УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

[1] Козел А.Г.

[1] Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Трёхслойные конструкции повсеместно используются в ответственных агрегатах летательных аппаратов всех классов: корпусах пассажирских и военных самолётов, вертолётов, ракет; двигателях различных типов. Так же актуально применение подобных элементов конструкций в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности. Слоистые конструкции при относительно малом весе, способны обеспечить не только хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, заданные показатели прочности и жёсткость, но и противостоять ряду других негативных воздействий.

Изотермическое деформирование физически нелинейных слоистых элементов конструкций исследовалось в работах [1–4]. Статьи [5–7] посвящены деформированию трехслойных стержней и пластин в температурном и радиационном полях. Изгиб неоднородных конструкций, связанных с упругим основанием Винклера, рассмотрен в работах [8–9].

Осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [10–15].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение в перемещениях задачи об изгибе трёхслойной круговой пластины с физически нелинейными слоями, связанной с упругим основанием Пастернака.

1. Постановка задачи

Рассматривается круговая трёхслойная пластина с лёгким заполнителем на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной плоскости пластины. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ; тангенциальные перемещения линейно распределены по толщине; не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$.

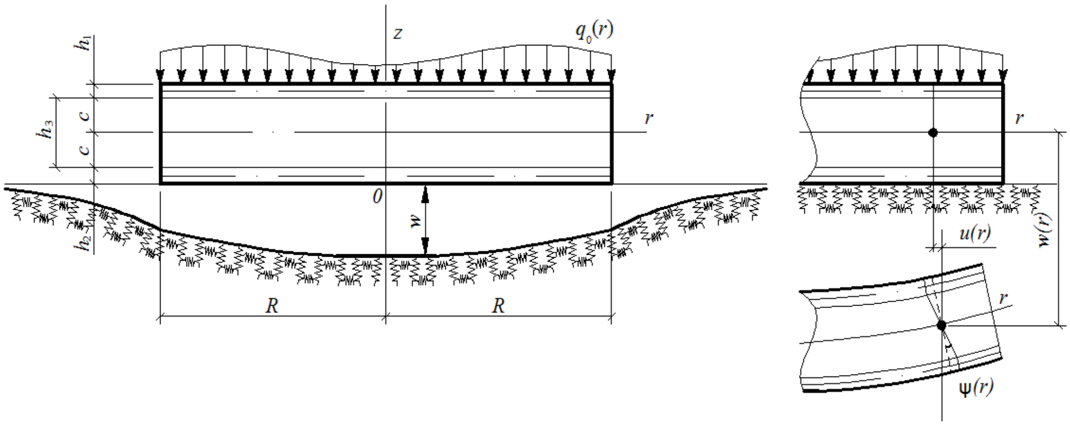

Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины на упругом основании

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ: $q_0 = q_0(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_R, которую принимаем в соответствии с моделью Пастернака, согласно которой [11]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \qquad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} r}.$$

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k=1,2,3 – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ, т. е. $w(r)$, $\psi(r)$, $u(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k-го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w,_r = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях u_r^k через искомые функции

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw,_r \qquad (c \le z \le c + h_1),$$
$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw,_r \qquad (-c \le z \le c),$$
$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r \qquad (-c - h_2 \le z \le -c), \qquad (2)$$

где $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u - c\psi)$, z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - zw,_{rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - zw,_{rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - zw,_{rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw,_r), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \tfrac{1}{2}\psi.$$

Предполагается, что материалы несущих слоев в процессе деформирования проявляют упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\text{э}_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)},$$
$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3\text{э}_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), \quad (k = 1, 2, 3, \ \alpha = r, \varphi), \qquad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\text{э}_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объёмной деформации k-го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности материалов несущих слоев, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k-м слое (k=1, 2), $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоёв; $s_{rz}^{(3)}$, $\text{э}_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция физической нелинейности заполнителя, причём $\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \le \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ $(\alpha = r, \varphi)$, введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz\,, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz\,,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right). \tag{4}$$

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}\,, \quad (\alpha = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3)\,,$$

$$\sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}\,, \tag{5}$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}\,, \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k Э_\alpha^{(k)}\,, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)}\,, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 Э_{rz}^{(3)}\,.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}\,, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}.$$

Величины $T_{\alpha e}^{(k)}$, $T_{\alpha\omega}^{(k)}$, $M_{\alpha e}^{(k)}$, $M_{\alpha\omega}^{(k)}$ вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$ (5). После этого обобщенные внутренние усилия будут следующими:

