

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ТРУБЧАТЫХ КОСТЕЙ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ УПРУГИХ СВОЙСТВ

<sup>1</sup>Ершова А.И., <sup>1</sup>Босяков С.М.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет

**Введение.** Костная ткань обладает анизотропией механических свойств как на микроуровне (остеоны, гаверсовы каналы, ламели), так и на макроуровне (цельная кость) [1]. В соответствии с [2], значения упругих параметров костной ткани на макроуровне могут изменяться как у разных цельных костей, так и в их различных частях (верхняя, средняя и нижняя трети) или анатомических квадрантах (передний, внешний, задний и внутренний). Эти факты существенно влияют на поведение костной ткани в ходе рутинной деятельности человека и травмирующих воздействий на кость [3]. Однако согласно [4], в большинстве случаев конечно-элементного моделирования поведения кортикальной костной ткани под действием произвольной нагрузки, костная ткань представляется неоднородным изотропным материалом. Для оценки отдельного изотропного модуля упругости каждого конечного элемента кости обычно используются эмпирические соотношения между плотностью кости и модулем упругости.

В работах [5–8] предложены методы определения анизотропной ориентации костной ткани, основанные на зависимостях упругих свойств кортикальной и губчатой структуры костной ткани от ее механического поведения, анатомического направления. Модели с анизотропным распределением упругих свойств на основании компьютерной томографии представлены в работах [9, 10]. Зависимости ортотропных свойств в проксимальной части бедренной кости от направлений главных напряжений при действии нагрузки эквивалентной собственному весу человека предложено использовать при конечно-элементном моделировании в исследовании [11]. Целью настоящей работы является разработка методики моделирования упругих свойств бедренной кости на основании зависимостей модуля упругости и сдвига, а также коэффициента Пуассона от пространственных координат для двумерного (2D) и одномерного (1D) случаев. Зависимости получены на основе экспериментальных данных для различных частей кости и анатомических квадрантов трубчатой кости [1].

**Нелинейное распределение анизотропных упругих свойств.** Для описания упругих свойств бедренной кости использовались двумерные регрессионные функции, полученные методом наименьших квадратов на основе модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона для двадцати точек, расположенных в зоне диафиза приблизительно между губчатой и кортикальной костных тканях в разных частях бедренной кости. Двенадцать точек  $A_k, M_k, L_k$  и  $P_k, k=\overline{1,3}$  расположены в переднем, внешнем, заднем и внутреннем анатомических квадрантах поперечного сечения бедренной кости; каждые четыре точки находятся на одном из трех различных уровней  $l_1, l_2, l_3$ , диафизарной части бедра. Восемь точек  $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}$  и  $M_n^{(0)}, n=1,2$  расположены в губчатой костной ткани на уровнях  $m_1$  и  $m_2$  в дистальном и проксимальном отделах бедренной кости соответственно. Схематическое расположение точек интерполяции на различных уровнях бедренной кости указаны на рисунке 1.

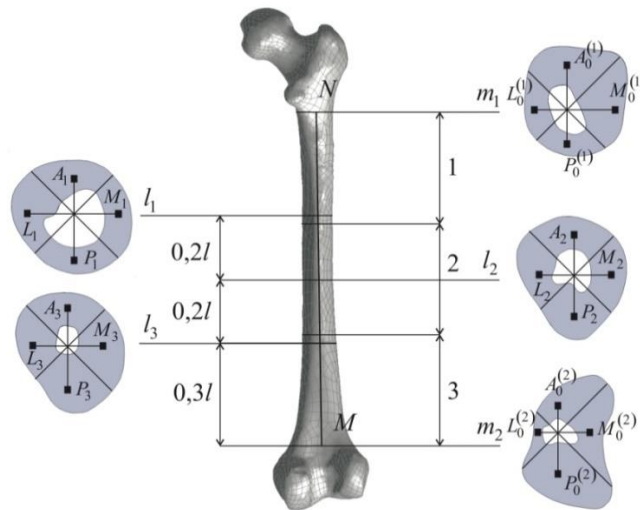


Рис. 1. Уровни  $l_1, l_2, l_3$  диафиза бедренной кости с узлами интерполяции  $A_k, L_k, P_k$  и  $M_k$ ; уровни  $m_1, m_2$  между губчатой и кортикальной частью бедра с узлами интерполяции  $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}, M_n^{(0)}, n=1,2$ ;  $MN$  – анатомическая ось;  $l$  - длина части кости примерно соответствующая кортикальной части; 1- верхняя треть; 2 - средняя треть; 3 – нижняя треть.

