

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТЕКАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЛОЯ В РЕБРА

<sup>1</sup>Сосенушкин Е.Н., <sup>2</sup>Кадымов В.А., <sup>1</sup>Яновская Е.А., <sup>3</sup>Архипов А.А., <sup>4</sup>Гуреева Т.В.,  
<sup>1</sup>Гусев Д.С.

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный гуманитарно-экономический университет», Москва

<sup>3</sup>ПАО "НПО "Алмаз", Москва

<sup>4</sup>Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение "Школа № 1501" Москва

В машиностроении довольно часто встречаются детали квадратной или прямоугольной формы плоские, применяемые в качестве опор и подставок, с контурным оребрением, используемых в качестве коробок или корпусных деталей, а также в виде фланцев для соединения волноводов и волноводных блоков устройств сверхвысоких частот [1], один из таких фланцев показан на рис. 1.

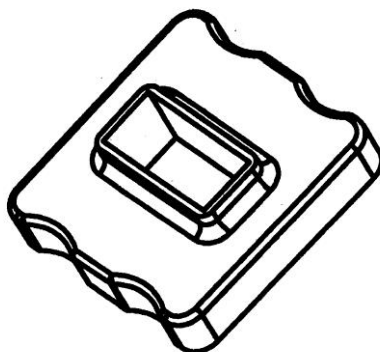


Рис. 1. Фланец для соединения волноводов

Технологией изготовления таких изделий традиционно является штамповка в холодном, полугорячем [2] и горячем [3, 4] состояниях в зависимости от механических характеристик материала фланца [5] и необходимой степени деформации при формоизменении [6].

Оценка энергосиловых параметров при деформировании перечисленных поковок проводится с помощью компьютерного моделирования, либо одним из методов приближенного расчета теории пластичности [7, 8].

При производстве некруглых поковок, имеющих ребра [9], необходимо учитывать эффект затекания металла в пазы штампа, формирующие тело ребер. Для анализа энергосиловых и кинематических параметров исследуемого технологического процесса предлагается использовать осредненную по толщине теорию течения пластического слоя в изложении А.А. Ильюшина [10]. Расчетная схема приведена на рис. 2.

Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в двусвязной области  $S(x, y)$ , где

$$S(x, y) = \bigcup_{i=1}^{m7} S_i(x, y). \quad (1)$$

Внешние области толщиной  $h_1$ :

$$S_1(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_2; \\ b_3 \leq y \leq b; \end{array} \right. S_2(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} a_3 \leq x \leq a; \\ 0 \leq y \leq b_2; \end{array} \right. S_3(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} a_2 - r_1 \leq x \leq a; \\ b_2 - r_1 \leq y \leq b \end{array} \right. \quad (2)$$

Внутренние области толщиной  $h_2$ :

$$S_4(x, y) = \begin{cases} 0 \leq x \leq a_1, \\ 0 \leq y \leq b_2 \end{cases}; S_5(x, y) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 - r_1, \\ x - a_1 \leq y \leq b_2 \end{cases}; S_6(x, y) = \begin{cases} y + a \leq x \leq a_2, \\ 0 \leq y \leq b_2 - r_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$S_7(x, y) = \begin{cases} a_2 - r_1 \leq x \leq a_2, \\ b_2 - r_1 \leq y \leq (b_2 - r_1) + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_1 - r_1))^2} \end{cases} \quad (4)$$