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\omega}^{(k)}\,, \quad M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha\omega}^{(k)}\,,$$

$$H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c\left(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}\right), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c\left(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}\right). \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины на упругом основании была получена в [18] без использования физических уравнений состояния, поэтому ее можно принять за исходную:

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0\,,$$

$$H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0\,,$$

$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -(q_0 + q_R)\,. \tag{7}$$

На контуре пластины ($r = R$) должны выполняться силовые граничные условия

$$T_r = T_r^0,\ H_r = H_r^0,\ M_r = M_r^0,\ M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0\,. \tag{8}$$

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях уравнений (7) линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (6), получим

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega\,,$$

$$H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega\,,$$

$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q_0 - q_R + q_\omega\,. \tag{9}$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий, причем нижний индекс «e» в дальнейшем опущен для удобства.

Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемое с нижним индексом «ω»:

$$p_\omega = T_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\varphi\omega},_r). \qquad (10)$$

С граничными условиями (8) поступаем аналогично:

$$T_r = T_r^1 + T_\omega, \; H_r = H_r^1 + H_\omega, \; M_r = M_r^1 + M_\omega,$$

$$M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^1 + M_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}).$$

2. Уравнения равновесия в перемещениях. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам приведенным в [14], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), с учётом (1) принимает вид:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w,_r) = p_\omega,$$

$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w,_r) = h_\omega,$$

$$\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w,_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0 + q_\omega. \qquad (11)$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 следующие

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+,$$

$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right), \quad a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right],$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3}G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \tfrac{2}{3}G_k,$$

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}, \; \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Система уравнений (11) является нелинейной, поэтому для её решения применим метод упругих решений Ильюшина. В этом случае система (11) переписывается в итерационном виде:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w,_r^{(n)}) = p_\omega^{(n\text{-}1)},$$

$$\mathrm{L}_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w,_r^{(n)}) = h_\omega^{(n\text{-}1)},$$

$$\mathrm{L}_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w,_r^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} = -q_0 + q_\omega^{(n\text{-}1)}. \qquad (12)$$

где n – номер приближения; $p_\omega^{(n\text{-}1)}$, $h_\omega^{(n\text{-}1)}$, $q_\omega^{(n\text{-}1)}$ –дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (10)

$$p_\omega^{(n\text{-}1)} = T_{r\omega}^{(n\text{-}1)},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n\text{-}1)} - T_{\varphi\omega}^{(n\text{-}1)}), \quad h_\omega^{(n\text{-}1)} = H_{r\omega}^{(n\text{-}1)},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n\text{-}1)} - H_{\varphi\omega}^{(n\text{-}1)}),$$

$$q_\omega^{(n\text{-}1)} = M_{r\omega}^{(n\text{-}1)},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n\text{-}1)},_r - M_{\varphi\omega}^{(n\text{-}1)},_r), \qquad (13)$$

где

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)}\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \text{э}_\alpha^{(k)(n-1)}\,\mathrm{d}z,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} z\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)}) \text{э}_\alpha^{(k)(n-1)} z\,\mathrm{d}z,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n\text{-}1)} = M_{\alpha\omega}^{(3)(n\text{-}1)} + c\left(T_{\alpha\omega}^{(1)(n\text{-}1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n\text{-}1)}\right).$$

Таким образом, на каждом шаге приближения мы имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками (13).

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (12) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями $u^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$. После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u^{(n)} = b_1 w,_r^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)})drdr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r},$$

$$\psi^{(n)} = b_2 w,_r^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)})drdr + C_3^{(n)} r + \frac{C_4^{(n)}}{r},$$

$$\mathrm{L}_3(w,_r^{(n)}) - t_{f1}\Delta w^{(n)} + \kappa^4 w^{(n)} = q_0 + f_\omega^{(n-1)}, \qquad (14)$$

где $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$ – константы интегрирования на n-м шаге;

$$t_{f1} = t_f D,\ \kappa^4 = \kappa_0 D,\ q = q_0 D,\ b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2},\ b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$f_\omega^{(n-1)} = -Dq_\omega^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r}(rp_\omega^{(n-1)}),_r + D_2 \frac{1}{r}(rh_\omega^{(n-1)}),_r,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},\ D_1 = \frac{a_1(a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_2 = \frac{a_1(a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Интегралы здесь и далее определённые с переменным верхним пределом, т.е.