Губчатая костная ткань моделируется как однородный изотропный материал с модулем упругости в 8,0 ГПа и коэффициентом Пуассона равным 0,33 [5, 12]. Следовательно, в точках  $A_n^{(0)}, L_n^{(0)}, P_n^{(0)}$  и  $M_n^{(0)}, n=1,2$  для губчатой костной ткани модули Юнга  $E_1 = E_2 = E_3 = 8$  ГПа, коэффициенты Пуассона  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,33$  и модули сдвига  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3,08$  ГПа определены для каждого анатомического квадранта. Значения упругих констант в точках  $A_k, M_k, L_k$  и  $P_k, k=1,3$  приведены в таблице 1 в соответствии с [1]. В таблице 1, индексы 1, 2 и 3 соответствуют радиальному, окружному и продольному направлениям; продольное направление совпадает с анатомической осью бедра  $MN$  (рисунок 1).

Таблица 1– Средние упругие константы кортикальной кости в различных интерполяционных точках для переднего, внешнего, заднего и внутреннего квадрантов бедра, пересекаемого в уровнях  $l_1, l_2$  и  $l_3$  (индексы 1, 2 и 3 для упругих констант соответствуют радиальному, окружному и продольному направлениям)

Узел интерполяции	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
$A_1$	10,6	11,6	21,3	3,6	4,9	5,5	0,418	0,224	0,211
$L_1$	11,4	12,6	20,9	4,0	4,9	5,6	0,382	0,240	0,228
$P_1$	12,4	12,7	19,8	4,3	5,3	5,8	0,419	0,249	0,246
$M_1$	11,4	11,9	20,4	3,9	5,1	5,8	0,425	0,239	0,232
$A_2$	10,9	11,5	20,9	3,7	5,1	5,5	0,423	0,229	0,219
$L_2$	11,5	11,9	20,6	4,0	5,0	5,7	0,420	0,239	0,234
$P_2$	12,3	12,3	21,1	4,3	5,3	5,8	0,433	0,238	0,238
$M_2$	12,6	12,9	21,2	4,4	5,5	6,1	0,419	0,239	0,236
$A_3$	11,2	11,6	20,5	3,9	5,1	5,6	0,432	0,235	0,228
$L_3$	11,8	12,3	20,9	4,1	5,2	5,8	0,427	0,235	0,229
$P_3$	12,2	12,4	21,2	4,2	5,4	5,8	0,441	0,227	0,224
$M_3$	11,9	12,3	19,9	4,2	5,3	5,7	0,405	0,249	0,243

