

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

¹Нестерович А. В.

¹ УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Результаты, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [1–4]. Исследования осесимметричного деформирования слоистых упругопластических систем при циклических нагрузках проведены в работах [5–8]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое осесимметричное деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [9–14]. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию круговой однослойной пластины приведены в статье [15].

Здесь получена система дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении.

Постановка краевой задачи в усилиях. Принимаются кинематические гипотезы основанные на гипотезе ломаной нормали: для внешних несжимаемых по толщине слоев выполняются гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатными осями величины $\psi_r(r, \varphi)$, $\psi_\varphi(r, \varphi)$.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок 1). Срединная плоскость пластины принимается за координатную, ось z направлена ей перпендикулярно вверх. Считаем, что к верхней плоскости пластины приложена непрерывно распределенная нагрузка, дающая проекции на оси координат: $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$, $q(r, \varphi)$. В силу несимметричности нагрузки в слоях пластины, присутствуют тангенциальные $u_\varphi^{(k)}$ и радиальные перемещения $u_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) – номер слоя.

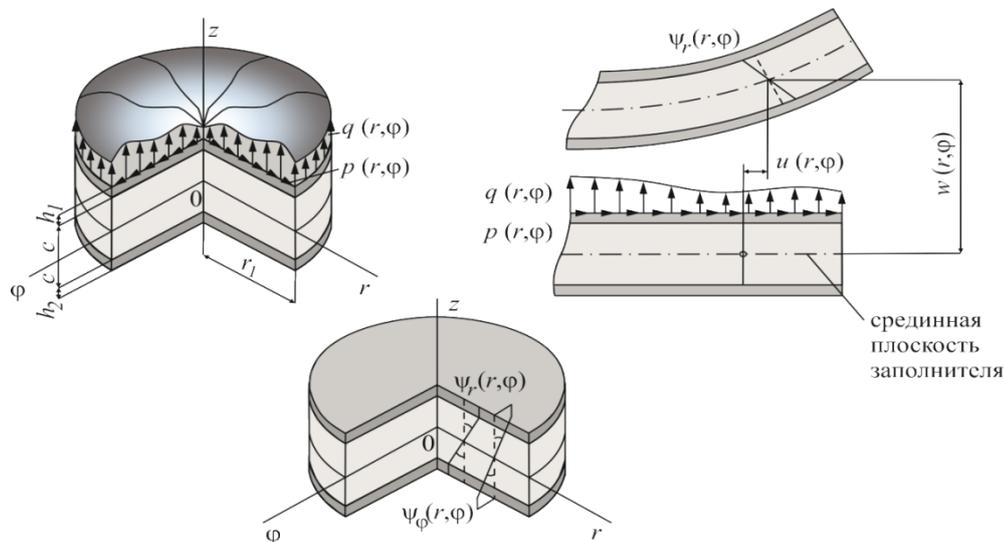


Рис. 1. Схема неосесимметричного нагружения и деформирования круговой пластины

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r'z}^{(3)} + w_r = \Psi_r, \quad 2\varepsilon_{\varphi z}^{(3)} = u_{\varphi'z}^{(3)} + \frac{1}{r} w_{\varphi} = \Psi_{\varphi},$$

