УДК 539.3

РАСЧЕТ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

д. ф.-м. н. [1,2] **Щербаков С.С.,** м. н. с. [2] **Шемет Л.А.**

[1]*Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь, Минск,*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск*

Введение. На сегодняшний день метод граничных элементов и метод конечных элементов широко используются для решения задач механики деформированного твердого тела. У каждого из этих методов имеются свои достоинства и недостатки. Преимуществом метода граничных элементов перед методом конечных элементов является то, что при дискретизации модели построение расчетной сетки происходит не по всему объему тела, а только по его границе, т.е. размерность задачи уменьшается на единицу. С другой стороны, при гранично-элементном моделировании матрица результирующей системы линейных алгебраических уравнений полностью заполнена в отличие от метода конечных элементов, при применении которого матрица содержит большое количество нулей [1]. В данной работе представлено сравнение этих двух методов на примере расчета повреждаемости стандартного образца для исследования трещиностойкости. Исследование повреждаемости основано на понятии опасного объема, под которым понимается область тела, в которой действующие напряжения превышают некоторую предельную величину.

Схема нагружения. Схема нагружения образца представлена на рисунке 1: к верхней и нижней полуокружности приложена равномерно распределенная растягивающая нагрузка p_n.

Геометрические характеристики и свойства материала были приняты следующими: B=0,05 м, H=0,06 м, L=0,04 м, R=0,00625 м, модуль упругости $E = 2{,}1\cdot10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Осевая нагрузка P изменяется от 17 500 Н до 20 000 Н с шагом 1250 Н, равномерно распределенная нагрузка $p_n = P/(\pi R)$.

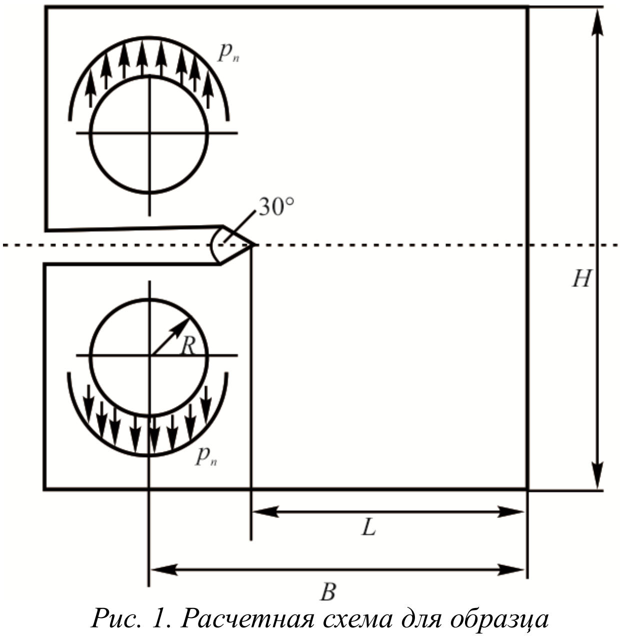

Рис. 1. Расчетная схема для образца

Поскольку на поверхности образца S_σ заданы распределения усилий p_i, то граничные условия принимаю вид

$$\sigma_{ij} a_j \big|_{S_\sigma} = p_{i2}, \; i = 1, 2,$$

где a_j – направляющие косинусы, i=1 определяет касательное к поверхности направление, а i=2 – нормальное.

Отметим, что на свободных поверхностях нормальные и касательные к ним усилия $p_{22} = p_n$ и $p_{12} = p_\tau$ равны нулю.

Алгоритм гранично-элементного моделирования. Для решения нашей задачи на основе метода граничных элементов воспользуемся фундаментальным решением задачи Кельвина для плоскости в перемещениях и напряжениях в случае действия сосредоточенных нормальной (верхний индекс n) и касательной (верхний индекс τ) к некоторой линии в плоскости сил в перемещениях и напряжениях [2-4]. Для построения алгоритма гранично-элементного моделирования проинтегрируем фундаментальные решения вдоль некоторой линии приложения равномерно распределенных нормальных p_n и касательных p_τ усилий (см. рисунок 2):

$$u_1^{(n)} = p_n G_1^{(n,u)} = \frac{-p_n x_2}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln\frac{r_1}{r_2},$$

$$u_1^{(\tau)} = p_\tau G_1^{(\tau,u)} = \frac{p_\tau}{8\pi\mu(1-\nu)} (4(1-\nu)(2a - x_2\,\Theta) - (3-4\nu)((a-x_1)\ln r_1 + (a+x_1)\ln r_2)), \tag{1}$$