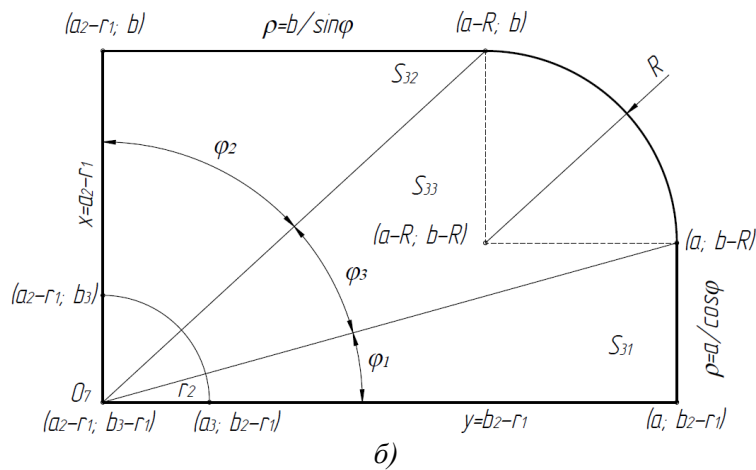
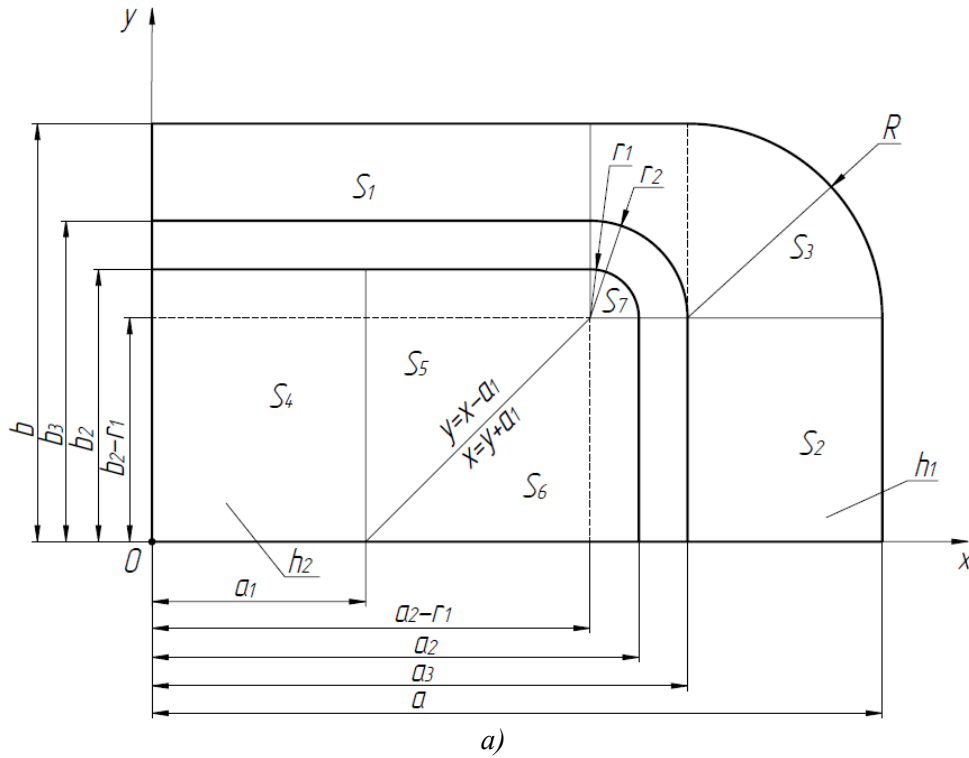


Рис. 2. Расчетная схема: а – участок поковки в I квадранте; б – разбиение области  $S_3$

В областях  $S_3$  и  $S_7$  перейдем к цилиндрической системе координат, причем  $S_3$  дополнительно разобьем на 3 зоны:

$$S_{3.1}(\rho, \varphi) = \left\{ (\rho, \varphi) \begin{cases} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{(b-b_2)-(R-r_1)}{(a-a_2)+r_1} \end{cases} \right. \quad (5)$$

$$S_{3.2}(\rho, \varphi) = \{(\rho, \varphi); \begin{aligned} (a_3 - a_2) + r_1 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin \varphi}, \\ \arctg \frac{(a-a_2)-(R-r_1)}{(b-b_2)+r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \} \quad (6)$$

$$S_{3.3}(\rho, \varphi) = \{(\rho, \varphi); \begin{aligned} (a_3 - a_2) + r_1 \leq \rho \leq R \\ \arctg \frac{(b-b_2)-(R-r)}{(a-a_2)+r_1} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a-a_2)-(R-r)}{(b-b_2)+r_1} \end{aligned} \} \quad (7)$$

Принимается условие полной пластичности на том основании, что касательное напряжение в слое  $\tau_{xy}$  мало по сравнению с нормальными напряжениями и им можно пренебречь, причем два нормальных напряжения в поперечном (вертикальном) сечении в начальном приближении можно считать равными  $\sigma_x \approx \sigma_y = -q$ . Третье нормальное напряжение, постоянное по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности:

$$-\sigma_z = p = q + \sigma_s. \quad (8)$$

Уравнения краевой задачи [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)$ ;  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{1}{h(t)} \cdot \frac{dh}{dt}$  - степень деформации по А.А. Ильюшину;

