, \quad (j = 1, 2), \quad C_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad S_{12} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ & \zeta_1 = m_{11}n_{11}^2 + m_{12}, \quad \zeta_2 = m_{21}n_{21}^2 + m_{22}, \\ & \eta_1 = m_{11}n_{11} + m_{12}, \quad \eta_2 = m_{21}n_{21} + m_{22}, \quad \theta_2 = m_{20} + m_{21} + m_{22}. \end{aligned} \quad (4)$$

Верхние знаки соответствуют модели, представленной на левой части рис. 2 *a*), нижние – на правой части рис. 2 *б*). Различия заключаются во всех уравнениях в знаках перед слагаемыми в тригонометрических функциях стоящих после точки ветвления. В первом уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при тригонометрической функции \sin для координаты стоящей после точки ветвления. Во втором уравнении, знаки не изменяются. В третьем уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при тригонометрической функции \cos для координаты стоящей после точки ветвления. В четвертом уравнении меняются знаки перед слагаемыми, стоящими при функциях \cos и \sin для координаты стоящей перед точкой ветвления.

2. Обобщения дифференциальных уравнений движения на случай модели с n подвижными звеньями

Рассматривая модели с тремя и более подвижными звеньями, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости уравнений, получаем обобщения для механизма с n подвижными звеньями переменной длины.

На рис. 3 схематично изображен фрагмент n -звенного экзоскелета в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Уравнения движения элементов n -звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно записать в векторно-матричной форме. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $k = 1, 2$, где 1 соответствует обобщенной координате φ , 2 – обобщенной координате l .

$$A_k(\varphi, l)\ddot{\varphi} + \Lambda_k(\varphi, l)\ddot{l} + D_k(\varphi, l)\dot{\varphi}\dot{\varphi} + 2H_k(\varphi, l)(\dot{\varphi}\dot{l}) + gP_k(\varphi) = M_k(\varphi, l), \quad (5)$$

где: $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор угловых обобщенных координат; $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ – вектор обобщенных координат, описывающих изменения длин звеньев; $\dot{\varphi}$ – вектор угловых

скоростей; $\ddot{\phi}$ – вектор угловых ускорений; $\Phi = \text{diag}(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n)$ – диагональная матрица; A_k, D_k – матрицы, учитывающие инерционные свойства; P_k – матрицы, определяемые моментами силы тяжести; H_k, Λ_k – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев; M_k – векторы обобщенных сил.

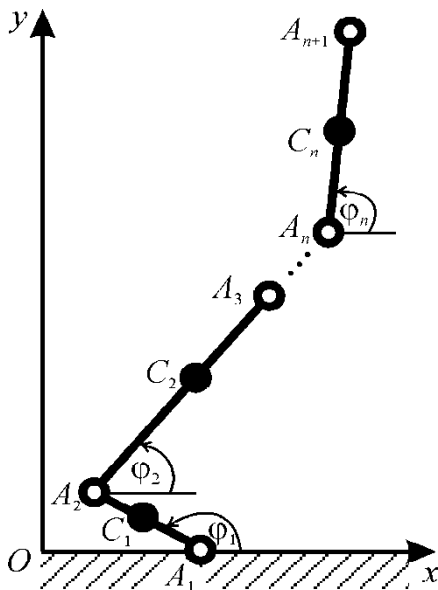


Рис. 3. Модель экзоскелета с n подвижными звеньями переменной длины

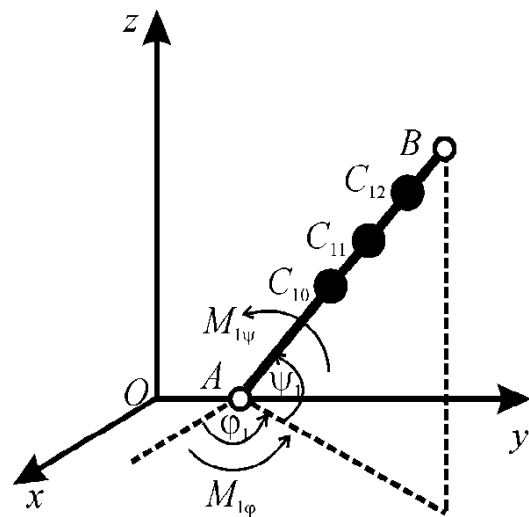


Рис. 4. Модель трехмерной механической системы с одним подвижным звеном переменной длины для моделирования звена опорно-двигательного аппарата человека

Матричная форма записи уравнений движения (5) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета с любым количеством звеньев. Структура матриц при этом останется такой же, только изменится их размерность и количество масс, длин звеньев и т.п. в каждом элементе матрицы [2].

Нами были получены обобщения по индукции матриц для произвольной n -звенной системы подобного вида [3,4]. Приведем в качестве примера обобщающую формулу для матрицы A , которая является симметрической. Поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, \dots, n$, при этом $j \geq i$.

Элементы для симметрической матрицы A_ϕ при $j \geq i$ имеют вид:

$$a_{ij}^\phi = (\delta_{ij}\zeta_i + (1 - \delta_{ij})\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k) l_i l_j \cos(\phi_i - \phi_j), \quad (6)$$

где: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2$, $\eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}$, $\theta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}$.

