УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН СКАЧКОВ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ К СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЯМ

[1]Миронов Д.Н., [1]Чигарев В.А., [2]Гончаренко В.П.

[1] УО «Белорусский национальный технический университет», Минск
[2] УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

При импульсном нагружении в термоупругих средах (оболочках) возникают внутренние напряжения, следствием которых являются волновые явления. С данными явлениями можно столкнуться в случае возникновения в телах температурных и динамических нагрузок.

Условно волновые явления можно разделим на три группы: плоские, сферические и цилиндрические.

Плоские волны. Рассмотрим одномерную задачу распространения плоской волны в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами e_1, e_2, e_3 для однородных изотропных несвязанных термоупругих сред с бесконечной скоростью распространения тепла или упругих и вязкоупругих сред. Если продольное перемещение $u = u(x_i, t)$, то такой одномерный процесс будем называть плоским движением в направлении e_i. Примем такое движение среды за аналог волнового процессом. В двумерной системе координат плоская волна будет распространяться в направлении e_i.

Для описания движения однородной изотропной несвязанной термоупругой среды будем использовать уравнение для распространения начальных перемещений среды (1), при $M \equiv 0$ полагая, что изменение температуры υ задано [1]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{p} \iiint\limits_{G} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^{p-j}\mathbf{G}^i}{\partial t^{p-j}}(\mathbf{x}, t;\ \boldsymbol{\xi})\, d_{ij}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \qquad (1)$$

где G - модуль сдвига, ρ - плотность сплошной среды, ξ - радиус-вектор по ортам.

Введем безразмерные параметры (они обозначены штрихом):

$$x_i' = \frac{x_i}{L}, \quad u_i' = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_* t}{L}, \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{T_0},$$

$$F_i' = \frac{F_i L}{c_1^2} - \Lambda' \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_i'}, \quad \sigma_{ij}' = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \Lambda' = \frac{\Lambda T_0}{\rho c_1^2}, \qquad (2)$$

$$\gamma_m = \frac{c_*}{c_m} \quad (m = 1{,}2), \quad \eta = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{2}{1-\varkappa}}\,.$$

Здесь u_i, σ_{ij}, F_i и F_i- $Ad\upsilon/dx_i$ - компоненты вектора перемещения, тензора напряжений, вектора массовых сил и вектора фиктивных массовых сил; c_m - скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде; λ, μ, ν, ρ, A - параметры Ламе, коэффициент Пуассона, плотность и коэффициент температурного расширения среды; T_0 - температура среды в начальном состоянии; c_* - параметр, имеющий размерность скорости; L - характерный линейный размер.

Тогда уравнения движения приобретают следующий вид:

$$\gamma_1^2\gamma_2^2\ddot{u}_\alpha = \gamma_2^2 u_{\alpha,\alpha\alpha} + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)(u_{\beta,\alpha\beta} + u_{\gamma,\alpha\gamma}) + \\ + \gamma_1^2(u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\alpha,\gamma\gamma}) + \gamma_2^2 F_\alpha \qquad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3). \tag{3}$$

При этом физические соотношения запишутся так:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha} + \varkappa(u_{\beta,\beta} + u_{\gamma,\gamma}) - \Lambda\vartheta, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\eta^2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3). \tag{4}$$

Опишем характер волнового движения упругой среды с плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси Ox_1. В этом случае соотношения

$$\gamma_1^2\ddot{u}_1 = u_{1,11} + F_1, \quad \gamma_2^2\ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} + \eta^2 F_\alpha \; (\alpha = 2,3); \tag{5}$$

$$\sigma_{11} = u_{1,1} - \Lambda\vartheta, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} \equiv 0, \quad \sigma_{12} = \frac{u_{2,1}}{\eta^2}, \quad \sigma_{13} = \frac{u_{3,1}}{\eta^2}. \tag{6}$$

при отсутствии массовых сил ($F_\alpha = 0$)

$$\gamma_1^2\ddot{u}_1 = u_{1,11}, \quad \gamma_2^2\ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} \quad (\alpha = 2,3). \tag{7}$$

Отметим, что уравнения в системе независимы. Каждое из них является одномерным волновым уравнением и совпадает с известным уравнением колебания струны [2]. Рассмотрим два важных частных случая системы уравнений (7), приводящие к двум типам волн в упругой среде.

Плоская продольная волна. Пусть $u_2 = u_3 \equiv 0$. Тогда в системе (7) остается одно нетривиальное уравнение

$$\gamma_1^2\ddot{u}_1 = u_{1,11}, \tag{8}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_1(x_1,\tau) = F(\tau + \gamma_1 x_1) + G(\tau - \gamma_1 x_1), \tag{9}$$

где $F(\xi)$, $G(\xi)$ - произвольные функции класса $C^2(R)$.

Плоская поперечная волна. Пусть $u_1 \equiv 0$. Тогда система (7) сводится к двум независимым волновым уравнениям

$$\gamma_2^2\ddot{u}_\alpha = u_{\alpha,11} \quad (\alpha = 2,3). \tag{10}$$

Решение каждого из них имеет вид, аналогичный:

$$u_\alpha(x_1,\tau) = F_\alpha(\tau + \gamma_2 x_1) + G_\alpha(\tau - \gamma_2 x_1). \tag{11}$$

Как следует из (9), частицы среды движутся со скоростью $1/\gamma_2$ в плоскости, перпендикулярной оси Ox_1.