$$u_2^{(n)} = p_n G_2^{(n,u)} = \frac{-p_n}{8\pi\mu(1-\nu)} (2x_2(1-2\nu)\,\Theta + (3-4\nu)(-2a + (a-x_1)\ln r_1 + (a+x_1)\ln r_2)),$$

$$u_2^{(\tau)} = p_\tau G_2^{(\tau,u)} = \frac{-p_\tau x_2}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln\frac{r_1}{r_2}, \tag{2}$$

$$\sigma_{11}^{(n)} = p_n G_{11}^{(n,\sigma)} = \frac{p_n x_2}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{a-x_1}{r_1^2} + \frac{a+x_1}{r_2^2} - 2\nu\Theta \right),$$

$$\sigma_{11}^{(\tau)} = p_n G_{11}^{(\tau,\sigma)} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (3-2\nu)\ln\frac{r_1}{r_2} \right), \tag{3}$$

$$\sigma_{22}^{(n)} = p_n G_{22}^{(n,\sigma)} = \frac{-p_n y}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{a-x_1}{r_1^2} + \frac{a+x_1}{r_2^2} + \frac{2(1-\nu)}{y}\Theta \right),$$

$$\sigma_{22}^{(\tau)} = p_\tau G_{22}^{(\tau,\sigma)} = \frac{-p_\tau}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (1-2\nu)\ln\frac{r_1}{r_2} \right), \tag{4}$$

$$\sigma_{12}^{(n)} = p_n G_{12}^{(n,\sigma)} = \frac{-p_n}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - (1-2\nu)\ln\frac{r_1}{r_2} \right),$$

$$\sigma_{12}^{(\tau)} = p_\tau G_{12}^{(\tau,\sigma)} = \frac{p_\tau}{4\pi(1-\nu)} \left(x_2^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - (1-2\nu)\Theta + \ln\frac{r_1}{r_2} \right), \tag{5}$$

где $G_{ij}^{(n,\sigma)}, G_{ij}^{(\tau,\sigma)}, G_i^{(n,u)}, G_i^{(\tau,u)}$ - функции влияния и

$$r_1^2 = (a-x_1)^2 + x_2^2, \quad r_2^2 = (a+x_1)^2 + x_2^2, \quad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{a-x_1}{x_2} + a - x_1.$$

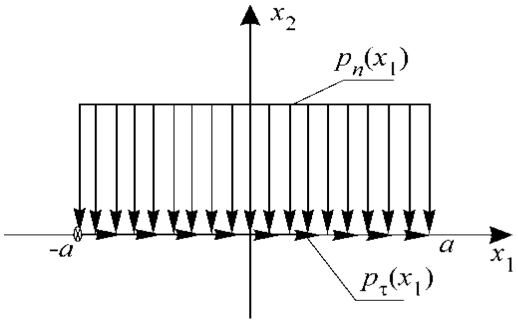

Рис. 2. Равномерное распределение усилий на граничном элементе

Суперпозиция решений (1)–(5) позволяет решать задачу для любого распределения усилий в пространстве [5-7].

Пусть $O^k x_1^k x_2^k$ и $O^\gamma x_1^\gamma x_2^\gamma$ локальные системы координат, связанные с граничными элементами k и γ и $a_{ij}^{k\gamma}=\cos(x_i^\gamma x_j^k)$. Тогда перемещения и напряжения в центре элемента γ O^γ в координатах $\mathbf{x}^k$, связанных с элементом k, примут вид

$$\begin{aligned} u_i^\gamma\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] &= p_n^\kappa G_i^{(n,u)}\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] + p_\tau^\kappa G_i^{(\tau,u)}\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right], \\ \sigma_{ij}^\gamma\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] &= p_n^\kappa G_{ij}^{(n,\sigma)}\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] + p_\tau^\kappa G_{ij}^{(\tau,\sigma)}\left[O^\gamma\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где i, j=1,2.

$$\sigma_{i2}^\gamma[O^\gamma(\mathrm{x}^\gamma)] = \sigma_{i2}^\gamma[0] = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} a_{i\alpha}^k a_{i\beta}^k \sigma_{\alpha\beta}^k [O^\gamma(\mathrm{x}^\gamma)] = p_{i2}^\gamma,\ i = 1,2,$$

где $\gamma = \overline{1, N}$, N – количество граничных элементов.