после интегрирования получим выражения радиальных и тангенциальных перемещений в слоях через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u_r + c\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(1)} &= u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u_r + z\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(3)} &= u_{\varphi} + z\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u_r - c\Psi_r - zw_r, & u_{\varphi}^{(2)} &= u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi}, & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $(u_r + c\Psi_r)$, $(u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi})$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформирования заполнителя, для второго несущего слоя данное смещение будет $(u_r - c\Psi_r)$, $(u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi})$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} &= u_{r'r} + c\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} + c\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r + c\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, & \varepsilon_{\varphi z}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_{rr}^{(3)} &= u_{r'r} + z\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} + z\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r + z\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2} \Psi_r, & \varepsilon_{\varphi z}^{(3)} &= \frac{1}{2} \Psi_{\varphi}, \\ \varepsilon_{rr}^{(2)} &= u_{r'r} - c\Psi_{r'r} - zw_{rr}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{r} \left(u_{\varphi'\varphi} - c\Psi_{\varphi'\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi\varphi} + u_r - c\Psi_r - zw_r \right), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, & \varepsilon_{\varphi z}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} + c\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} + c\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} + c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} + z\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} + z\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} + z\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(u_{r'\varphi} - c\Psi_{r'\varphi} - zw_{r\varphi} \right) + u_{\varphi'r} - c\Psi_{\varphi'r} + \frac{z}{r^2} w_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi r} - \frac{1}{r} \left(u_{\varphi} - c\Psi_{\varphi} - \frac{z}{r} w_{\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz, & M_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} z dz, \\ Q_r &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{rz}^{(k)} dz, & Q_{\varphi} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\varphi z}^{(k)} dz, \\ H_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta}^{(3)} + c \left(T_{\alpha\beta}^{(1)} - T_{\alpha\beta}^{(2)} \right), & (\alpha, \beta = r, \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta W = \delta A,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация работы внешних сил ($dS = r dr d\varphi$); δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Считаем, что к наружной поверхности верхнего несущего слоя приложена неосесимметричная распределенная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $p_r(r, \varphi)$, $p_{\varphi}(r, \varphi)$, $q(r, \varphi)$. На контуре пластины заданы силы и моменты T_r^0 , Q^0 , M_r^0 , H_r^0 . Вариации работы этих нагрузок следующие:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p_r\delta u_r + p_\varphi\delta u_\varphi) r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0\delta u + M_r^0\delta w_r + H_r^0\delta\psi + Q^0\delta w) d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{rr}^{(k)}\delta\varepsilon_{rr}^{(k)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\delta\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 2\sigma_{r\varphi}^{(k)}\delta\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) dz + \int_{-c}^c (\sigma_{rz}^{(3)}\delta\psi_r + \sigma_{\varphi z}^{(3)}\delta\psi_\varphi) dz \right] r dr d\varphi. \quad (5)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций (2); S – координатная плоскость.

После необходимых преобразований с учетом (3), уравнения равновесия рассматриваемой пластины в усилиях получены в виде

$$\begin{aligned} T_{rr'r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) &= -p_r, \\ T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) &= -p_\varphi, \\ rH_{rr'r} + H_{rr} + H_{r\varphi'\varphi} - H_{\varphi\varphi} + rQ_r &= 0, \\ rH_{r\varphi'r} + 2H_{r\varphi} + H_{\varphi\varphi'\varphi} - rQ_\varphi &= 0, \\ M_{rr'rr} + \frac{1}{r}(2M_{rr'r} + 2M_{r\varphi'r\varphi} - M_{\varphi\varphi'r}) + \frac{1}{r^2}(M_{\varphi\varphi'\varphi\varphi} + 2M_{r\varphi'\varphi}) &= -q. \end{aligned} \quad (6)$$

Постановка краевой задачи в перемещениях. Принимается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости в девиаторно-сферической форме

$$s_{\alpha\beta} = 2G_k\vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad \sigma^k = K_k\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon, \quad (7)$$

где $s_{\alpha\beta}, \vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; σ, ε – сферические части этих тензоров; G, K – модули сдвига и объемной деформации.

