

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ЗАКОН ТРЕНИЯ И ИЗНАШИВАНИЯ В ТРИБОФАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

¹Сосновский Л.А.

¹ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», Гомель

Закон сухого трения [1, 2], впервые сформулированный Leonardo da Vinci 500 лет назад, вошел в историю техники как один из наиболее применяемых законов в инженерных расчетах [3]. Двести лет спустя (после da Vinci) Amontон M., Coulomb С. А. и Euler L. [4-7] внесли решающий вклад в обоснование и понимание этого закона, и он стал *классическим*: сила трения F_S при скольжении пропорциональна контактной нагрузке F_N . Исследования показали, что для *трибофатической системы* (ТФС) классический закон трения оказывается неточным и, следовательно, неприменимым. Экспериментально установлено, что *ошибка* оценки коэффициента трения в ТФС (например, типа колесо / рельс и др.) достигает 60...70 % и более [8], если использовать для ее анализа классический закон трения. Поэтому возникает задача о корректировке классического закона трения.

Закон да Винчи–Амонтона–Кулона–Эйлера является чисто *эмпирическим*. И на протяжении полутысячелетней истории успешных попыток получить его теоретически, по имеющимся сведениям [2], *не* оказалось. Впервые это сделано в наше время в рамках *трибофатики* [9]. В первом десятилетии XXI века разработаны *два* разных подхода к теоретическому построению закона трения для ТФС [8]. Ниже кратко изложены и кратко анализируются эти подходы.

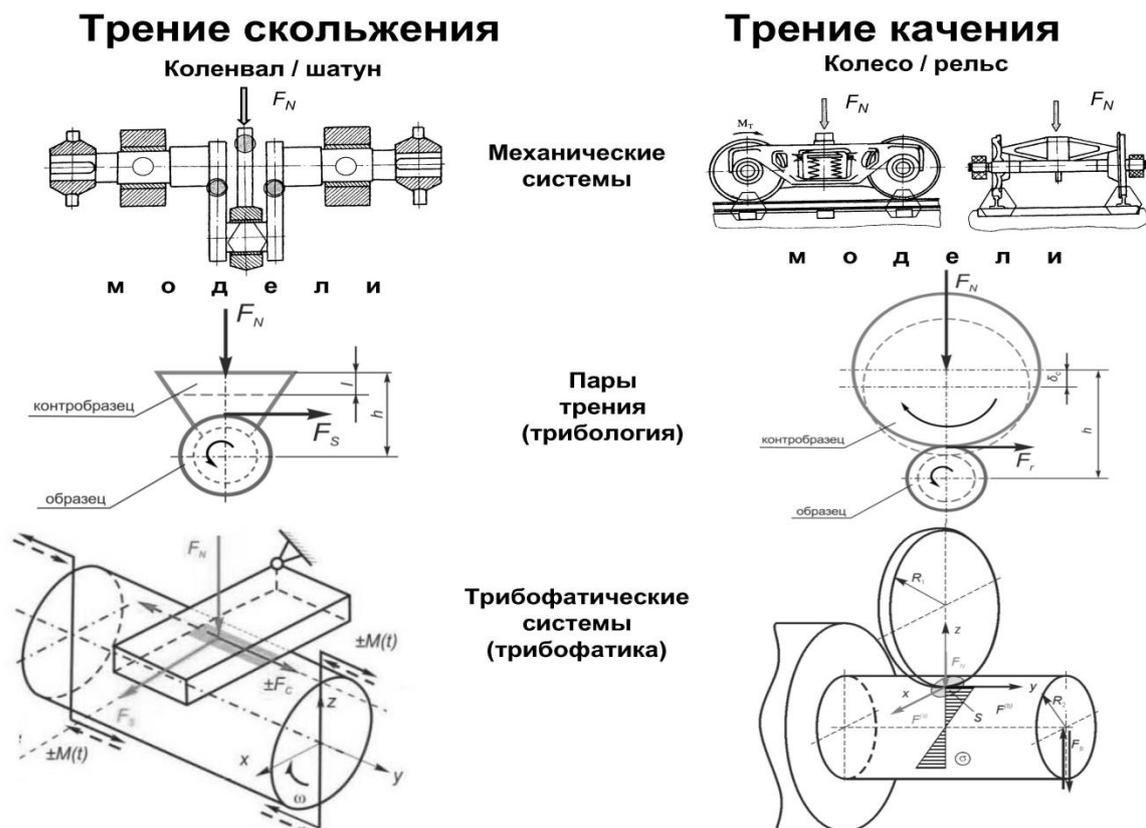


Рис.1. Основные виды трения и их реализация в технических системах

На рисунке 1 показано, что типичные узлы трения механических систем моделируют различным образом в трибологии и в трибофатике. Принципиальное различие состоит в том, что в трибологии принимается: на пару трения (ПТ) действует только одна – контактная нагрузка F_N . А в трибофатике те же узлы рассматриваются как ПТ, которые *дополнительно* нагружены внеконтактными (объемными) силами, которые существенно изменяют напряженно-деформированное состояние в области контакта.