Остальные элементы: $a_{ji}^\phi = a_{ij}^\phi$.

Множители, определяющие положение масс на стержне задаются следующим

$$\text{образом: } n_{j\beta} = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ n_{j1}, & \beta = 1, \\ 1, & \beta = 2. \end{cases}$$

3. Описание пространственной модели звена переменной длины

В предыдущих параграфах данной главы была рассмотрена двумерная модель экзоскелета, движение которого являлось плоским. Подобные модели имеют важное теоретическое значение, но непосредственно в практику не могут быть внедрены.

Необходимо рассмотрение трехмерных моделей, которые можно практически реализовать. Простой переносимости результатов двумерной модели не получается, поэтому изучение трехмерных моделей представляет самостоятельное направление в исследовании стержневых систем.

Пусть стержень переменной длины имеет конструкцию, показанную на рис. 1. Рассмотрим трехмерную модель механической системы с одним подвижным звеном данной конструкции (рис. 4).

Положение центра масс звена определяется двумя углами: φ_1 – углом между осью OX и проекцией звена AB на плоскость XOY , отсчитываемым от оси OX против часовой стрелки; ψ_1 – углом между звеном AB и его проекцией на плоскость XOY , отсчитываемым от проекции звена AB на плоскость XOY против часовой стрелки и изменением его длины l_1 . Рассматриваемые углы и длину звена считаем функциями времени: $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $l_1 = l_1(t)$. Следовательно, модель имеет три параметра, однозначно определяющих ее положение. Вращение происходит в жестко закрепленном шарнире O . Продольную силу, действующую вдоль стержня, обозначим F_1 . Массы считаем сосредоточенными: в точке C_{10} масса m_{10} , в точке C_{11} масса m_{11} , в точке C_{12} масса m_{12} . Их положение на стержне задается постоянными множителями n_{10} , n_{11} и n_{12} соответственно. Как и ранее, первый индекс обозначает номер звена, второй – номер массы на звене.

Координаты сосредоточенных на звене масс записываются так:

$$x_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi, \quad y_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi, \quad z_{C1\beta} = l_1 n_{1\beta} S_1^\psi, \quad (7)$$

где: $\beta = 0, 1, 2$ – номер сосредоточенной на звене массы, $C_1^\varphi = \cos\varphi_1$, $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\varphi = \sin\varphi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$.

Проекции скорости сосредоточенных масс на звене равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi - \dot{\varphi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi - \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} S_1^\psi C_1^\varphi, \\ \dot{y}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} C_1^\psi S_1^\varphi + \dot{\varphi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi C_1^\varphi - \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} S_1^\psi S_1^\varphi, \\ \dot{z}_{C1\beta} &= \dot{l}_1 n_{1\beta} S_1^\psi + \dot{\psi}_1 l_1 n_{1\beta} C_1^\psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Квадраты скорости сосредоточенных на звене масс равны:

$$v_{C1\beta}^2 = \dot{x}_{C1\beta}^2 + \dot{y}_{C1\beta}^2 + \dot{z}_{C1\beta}^2 = \dot{l}_1^2 n_{1\beta}^2 + l_1^2 n_{1\beta}^2 \dot{\psi}_1^2 + l_1^2 n_{1\beta}^2 \dot{\varphi}_1^2 (C_1^\psi)^2. \quad (9)$$

Угловые скорости звена:

$$\omega_{\psi 1} = \dot{\psi}_1, \quad \omega_{\varphi 1} = \dot{\varphi}_1 C_1^\psi. \quad (10)$$

Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \zeta_1 [\dot{l}_1^2 + l_1^2 (\dot{\varphi}_1^2 (C_1^\psi)^2 + \dot{\psi}_1^2)], \quad \zeta_1 = \sum_{\beta=0}^2 m_{1\beta} n_{1\beta}^2. \quad (11)$$

Потенциальная энергия звена имеет вид.

$$\Pi = g \eta_1 l_1 S_1^\psi, \quad \eta_1 = \sum_{\beta=0}^2 m_{1\beta} n_{1\beta}. \quad (12)$$

Составляя уравнения аналогично двумерному случаю с использованием уравнений Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для экзоскелета с одним подвижным звеном в трехмерном пространстве:

$$\zeta_1 l_1^2 (C_1^\psi)^2 \ddot{\varphi}_1 + 2\zeta_1 l_1 (C_1^\psi)^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2\zeta_1 l_1^2 C_1^\psi S_1^\psi \dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 = M_{1\varphi}, \quad (13)$$

$$\zeta_1 l_1^2 \ddot{\psi}_1 + \zeta_1 l_1^2 C_1^\psi S_1^\psi \dot{\varphi}_1^2 + 2\zeta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + g \eta_1 l_1 C_1^\psi = M_{1\psi}, \quad (14)$$

$$\zeta_1 \ddot{l}_1 - \zeta_1 l_1 (C_1^\psi)^2 \dot{\varphi}_1^2 - \zeta_1 l_1 \dot{\psi}_1^2 + g \eta_1 S_1^\psi = F_1. \quad (15)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений движения зависит от 6 произвольных констант, чтобы определить движение, зададим начальные условия.

