

ПРИВОД КАТЯЩЕГОСЯ КОЛЕСА ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ НАКЛОНЕ НИТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПЛОСКОСТИ КАЧЕНИЯ

¹Ковалевский А.С., ¹Грода Я.Г., ¹Вихренко В.С.

¹УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск

Введение. В большинстве механизмов, содержащих колеса, которые вращаются относительно неподвижных осей или движутся плоскопараллельно и связаны между собой системой нитей или рейками. Для обеспечения постоянных передаточных отношений нити или рейки, обеспечивающие кинематические связи между элементами механизмов, должны быть параллельными плоскости качения колес.

Вместе с тем, легко представить ситуацию, когда привод катящегося колеса или катушки осуществляется нитью, переброшенной через блок или намотанной на него, и составляющей переменный угол с плоскостью качения колеса. Такая ситуация может возникнуть при перекачивании бревен или бобин, на которые намотаны, например, провода или кабели. В таких случаях передаточные отношения становятся переменными величинами, зависящими от конструктивных особенностей механизма, в частности, от угла наклона нити. В результате существенно усложняется кинематика механизма, а непостоянство передаточных отношений приводит к переменным приведенным моментам инерции, что в результате приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям движения и значительным трудностям при их аналитическом интегрировании.

В настоящей работе рассмотрены три возможные схемы подобных механизмов и предложены методы получения кинематических зависимостей между характеристиками отдельных элементов, составления динамических дифференциальных уравнений движения и их интегрирования. Показано, что в зависимости от конструктивных особенностей механизмов возможны качественные отличия в характере движения катящегося колеса, и при определенных условиях возможно возбуждение в системе автоколебаний при действии на свободный конец нити постоянной силы (или на блок постоянного момента сил).

Кинематика привода катящегося колеса. Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

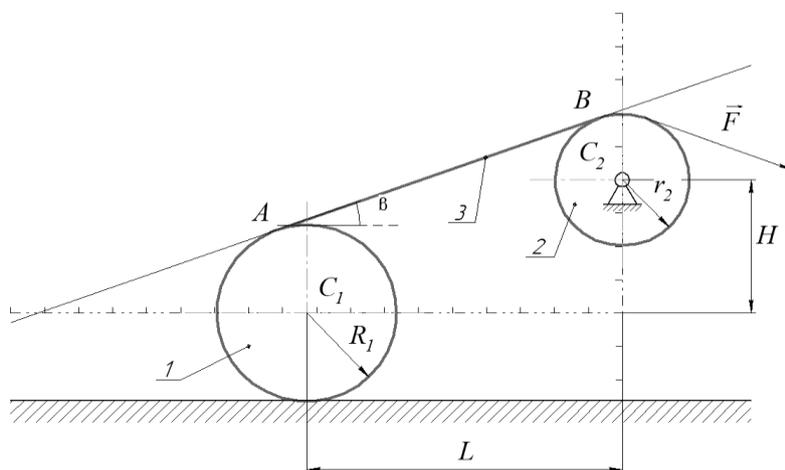


Рис. 1. Схема привода катящегося колеса

Геометрия системы определяется расстояниями L и H между проекциями центров колес на горизонтальную плоскость и вертикаль, соответственно. Введем также угол β как угол наклона нити к плоскости качения колеса. Пусть отрезок AB , отсекаемый точками касания нити с колесами, имеет длину l . Отметим, что система имеет одну степень свободы, и при заданных исходных параметрах H , r_2 , R_1 ее положение может быть задано либо расстояниями l или L , либо углом наклона нити β . Взаимосвязь между этими параметрами, определяется следующим уравнением

$$l^2 = L^2 + H^2 + (R_1 - r_2)^2. \quad (1)$$

Используем метод замкнутых контуров [1], и проецируя контур C_1OC_2AB на горизонтальную и вертикальную оси, получим систему уравнений

$$\begin{cases} L = l \cos \beta - (R_1 - r_2) \sin \beta, \\ H = l \sin \beta + (R_1 - r_2) \cos \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть за некоторое время Δt диски 1 и 2 совершат повороты на углы $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$, соответственно, по ходу часовой стрелки. При этом рейка повернется на угол $\Delta\beta$ против хода часовой стрелки, что вызовет смещение точек касания. Приращение длины отрезка на рейке, отсекаемого точками касания, составит

$$\Delta l = R_1(\Delta\varphi_1 + \Delta\beta) - r_2(\Delta\varphi_2 + \Delta\beta). \quad (3)$$

Соотношение (3) является справедливым при произвольном, а не только малом, перемещении системы. Дифференцируя данное соотношение по времени, получим

$$\dot{l} = R_1(\omega_1 + \omega_3) - r_2(\omega_2 + \omega_3), \quad (4)$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 – угловые скорости колес 1, 2 и рейки, соответственно.