Согласно рисунку 1, в ПТ *ролик / вкладыш*, которая моделирует систему коленвал / шатун, возникает *однонаправленная* (статическая) сила трения F_s . Такова трибологическая концепция. Однако, согласно трибофатической концепции, на площадке контакта этой же системы возникает *дополнительная* (циклическая) сила трения $\pm F_c$, которая возбуждается внеконтактным изгибающим моментом $\pm M(t)$ (см. рисунок 1). Сила F_c инициирует в области контакта либо растяжение ($+F_c$), либо сжатие ($-F_c$), при этом $F_s \perp F_c$. Естественно, что *обобщенная* сила трения в такой системе должна быть функцией $F_{s/\sigma}(F_s, F_c) \neq F_N$, так как $F_c > 0$.

Классический закон сухого трения гласит: *сила трения* (F_s) *при скольжении* (индекс s) *пропорциональна контактной нагрузке* (F_N), т.е.

$$F_s = f_s F_N. \quad (1)$$

Для анализа трения в ТФС разработан *феноменологический подход*, согласно которому

$$F_{s/\sigma} = F_s \pm \mu_\tau F_c(t) = f_s F_N \pm \mu_\sigma M(t), \quad (2)$$

где $\pm M(t)$ – изгибающий момент (см. рисунок 1), μ – коэффициент такого преобразования компоненты F_c к ортогональной ей компоненте F_s , чтобы их сумма была эквивалентной (равной) обобщенной силе $F_{s/\sigma}$ согласно (2).

Формула (2) и представляет *обобщенный закон трения* для ТФС типа коленвал / шатун, аналогичный классическому закону (1). Он гласит: *в общем случае сила трения пропорциональна как контактной, так и внеконтактной (объемной) нагрузке, если последняя возбуждает в зоне трения циклические напряжения* (в данном случае $\pm \sigma(M(t))$). Если $F_c(t) = 0$ (или, что то же, $M(t) = 0$), то (2) переходит в (1). Таким образом, классический закон трения (1) является частным случаем закона (2), что и дает основание называть его обобщенным.

Согласно феноменологическому подходу, *обобщенный коэффициент трения* в ТФС можно определить по формуле [10, 11]

$$f_{s/\sigma} = f_s \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{p_a} \right) = f_s (1 \pm \mu_p f_F). \quad (3)$$

где p_a – контактное давление, $f_F = \pm \sigma_a / p_a$ – индекс трения в ТФС.

Феноменологический подход для оценки силы и коэффициента трения в ТФС разработал Л. А. Сосновский [10, 11].

Рассмотрим далее систему *колесо / рельс* (см. рисунок 1). Ее *трибологическая модель ролик / ролик* нагружена одной контактной нагрузкой F_N . А *трибофатическая модель ролик / вал* принимает во внимание тот факт, что внеконтактная (объемная) изгибающая вал сила F_b вызывает *дополнительную* контактную нагрузку P_b , при этом F_N и P_b сонаправлены и приложены в одной точке. Таким образом, в ТФС в действительности реализуется суммарная контактная нагрузка $(F_N + P_b) \neq F_N$, так как

$P_b > 0$. Поскольку в такой системе изменяется величина контактной нагрузки, то, согласно закону трения, соответственно изменяются и численные значения силы и коэффициента трения. В этой связи разработан *деформационный подход* [9, 12] решения задачи определения силы и коэффициента трения в ТФС. Оно реализуется с использованием методов механики деформируемого твердого тела, механики контактного взаимодействия и теории упругости. В конечном счете получено единое соотношение

$$\begin{aligned} F_{\sigma/p} &= F^{(s)} + F^{(b)} = \int_S f^{(s)} p(x, y) ds = \\ &= \int_S f^{(s)} [p_c(x, y) + p_b(x, y)] ds = f^{(s)} (F_N + P_b), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p(x, y)$ – распределенные по площадке контактные усилия, обусловленные как контактной (индекс c), таки изгибающей (индекс b) нагрузками.

Это и есть *обобщенный закон трения* в ТФС, который формулируется так: обобщенная сила трения $F_{\sigma/p}$ в ТФС пропорциональна как контактной нагрузке (F_N), так и сонаправленной с ней силе (P_b), обусловленной неконтактной (объемной) нагрузкой. Сравнение (2) и (4) показывает, что эти формулы практически одинаковы. Естественно, что и формулировки обобщенного закона трения, полученные при феноменологическом и деформационном подходах, совпадают.

Если разделить (4) на F_N и провести несложные преобразования, то коэффициент трения в ТФС можно записать в следующем виде:

$$f_{\sigma/p} = f^{(s)} \left[1 + k_{\sigma/p} \left(\frac{\sigma_{yy}^{(b)}}{p_0} \right) \right], \quad (5)$$

где p_0 – максимум распределения p ; $k_{\sigma/p}$ – функция трения, обусловленная взаимодействием напряжений от внеконтактной и контактной нагрузок. Сравнение (3) и (5) показывает, что они формально одинаковы. Естественно, что они прогнозируют идентичные зависимости коэффициента сопротивления качению в ТФС от индекса трения.

Согласно (3) и (5), обобщенный коэффициент трения в ТФС определяется таковым в соответствующей ей ПТ и линейно зависит от индекса трения в ТФС. Это значит, что численное значение $f_{s/\sigma}$ линейно же зависит от величины, а также знака циклических напряжений. В этой связи коэффициент (как и сила) трения в ТФС может быть больше, меньше или равным таковому (f_s) в соответствующей ей ПТ.