$\tau_s(p)$  - напряжение текучести материала при сдвиге;

$u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  - компоненты скорости течения;

Будем решать задачу отдельно в каждой подобласти  $S_i$ . Граничные условия для области  $S_1$ :

$$\begin{aligned} \text{при } y = b; \quad v &= 0 \\ \text{при } y = b_3; \quad p &= 2\tau_s \end{aligned} \quad (10)$$

Скорость течения вдоль оси  $x$   $u=0$ , поэтому из системы (9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2\tau_s}{h_1};$$

После интегрирования:

$$p = \frac{2\tau_s}{h_1} y + C_{11}.$$

Воспользуемся граничным условием, что при  $y = b_3$  давление  $p = 2\tau_s$ , тогда постоянная интегрирования определится  $C_{11} = 2\tau_s \left(1 - \frac{b_3}{h_1}\right) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s b_3}{h_1}$ .

Давление в области  $S_1$ :

$$p_{s1}(y) = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_3). \quad (11)$$

Из уравнения несжимаемости системы (9):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

После интегрирования скорость течения определится, как:

$$v = \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh}{dt} y + C_{12}.$$

Постоянную интегрирования найдем из граничных условий, что при  $y = b$  скорость течения  $v = 0$ , поэтому  $C_{12} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot b$ .

Окончательно скорость течения

$$v = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} (b - y). \quad (12)$$

Находим силу штамповки, приходящуюся на область  $S_1$ :

$$\begin{aligned} P_{S_1} &= \iint_{S_1} p_{s_1}(y) dx dy = \int_0^{a_2} dx \cdot \int_{b_3}^b \left( 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (y - b_3) \right) dy = \\ &= \int_0^{a_2} \left( 2\tau_s y + \frac{2\tau_s}{2h_1} (y - b_3)^2 \right) \Big|_{b_3}^b dx = 2\tau_s a_2 \left( (b - b_3) + \frac{(b - b_3)^2}{2h_1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

По аналогии находим силу штамповки, приходящуюся на область  $S_2$ :

$$\begin{aligned} P_{S_2} &= \iint_{S_2} p_{s_2}(x) dx dy = \iint_{S_2} \left( 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (x - a_3) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{b_2} dy \int_{a_3}^a \left( 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (x - a_3) \right) dx = 2\tau_s b \left( (a - a_3) + \frac{(a - a_3)^2}{2h_1} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Переходим к области  $S_3$ , границы отдельных зон которой описаны соотношениями (5) – (7). Граничные условия для зоны  $S_{31}$ : при  $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$  скорости течения

$$v_\rho = 0; \quad v_\varphi = 0, \text{ а при } \rho = r_2 \text{ давление } p = 2\tau_s.$$

Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке  $(a_2 - r_1; b_2 - r_1)$ . Из первого уравнения системы (9) с учетом граничных условий  $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{2\tau_s}{h_1}$  и  $p(\rho) - p(r_2) = \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2)$  или  $p(\rho) = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2)$ .

Уравнение несжимаемости, записанное в цилиндрической системе координат  $\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} = 0$ , после разделения переменных  $\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\rho \partial \rho} = -\frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt}$  интегрируем и подставляем пределы интегрирования  $\rho v_\rho \Big|_{\frac{a}{\cos \varphi}}^{\frac{a}{\rho}} = -\frac{1}{h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\frac{a}{\cos \varphi}}^{\frac{a}{\rho}} + C_{31}$ . Получаем выражение для скорости течения  $v_\rho = -\frac{1}{2\rho h_1} \cdot \frac{dh_1}{dt} \cdot \left( \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - \rho^2 \right)$ .

Сила штамповки, приходящаяся на  $S_{31}$ :

$$\begin{aligned} P_{S_{31}} &= \iint_{S_{31}} p(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} \left( 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2) \right) \rho d\rho d\varphi = 2\tau_s \int_0^{\varphi_1} d\varphi \left( \left( 1 - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{r_2}{h_1} \right) \frac{\rho^2}{2} \Big|_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} + \frac{\rho^3}{3h_1} \Big|_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} \right) = 2\tau_s \left( \frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_1 + \tau_s \left( 1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{2\tau_s a^3}{3h_1} \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{(\cos \varphi)^3} d\varphi \\ P_{S_{31}} &= 2\tau_s \left( \frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_1 + \tau_s \left( 1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{2\tau_s a^3}{3h_1} \cdot \left[ \frac{\sin \varphi_1}{(\cos \varphi_1)^2} + \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