Дифференцируя соотношение (2) по времени, найдем

$$\begin{cases} \dot{L} = \dot{l} \cos \beta - \dot{\beta} H, \\ 0 = \dot{l} \sin \beta + \dot{\beta} L. \end{cases} \quad (5)$$

Из этой системы уравнений следует соотношение

$$\dot{L} \cos \beta = \dot{l} - \dot{\beta}(R_1 - r_2), \quad (6)$$

С учетом соотношения (4) и того, что

$$\dot{L} = -R_1\omega_1, \quad (7)$$

получаем искомую связь между угловыми скоростями колес

$$\omega_1 = \frac{r_2}{R_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \omega_2. \quad (8)$$

Дифференцируя по времени последнее полученное соотношение, для углового ускорения первого колеса получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{r_2}{R_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \varepsilon_2 + \frac{r_2}{R_1} \frac{\sin \beta}{(1 + \cos \beta)^2} \omega_2 \omega_3. \quad (9)$$

Угловую скорость рейки найдем дифференцированием соотношения (1) по времени с учетом выражения (4)

$$\omega_3 = \frac{r_2}{l} \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \omega_2 = \frac{r_2}{l} \omega_2 \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{R_1}{l} \omega_1 \sin \beta. \quad (10)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда колесо 1 состоит из двух жестко связанных цилиндров радиусов r_1 и R_1 с совпадающими осями. Тогда, если нить намотана на малый цилиндр радиуса r_1 , а большой цилиндр радиуса R_1 катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соотношения (9) и (10) принимают следующий вид

$$\varepsilon_1 = \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{1 + \cos \beta} \varepsilon_2 + \frac{r_2}{r_1} \frac{\sin \beta}{(1 + \cos \beta)^2} \omega_2 \omega_3. \quad (11)$$

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2 R_1}{(r_1 + R_1 \cos(\beta))(H - (r_1 - r_2) \cos(\beta))} \sin^2 \beta. \quad (12)$$

В случае, если нить намотана на большой цилиндр радиуса R_1 , а малый цилиндр радиуса r_1 катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соотношение (9) остается в силе, а соотношение (8) принимает вид:

$$\omega_1 = \frac{r_2}{R + r \sin \varphi} \omega_2 = \frac{r_2}{R + r \cos \beta} \omega_2. \quad (13)$$

Отметим, что записанные соотношения для угловых скоростей могут быть также получены на основе теории плоскопараллельного движения.

Динамика привода катящегося колеса. Для исследования динамики привода колеса воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода [2,3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad (14)$$

где T – кинетическая энергия системы, Q_φ – обобщенная сила, и в качестве обобщенной координаты выбран угол поворота φ первого колеса.

Будем полагать, что система приводится в движение силой F , приложенной к свободному концу нити. Тогда обобщенная сила определится выражением

$$Q_\varphi = F \omega_2 r_2 / \dot{\varphi} = F \begin{cases} R_1 (1 + \cos \beta) \\ (r_1 + R_1 \cos \beta) \\ (R_1 + r_1 \cos \beta) \end{cases}, \quad (15)$$

где строки в правой части соответствуют трем различным модификациям системы. Как вариант можно также рассмотреть систему, когда нить намотана на колесо 2, и к нему приложен крутящий момент $M = Fr_2$.