$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_{1_0}, \dot{\varphi}_1|_{t=0} = \dot{\varphi}_{1_0}, \psi_1|_{t=0} = \psi_{1_0}, \dot{\psi}_1|_{t=0} = \dot{\psi}_{1_0}, l_1|_{t=0} = l_{1_0}, \dot{l}_1|_{t=0} = \dot{l}_{1_0}. \quad (16)$$

Также были рассмотрены стержневые модели экзоскелетов с двумя и тремя подвижными звеньями переменной длины в пространстве и составлены системы дифференциальных уравнений движения для таких экзоскелетов в форме уравнений Лагранжа второго рода, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости.

4. Матричная форма записи дифференциальных уравнений движения для пространственной модели экзоскелета

Анализируя уравнения движения стержневых механических систем в трехмерном пространстве, видно, что они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений вектора угловых переменных, которые можно записать в векторно-матричной форме. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $k = 1, 2, 3$, где 1 соответствует обобщенной координате φ , 2 – ψ , 3 – l .

$$A_k(\varphi, \psi, l) \ddot{\varphi} + B_k(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + \Lambda_k(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + D_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{\varphi} + E_k(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{\psi} + \quad (17)$$

$$+ 2G_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{\psi} + 2H_k(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi} \dot{l} + 2K_k(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{l} + gP_k(\psi) = M_k(\varphi, \psi, l),$$

где: φ, ψ – угловые обобщенные координаты сосредоточенных масс $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ – векторы углов; l – обобщенные координаты, связанные с изменениями длин звеньев $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ – вектор длин звеньев переменной длины; $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ – векторы угловых скоростей; $\ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$ – векторы угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \text{diag}(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n)$, $\dot{\Psi} = \text{diag}(\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)$ – диагональные матрицы; M_k – векторы обобщенных сил; $A_k(\varphi, \psi, l)$, $B_k(\varphi, \psi, l)$, $D_k(\varphi, \psi, l)$, $E_k(\varphi, \psi, l)$, $G_k(\varphi, \psi, l)$ – матрицы, учитывающие инерционные свойства; $\Lambda_k(\varphi, \psi, l)$, $H_k(\varphi, \psi, l)$, $K_k(\varphi, \psi, l)$ – матрицы, учитывающие переменность длин звеньев; $P_k(\psi)$ – матрицы, определяемые моментами силы тяжести.

Реальное максимальное количество звеньев, из которого может быть составлен экзоскелет, ограничено только вычислительными мощностями, т.к. из-за геометрии системы сложность уравнений возрастает нелинейно, это видно по матрицам, соответствующим уравнениям для однозвенной, двухзвенной и трехзвенной механических систем с деформируемыми звеньями в трехмерном пространстве.

5. Построение матриц уравнений для трехмерных моделей стержневых систем по соответствующим матрицам для плоских моделей

Проведем сравнительный анализ двухмерных и трехмерных уравнений. Аналогично однозвенной модели добавляются множители, содержащие тригонометрические функции аргумента ψ , возникают новые слагаемые для нового аргумента. Отметим, что для трехмерного случая большинство матриц потеряли свойство симметрии. Однако, они, как показано выше, допускают представление в обобщенном виде. Благодаря этому становится возможной запись уравнений без трудоемкой процедуры составления для любого n -звенного механизма подобной структуры. В случае ветвления звеньев, например на переносимую ногу, после точки ветвления, у соответствующих элементов матриц, индексы которых больше или равны индексам звеньев после разветвления, следует сменить знак на противоположный.

Сравнивая уравнения движения на плоскости и в пространстве, можно получить закономерность записи уравнений трехмерного движения по соответствующему дифференциальному уравнению для двумерной модели. Приведем полученные закономерности. Для того, чтобы отличать элементы матриц пространственной и плоской моделей снабдим их верхними индексами «3D» и «2D» соответственно. Плоская и пространственная модели должны быть одинаковой структуры, т.е. иметь одинаковое количество звеньев, расположение точек ветвления, распределение масс на звене. Формулы для перехода имеют следующий вид.