Регрессионные функции для упругих констант сформулированы в предположении, что в радиальном направлении упругие свойства бедренной кости в любом поперечном сечении не изменяются. Двумерные зависимости модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от продольной  $z$  и окружной  $\varphi$  координат в области между уровнями  $m_1$  и  $m_2$  бедренной кости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)}(\varphi, z) &= 0,00246775\varphi^3 - 0,0231933\varphi^2 + 0,0483053\varphi - 1,56228\varphi^3 z^3 + 3,707\varphi^2 z^3 - \\
&- 156,394\varphi z^3 + 236,667z^3 + 1,68187\varphi^3 z^2 - 19,6999\varphi^2 z^2 + 57,3801\varphi z^2 - 237,495z^2 - \\
&- 0,378222\varphi^3 z + 2,7499\varphi^2 z - 2,3469\varphi z + 51,763z + 8,0, \\
E_2^{(1)}(\varphi, z) &= 0,00335998\varphi^3 - 0,0324159\varphi^2 + 0,0710288\varphi - 10,936\varphi^3 z^3 + 108,328\varphi^2 z^3 - \\
&- 248,909\varphi z^3 + 11,4181z^3 + 5,68217\varphi^3 z^2 - 51,9547\varphi^2 z^2 + 102,118\varphi z^2 - 158,814z^2 - \\
&- 0,698451\varphi^3 z + 5,53273\varphi^2 z - 7,1894\varphi z + 49,6513z + 8,0, \\
E_3^{(1)}(\varphi, z) &= 8,92417\varphi^5 z^5 - 141,19\varphi^4 z^5 - 465,113\varphi^3 z^5 + 8914,43\varphi^2 z^5 - 16535,7\varphi z^5 - 47549z^5 + \\
&+ 0,499524\varphi^5 z^3 + 24,663\varphi^4 z^3 + 21,1731\varphi^3 z^3 - 1930,78\varphi^2 z^3 + 4399,36\varphi z^3 + 14606z^3 - \\
&- 0,708928\varphi^3 z + 12,4988\varphi^4 z^3 + 38,747\varphi^3 z^3 + 804,607\varphi^2 z^3 + 1530,39\varphi z^3 + 3946,05z^3 - \\
&- 0,337796\varphi^5 z^5 - 1,43267\varphi^4 z^2 + 7,74583\varphi^3 z^2 + 167,768\varphi^2 z^2 - 478,067\varphi z^2 - 2094z^2 + \\
&+ 0,070743\varphi^5 z^0 - 0,149099\varphi^4 z - 2,26309\varphi^3 z - 1,50093\varphi^2 z + 25,5008\varphi z + 285,982z + 8,0, \\
G_{12}^{(1)}(\varphi, z) &= 0,0009486990\varphi^3 - 0,00846988\varphi^2 + 0,0157647\varphi - 3,12457\varphi^3 z^3 + 39,965\varphi^2 z^3 - \\
&- 127,758\varphi z^3 + 117,295z^3 + 1,81964\varphi^3 z^2 - 19,8852\varphi^2 z^2 + 53,1055\varphi z^2 - 84,0534z^2 - \\
&- 0,26233\varphi^3 z + 2,27077\varphi^2 z - 3,91129\varphi z + 14,886z + 3,08, \\
G_{13}^{(1)}(\varphi, z) &= -8,4718\varphi^4 z^4 + 942,252\varphi^3 z^4 - 2766,15\varphi^2 z^4 + 1382,9\varphi z^4 - 2534,05z^4 + \\
&+ 52,2155\varphi^4 z^3 - 570,234\varphi^3 z^3 + 1636,59\varphi^2 z^3 - 723,157\varphi z^3 + 1694,45z^3 - 9,74689\varphi^4 z^2 + \\
&+ 105,7\varphi^3 z^2 - 296,994\varphi^2 z^2 + 110,904\varphi z^2 - 438,142z^2 + 0,572878\varphi^4 z - 6,30793\varphi^3 z + \\
&+ 18,0923\varphi^2 z - 6,75303\varphi z + 49,7292z + 3,08, \\
G_{23}^{(1)}(\varphi, z) &= -99,1473\varphi^4 z^4 + 1106,29\varphi^3 z^4 - 3579,05\varphi^2 z^4 + 3406,66\varphi z^4 - 4963,65z^4 + \\
&+ 32,957\varphi^4 z^3 - 697,091\varphi^3 z^3 + 2225,56\varphi^2 z^3 - 2080,04\varphi z^3 + 3213,07z^3 - 12,0779\varphi^4 z^2 + \\
&+ 132,325\varphi^3 z^2 - 413,578\varphi^2 z^2 + 370,538\varphi z^2 - 747,317z^2 + 0,666983\varphi^4 z - 7,21276\varphi^3 z + \\
&+ 21,726\varphi^2 z - 17,20553\varphi z + 72,7723z + 3,08, \\
v_{12}^{(1)}(\varphi, z) &= -6,06694\varphi^4 z^4 + 81,775\varphi^3 z^4 - 355,482\varphi^2 z^4 + 510,084\varphi z^4 - 246,139z^4 + \\
&+ 4,03203\varphi^4 z^3 - 53,1958\varphi^3 z^3 + 225,005\varphi^2 z^3 - 313,81\varphi z^3 + 162,615z^3 - 0,871705\varphi^4 z^2 + \\
&+ 11,1737\varphi^3 z^2 - 45,4057\varphi^2 z^2 + 60,3988\varphi z^2 - 38,7519z^2 + 0,0648672\varphi^4 - 0,807968\varphi^3 z + \\
&+ 3,13773\varphi^2 z - 3,90792\varphi z + 3,81429z + 0,33, \\
v_{13}^{(1)}(\varphi, z) &= 1,33336\varphi^4 z^4 - 13,5821\varphi^3 z^4 + 36,9715\varphi^2 z^4 - 26,8389\varphi z^4 + 123,296z^4 - \\
&- 1,17659\varphi^4 z^3 + 12,5201\varphi^3 z^3 - 36,189\varphi^2 z^3 + 24,963\varphi z^3 - 74,9134z^3 + \\
&+ 0,33277\varphi^4 z^2 - 3,6631\varphi^3 z^2 + 11,1243\varphi^2 z^2 - 7,82783\varphi z^2 + 16,6371z^2 - \\
&- 0,029697\varphi^4 z + 0,335189\varphi^3 z - 1,06546\varphi^2 z + 0,828095\varphi z - 1,69293z + 0,33, \\
v_{23}^{(1)}(\varphi, z) &= 0,251753\varphi^4 z^4 + 0,4100991\varphi^3 z^4 - 21,7872\varphi^2 z^4 + 58,2554\varphi z^4 + 141,462z^4 - \\
&- 0,524144\varphi^4 z^3 + 4,1431\varphi^3 z^3 - 1,06259\varphi^2 z^3 - 26,8755\varphi z^3 - 84,3593z^3 + 0,210218\varphi^4 z^2 - \\
&- 2,10589\varphi^3 z^2 + 4,642563\varphi^2 z^2 + 1,82261\varphi z^2 + 18,3066z^2 - 0,0218468\varphi^4 z + 0,236185\varphi^3 z - \\
&- 0,662882\varphi^2 z + 0,259906\varphi z - 1,85513z + 0,33,
\end{aligned}$$