С помощью соотношений (2), (3), (7) внутренние усилия, входящие в систему (6), выражены через пять искомых функций $u_r = u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi)$, $\psi_r = \psi_r(r, \varphi)$, $\psi_\varphi = \psi_\varphi(r, \varphi)$, $w = w(r, \varphi)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \sum_{k=1}^3 h_k \left[K_k^+ u_{r'r} + \frac{1}{r} K_k^- (u_{\varphi'\varphi} + u_r) \right] + c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} (h_1 K_1^- - h_2 K_2^-) (\psi_r + \psi_{\varphi'\varphi}) - \\ &\quad - \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) w_{,rr} - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}), \\ T_{\varphi\varphi} &= \sum_{k=1}^3 h_k \left[K_k^- u_{r'r} + \frac{1}{r} K_k^+ (u_{\varphi'\varphi} + u_r) \right] + c(h_1 K_1^- - h_2 K_2^-) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} (h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) (\psi_r + \psi_{\varphi'\varphi}) - \\ &\quad - \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) w_{,rr} - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}), \\ T_{r\varphi} &= \sum_{k=1}^3 \frac{h_k G_k}{r} (u_{r'\varphi} + r u_{\varphi'r} - u_\varphi) + \frac{c}{r} (h_1 G_1 - h_2 G_2) (\psi_{r'\varphi} + r \psi_{\varphi'r} - \psi_\varphi) - \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 \right) (r \psi_{,r\varphi} - w_{,\varphi}), \\ M_{rr} &= \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) u_{r'r} + \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) (u_{\varphi'\varphi} + u_r) + \\ &\quad + c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) \psi_{r'r} + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\Psi_r + \Psi_{\varphi,\varphi}) - \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
M_{\varphi\varphi} = & \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- \right) u_{,r,r} + \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ \right) (u_{\varphi,\varphi} + u_r) + \\
& + c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) \Psi_{r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) \cdot \\
& \cdot (\Psi_r + \Psi_{\varphi,\varphi}) - \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{1}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
M_{r\varphi} = & \frac{1}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 \right) (u_{r,\varphi} + ru_{\varphi,r} - u_\varphi) + \frac{c}{r} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} c^2 G_3 \right) (\Psi_{r,\varphi} + r\Psi_{\varphi,r} - \Psi_\varphi) - \frac{2}{r^2} \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) G_1 + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) G_2 + \frac{2}{3} c^3 G_3 \right) (rw_{,r\varphi} - w_{\varphi}), \\
H_{rr} = & c \left(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+ \right) u_{,r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 K_1^- - h_2 K_2^- \right) (u_{\varphi,\varphi} + u_r) + c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right) \Psi_{r,r} + \\
& + \frac{c^2}{r} \left(h_1 K_1^- + h_2 K_2^- + \frac{2}{3} c K_3^- \right) (\Psi_{\varphi,\varphi} + \Psi_r) - c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
H_{\varphi\varphi} = & c \left(h_1 K_1^- - h_2 K_2^- \right) u_{,r,r} + \frac{c}{r} \left(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+ \right) (u_{\varphi,\varphi} + u_r) + c^2 \left(h_1 K_1^- + h_2 K_2^- + \frac{2}{3} c K_3^- \right) \Psi_{r,r} + \\
& + \frac{c^2}{r} \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right) (\Psi_{\varphi,\varphi} + \Psi_r) - c \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^- + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right) w_{,rr} - \\
& - \frac{c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right) (rw_{,r} + w_{\varphi\varphi}), \\
H_{r\varphi} = & \frac{c}{r} \left(h_1 G_1 - h_2 G_2 \right) (u_{r,\varphi} + ru_{\varphi,r} - u_\varphi) + \frac{c^2}{r} \left(h_1 G_1 + h_2 G_2 + \frac{2}{3} c G_3 \right) (\Psi_{r,\varphi} + r\Psi_{\varphi,r} - \Psi_\varphi) - \\
& - \frac{2c}{r^2} \left(h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) G_1 + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) G_2 + \frac{2}{3} c^2 G_3 \right) (rw_{,r\varphi} - w_{\varphi}), \\
Q_r = & h_3 G_3 \Psi_r, \quad Q_\varphi = h_3 G_3 \Psi_\varphi, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k. \tag{8}
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия в перемещениях рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости получим из системы (6), с помощью соотношений (8):