По аналогии для зоны  $S_{32}$ :

$$P_{S_{32}}^{(32)} = 2\tau_s \left( \frac{r_2^3}{6h_1} - \frac{r_2^2}{2} \right) \varphi_2 + \tau_s \left( 1 - \frac{r_2}{h_1} \right) a^2 \operatorname{tg}(\varphi_2) + 2\tau_s \frac{a^3}{3h_1} \left[ \frac{\sin \varphi_2}{(\cos \varphi_2)^2} - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right| \right]; \quad (16)$$

и зоны  $S_{33}$ :

$$P_{S_{33}} = \frac{\tau_s}{3} \left( \frac{\pi}{2} - (\varphi_2 + \varphi_1) \right) \cdot (R^2 - r_2^2) \cdot \left( 3 + \frac{2R}{h_1} - \frac{r_2}{h_1} \right). \quad (17)$$

Для области  $S_4$ :

$$P_{s_4}^{(4)} = 2\tau_s a_1 \left( b_2 - \frac{b_2^2}{2h_2} \right). \quad (18)$$

Для области  $S_5$ :

$$P_{s_5} = \tau_s ((a_2 - a_1) - r_1) + \frac{\tau_s}{3h_2} ((a_2 - a_1) - 2b_2 - r_1)((a_2 - a_1) - (b_2 + r_1))^2 + b_2((a_2 - a_1) - r_1). \quad (19)$$

Для области  $S_6$ :

$$P_{s_6} = \tau_s (b_2 - r_1)(2(a_2 - a_1) - (b_2 - r_1)) + \frac{\tau_s (b_2 - r_1)}{3h_2} \times ((b_2 - r_1)^2 - 3(b_2 - r_1)(a_2 - a_1) + 3(a_2 - a_1)^2). \quad (20)$$

Для области  $S_7$ :

$$P_{s_7} = \frac{\tau_s \pi / 2}{h_2} r_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} r_1 \right). \quad (21)$$

Общая сила штамповки фланца определится как сумма компонент по областям  $S_i$

$$P_{\Sigma} = 4 \sum_{i=1}^7 P_{s_i}. \quad (22)$$

Один из типоразмеров поковки имеет следующие размеры: толщина фланца  $h_1 = 8$  мм; радиус закругления фланца  $R = 4$  мм; радиусы закругления в месте пересечения рёбер  $r_1 = r_2 = 2$  мм; размеры фланца в плане  $2a = 2b = 42$  мм; размеры центрального отверстия, образованного рёбрами,  $2a_2 = 22$  мм;  $2b_2 = 9$  мм. Материал: алюминиевый сплав АД0 ГОСТ 21488-77 с механическими характеристиками  $\sigma_b = 53$  МПа;  $\sigma_{02} = 37$  МПа;  $\tau_s = 30,6$  МПа [5]. Результаты расчета сил деформирования по разработанной математической модели для данной поковки представлены в виде графиков на рис. 3.