Длина части бедра между уровнями  $m_1$  и  $m_2$  предполагается равной 0,31 м.

**Ортотропное распределение упругих свойств.** В этом случае упругие свойства бедренной кости описываются функциями для модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона только от продольной координаты  $z$  (изменяющейся вдоль анатомической оси бедренной кости  $MN$ , показанной на рисунке. 1). В этом случае кортикальная костная ткань является нелинейным упругим ортотропным материалом. Усредненные упругие константы костной ткани для регрессионных функций принимаются равными соответствующим константам на уровне  $l_2$  бедренной кости (см. рисунок 1). Усредненные значения модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона на уровне  $l_2$  приведены в таблице 2.

Таблица 2– Усредненные значения упругих констант кортикальной кости в интерполяционных точках бедра на уровне  $l_2$

$E_1, \text{ГПа}$	$E_2, \text{ГПа}$	$E_3, \text{ГПа}$	$G_{12}, \text{ГПа}$	$G_{13}, \text{ГПа}$	$G_{23}, \text{ГПа}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
11,7	12,2	20,7	4,1	5,2	5,7	0,420	0,237	0,231

Губчатая кость на уровнях  $m_1$  и  $m_2$  рассматривалась как изотропный материал. В результате интерполяции получены следующие функции для модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона в зависимости от продольной координаты  $z$ :

$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)}(z) &= -144,531z^2 + 46,25z + 8,0, & E_2^{(2)}(z) &= -164,063z^2 + 52,5z + 8,0, \\
 E_3^{(2)}(z) &= -496,094z^2 + 158,75z + 8,0, & G_{12}^{(2)}(z) &= -48,4375z^2 + 15,5z + 2,86, \\
 G_{13}^{(2)}(z) &= -90,2344z^2 + 28,875z + 2,86, & G_{23}^{(2)}(z) &= -110,938z^2 + 35,5z + 2,86, \\
 \nu_{12}^{(2)}(z) &= -4,6875z^2 + 1,5z + 0,33, & \nu_{13}^{(2)}(z) &= 2,46094z^2 - 0,7875z + 0,33, \\
 \nu_{23}^{(2)}(z) &= 2,69531z^2 - 0,8625z + 0,33,
 \end{aligned}$$

**Нелинейные изотропные упругие свойства.** Кортикальная костная ткань моделировалась с использованием материала с нелинейно распределенными изотропными свойствами вдоль анатомической оси бедра в предположении, что упругие свойства кости в радиальном и окружном направлениях в любом поперечном сечении бедра не изменяются. В этом случае для интерполяционных зависимостей модуля упругости и коэффициента Пуассона от координаты, изменяющейся вдоль оси  $MN$ , обозначенной на рисунке 1, использованы значения модулей упругости  $E_1 = E_2 = E_3 = 14,9$  ГПа и коэффициентов Пуассона  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,298$  на уровне  $l_2$ . Губчатая кость на уровнях  $m_1$  и  $m_2$  рассматривалась как изотропный материал. Интерполяционные функции для модуля упругости и коэффициента Пуассона, зависящие от  $z$ -координаты между уровнями  $m_1$  и  $m_2$  имеют вид

$$E^{(3)}(z) = -269,531z^2 + 86,25z + 8,0, \nu^{(3)}(z) = 0,33 - 0,025z + 0,078125z^2.$$

**Граничные условия для статического анализа.** Нагрузка на бедро прикладывалась вдоль его биомеханической оси, проходящей от верхнего полюса головки бедра до середины расстояния между крайними нижними отделами мышечков бедренной кости в соответствии с [13, 14]. Область приложения нагрузки располагалась в третьей части верхнего сегмента головки бедренной кости; величина нагрузки составляла 800 Н. Граничные условия задавались таким образом, чтобы головка бедра (область контакта вертлужной впадины) и нижние отделы мышечков бедра (места контакта с мышечками большеберцовой кости) имели жесткое закрепление.