Пусть Ox_1x_2 глобальная система координат и $a_{ij}^k=\cos(x_i x_j^k)$. Тогда перемещения и напряжения в некоторой точке глобальной системы координат М($\mathbf{x}$) будут следующими:

$$\begin{aligned} u_i\left[M(\mathrm{x})\right] &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^k\left(p_n^\kappa G_j^{(n,u)}\left[M\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] + p_\tau^\kappa G_j^{(\tau,u)}\left[M\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right]\right), \\ \sigma_{ij}\left[M(\mathrm{x})\right] &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} a_{i\alpha}^k a_{i\beta}^k\left(p_n^\kappa G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)}\left[M\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right] + p_\tau^\kappa G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)}\left[M\left(\mathrm{x}^\kappa\right)\right]\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где i, j,α, β =1, 2.

Опасный объем. Рассмотрим тензор механического параметра φ_{ij}, конкретизациями которого являются тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}. Для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения $\varphi_n^{(*\lim)}$ и $\varphi_\tau^{(*\lim)}$ тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*\lim)}$, а также предельное главное значение тензора $\varphi_1^{(*\lim)}$ и предельную интенсивность $\varphi_{\mathrm{int}}^{(*\lim)}$ [8, 9]:

$$\begin{gathered} \varphi_n^{(*\lim)} = \max_{dV,i}\left(\left|\varphi_{ii}\left(F_{\lim}, dV\right)\right|\right),\ i = x, y, z, \\ \varphi_\tau^{(*\lim)} = \max_{dV,i,j}\left(\left|\varphi_{ij}\left(F_{\lim}, dV\right)\right|\right), i, j = x, y, z,\ i \neq j, \\ \varphi_1^{(*\lim)} = \max_{dV}\left(\left|\varphi_1\left(F_{\lim}, dV\right)\right|\right), \\ \varphi_{\mathrm{int}}^{(*\lim)} = \max_{dV}\left[\varphi_{\mathrm{int}}\left(F_{\lim}, dV\right)\right], \end{gathered} \tag{8}$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор φ_{ij} в каждом элементарном объеме dV тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа относительных повреждающих напряжений [8, 9]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$\psi_{ij} = \left|\varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\lim)}\right|,$$
$$\psi_i = \left|\varphi_i / \varphi_1^{(*\lim)}\right|, \qquad (9)$$
$$\psi_{\mathrm{int}} = \varphi_{\mathrm{int}} / \varphi_{\mathrm{int}}^{(*\lim)}.$$

Соотношения (9) представляют собой показатели локальной повреждаемости элементарного объема тела.

Условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (9) будут иметь вид

$$V_{ij} = \left\{dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\lim)}, dV \subset V_k\right\},\ i, j = x, y, z,$$
$$m = \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \qquad (10)$$
$$V_i = \left\{dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\lim)}, dV \subset V_k\right\},\ i = 1, 2, 3,$$
$$V_{\mathrm{int}} = \left\{dV / \varphi_{\mathrm{int}} \geq \varphi_1^{(*\lim)}, dV \subset V_k\right\},$$

где V_k – рабочий объем нагруженного тела.

Расчет опасных объемов (10) в общем случае осуществляется следующим образом [8, 9]:

$$V_q = \int\limits_{\psi_q \geq 1} dV,\ q = x, y, z, 1, 2, 3, \mathrm{int}. \qquad (11)$$

Опасные объемы (10) являются интегральными показателями абсолютной повреждаемости тела, содержащими сведения как о напряженно-деформированном состоянии, так и предельном.

Опасный объем (площадь) в компактном образце. Расчет напряженно-деформированного состояния образца на основе метода конечных элементов проводился в пакете Ansys. Для выполнения расчетов опасных объемов была создана программа на базе встроенного в Ansys языка APDL. Алгоритм работы программы заключается в сохранении массива данных значений напряжений и деформаций по всем конечным элементам и использования их в дальнейших вычислениях значений локальной повреждаемости, как отношений действующих и предельных напряжений или деформаций, в нашем случае:

$$\psi_q^i = \sigma_q^i / \sigma_q^{\lim}, q = 1, \mathrm{int}. \qquad (12)$$

Величины объемов элементов, для которых выполняется условие $\psi^i \geq 1$, суммируются в соответствии с (11) для получения значения опасного объема V для всей расчетной модели.