Сферическая волна. Для математического описания сферических волн на примере изотермических или адиабатических процессов в однородных изотропных упругих средах рассмотрим одномерную задачу в сферической системе координат r, β, α с ортами e_r, e_β, e_α и центром O. Если $u = u(r, t)$, то такая волна будет сферической.

В предположении о зависимости искомых функций только от одной пространственной координаты - радиуса - уравнения движения в перемещениях имеют вид ($\upsilon \equiv 0$, $M \equiv 0$):

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\left(\Delta_{3r}u_r - \frac{2u_r}{r^2}\right) + \\ + \mu\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial u_\beta}{\partial r} - (\lambda+3\mu)\frac{u_\beta}{r}\right]\frac{\operatorname{ctg}\beta}{r} + \rho F_r, \tag{12}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} = \mu\left(\Delta_{3r}u_\beta - \frac{u_\beta}{r^2\sin^2\beta}\right) + \rho F_\beta,$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \mu\left(\Delta_{3r}u_\alpha - \frac{u_\alpha}{r^2\sin^2\beta}\right) + \rho F_\alpha,$$

Где

$$\Delta_{3r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что для обеспечения независимости искомых функций от угла β необходимо положить

$$u_\beta = u_\alpha \equiv 0, \quad F_\beta = F_\alpha \equiv 0, \quad F_r = F(r,t). \tag{14}$$

Положим, что $\{i, j\} = \{r, \beta, \alpha\}$, будем использовать следующие безразмерные параметры:

$$\gamma = \gamma_1, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \Phi_1' = \frac{\Phi_1}{L}, \tag{15}$$

где φ и Φ_1 - скалярные потенциалы вектора перемещений и массовых сил.

При этом уравнения движения (12) сводятся к одному уравнению относительно ненулевой компоненты вектора перемещения $u = u_r$ (точки обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ):

$$\gamma^2\ddot{u} = \Delta u_{3r} - \frac{2u}{r^2} + F. \tag{16}$$

А компоненты напряженно-деформированного состояния среды определяются так (запятой обозначена производная по координате r):

$$\varepsilon_{rr} = u_{,r}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\beta} = \varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_{\beta\alpha} = 0, \quad \theta = u_{,r} + \frac{2u}{r};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = \varkappa u_{,r} + (1+\varkappa)\frac{u}{r} = \varkappa\sigma_{rr} + (1-\varkappa)(1+2\varkappa)\frac{u}{r}, \tag{17}$$

$$\sigma_{rr} = u_{,r} + \frac{2\varkappa}{r}u, \quad \sigma_{r\beta} = \sigma_{r\alpha} = \sigma_{\beta\alpha} \equiv 0.$$

Поскольку напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ - линейная комбинация σ_{rr} и u, то для решения системы достаточно определять только эти две последние величины.

Цилиндрическая волна. Одномерную задачу для цилиндрических волн рассмотрим в цилиндрической системе координат r, α, z с ортами e_r, e_α, e_z и центром O для изотермических или адиабатических процессов в однородных изотропных упругих средах. Параллельно с цилиндрической будем использовать прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ $(x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3)$ с ортами e_1, e_2, e_3. Так же будем использовать здесь безразмерные параметры $\{i, j\} = \{r, \alpha, z\}$ и $x_3 = z$.

В предположении о зависимости искомых функций и внешних нагрузок только от одной пространственной координаты - радиуса, безразмерные соотношения Коши, физический закон и уравнения движения в перемещениях ($\upsilon \equiv 0,\ M \equiv 0$) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,r} - \frac{u_\alpha}{r}\right),$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}u_{z,r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\alpha z} = 0, \quad \theta = u_{r,r} + \frac{u_r}{r}; \tag{18}$$

$$\sigma_{rr} = u_{r,r} + \frac{\varkappa}{r}u_r, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \varkappa u_{r,r} + \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{zz} = \varkappa\left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}\right),$$
$$\sigma_{r\alpha} = \frac{1-\varkappa}{2}\left(u_{\alpha,r} + \frac{u_\alpha}{r}\right), \quad \sigma_{rz} = \frac{1-\varkappa}{2}u_{z,r}, \quad \sigma_{\alpha z} = 0; \tag{19}$$

$$\gamma_1^2\ddot{u}_r = \Delta_{2r}u_r - \frac{u_r}{r^2} + F_r, \tag{20}$$

$$\gamma_2^2\ddot{u}_\alpha = \Delta_{2r}u_\alpha - \frac{u_\alpha}{r^2} + F_\alpha, \tag{21}$$

$$\gamma_2^2\ddot{u}_z = \Delta_{2r}u_z + F_z, \tag{22}$$

Где

$$\Delta_{2r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{23}$$

Уравнения (20-22) являются гиперболическими. Кроме того, аналогично плоским волнам и, в отличие от сферических волн, они независимы. Их можно записать в виде одного уравнения

$$\gamma^2\ddot{u} = \Delta_{2r}u - \frac{n^2}{r^2}u + F \quad (n = 0, 1), \tag{24}$$

где $n = 0$ соответствует (22), а $n = 1$ – (20) и (21).