Из (3) и (5) следует, что в данной ТФС – при одновременном действии контактной и внеконтактной нагрузок – коэффициент сопротивления качению в зоне растяжения уменьшается по сравнению с коэффициентом трения при чистом качении, а в зоне сжатия, напротив, увеличивается. Деформационный подход разработан С.С. Щербаковым [9, 12].

Таким образом, формулы (3) и (5) нетрудно использовать для прогнозирования коэффициента трения в ТФС, если известен коэффициент трения для соответствующей ей ПТ. Величины f_s для типичных ПТ известны и приведены в таблицах (см., например, [13]).

Экспериментальную проверку полученных решений выполнили по результатам испытаний двух марок сталей, предел прочности которых различался в ~2,5 раза: углеродистая сталь 45 ($\sigma_u=610$ МПа) и легированная сталь 18ХГТ ($\sigma_u=1700$ МПа). Геометрические размеры элементов (вал, ролик) ТФС и схемы ее нагружения показаны на рисунке 2. Испытания проводили с организацией трения качения либо в зоне

растяжения ($\sigma > 0$), либо в зоне сжатия ($\sigma < 0$) изгибаемого вала (изгибающая нагрузка Q направлена соответственно вверх либо вниз) (см. рисунок 2). Образец (вал) и контрообразец (ролик) испытываемой ПТ имели те же размеры, что и элементы ТФС. Чтобы обеспечить устойчивость контакта и деформирования в процессе испытаний, вал имеет выточку радиусом $R=10$ мм, а профильный радиус ролика $R=5$ мм вдвое меньше. А чтобы не допустить концентраций напряжений в области контакта, радиус выточки на образце равен его диаметру в рабочем сечении ($R_{10}=\varnothing 10$) (см. рисунок 2). Для испытаний принимали три сочетания материалов трущихся элементов (образцов и контрообразцов): сталь 45/сталь 45; сталь 18ХГТ/сталь 18ХГТ; сталь 45 (вал)/сталь 18ХГТ (ролик). Величины циклических напряжений при испытаниях, как правило, не превышали предел выносливости при изгибе с вращением ($\sigma_a \leq \sigma_{-1}$). Наибольшее контактное давление ($p_0 = \max p_a$) определяли по Герцу. Его величины принимали такими, чтобы реализовать при трении качения упругий либо упругопластический контакт. Характер контакта устанавливали по диаграмме $p_0 - \delta$ (δ – сближение осей элементов ТФС или ПТ) (см. рисунок 2). При испытаниях варьировали: циклические напряжения от 160 до 640 МПа (в 4 раза); контактное давление от 1200 до 3200 МПа (более чем в 2,5 раза); индекс трения в ТФС ($f_F = \sigma_a / p_0$) от 0,1 до 0,3 (в 3 раза). Все испытания проводили на одной машине СИ-03М методом ступенчатого повышения циклических напряжений при заданном контактном давлении $p_0 = \text{const}$ (см. рисунок 2). Всего проведено около 100 опытов (испытания выполнили к.т.н. В. В. Комиссаров и к.т.н. С. А. Тюрин под руководством автора статьи).