Реализация гранично-элементного моделирования производилась с использованием программы Mathematica. Все компоненты тензора напряжений определялись в точках компактного образца с фиксированным шагом h=0,00001 м. Для получения опасного объема в образце, объем всего образца умножался на Nq/N, q=1, int, где Nq – количество точек, в которых действующее напряжение превышает предельное, а N - общее количество точек. В двумерной постановке, опасный объем V принимает вид опасной площади S.

Стоит отметить, для конечно-элементного расчета (КЭ) использовалось 187 660 элементов, а для граничного-элементного (ГЭ) – 4590 элементов.

Ниже представлены результаты расчетов при нагрузке на образец P=20 000 Н (см. рисунки 3 *а-г* и 4 *а-г*). На рисунках 3 *а, б* представлены графики распределения напряжений в образце по линии симметрии для гранично-элементного и конечно-элементного расчета. Из данных рисунков видно хорошее соответствие ГЭ и КЭ расчетов друг другу [10].

На рисунках 3 *в-е* представлены зависимости опасной площади S от величины предельных значений напряжений и графики относительной погрешности ε, которая вычислена по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\left|S_q^{(ГЭ)} - S_q^{(КЭ)}\right|}{S_q^{(КЭ)}} \cdot 100\%, \quad q = 1, \mathrm{int},$$

где $S_q^{(ГЭ)}$ – опасный объем, полученный при гранично-элементном моделировании;

$S_q^{(КЭ)}$ – опасный объем, полученный при конечно-элементном моделировании;

Из рисунков 3 *д, е* видно, что для всех рассматриваемых нагрузок и предельных значений напряжений большинство значений относительной погрешности лежит в диапазоне от 4 до 8 %.