Иногда вместо уравнений (20-22) удобнее использовать уравнения движения относительно скалярного потенциала φ и ненулевых компонентов ψ_α, ψ_z векторного потенциала перемещений, безразмерная форма которых такова

$$\gamma_1^2\ddot{\varphi} = \Delta\varphi + \Phi_1; \tag{25}$$

$$\gamma_2^2\ddot{\psi}_\alpha = \Delta\psi_\alpha - \frac{\psi_\alpha}{r^2} + \Phi_{2\alpha}; \tag{26}$$

$$\gamma_2^2\ddot{\psi}_z = \Delta\psi_z + \Phi_{2z}, \tag{27}$$

где Φ_1, $\Phi_{2\alpha}$ и Φ_{2z} - потенциалы поля внешних сил. При этом перемещения связаны с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad u_\alpha = \frac{\partial\psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial r} + \frac{\psi_\alpha}{r}. \tag{28}$$

Уравнения (25-27) также независимы, и их можно записать одним уравнением

$$\gamma^2\ddot{\psi} = \Delta\psi - \frac{m^2}{r^2}\psi + \Phi, \tag{29}$$

где $m = 0$ соответствует (25) и (27), а $m = 1$ – (26).

Изучение структуры цилиндрических волн удобнее проводить, используя уравнение (29) при отсутствии массовых сил ($F \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$).

Цилиндрическая волна расширения-сжатия. Цилиндрическая P-волна соответствует уравнениям (20) и (25):

$$
\begin{gathered}
u = u_r \neq 0, \quad \psi = \varphi \neq 0, \quad u_\alpha = u_z = \psi_\alpha = \psi_z \equiv 0, \\
\theta \neq 0, \quad \lambda_{ij} \equiv 0, \quad \gamma = \gamma_1, \quad n = 1, \quad m = 0, \\
u = \psi_{,r}, \quad \sigma_{r\alpha} = \sigma_{rz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{rr} = u_{,r} + \frac{\varkappa}{r} u, \\
\sigma_{\alpha\alpha} = \varkappa\sigma + \frac{1-\varkappa^2}{2} u, \quad \sigma_{zz} = \varkappa\left(\sigma + \frac{1-\varkappa}{2}\right) u.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Угловая цилиндрическая волна формоизменения. Угловая цилиндрическая S-волна, соответствует уравнениям (21) и (26):

$$
\begin{gathered}
u = u_\alpha \neq 0, \quad \psi = \psi_z \neq 0, \quad u_r = u_z = \varphi = \psi_\alpha \equiv 0, \\
\theta \equiv 0, \quad \lambda_{ij} \neq 0, \quad \gamma = \gamma_2, \quad n = m = 1, \quad u = \psi_{,r}, \\
\sigma_{rr} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{r\alpha} = \frac{1-\varkappa}{2}\left(u_{,r} + \frac{u}{r}\right).
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Осевая цилиндрическая волна формоизменения. Осевая цилиндрическая S-волна, соответствует уравнениям (22) и (27):

$$
\begin{gathered}
u = u_z \neq 0, \quad \psi = \psi_\alpha \neq 0, \quad u_r = u_\alpha = \varphi = \psi_z \equiv 0, \\
\theta \equiv 0, \quad \lambda_{ij} \neq 0, \quad \gamma = \gamma_2, \quad n = m = 0, \quad u = \psi_{,r} + \frac{\psi}{r}, \\
\sigma_{rr} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{r\alpha} = \sigma_{zz} \equiv 0, \quad \sigma = \sigma_{rz} = \frac{1-\varkappa}{2} u_{,r}.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Поскольку для каждого типа волн независимым является только одно напряжение σ, то во всех случаях будет определяться только оно.

Для построения общего решения однородного уравнения (29) применяем к нему преобразование Лапласа по времени. В результате получаем

$$\gamma^2 s^2 \psi^L(r,s) = \Delta_{2r}\psi^L(r,s) - \frac{m^2}{r^2}\psi^L(r,s). \tag{33}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид [3]:

$$\psi^L(r,s) = F^L(s) I_m(\gamma r s) + G^L(s) K_m(\gamma r s), \tag{34}$$

где $I_m(z)$ и $K_m(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка m, $F^L(s)$ и $G^L(s)$ - произвольные функции.

В работе получены зависимости для определения свойств плоской, сферической и цилиндрических волн от различных параметров среды и начальных параметров импульса. Данные зависимости позволяют описать напряженно-деформированное состояние упругой среды и спрогнозировать дальнейшее поведение волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горшков, А. Г. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов / А. Г. Горшков, А. Л. Медведский // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 39 с.*
2. *Тихонов А.П., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие / А.П. Тихонов, А.А. Самарский // М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. - 798 с.*
3. *Стиган, И.Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица / И. Стиган – М.: Наука, 1979. - 830 с.*