$$\begin{aligned}
{}^{3D}a_{ij}^\phi &= {}^{2D}a_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}b_{ij}^\phi &= {}^{2D}a_{ij}^l l_i \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^\phi &= {}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}d_{ij}^\phi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}e_{ij}^\phi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}g_{ij}^\phi &= -{}^{2D}h_{ij}^\phi l_j \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}h_{ij}^\phi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi \cos\psi_i \cos\psi_j, & {}^{3D}k_{ij}^\phi &= -{}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \cos\psi_i \sin\psi_j, \\
{}^{3D}p_i^\phi &= {}^{2D}p_i^\phi \cdot 0, & {}^{3D}\mu_i^\phi &= {}^{2D}\mu_i^\phi, & {}^{3D}a_{ij}^\psi &= -{}^{2D}a_{ij}^l l_i \cos\psi_j \sin\psi_i, \\
{}^{3D}b_{ij}^\psi &= {}^{2D}a_{ij}^\phi (\sin\psi_i \sin\psi_j + \cos\psi_i \cos\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)), \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi (\cos\psi_i \sin\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j) - \cos\psi_j \sin\psi_i), \\
{}^{3D}d_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi l_j \cos\psi_j \sin\psi_i, & {}^{3D}e_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi l_j (\cos\psi_j \sin\psi_i - \cos\psi_i \sin\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)), \\
{}^{3D}g_{ij}^\psi &= {}^{2D}d_{ij}^\phi \sin\psi_i \sin\psi_j, & {}^{3D}h_{ij}^\psi &= {}^{2D}\lambda_{ij}^\phi \sin\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{2D}k_{ij}^\psi &= {}^{2D}h_{ij}^\phi (\sin\psi_j \sin\psi_i + \cos\psi_i \cos\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)), & {}^{3D}p_i^\psi &= {}^{2D}p_i^\phi \cos\psi_i / \cos\phi_i, \\
{}^{3D}\mu_i^\psi &= {}^{2D}\mu_i^\phi \Big|_{\phi \rightarrow \psi}, & {}^{3D}a_{ij}^l &= {}^{2D}a_{ij}^l \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}b_{ij}^l &= {}^{2D}d_{ij}^l (\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)), \\
{}^{3D}\lambda_{ij}^l &= {}^{2D}\lambda_{ij}^l (\cos\psi_i \cos\psi_j + \sin\psi_i \sin\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)), \\
\text{элементы несимметрической матрицы } D_l(\phi, \psi, l) &= - (H_\phi(\phi, \psi, l))^T, \\
{}^{3D}e_{ij}^l &= {}^{2D}d_{ij}^l (\sin\psi_i \sin\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j) + \cos\psi_i \cos\psi_j), \\
{}^{3D}g_{ij}^l &= -{}^{3D}a_{ij}^l \cos\psi_i \sin\psi_j, & {}^{3D}h_{ij}^l &= {}^{2D}h_{ij}^l \cos\psi_i \cos\psi_j, \\
{}^{3D}k_{ij}^l &= -{}^{2D}d_{ij}^l (\cos\psi_i \sin\psi_j - \sin\psi_i \cos\psi_j / \cos(\phi_i - \phi_j)) / l_j, \\
{}^{3D}p_i^l &= {}^{2D}p_i^l \sin\psi_i / \sin\phi_i, & {}^{3D}\mu_i^l &= {}^{2D}\mu_i^l.
\end{aligned} \tag{18}$$

Чтобы в уравнении, полученном при дифференцировании по координате ϕ , перейти к трехмерной модели от двумерной необходимо элементы матриц, присутствующих в уравнениях для двумерной модели, умножить на произведение $\cos\psi_i \cos\psi_j$. Элементы матриц, отсутствующих в уравнениях двумерной модели, получаются из подходящих умножением на $\cos\psi_i \sin\psi_j$, и в некоторых матрицах на l_i или l_j . В остальных уравнениях зависимости сложнее.

Таким образом, впервые предложен метод записи дифференциальных уравнений движения для пространственного n -звенного стержневого механизма со звеньями переменной длины по соответствующим уравнениям плоского механизма.

6. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения модели экзоскелета со звеньями переменной длины

Предложенный новый матричный метод построения дифференциальных уравнений движения сводится к записи матриц по имеющимся формулам, а затем умножению матриц на соответствующие векторы из системы дифференциальных уравнений (5). Это упрощает процедуру получения дифференциальных уравнений движения экзоскелета. Покажем, как составляются уравнения движения, минуя этап применения уравнений Лагранжа второго рода и других методов составления дифференциальных уравнений движения, с использованием полученных обобщений для матриц.

Рассмотрим пример составления дифференциальных уравнений движения, с помощью полученной выше матричной формы (5) и обобщений для матриц. В примере ограничимся одной моделью, т.к. для других моделей все строится аналогично. Для модели, состоящей из четырех звеньев переменной длины, т.е. $n = 4$, (рис. 5), система дифференциальных уравнений движения имеет вид (5). Матрицы, входящие в уравнения движения, имеют размер 4×4 .

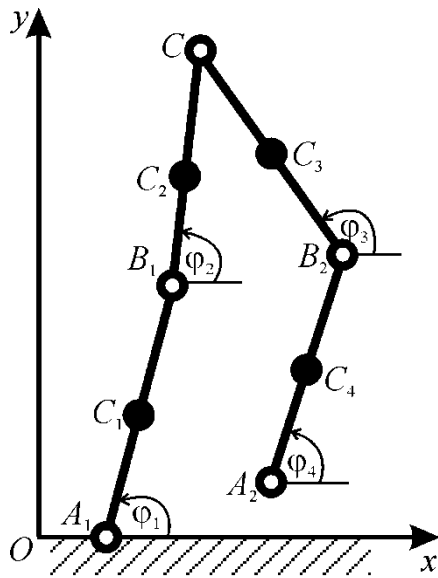


Рис. 5. Модель экзоскелета с четырьмя подвижными звеньями переменной длины с массами в шарнирах и одной массой между ними