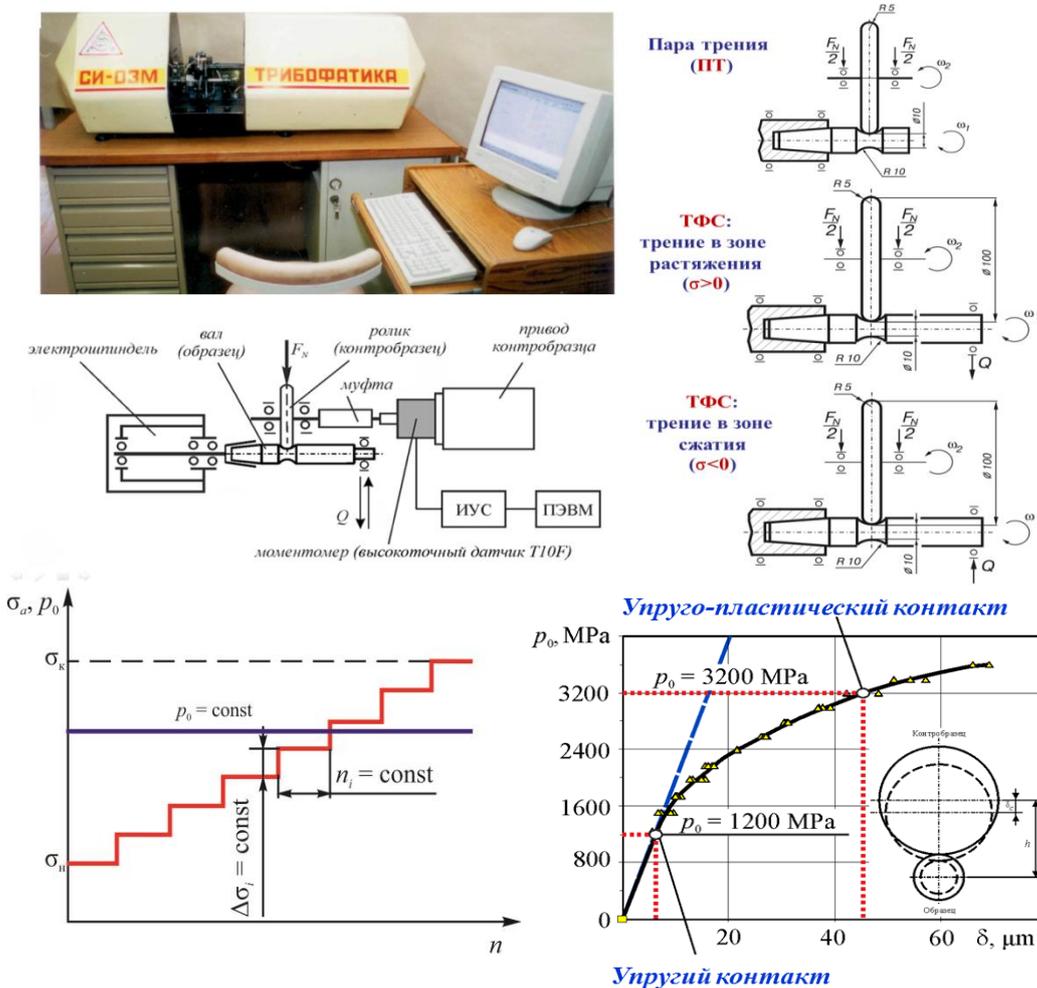


Рис.2. Фото универсальной испытательной машины СИ-03М и схемы испытаний

Результаты испытаний обрабатывали в соответствии с обобщенным законом трения для ТФС по формуле (3), т.е. строили зависимости коэффициентов сопротивления качению $f_{\sigma/p}$ от величины индекса трения σ_a/p_0 . Результаты обработки данных представлены на рисунке 3, а, б, в. Изучение этих опытных данных позволяет сделать следующие основные заключения.

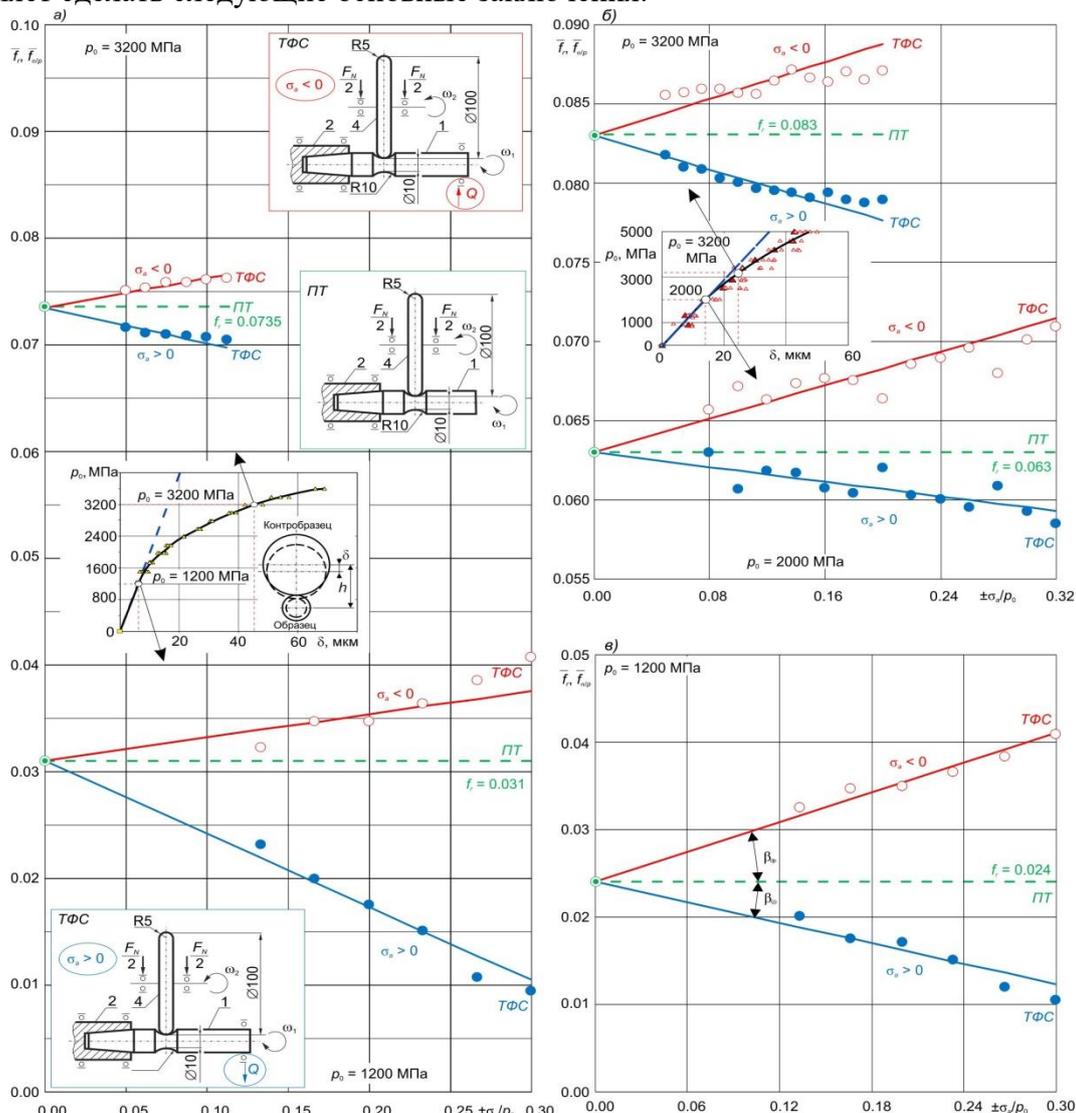


Рис.3. Анализ результатов испытаний ТФС сталь 45 / сталь 45 (а), сталь 18ХГТ / сталь 18ХГТ (б) и сталь 45 / сталь 18ХГТ (в)