Кинетическая энергия системы состоит из суммы кинетических энергий двух колес и может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} I(\varphi) \dot{\varphi}^2, \quad (16)$$

где приведенные моменты инерции являются функциями обобщенной координаты, причем эта зависимость выражается через угол β , являющийся достаточно сложной функцией угла φ :

$$I(\varphi) = \begin{cases} (3/2)m_1 R_1^2 + m_2 r_2 R_1 (1 + \cos \beta) \\ m_1 (R_1^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (r_1 + R_1 \cos \beta), \\ m_1 (r_1^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (R_1 + r_1 \cos \beta). \end{cases} \quad (17)$$

В этих соотношениях ρ – центральный радиус инерции первого колеса, если оно составное (иначе колеса 1 и 2 рассматриваются как сплошные однородные диски); каждое из трех выражений для моментов инерции соответствует схемам механизмов, изображенных на рисунках 1, 2 и 3, соответственно.

Имея в виду выражение (16) для кинетической энергии, левую часть уравнения Лагранжа (14) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{d(I(\varphi)\dot{\varphi})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = I(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2. \quad (18)$$

Окончательно приходим к существенно нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему динамику рассматриваемых систем

$$I(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_\varphi. \quad (19)$$

Вычисляя производную приведенного момента инерции системы по обобщенной координате получаем

$$\frac{dI(\varphi)}{d\varphi} = -m_2 \frac{r_2 R}{l} \sin^2 \beta \begin{cases} R \\ R \\ r \end{cases}. \quad (20)$$

Прямое интегрирование полученного дифференциального уравнения сопряжено со значительными трудностями. Однако можно найти его первый интеграл, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме и учитывая, что работа силы F определяется интегралом от функции, зависящей от угла β , и при постоянной силе F ее работа определяется при изменении угла от исходного значения β_0 до текущего значения β . Для базового варианта (см. рис. 1)

$$A_1 = \int_{\beta_0}^{\beta} F \frac{ds}{d\beta} d\beta = \int_{\beta_0}^{\beta} F \frac{\omega_2 r_2}{\omega_3} d\beta = F \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{[H - (R_1 - r_2) \cos \beta](1 + \cos \beta)}{\sin^2 \beta} d\beta. \quad (21)$$

Выполняя интегрирование находим

$$A_1 = F \left\{ (\operatorname{ctg} \beta + \sin^{-1} \beta) [(R_1 - r_2) - H] + (R_1 - r_2) \beta \right\} \Big|_{\beta_0}^{\beta}. \quad (22)$$

Аналогичные вычисления для двух других случаев приводят к соотношениям

$$A_2 = (r_1 - r_2) \beta + ((r_1 - r_2) - H \frac{r_1}{R_1}) \operatorname{ctg} \beta - (H + \frac{r_1}{R_1} (r_1 - r_2)) \sin^{-1} \beta, \quad (23)$$

$$A_3 = (R_1 - r_2) \beta + ((R_1 - r_2) - H \frac{R_1}{r_1}) \operatorname{ctg} \beta - (H + \frac{R_1}{r_1} (R_1 - r_2)) \sin^{-1} \beta. \quad (24)$$

Заметим, что при одинаковых внешним и внутренним радиусах ($r_1 = R_1$) выражения для работы (23) и (24) сводятся к уравнению (22).

Таким образом, квадрат угловой скорости первого колеса определяется уравнением

$$\omega_1^2(\beta) = \frac{I(\beta_0)}{I(\beta)} \omega_1^2(\beta_0) + \frac{2A}{I(\beta)}. \quad (25)$$

Полученные соотношения позволяют решать широкий класс задач о движении системы. В частности, можно исследовать зависимость скорости движения тел системы в зависимости от расстояния, пройденного центром первого колеса. Также можно отметить, что для случая, когда нить навита на меньший радиус r_1 при $F > 0$ существует предельное расстояние, проходимое центром колеса 1, при котором его скорость обращается в нуль, и начинается движение в обратном направлении. При пренебрежении сопротивлением движению реализуется периодический процесс автоколебаний (колебаний, возбуждаемых действием постоянной силы) колеса между левой и правой точками возврата.