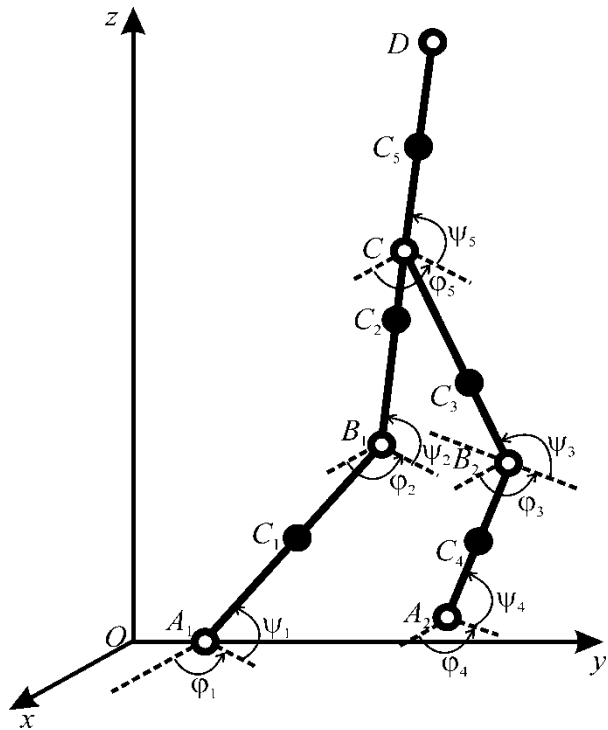


Рис. 6. Пространственная модель экзоскелета с пятью подвижными звеньями переменной длины

Построим матрицу A по предложенной формуле нахождения отдельных ее элементов (2.13). Выпишем для нее отдельно каждый элемент.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= l_1^2(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta}), \\
 a_{12} &= a_{21} = l_1 l_2 (m_{21}n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
 a_{j3} &= a_{3j} = l_j l_3 (m_{31}n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos(\varphi_j - \varphi_3), \quad j = 1, 2, \\
 a_{j4} &= a_{4j} = l_j l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4), \quad j = 1, 2, \\
 a_{22} &= l_2^2 (m_{21}n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}), \quad a_{33} = l_3^2 (m_{31}n_{31}^2 + m_{32} + \\
 &\quad \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}), \\
 a_{34} &= a_{43} = l_3 l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4), \quad a_{44} = l_4^2 (m_{41}n_{41}^2 + m_{42}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично определяются элементы для всех остальных матриц, входящих в (5), по предложенным формулам. После этого умножаем каждую записанную матрицу на соответствующий ей вектор в уравнениях (5). Так, матрица A умножается на вектор $\ddot{\varphi}$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_4)^T$.

Приведем начало первого уравнения из системы, которая получается для данного механизма, то есть произведение $A \ddot{\varphi}$:

$$a_{11} \ddot{\varphi}_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2 - a_{13} \ddot{\varphi}_3 - a_{14} \ddot{\varphi}_4 + \dots \tag{20}$$

В результате записываются дифференциальные уравнения движения экзоскелета с четырьмя подвижными звеньями переменной длины.

Чтобы перейти от плоской к пространственной модели, необходимо каждый элемент

матрицы домножить в соответствии с предложенными формулами.

$$\begin{aligned}
{}^{3D}a_{11}^\varphi &= l_1^2(m_{11}n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta}) \cos^2 \psi_1, \\
{}^{3D}a_{12}^\varphi &= {}^{3D}a_{21}^\varphi = l_1 l_2 (m_{21}n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \psi_1 \cos \psi_2, \\
{}^{3D}a_{j3}^\varphi &= {}^{3D}a_{3j}^\varphi = l_j l_3 (m_{31}n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos(\varphi_j - \varphi_3) \cos \psi_j \cos \psi_3, \quad j = 1, 2, \\
{}^{3D}a_{j4}^\varphi &= {}^{3D}a_{4j}^\varphi = l_j l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4) \cos \psi_j \cos \psi_4, \quad j = 1, 2, \quad (21) \\
{}^{3D}a_{22}^\varphi &= l_2^2 (m_{21}n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta}) \cos^2 \psi_2, \\
{}^{3D}a_{33}^\varphi &= l_3^2 (m_{31}n_{31}^2 + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta}) \cos^2 \psi_3, \\
{}^{3D}a_{34}^\varphi &= {}^{3D}a_{43}^\varphi = l_3 l_4 (m_{41}n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \cos \psi_3 \cos \psi_4, \\
{}^{3D}a_{44}^\varphi &= l_4^2 (m_{41}n_{41}^2 + m_{42}) \cos^2 \psi_4.
\end{aligned}$$

Далее построение аналогично выражению (20). Таким образом, предложен новый метод построения дифференциальных уравнений движения для пространственной стержневой модели со звеньями переменной длины. Описанный метод алгоритмируется и программируется.

7. Рекуррентный алгоритм составления дифференциальных уравнений движения

Рассмотрим на примере матрицы A .

Рассмотрим обобщение предложенного подхода для построения матрицы механической системы из $n + 1$ подвижного звена по матрице модели с n подвижными звеньями. Матрица A_n для n -звенной механической системы имеет вид:

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(\zeta_1 + \sum_{k=2}^n \theta_k \right) l_1 l_1 C_{11} & \dots & \left(\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_1 l_j C_{1j} & \dots & \eta_n l_1 l_n C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\eta_i + \sum_{k=i+1}^n \theta_k \right) l_i l_1 C_{i1} & \dots & \left(\zeta_i + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \eta_n l_i l_n C_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n l_n l_1 C_{n1} & \dots & \eta_n l_n l_j C_{nj} & \dots & \zeta_n l_n l_n C_{nn} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Матрица для $n + 1$ -звенной механической системы строится так:

$$A_{n+1} = A_n + \delta A_n, \quad (23)$$

причем матрица A_n должна иметь размер $(n + 1) \times (n + 1)$, поэтому она записывается с дополнительными $(n + 1)$ -й нулевой строкой и $(n + 1)$ -м нулевым столбцом т.е. матрица A_n записывается в виде:

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(\zeta_1 + \sum_{k=2}^n \theta_k \right) l_1 l_1 C_{11} & \dots & \left(\eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_1 l_j C_{1j} & \dots & \eta_n l_1 l_n C_{1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\eta_i + \sum_{k=i+1}^n \theta_k \right) l_i l_1 C_{i1} & \dots & \left(\zeta_i + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \eta_n l_i l_n C_{in} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n l_n l_1 C_{n1} & \dots & \eta_n l_n l_j C_{nj} & \dots & \zeta_n l_n l_n C_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матрица δA_n строится так:

$$\delta A_n = \begin{pmatrix} \theta_{n+1} l_1 l_1 C_{11} & \dots & \theta_{n+1} l_1 l_j C_{1j} & \dots & \theta_{n+1} l_1 l_n C_{1n} & \eta_{n+1} l_1 l_{n+1} C_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} l_i l_1 C_{i1} & \dots & \theta_{n+1} l_i l_j C_{ij}, (i=j) & \dots & \theta_{n+1} l_i l_n C_{in} & \eta_{n+1} l_i l_{n+1} C_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} l_n l_1 C_{n1} & \dots & \theta_{n+1} l_n l_j C_{nj} & \dots & \theta_{n+1} l_n l_n C_{nn} & \eta_{n+1} l_n l_{n+1} C_{n,n+1} \\ \eta_{n+1} l_{n+1} l_1 C_{n+1,1} & \dots & \eta_{n+1} l_{n+1} l_j C_{n+1,j} & \dots & \eta_{n+1} l_{n+1} l_n C_{n+1,n} & \zeta_{n+1} l_{n+1} l_{n+1} C_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где: $C_{ij} = \cos(\varphi_i - \varphi_j)$, $\theta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta}$, $\eta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}$, $\zeta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}^2$.

Аналогично можно построить все матрицы, входящие в систему дифференциальных уравнений движения.

Алгоритм построения матрицы трехмерной модели с $n+1$ звеном по матрице двумерной модели с n звеньями имеет следующую последовательность действий:

$${}^{2D}A_n \rightarrow {}^{2D}A_{n+1} \rightarrow {}^{3D}A_{n+1}. \quad (26)$$

В матрице $\delta {}^{3D}A_{n+1}$ каждый ее элемент умножается на $\cos\psi_i \cos\psi_j$. Аналогично для остальных матриц в соответствии с формулами (18).

Таким образом, получен рекуррентный алгоритм составления уравнений движения двумерной стержневой механической системы с $n+1$ звеном по известному уравнению для n -звенной механической системы со звеньями переменной длины и дальнейшего перехода к трехмерной модели соответствующей структуры. Это позволяет автоматизировать составление системы дифференциальных уравнений движения стержневой механической системы со звеньями переменной длины. Открывается возможность синтеза большого количества моделей с разным количеством звеньев.

Матричный метод и рекуррентный алгоритм были реализованы в среде системы компьютерной математики Mathematica. При составлении уравнений Лагранжа второго рода было затрачено время в секундах для модели с одним подвижным звеном – 0.59, с двумя подвижными звеньями – 5.3, с тремя подвижными звеньями – 37, при использовании матричного метода 0.46, 0.55 и 0.79 секунды соответственно. Рекуррентный алгоритм при составлении дифференциальных уравнений движения для модели с двумя и тремя подвижными звеньями затратил 0.59 и 0.86 секунды соответственно. Это приведено время составления для модели, представленной на левой части рис. 2, оно примерно равно времени составления для модели, представленной на правой части рис. 2. Проводя сравнение с трехмерными моделями, для модели экзоскелета с двумя подвижными звеньями, время, затраченное на составление дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода равно 113.69 секунды, с помощью матричного метода 1.30 секунды. Таким образом, видно, что различия в скорости составления системы дифференциальных уравнений движения нарастают с увеличением количества звеньев

и перехода к трехмерной модели. Эффективность предложенных матричного метода и рекуррентного алгоритма становится очевидной.

7. Пространственная модель экзоскелета со звеньями переменной длины

Рассмотрим стрежневую модель экзоскелета со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами в трехмерном случае. Аналогично рассмотренным выше моделям, исследуем модель, состоящую из пяти звеньев переменной длины (рис. 6) [5].

При эксплуатации экзоскелета может возникнуть ситуация, когда экзоскелет должен самостоятельно управляться. Например, для тренировок с помощью экзоскелета и его частей, необходимо чтобы управление осуществлялось с помощью заданного алгоритма.

Значения параметров для численных расчетов: массы звеньев $m_1 = m_4 = 2.91$ кг, $m_2 = m_3 = 8.93$ кг, $m_5 = 28.93$ кг, они распределялись в виде точечных масс – в шарнирах $\frac{1}{4}$ и на стержне $\frac{1}{2}$ от массы звена. Множители, задающие положение сосредоточенной массы на стержне равны: $n_{11} = n_{41} = 0.595$, $n_{21} = n_{31} = 0.545$, $n_{51} = 0.500$.