Влияние индекса трения в ТФС на изменение коэффициента сопротивления качению графически представляется двумя линейными ветвями $[f_{\sigma/p}(\pm\sigma_a/p_0) = f_{\sigma/p}(\pm f_F)]$, которые сходятся в единой точке $f_r(\sigma_a=0)$ для ПТ.

Рост уровня циклических напряжений растяжения ($\sigma_a > 0$) инициирует снижение коэффициента сопротивления качению, тогда как циклические напряжения сжатия ($\sigma_a < 0$), наоборот, его увеличивают. Эти закономерности вполне соответствуют теоретическому прогнозу.

Экспериментально установлено, что коэффициент сопротивления качению в ТФС ($f_{\sigma/p}$), как правило, значительно больше или меньше такового (f_r) в аналогичной ей ПТ. Относительная разность (Δ_{\max}) между ними в условиях опыта достигает $\Delta_{\max} = 60 \dots 70 \%$ и более (таблица 1). Следовательно, практическое использование классического закона для анализа трения в ТФС неправомерно, поскольку ведет к существенной ошибке при расчетах. Применение обобщенного закона трения снимает эту проблему.

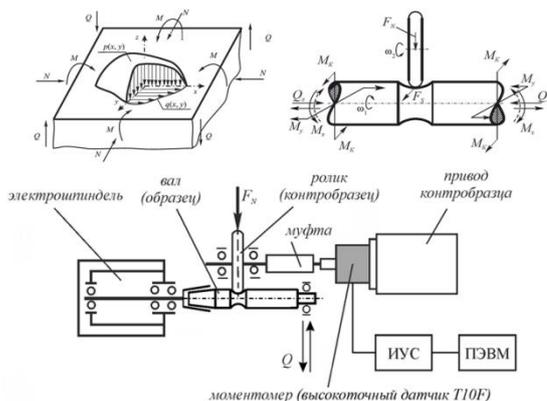
Таблица 1 - Анализ наибольшей относительной Δ_{\max} разности (в опытах) коэффициентов сопротивления качению в ТФС и ПТ

ПТ, ТФС	p_0 , МПа	ПТ, f_r	σ_a , МПа	σ_a / p_0	Трение в зоне растяжения ($\sigma_a > 0$)			Трение в зоне сжатия ($\sigma_a < 0$)		
					$\bar{f}_{\sigma/p}$	$\bar{\mu}_p$	$\Delta_{\max}, \%$	$\bar{f}_{\sigma/p}$	$\bar{\mu}_p$	$\Delta_{\max}, \%$
сталь 45/ сталь 45	1200	0,031	360	0,300	0,0105	2,207	66,2	0,0376	0,708	21,2
	3200	0,074		0,113	0,0697	0,456	5,1	0,0766	0,373	4,2
сталь 18ХГТ/ сталь 18ХГТ/ сталь 18ХГТ/	2000	0,063	640	0,320	0,0593	0,184	5,9	0,0715	0,421	13,5
	3200	0,083		0,200	0,0777	0,322	6,4	0,0888	0,350	7,0
сталь 45/ сталь 18ХГТ/	1200	0,024	360	0,300	0,0123	1,622	48,7	0,0412	2,383	71,5
$\Delta = \left[(\bar{f}_r - \bar{f}_{\sigma/p}) / \bar{f}_r \right] \cdot 100\%$										

Обобщенный закон трения аппроксимирует результаты всех экспериментов (около 100 значений коэффициентов сопротивления качению) с погрешностью, которая укладывается в интервал $\Delta_f = \pm 6\%$ (см. рисунок 3 и таблицу 1); в 90 % случаев он составляет $\pm 3\%$. Заметим, что погрешность обобщенного закона оказывается примерно одинаковой при реализации трения как в зоне сжатия, так и в зоне растяжения изгибаемого вала. Это позволяет рекомендовать его для практических расчетов.