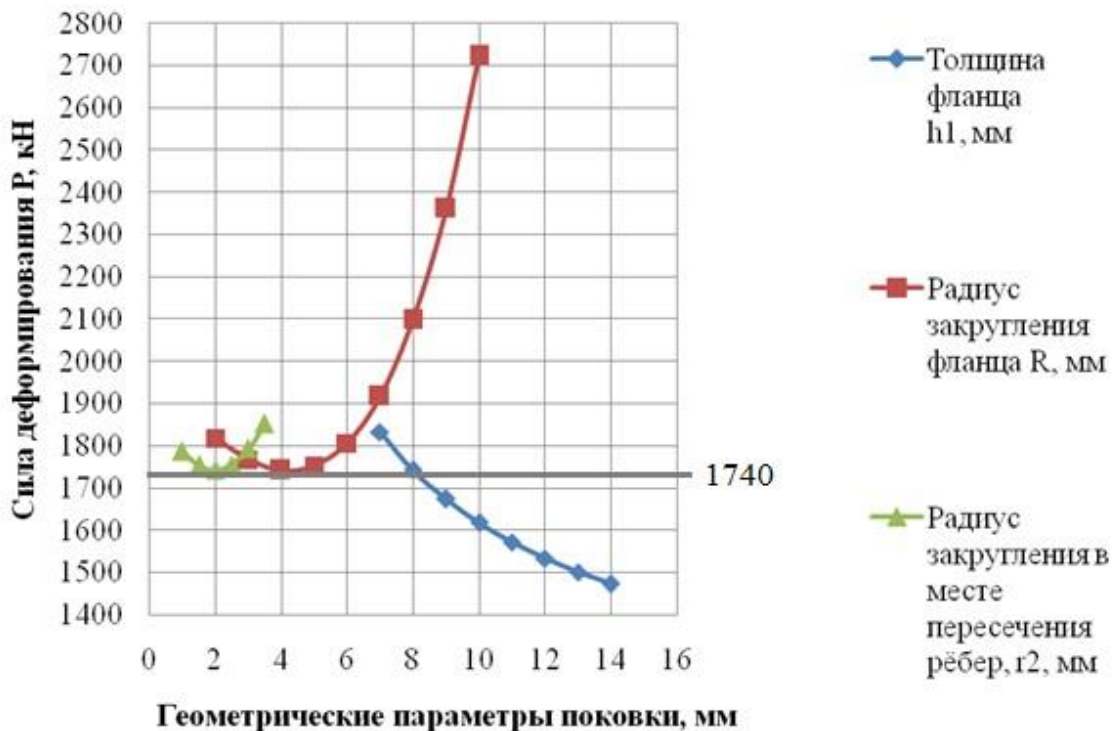


Рис. 3. Влияние геометрических параметров поковки на силу деформирования

Анализ графиков показывает, что для поковки с указанными размерами, сила деформирования, равная 1740 кН, соответствует минимальной величине, а значения радиусов закругления являются оптимальными.

Вывод. Разработана математическая модель для решения задачи сжатия пластического слоя со свободным затеканием металла в ребра. Установлена взаимосвязь сил деформирования с геометрическими параметрами штампуемого плоского фланца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сосенушкин Е.Н. Повышение эффективности технологического процесса изготовления волноводных фланцев / Е.Н. Сосенушкин, А.А. Архипов /Сб. научных статей и докладов «Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечно-прессового машиностроения» - Рязань: ООО «Экспресс печать». 2017. -С.99-103.
2. Сосенушкин Е.Н. Прогрессивные технологии объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин - М.: Машиностроение, 2011. - 480 с.
3. Сосенушкин Е.Н. Разработка ресурсосберегающей технологии производства фланцевых поковок на универсальном оборудовании/ Е.Н. Сосенушкин В.В. Белокопытов // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №3(11). - С.35-41.
4. Каплунов Б.Г. Патент №2352431 РФ Способ штамповки поковок фланцев воротниковых/ Б.Г. Каплунов, В.М. Тяжелыхников, С.П. Зуев и др. ООО НПО «Интеграл». 10.10.2008.
5. Механические свойства легких сплавов при температурах и скоростях обработки давлением: Справ. издание. / П.Г. Микляев. - М.: Металлургия, 1994. - 288 с.
6. Бильчук М.В. Прогнозирование образования поверхностных дефектов фланцевой части поковок при горячей объемной штамповке/ М.В Бильчук, Е.Н. Сосенушкин// Вестник МГТУ «Станкин». 2012. №4(23). - С.44-48.
7. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением/ М.В. Сторожев, Е.А. Попов - М.: Машиностроение, 1977. - 423 с.
8. Воронцов А.Л. Теория штамповки выдавливанием/ А.Л. Воронцов - М.: Машиностроение-1, 2004. 721 с.
9. Соломонов К.Н. Моделирование формообразования поковки с контурным оребрением/ К.Н. Соломонов, Л.И. Тищук, Е.А. Листров и др. // Известия Юго-Западного гос. ун-та. Сер. Техника и технологии. 2016. №4 (21). - С. 45-51.
10. Ильюшин А.А. Труды (1946 – 1966). Т.2. Пластичность/ А.А. Ильюшин - М.: Физматлит, 2004. - 480 с.
11. Кадымов В.А., Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2016 г)/ Под ред. проф. Г.Л. Бровко, проф. Р.А. Васина, проф. Д.В. Георгиевского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С.180-185.
12. Кадымов В.А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое: Монография. – М.:МГГЭУ, 2015. – 122 с.