УДК 539.3

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРНО СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

[1] Акимов В.А., [1] Гончарова С.В.

[1] Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил
и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_x + \partial_2\tau_{xy} = 0 \\ \partial_1\tau_{yx} + \partial_2\sigma_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ - частная производная по переменной x, $\partial_2 = \partial/\partial y$ - частная производная по переменной y. Напряжения выразим через функцию напряжений по известным [1] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2\varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2\varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1\partial_2\varphi \tag{2}$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)\varphi = 0 \tag{3}$$

Представим: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (4)

В соответствии с [2], представим:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = [A_1(\partial_1)\sin(y\partial_1) + B_1(\partial_1)y\cos(y\partial_1) + C_1(\partial_1)\cos(y\partial_1) + \\ &+D_1(\partial_1)y\sin(y\partial_1)] * f(x) \\ &\varphi_2 = [A_2(\partial_2)\sin(x\partial_2) + B_2(\partial_2)x\cos(x\partial_2) + C_2(\partial_2)\cos(x\partial_2) + \\ &+D_2(\partial_2)x\sin(x\partial_2)] * g(y) \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ - операторные коэффициенты; $f(x)$ и $g(x)$- произвольные функции. Так как

$$\partial_2^2[y\cos(y\partial_1)] = \partial_2^2\partial_1[\sin(y\partial_1)] = \partial_1\partial_2^2[\sin(y\partial_1)] = -\partial_1[\partial_1^2\sin(y\partial_1)] =$$
$$= -2\partial_1\sin(y\partial_1) - \partial_1^2 y\cos(y\partial_1)$$
$$\partial_2^4[y\cos(y\partial_1)] = \partial_2^4\partial_1[\sin(y\partial_1)] = \partial_1\partial_2^4[\sin(y\partial_1)] = \partial_1[\partial_1^4\sin(y\partial_1)] =$$
$$= 4\partial_1^3\sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y\cos(y\partial_1)$$

то

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)[y\cos(y\partial_1)] = \partial_1^4 y\cos(y\partial_1) + 2\partial_1^2(-2\partial_1\sin(y\partial_1) -$$
$$-\partial_1^2 y\cos(y\partial_1)) + 4\partial_1^3\sin(y\partial_1) + \partial_1^4 y\cos(y\partial_1) = 0$$

Аналогично можно установить, что функция φ_2, выражаемая соотношением (5) также удовлетворяет бигармоническому уравнению (3). Рассмотрим задачу о сжатии упругого квадрата $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le a$ параболической нагрузкой $P = q(x^2 - a^2)$. Краевые условия должны быть следующие:

$$\sigma_y(x, \pm a) = P; \qquad \tau_{xy}(\pm a, y) = \tau_{yx}(x, \pm a) = 0; \qquad \sigma_x = g(x)$$

Как известно, данная задача не имеет замкнутого решения. Операторный метод позволяет построить новое функциональное уравнение, которое эффективно решает поставленную задачу. Итак, полагаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x/a) \text{ и } g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^g \sin(\pi n y/a) \quad (7).$$

Подставляя (5) и (6) в (2), получим:

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 \varphi_1 = -\partial_1 [A_1(\partial_1)\partial_1 \cos(y\partial_1) + B_1(\partial_1)\cos(y\partial_1) - B_1(\partial_1)\partial_1 y \sin(y\partial_1) -$$

$$-C_1(\partial_1)\partial_1 \sin(y\partial_1) + D_1(\partial_1)\sin(y\partial_1) + D_1(\partial_1)\partial_1 y \cos(y\partial_1)] * [\sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x/a)]$$

Полагая $B_1(\partial_1) = -\partial_1 A_1(\partial_1)$, $D_1(\partial_1) = \partial_1 C_1(\partial_1)$, $C_1(\partial_1) = -A_1(\partial_1) tg(a\partial_1)$, а с учетом наличия необходимого произвола постоянных коэффициентов c_n^f, считая $A_1(\partial_1) = 1$, получим:

$$\varphi_1 = [\sin(y\partial_1) - y\partial_1 ch(y\partial_1 - tg(a\partial_1)(\cos(y\partial_1 + (y\partial_1 \sin(y\partial_1))] * [\sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \sin(\pi n x/a)]$$

Аналогично находим:

$$\varphi_2 = [\sin(x\partial_2) - x\partial_2 \cos(x\partial_2) - tg(a\partial_2)(\cos(x\partial_2) - x\partial_2 \sin(x\partial_2)] * [\sum_{n=1}^{\infty} c_n^g \sin(\pi n y/a)]$$

Действуя в соответствии с изложенным в [1] алгоритмом раскроем скобки.

$$\sin(y\partial_1) * [\sin(\pi n x/a] = y\partial_1 (1 - (y\partial_1)^2/3! + (y\partial_1)^4/5! + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1}(y\partial_1)^{2(n-1)}/(2n-1)!) + \cdots) * [\sin(\pi n x/a)] = sh(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$

$$y\partial_1 \cos(y\partial_1) * [\sin \pi n x/a] = (\pi n y/a) ch(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$

$$tg(a\partial_1)\cos(y\partial_1) * [\sin(\pi n x/a)] = th(\pi n)ch(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$

$$tg(a\partial_1) y\partial_1 \sin(y\partial_1) * [\sin(\pi n x/a)] = th(\pi n)(\pi n y/a) sh(\pi n y/a)\cos(\pi n x/a)$$

И тогда выражение для φ_1 и граничные условия (2) перепишем в виде:

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f [sh(\pi n y/a) - (\pi n y/a) ch(\pi n y/a) - th(\pi n)(ch(\pi n y/a) -$$

$$-(\pi n y/a) sh(\pi n y/a))]\cos(\pi n x/a)$$

$$\sigma_x(x = \pm a) = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f (-1)^n n^2 [th(\pi n)(ch(\pi n y/a) + (\pi n y/a) sh(\pi n y/a)) -$$

$$-sh(\pi n y/a) - (\pi n y/a) ch(\pi n y/a)] \qquad \tau_{xy}(x = \pm a) = \tau_{yx}(y \pm a) = 0$$

$$\sigma_y(y = \pm a) = q(x^2 - a^2) \Rightarrow \quad \frac{\pi^3}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^f \frac{n^3}{sh(\pi n)} \cos(\pi n x/a) = q(x^2 - a^2) \quad (8)$$

Здесь были учтены два тождества $\cos(\pi n) = (-1)^n$ и $ch^2(\pi n) - sh^2(\pi n) = 1$

Далее из тригонометрического ряда Фурье (8) находится искомый коэффициент c_n^f. Таким образом, задача как бы решена с некоторой дополнительной нагрузкой $\sigma_x(x=\pm a)=g(y)$. Зная коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)=q(x^2-a^2)$, функцию $g(y)$ можно воспроизвести по этим коэффициентам таблично, а затем при помощи аппроксимации и аналитически. Чтобы выполнить условие $g(y)=0$ потребуются коэффициенты еще одного ряда Фурье, а для этого понадобится привлечь другую бигармоническую функцию φ_2.Отметим тот факт, что первое граничное условие выполнено точно за счет разложения в ортогональный ряд Фурье, а второе и третье удовлетворяются тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1.Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -416 с.

2. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости.-Мн.: 2003.-101 с.