**Заключение.** Предлагаемый подход к моделированию упругих свойств костной ткани позволяет учесть их нелинейное анизотропное распределение как вдоль

анатомических осей, так и в поперечном сечении бедренной кости. Преимуществом этого подхода является использование статистических данных модулей упругости и модулей сдвига, а также коэффициентов Пуассона для различных частей и анатомических квадрантов кости, полученных экспериментально используя разные образцы костной ткани. Другое преимущество заключается в возможности геометрической модификации модели кости, в частности, для моделирования имплантации, хирургических операций и т.д. Полученные главные напряжения и деформации с учетом нагрузки, эквивалентной действию собственного веса человека на бедренную кость, существенно различаются у моделей с нелинейным анизотропным и изотропным распределением упругих свойств. Эти различия могут увеличиваться при более сложной комбинации нагрузки на бедренную кость, например, при одновременном воздействии собственного веса человека, изгибающих моментов или крутящего момента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rho J. Tsui T.Y., Pharr G.M. *Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation* // *Biomaterials* 1997. Vol. 18, P. 1325–1330.
2. Goldstein S. *The mechanical properties of trabecular bone: dependence on anatomic location and function* // *Journal of Biomechanics*. 1987. Vol. 20, P. 1055–1061.
3. Currey J.D. *The structure and mechanics of bone* // *Journal of Material Science*. 2012. Vol. 47, P. 41–54.
4. Hambli R. *A quasi-brittle continuum damage finite element model of the human proximal femur based on element deletion* // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2013. Vol. 51, P. 219–231.
5. Bonnet A.S., Postaire M., Lipinski P. *Biomechanical study of mandible bone supporting a four-implant retained bridge finite element analysis of the influence of bone anisotropy and foodstuff position* // *Medical Engineering and Physics*. 2009. Vol. 31, P. 806–815.
6. Gray H.A., Taddei F., Zavatsky A.B., Cristofolini L., Gill H.S. *Experimental validation of a finite element model of a human cadaveric tibia* // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2008. Vol. 130, P. 031016.
7. Koivumaki J.E., Thevenot J., Pulkkinen P., Kuhn V., Link T.M., Eckstein F., Jämsä T. *CT-based finite element models can be used to estimate experimentally measured failure loads in the proximal femur* // *Bone*. 2012. Vol. 50, P. 824–829.
8. Yang H., Ma X., Guo T. *Some factors that affect the comparison between isotropic and orthotropic inhomogeneous finite element material models of femur* // *Medical Engineering and Physics*. 2010. Vol. 32, P. 553–560.
9. Hellmich C., Kober C., Erdmann B. *Micromechanics-based conversion of CT data into anisotropic elasticity tensors, applied to FE simulations of a mandible* // *Annals of Biomedical Engineering*. 2008. Vol. 36, P. 108–122.
10. Schneider R., Faust G., Hindenlang U., Helwig, P. *Inhomogeneous, orthotropic material model for the cortical structure of long bones modeled on the basis of clinical CT or density data* // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009. Vol. 198, P. 2167–2174.
11. San Antonio T., Ciaccia M., Muller-Karger C., Casanova E. *Orientation of orthotropic material properties in a femur FE model: a method based on the principal stresses directions* // *Medical Engineering and Physics*. 2011. Vol. 34, P. 914–919.
12. Tanne K., Sakuda M. *Biomechanical and clinical changes of the craniofacial complex from orthopedic maxillary protraction* // *Angle Orthodontist*. 1991. Vol. 61, P. 145–152.

13. *Letter to the editor. ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion part I: ankle, hip, and spine // Journal of Biomechanics. 2002. Vol. 35, P. 543–548.*
14. *Yoshioka Y., Siu D., Cooke D.V., Chir B. The anatomy and functional axes of the femur // Journal of Bone and Joint Surgery. 1987. Vol. 69-A, P. 873–880.*