Обобщенный закон трения одинаково эффективен для описания трения при упругом и упругопластическом контактах (см. рисунок 3 и таблицу 1), при этом повышение контактного давления ведет к соответствующему росту коэффициента сопротивления качению. Установлено, что наибольшая разность между величинами коэффициента сопротивления качению в ПТ и ТФС при повышении контактного давления означает, что погрешность классического закона трения особенно велика при упругом контакте (более 20 %), тогда как в условиях упругопластического контакта она существенно меньше (менее 10 %).

$$F_{s/\sigma} = \begin{cases} (f_s F_N \pm \mu_\sigma M_{ijk}) \frac{v_s}{|v_s|} & \text{при } v_s \neq 0, \\ -F_{s/\sigma}^{(0)}, +F_{s/\sigma}^{(0)} & \text{при } v_s = 0, F_{s/\sigma}^{(0)} \geq F_s \end{cases}$$



Л.А. Сосновский



С.С. Шербаков



В.В. Комиссаров



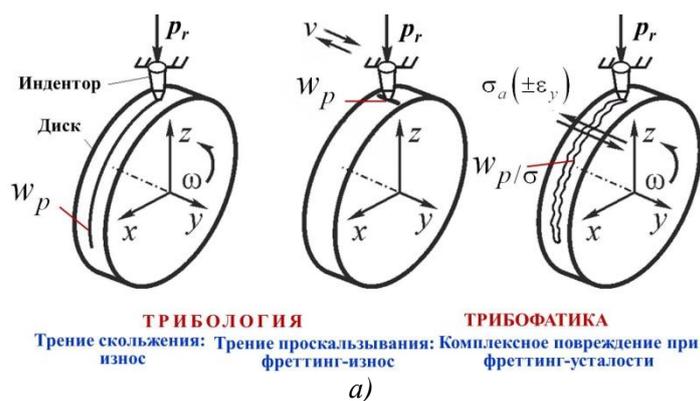
С.А. Тюрин

В общем случае сила трения пропорциональна как контактной, так и внеконтактной (объемной) нагрузке

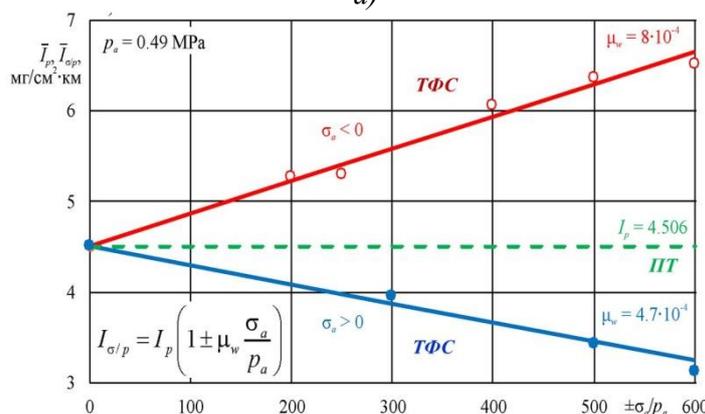
Рис.4. Обобщенный закон трения: 2000-2015

Таким образом, результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют сформулировать и представить здесь обобщенный закон трения (рисунок 4). В работе [14] ему дано имя Сосновского–Щербакова–Комиссарова. Как видно, на рисунке 4 закон записан в наиболее общем виде; здесь даны также наиболее общие схемы ТФС и методология испытаний одной из них (рисунок 4).

Давно и хорошо известна прямая зависимость износа от коэффициента трения [15]. Применительно к ТФС простейший анализ такой связи представлен на рисунке 5, а, где w_p – износ, обусловленный контактной нагрузкой при трении скольжения или трении проскальзывания, и $w_{p/\sigma}$ – износ, обусловленный как контактной, так и внеконтактной нагрузками; последняя возбуждает на площадке контакта знакопеременные циклические напряжения (деформации) $\sigma_a(\pm\varepsilon_y)$. Таким образом, комплексное повреждение



ТРИБОЛОГИЯ Трение скольжения: Трение проскальзывания: Комплексное повреждение при фреттинг-износ фреттинг-усталости



Закон износа: интенсивность изнашивания в трибофатической системе ($I_{\sigma/p}$) пропорциональна износу пары трения (I_p) и индексу трения ($f_f = \pm\sigma/p_a$) в ТФС

б)

Рис.5. Схемы процессов трения и изнашивания в ПТ и в ТФС

В этой связи возникает идея использовать обобщенный закон трения для анализа изнашивания в ТФС при скольжении. Примем для анализа не абсолютную характеристику износа (w), а его относительную характеристику – интенсивность изнашивания (I), определяемую как удельный износ (износ, отнесенный к площади контакта), приходящийся на единицу длины пути трения [16]. В работе [17] испытания ТФС вал (сталь 45) / вкладыш (сталь 45) вели при трении скольжения без смазки. Результаты испытаний были обработаны нами по той же методике, что и на рисунке 3. Они представлены на рисунке 5, б в виде зависимости интенсивности изнашивания от индекса трения. Сравнение рисунка 5, б с рисунком 3 показывает, что обе зависимости

формально идентичны. Следовательно, данные на рисунке 5, а можно аппроксимировать (рисунок 5, б) уравнением типа (3)

$$I_{\sigma/p} = I_p \left(1 \pm \mu_w \frac{\sigma_a}{p_a} \right). \quad (7)$$

Формула (7) и есть, по существу, обобщенный закон изнашивания: интенсивность изнашивания в ТФС ($I_{\sigma/p}$) определяется таковой (I_p) в ПТ и пропорциональна (коэффициент μ_w) индексу трения ($f_F = \pm \sigma_a / p_a$). Погрешность аппроксимации опытных данных уравнением (7) не превышает 7 %.

Согласно (7), интенсивность изнашивания при скольжении в ТФС повышается в зоне сжатия ($\sigma_a < 0$) и уменьшается в зоне растяжения ($\sigma_a > 0$) – по сравнению с интенсивностью изнашивания ПТ.