Воспользуемся способом управления экзоскелетом с помощью аналитически задаваемых кинематических характеристик движения, при этом модифицировав его на трехмерный случай.

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t) &= \pi/2 + j_1 \sin[f_1 - (1 - \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_2(t) &= \pi/2 + j_2 \cos[f_2 - (1 - \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_3(t) &= \pi/2 + j_3 \cos[f_3 - (1 + \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_4(t) &= \pi/2 + j_4 \sin[f_4 - (1 + \cos[2\pi t/T])\pi/2], \\
 \psi_5(t) &= \pi/2, \quad \varphi_1(t) = j_1 \sin[2\pi t/T], \quad \varphi_2(t) = j_2 \cos[2\pi t/T], \quad \varphi_3(t) = j_3 \cos[2\pi t/T], \\
 \varphi_4(t) &= j_4 \sin[2\pi t/T], \quad \varphi_5(t) = j_5 \cos[2\pi t/T], \\
 l_1(t) &= l_1^* + l_1^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_2(t) = l_2^* + l_2^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_3(t) = l_3^* + l_3^* l \sin[2\pi t/T], \\
 l_4(t) &= l_4^* - l_4^* l \sin[2\pi t/T], \quad l_5(t) = l_5^* + l_5^* l \sin[2\pi t/T].
 \end{aligned} \tag{26}$$

где: T – период ходьбы, j_i и f_i – параметры ходьбы, l_i^* – начальная длина недеформированного звена, l – коэффициент изменения длины звена.

Аналитические выражения (26) и числовые значения параметров ходьбы к ним выбираются из условия синтеза антропоморфной периодической походки.

Приведем полученные в результате решения алгебраической системы для модели, представленной на рис. 6, графики управляющих моментов рис. 7 и продольных сил рис. 8, получающихся при задании кинематики движения в виде (26).

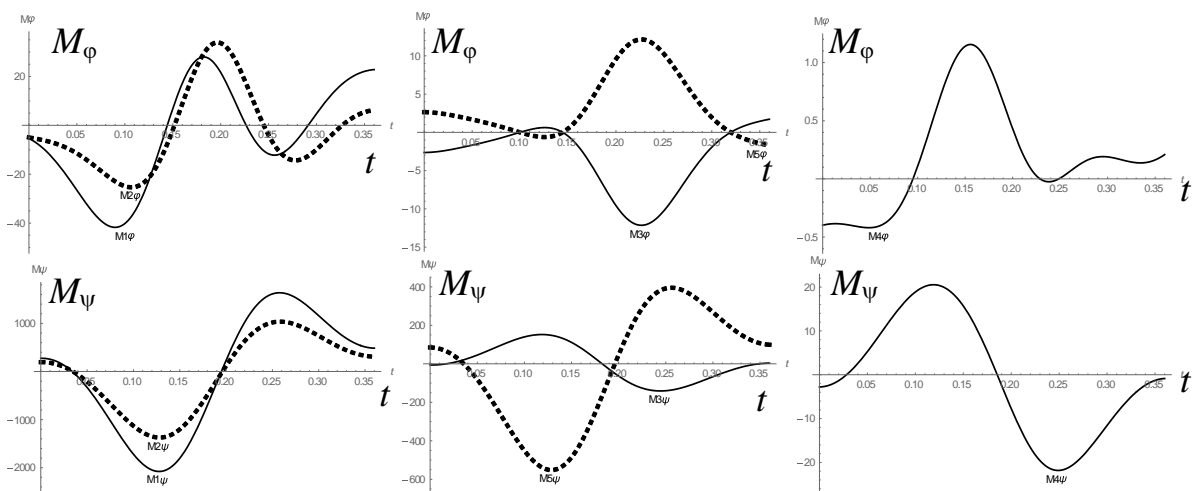


Рис. 7. Зависимости управляющих моментов в шарнирах-суставах экзоскелета от времени

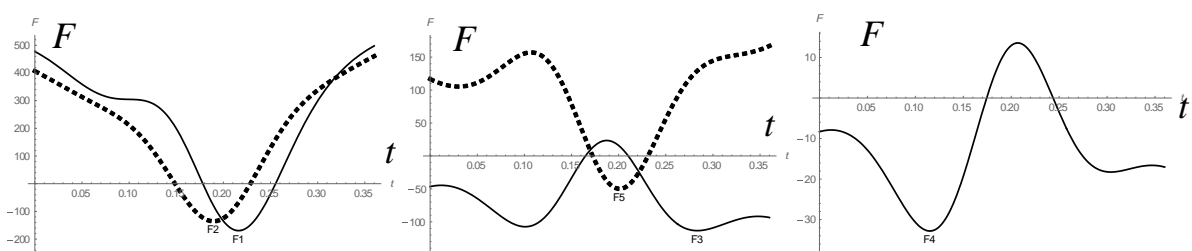


Рис. 8. Зависимости продольных сил, действующих вдоль звеньев экзоскелета от времени

На рис. 7 и 8, с целью наглядности представления результатов, графики сгруппированы по масштабу абсолютных максимальных значений.

Приведем кадры кинограммы пиктографической анимационной визуализации движения с кинематикой заданной в виде (26), рис. 9.