$$\int f(r)\,\mathrm{d}r \equiv \int_0^r f(r)\,\mathrm{d}r.$$

Третье уравнение системы (15) в развернутом виде следующее:

$$w,_{rrrr}^{(n)} + \frac{2}{r}w,_{rrr}^{(n)} - \frac{1}{r^2}w,_{rr}^{(n)} + \frac{1}{r^3}w,_r^{(n)} - t_{f1}(w,_{rr}^{(n)} + \frac{1}{r}w,_r^{(n)}) + \kappa^4 w^{(n)} = q_0 + f_\omega^{(n-1)}. \qquad (15)$$

Его решение получим по методике, примененной при решении задачи теории упругости [13], тогда рекуррентный прогиб будет

$$w^{(n)} = C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_6^{(n)} H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + C_8^{(n)} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p^{(n)}(r), \qquad (16)$$

где $J_0(\sqrt{a}\kappa r)$, $J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}\kappa r$ и $\sqrt{\bar{a}}\kappa r$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

$w_p^{(n)}(r)$ – частное решение уравнения (14).

Для сплошных круговых пластин, исходя из ограниченности прогиба в начале координат, в решении (16) следует положить $C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = 0$.

Рекуррентное решение задачи об изгибе круговой упругопластической трехслойной пластины на упругом основании, с учетом ограниченности перемещений в центре пластины $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = 0$, принимает вид

$$w^{(n)} = C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p^{(n)}(r),$$

$$u^{(n)} = b_1 w,_r^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)})drdr + C_1^{(n)} r,$$

$$\psi^{(n)} = b_2 w,_r^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)})drdr + C_3^{(n)} r. \qquad (17)$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_5^{(n)}$, $C_7^{(n)}$ следуют из условий закрепления пластины.

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (17) силовых (8) или кинематических граничных условий.

При *жесткой заделке контура* пластины решение (17) необходимо подставить в граничные условия

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w^{(n)},_r = 0 \text{ при } r = R.$$

В результате получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$b_1 w,_r^{(n)}(R) - \int r \int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R} + C_1^{(n)} R = 0,$$

$$b_2 w,_r^{(n)}(R) + \int r \int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R} + C_3^{(n)} R = 0,$$

$$C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a}\kappa R) + C_6^{(n)} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) + w_p^{(n)}(R) = 0,$$

$$-\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a}\kappa R) + \sqrt{\bar{a}} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R)) + w_p'^{(n)}(R) = 0. \quad (18)$$

Здесь использовано выражение производной от прогиба (17)

$$w,_r^{(n)}(R) = -\kappa(\sqrt{a} C_5^{(n)} J_1(\sqrt{a}\kappa R) + \sqrt{\bar{a}} C_7^{(n)} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R)) + w_p'^{(n)}(R),$$

где $w_p'^{(n)}(R)$ – значение на контуре производной от частного решения.

Из системы (18) следуют константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{1}{R} \int r \int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \Big|_{r=R}, \quad C_3^{(n)} = -\frac{1}{R} \int r \int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) \mathrm{d}r \, \mathrm{d}r \Big|_{r=R},$$

$$C_5^{(n)} = \frac{w_p'^{(n)}(R) J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) + \kappa\sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R) J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) - \sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R))},$$

$$C_7^{(n)} = \frac{w_p'^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a}\kappa R) + \kappa\sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R) w_p^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{\bar{a}} J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_0(\sqrt{a}\kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa R) J_1(\sqrt{a}\kappa R))}. \quad (19)$$

Таким образом, система (17) с константами интегрирования (19) дает рекуррентное решение задачи теории малых упругопластических деформаций для круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием Пастернака при произвольной осесимметричной нагрузке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980.– № 2. –С. 92–96.*
2. *Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.*
3. *Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409.*
4. *Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации (Москва). – 2001. – № 4. – С. 37–40.*
5. *Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988.– № 4. – С. 11–15.*

6. *Горшков, А. Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 79–85.*
7. *Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91-98.*
8. *Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.*
9. *Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. − 2012. − Vol. 47, № 1. − P. 111–118.*
10. *Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины. – 2017. – № 1(30). – С. 42-46.*
11. *Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2017. – № 32. – С. 235-240.*
12. *Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90-95.*
13. *Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2018. – № 33. – С. 318-323.*
14. *Козел, А.Г. Деформированное состояние трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 1; URL: http://mathmod.esrae.ru/17-60 (дата обращения: 11.06.2018).*
15. *Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций . – 2018. – Т.24. – №1. – С.392-406.*