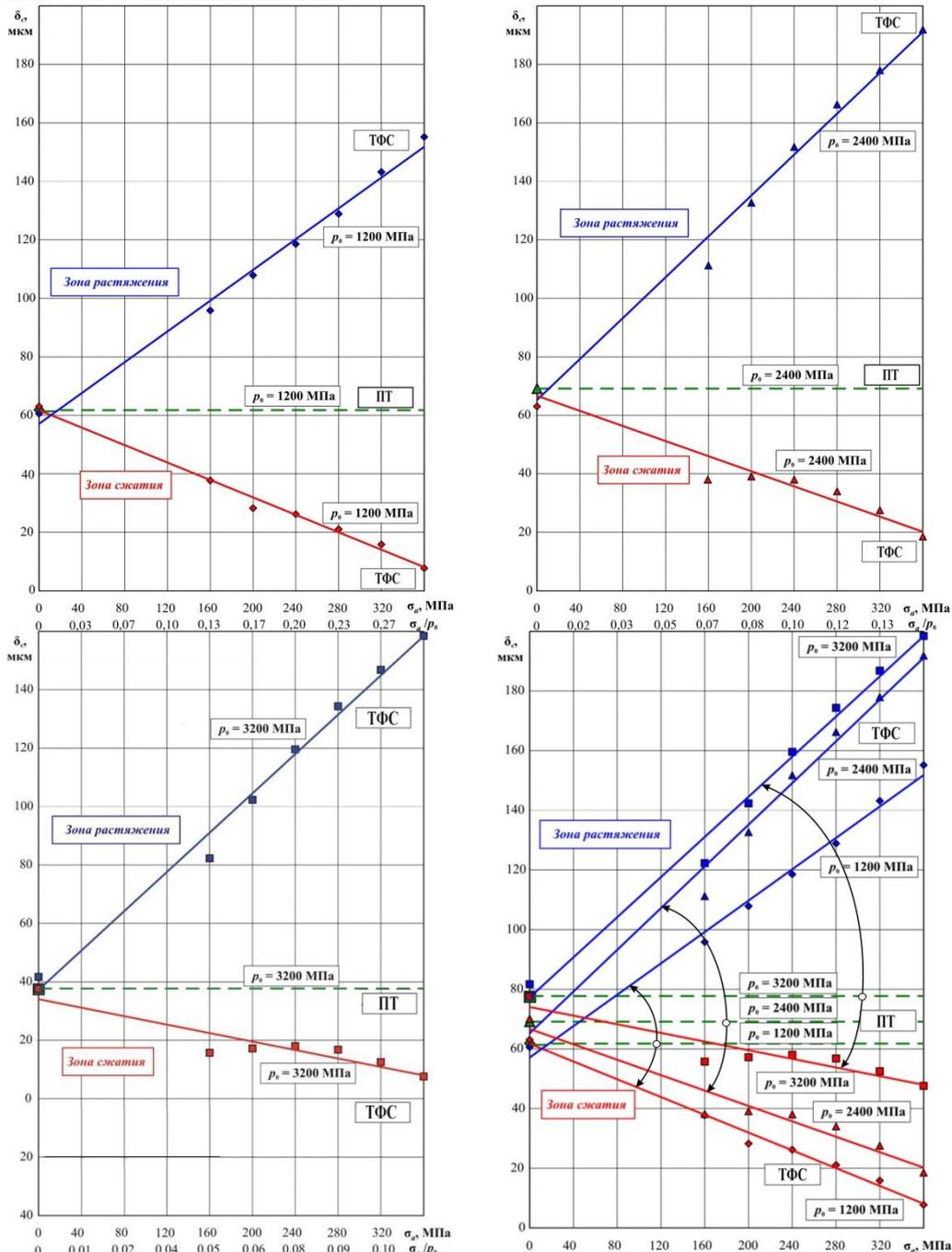


Рис.6. Сближение осей в ТФС сталь 45 (вал) / 18ХГТ (ролик) как функция индекса трения

При реализации трения качения за характеристику износа можно принять суммарное (остаточное) сближение осей (см. рисунок 1)

$$\delta_c = \delta_w + \delta_{pl}, \quad (8)$$

где δ_w и δ_{pl} – сближение осей, обусловленное собственно износом (индекс w) и остаточной деформацией (индекс pl). На рисунке 6 представлены полученные экспериментальные зависимости δ_c от индекса трения для ТФС (сталь 45 (вал) / сталь 18ХГТ (ролик)). Сравнение рисунков 3, 5, б и 6 показывает, что все они формально идентичны. Таким образом, зависимости на рисунке 6 аппроксимируются уравнением типа (3), (6):

$$\delta_{\sigma/p} = \delta_p \left(1 \pm \mu_\delta \frac{\sigma_a}{p_0} \right), \quad (9)$$

Формула (9) и есть, по существу, обобщенный закон остаточного деформирования и износа: суммарный износ $\delta_{\sigma/p}$, определяемый в ТФС при трении качения, равен таковому (δ_p) в ПТ и пропорционален (коэффициент μ_δ) индексу трения ($\mu_F = \pm \sigma_a / p_0$).