$$\begin{aligned}
L_2 (a_1 u_r + a_3 \Psi_r - a_7 w_{,r}) + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{\varphi,\varphi} + \frac{a_{13}}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_{14}}{r^2} \Psi_{r,\varphi\varphi} - \frac{a_3 + a_{14}}{r^2} \Psi_{\varphi,\varphi} + \\
+ \frac{a_4 + a_{14}}{r} \Psi_{\varphi,\varphi r} + \left(\frac{a_7}{r} + \frac{a_8}{r^2} + \frac{2a_{16}}{r^3} \right) w_{\varphi\varphi} - \frac{a_8 + 2a_{16}}{r^2} w_{r\varphi\varphi} = -p_r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L_2(a_{14}\Psi_\varphi) + \frac{a_{13}}{r^2}(r^2u_{\varphi'rr} + 2u_{\varphi'r} - 2u_\varphi) + \frac{a_1}{r^2}u_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_{13}}{r}u_{r'\varphi r} + \frac{a_1 + 2a_{13}}{r^2}u_{r'\varphi} + \frac{a_4 + a_{14}}{r}\Psi_{r'\varphi r} + \\
& \quad + \frac{a_3 + a_{14}}{r^2}\Psi_{r'\varphi} + \frac{a_3}{r^2}\Psi_{\varphi'\varphi\varphi} - \frac{a_7}{r^3}(rw_{r\varphi} + w_{\varphi\varphi\varphi}) - \frac{a_8 + 2a_{16}}{r}w_{r\varphi r} = -p_\varphi, \\
& rL_2(a_3u_r + a_5\Psi_r - a_9w_{r'}) + (a_4 + a_{14})u_{\varphi'\varphi r} + \frac{a_{14}}{r}u_{r'\varphi\varphi} - \frac{a_3 + a_{14}}{r}u_{\varphi'\varphi} + \frac{a_{15}}{r}\Psi_{r'\varphi\varphi} - \frac{a_5 + a_{15}}{r}\Psi_{\varphi'\varphi} + \\
& \quad + (a_6 + a_{15})\Psi_{\varphi'\varphi r} - \frac{a_{10} + 2a_{17}}{r}(rw_{r\varphi\varphi} - w_{\varphi\varphi}) + \frac{a_9}{r^2}w_{\varphi\varphi} - rh_3G_3\Psi_r = 0, \\
& rL_2(a_{15}\Psi_\varphi) + (a_4 + a_{14})u_{r'\varphi r} + ra_{14}u_{\varphi'rr} + \frac{a_3}{r}(u_{r'\varphi} + u_{\varphi'\varphi\varphi}) + (a_6 + a_{15})\Psi_{r'\varphi r} + \frac{a_5}{r}\Psi_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_5 + a_{15}}{r}\Psi_{r'\varphi} - \\
& \quad - (a_{10} + 2a_{17})w_{r\varphi r} - \frac{a_9}{r^2}(rw_{r\varphi} + w_{\varphi\varphi\varphi}) - rh_3G_3\Psi_\varphi = 0, \\
& L_3(a_7u_r + a_9\Psi_r) - \frac{1}{r}L_3(a_{11}w_r) + \frac{a_7}{r^3}(u_{\varphi'\varphi\varphi\varphi} - ru_{\varphi'r\varphi} + u_{r'\varphi\varphi} + u_{\varphi'\varphi}) + \frac{a_8 + 2a_{16}}{r^2}(ru_{\varphi'\varphi rr} + u_{r'r\varphi\varphi}) + \\
& \quad + \frac{a_9}{r^3}(\Psi_{\varphi'\varphi\varphi\varphi} - r\Psi_{\varphi'r\varphi} + \Psi_{r'\varphi\varphi} + \Psi_{\varphi'\varphi}) + \frac{a_{10} + 2a_{17}}{r^2}(r\Psi_{\varphi'\varphi rr} + \Psi_{r'r\varphi\varphi}) - \frac{a_{11}}{r^4}w_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + \frac{2a_{12}}{r^3}(w_{\varphi\varphi r} - rw_{rr\varphi\varphi}) - \\
& \quad - \frac{2(a_{12} + 2a_{18})}{r^4}w_{\varphi\varphi} - \frac{4a_{18}}{r^3}(rw_{rr\varphi\varphi} - 2w_{r\varphi\varphi} + w_{r\varphi}) = 0, \tag{9}
\end{aligned}$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев; $L_2(g)$, $L_3(g)$ – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Задача отыскания перемещений замыкается присоединением к уравнениям равновесия (9) силовых или кинематических граничных условий. В случае жесткой заделки контура пластины ($r = r_1$) должны выполняться условия

$$u_r = u_\varphi = w = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\varphi = 0, \quad w_r = 0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u_r = u_\varphi = w = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\varphi = 0, \quad M_{rr} = 0.$$

Таким образом, перемещения в упругой круговой трехслойной пластине при неосесимметричном деформировании должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (9) и граничным условиям (10).

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2003. – Vol. 35, – № 4. – P. 346-352.
2. Starovoitov, É. I. Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 41. No. 7. – Pp. 809-816.
3. Starovoitov, E. I. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // *Russian Aeronautics*. – 2009. – Vol. 52. No. 2. – Pp. 151-157.

4. Starovoitov, E. I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – V. 46. – № 1. – P. 86-93.
5. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 1980. – № 2. – С. 92-96.
6. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 409-416.
7. Москвитин, В. В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – № 1. – С. 116-121.
8. Gorshkov, A. G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // *Mechanics of Solids*. – 2001. – Vol.36, No.1. – P. 64-69.
9. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37-40.
10. Starovoitov, É. I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol.43, No.4. – Pp. 451-459.
11. Старовойтов, Э. И. Динамика круглых трехслойных пластин на упругом основании при осесимметричном нагружении / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Проблемы прочности*. – 2010. – №3. – С.113-124
12. Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91-98.
13. Starovoitov, É. I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – № 9. – P. 1032-1040.
14. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сборник. Вып. 28*. – Мн. : 2013. – С. 23-26.
15. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2 (27). – С. 54-61.