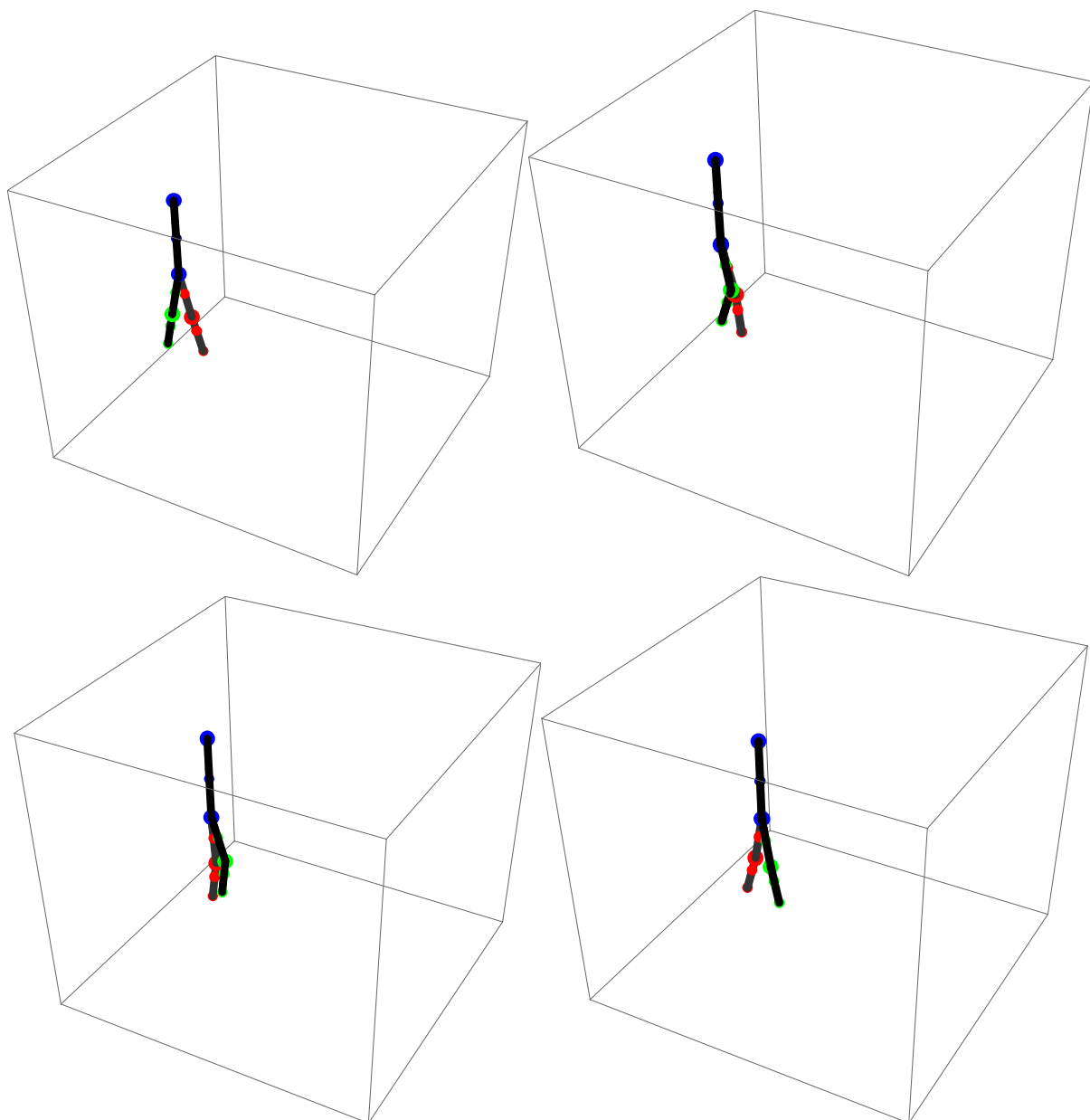


Рис. 9. Кадры кинограммы движения экзоскелета

Таким образом, решена задача синтеза управляющих воздействий при заданном движении экзоскелета. Можно будет создать базу данных реальных движений солдат в экзоскелете в разных ситуациях и, определив по движениям, управляющие воздействия использовать подходящие из них для управления экзоскелетом, в тех ситуациях, когда человек не может самостоятельно обеспечивать движение и управление экзоскелетом. Подобный подход для плоских моделей использовался выше, здесь он обобщен на пространственный случай.

Заключение

Таким образом, предложен метод построения систем дифференциальные уравнения движения пространственного механизма по дифференциальным уравнениям плоского механизма соответствующей структуры со стержнями переменной длины. Разработанный метод является универсальным и может использоваться для построения систем дифференциальных уравнений движения различных стержневых механизмов: манипуляторов, экзоскелетов, антропоморфных роботов и т.д. Класс подобных систем очень широк. Практическое применение разработанных моделей – это создание экзоскелетов и антропоморфных роботов, что является актуальным и востребованным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // ПММ. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511-522.
2. Borisov A. V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A. V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // Journal of Machinery Manufacturing and Automation. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmta/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
3. Чигарев А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.
4. Чигарев А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52-58.
5. Борисов А. В. Трехмерные модели стержневых систем со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами и с абсолютно твердым весомым стержнем и невесомым участком изменяющим длину / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 186-211.