Обобщим описанные результаты. Полученные формулы для – коэффициента трения (3)

$$f_{\sigma/p} = f_p \left(1 \pm \mu_p \frac{\sigma_a}{p_0} \right), \quad (10)$$

– интенсивности изнашивания (7)

$$I_{\sigma/p} = I_p \left(1 \pm \mu_w \frac{\sigma_a}{p_a} \right), \quad (11)$$

– сближения осей (8)

$$\delta_{\sigma/p} = \delta_p \left(1 \pm \mu_\delta \frac{\sigma_a}{p_0} \right) \quad (12)$$

представим в единой форме объединенного закона трения, изнашивания и деформирования в ТФС

$$\Delta_{\sigma/p} = \Delta_p (1 \pm \mu_0 f_F), \quad (13)$$

в котором приняты следующие обозначения:

$$\frac{\sigma_a}{p_0} = f_F, \mu_p, \mu_w, \mu_\delta \equiv \mu_0, f_{\sigma/p}, I_{\sigma/p}, \delta_{\sigma/p} \equiv \Delta_{\sigma/p}, f_p, I_p, \delta_p \equiv \Delta_p. \quad (14)$$

Объединенный закон (13) гласит: процессы трения, остаточного деформирования и изнашивания в ТФС определяются соответствующими параметрами в ПТ и пропорциональны обобщенному индексу трения.

Полученные результаты, разумеется, требуют проведения дальнейших теоретических и широкомасштабных экспериментальных исследований.

Таким образом, в докладе поставлена и решена инновационная задача: сформулировать объединенный закон трения, остаточного деформирования и изнашивания в ТФС. На базе этого закона можно ставить и решать комплекс практически важных задач эффективного управления указанными процессами. Здесь важно подчеркнуть, что если для трибологической ПТ имеется только один управляющий нагрузочный параметр (контактная нагрузка p_0), то для ТФС их два (как контактная, так и внеконтактные объемные нагрузки), когда они вызывают циклические напряжения σ_a в области контакта. Эти два нагрузочных параметра

объединяются в новом параметре – индексе трения ($\mu_F = \pm\sigma_a / p_0$) в ТФС. Нельзя не видеть, что величина σ_a есть не менее сильный, чем p_0 , управляющий фактор.

И еще один практически важный вывод следует сделать по данной работе: при расчете и проектировании машин недопустимо в их ТФС силу и коэффициент трения определять на базе классического закона – надо использовать обобщенный закон трения. При несоблюдении этой рекомендации погрешность расчетов может достигать (в зависимости от условий трения) $\pm(50\dots60)\%$ и более.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Физический энциклопедический словарь*. – М. : Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
2. *Encyclopedia of Tribology* / ed. by Q. Jane Wang, Yip-Wah Chung. Springer, 2013. – In 6 volumes. – 4139 p.
3. Журавлев, В. Ф. 500 лет истории закона сухого трения / В. Ф. Журавлев // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2014. – № 2. – С. 21–31.
4. Леонардо да Винчи. *Избранные естественно-научные произведения*. – М. : Изд-во АН СССР, 1955. – 1028 с.
5. Amontons M. *De la reistance causee dans les machines*. Mem. l'Acad. Roy., 1699, pp. 206–222.
6. Euler L. *Sur la diminution de la resistance du frottement*. Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a Berlin, 1748, pp. 133–148.
7. Coulomb C.A. *Theorie des machines simples*. Mem. Math. et Phys. l'Acad. Sci., 1785, vol. 10, pp. 161–331.
8. Сосновский, Л. А. *Механика износоусталостного повреждения* / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
9. Щербаков, С. С. *Механика трибофатических систем* / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 407 с.
10. Сосновский, Л. А. *Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика)* / Л. А. Сосновский, В. Т. Трощенко, Н. А. Махутов, Гао Ван-Чжэн, А. В. Богданович, С. С. Щербаков; под науч. ред. Л. А. Сосновского. – Гомель–Киев–Москва–Ухань, 2001. – 170 с.
11. Сосновский, Л. А. *Трение в трибофатической системе* / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков, В. В. Комиссаров // Тр. VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г., Минск (Беларусь) / Редкол.: М. А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. – Т. 1. – С. 361–373.
12. Щербаков, С. С. *Изменение силы и коэффициента трения при действии внеконтактной нагрузки (теоретический анализ)* / С. С. Щербаков // Вестник БелГУТа : Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 110–115.
13. *Таблицы коэффициентов трения* (<https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/Frication/>).
14. Sosnovskiy, L. A. *Methods and Main Results of Tribo-Fatigue Tests* / L. A. Sosnovskiy, A. V. Bogdanovich, O. M. Yelovoy, S. A. Tyurin, V. V. Komissarov, S. S. Sherbakov // *International Journal of Fatigue*. – 2014. – V. 66. – P. 207–219.
15. Frycz, M. *The friction force and friction coefficient in the journal sliding bearing ferrofluid lubricated with different concentrations of magnetic particles* / M. Frycz, A. Miszczak // *Journal of KONES Powertrain and Transport*. – 2011. – Vol. 18. – № 4. – P. 113–120.
16. Крагельский, И. В. *Основы расчетов на трение и износ* / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 528 с.
17. Шарай, В. Т. *Комплексное исследование износа и усталости у сталей* / В. Т. Шарай. – Киев: Изд-во техн. лит. УССР, 1959. – 32 с.