Примеры исследования движения колеса. При некоторых значениях параметров можно получить ряд аналитических результатов. Прежде всего, следует отметить, что в базовом варианте (рис. 1) при движении колеса 1 вправо с течением времени угол $\beta \rightarrow \pi$, нить сходит с колеса 1 вблизи его МЦС и, соответственно, скорость ее свободного конца, к которому приложена сила, стремится к нулю. Поэтому работа силы также стремится к нулю, и колесо уходит на бесконечность с практически постоянной предельной скоростью. Эту скорость можно легко вычислить при $r_2 = R_1$. Согласно уравнению (22) работа силы F

$$A_1(\beta) = FH[(\text{ctg}\beta_0 + \sin^{-1}\beta_0) - (\text{ctg}\beta + \sin^{-1}\beta)]. \quad (26)$$

Соответственно при $\beta \rightarrow \pi$ получим

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi} A_1(\beta) = FH(\text{ctg}\beta_0 + \sin^{-1}\beta_0). \quad (27)$$

Предельную угловую скорость при $\omega_0 = 0$ находим согласно уравнениям (25) и (17)

$$\omega_1(\beta) = \sqrt{\frac{4FH(1 + \cos\beta_0)}{3m_1R^2 \sin\beta_0}}. \quad (28)$$

При $R = r_2 = 0,5$ м, $H = 1,0$ м, $\beta_0 = \pi/6$, $F = 200$ Н, $m_1 = 50$ кг находим $\omega_{1\text{max}} = 8,92$ рад/с. На рис. 2 представлены результаты расчета угловой скорости первого колеса для базового варианта системы (см. рис. 1). На графике отчетливо видно, что угловая скорость колеса стремится к своему предельному значению, которое при выбранных параметрах равняется 8,92 рад/с.

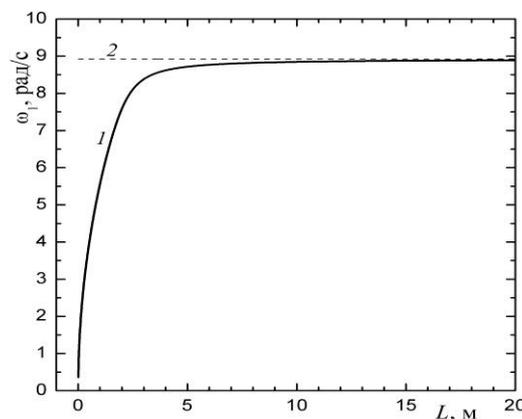


Рис. 2. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая рис. 1 (кривая 1). Линией 2 представлено предельное значение угловой скорости. Параметры системы: $R_1 = r_2 = 0,5$ м, $H = 1,0$ м, $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 10$ кг, $F = 200$ Н. Начальные условия: $\beta_0 = \pi/6$, $\omega_0 = 0$

В варианте 2 при приближении угла β к π свободный конец нити начинает двигаться влево, и сила F выполняет отрицательную работу, что приводит к остановке колеса и его последующему движению в противоположную сторону. Таким образом, возникает автоколебательное движение системы под действием постоянной силы. Если принять $r_2=r_1$, $R_1=2r_1$, выражение для работы принимает простой вид

$$A_2 = FH \{0,5 \operatorname{ctg} \beta_0 + \sin^{-1} \beta_0 - 0,5 \operatorname{ctg} \beta - \sin^{-1} \beta\}. \quad (29)$$

Приравняв это выражение нулю и решая полученное уравнение при $\beta_0=\pi/3$ относительно предельного угла, находим $\beta=\pi-\arctg(3\sqrt{3}/13)=2,76 \text{ рад}=158^\circ 13'$.

На рис. 3 графически представлены результаты расчета движения системы для данного случая. Как было отмечено в начале раздела, в этом случае колесо совершает периодические колебания между правой и левой точками возврата. При заданных параметрах системы и начальных условиях максимальная угловая скорость колеса около 3,5 рад/с достигается при прохождении его центром расстояния примерно 1,2 м. Колесо останавливается, пройдя расстояние около 3.1 м.

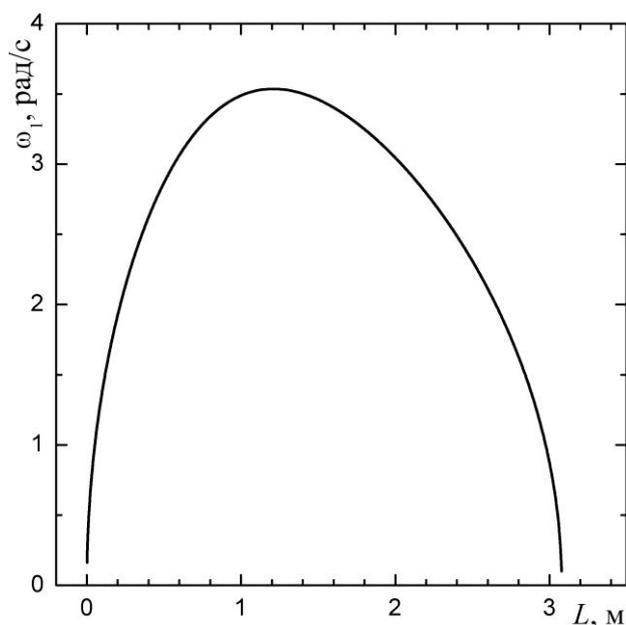


Рис. 3. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая 2. Параметры системы: $R_1=0,6 \text{ м}$, $r_1=0,3 \text{ м}$, $r_2=0,3 \text{ м}$, $H=1,0 \text{ м}$, $m_1=50 \text{ кг}$, $m_2=10 \text{ кг}$, $F=200 \text{ Н}$. Начальные условия: $\beta_0=\pi/3$, $\omega_0=0$.

В варианте 3 при $\beta \rightarrow \pi$ скорость движения нити, как это следует из кинематики системы, стремится к величине $\omega(R_1-r_1)$. В результате сила F продолжает выполнять работу, и колесо движется с угловым ускорением, стремящемся согласно уравнениям (15), (17), (19) и (20) к предельному значению

$$\ddot{\varphi} = \frac{Q_\varphi}{I(\varphi)} = \frac{F(R-r)}{m_1(r^2 + \rho^2) + m_2 r_2 (R-r)}. \quad (30)$$

Рис. 4 демонстрирует, что в случае 3 скорость колеса монотонно возрастает, что соответствует выполненному выше анализу для этого случая.

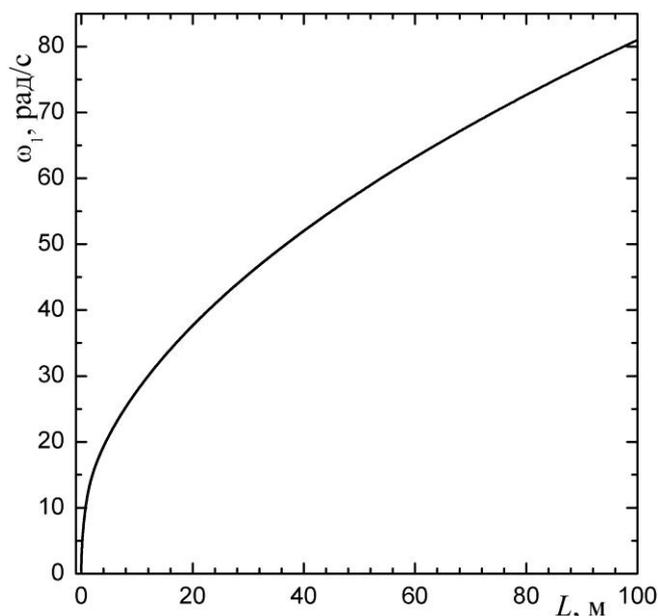


Рис. 4. Зависимость угловой скорости первого колеса от пройденного им расстояния для случая 3. Параметры системы: $R_1 = 0,6$ м, $r_1 = 0,3$ м, $r_2 = 0,3$ м, $H = 1,0$ м, $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 10$ кг, $F = 200$ Н. Начальные условия: $\beta_0 = \pi/3$, $\omega_0 = 0$

Дальнейший анализ показал, что в базовом случае (см. рис. 1) при росте радиуса колеса 1 и постоянстве всех остальных параметров происходит уменьшение предельного значения его скорости и колесо медленнее набирает скорость, поскольку приведенный момент инерции системы при этом увеличивается. Другой характерной особенностью является резкое возрастание угловой скорости при прохождении нитью вертикального положения при больших радиусах колеса. Это обусловлено наличием в выражениях для работы и приведенного момента инерции быстро изменяющегося косинуса угла β при прохождении им значения $\pi/2$ и наличием при косинусе радиуса колеса в качестве сомножителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьев, В.А. Курс теории механизмов и машин / В.А. Зиновьев – М.: Наука, 1975. – 204 с.
2. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский – М.: Высшая школа, 1985. – 558 с.