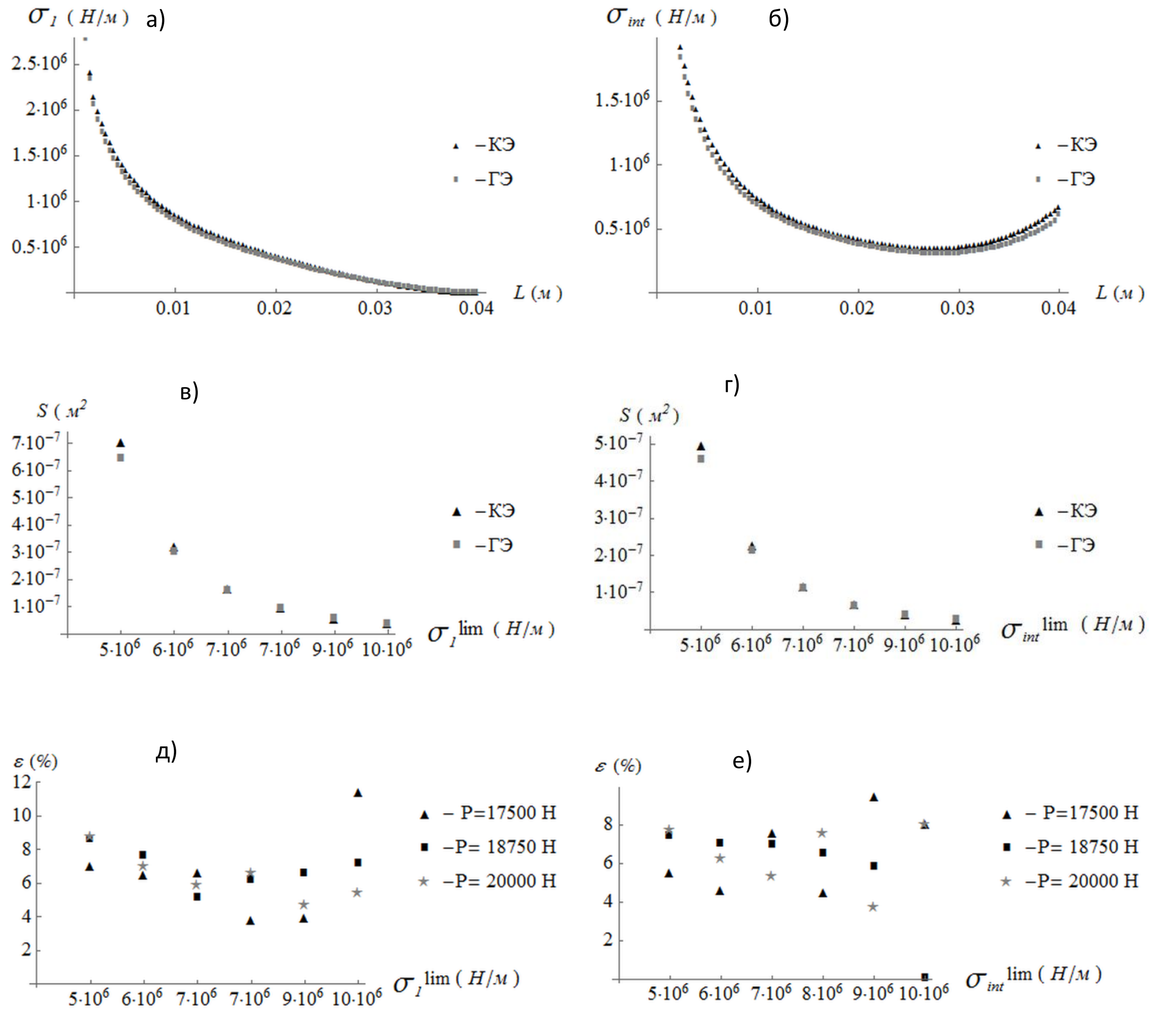

Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений (а) и первых главных напряжений (б) в рабочем теле образца, зависимость опасного объема от величины предельных значений интенсивности напряжений (в) и первых главных напряжений (г)

На рисунке 4 представлены опасные площади для гранично-элементного и конечно-элементного моделирования. Видно, что площади имеют одинаковую форму и размер для соответствующих критериев.

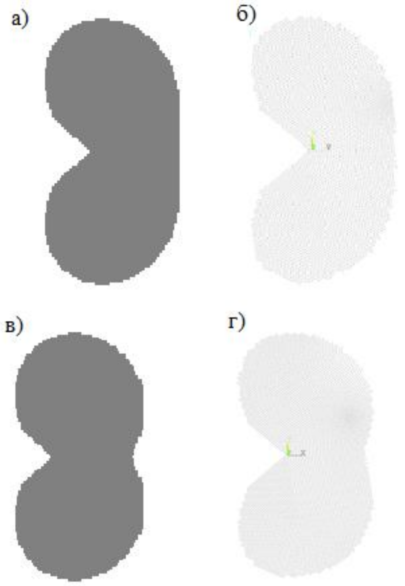

Рис. 4. Формы опасного объема (площади) для $\psi_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}} / \sigma_{\text{int}}^{\lim}$ *(а – ГЭ, б – КЭ) и* $\psi_1 = \sigma_1 / \sigma_1^{\lim}$ *(в – ГЭ, г– КЭ)*

Вывод. Представлены результаты моделирования повреждаемости стандартного образца для исследования трещиностойкости методом конечных элементов и методом граничных элементов. Исследование повреждаемости в окрестности вершины трещины проводилось на основе оценки величин опасных объемов, под которым понимается область тела, в которой действующие напряжения превышают некоторую предельную величину.

Анализ результатов показал хорошее соответствие гранично-элементного моделирования напряженного и объемной повреждаемости, основанного на предварительном интегрировании фундаментальных решений, конечно-элементному моделированию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавков, М.А. Гранично-элементное моделирование в механике /М.А. Журавков, А.В. Круподеров, С.С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2014. – 272 с.*
2. *Zhuravkov, M.A. Modeling of volumetric damage of multielement clamp-knife-base tribo-fatigue system / M.A. Zhuravkov, S.S. Sherbakov, A.V. Krupoderov // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM). – 2017.– P. 60–69.*
3. *Sherbakov, S.S. Contact interaction, volume damageability and multicriterial limiting states of multielement tribo-fatigue systems / S. Sherbakov, M. Zhuravkov, L. Sosnovskiy // In book: Selected Problems on Experimental Mathematics, ed. by R. Wituła, B. Bajorska-Harapińska, E. Hetmaniok, D. Słota, T. Trawiński. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2017. – pp. 17–38.*
4. *Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд –М.: Мир, 1987. – 328 с.*
5. *Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия/ К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.*
6. *Щербаков С.С. Напряженно-деформируемое состояние и поврежденность трибофатической системы прижим-нож-опора режущего инструмента комбайна / С.С. Щербаков // Механика машин, механизмов и материалов. –2012. – № 2. –С 75–80.*
7. *Мармыш, Д.Е. Граничноэлементное моделирование напряженно-*

деформированного состояния статически неопределимой балки/Д.Е. Мармыш// Теоретическая и прикладная механика: Международный сборник научно-методических статей. –Вып. 28. – Минск: БНТУ, –2013. – С. 219-223.

8. *Сосновский, Л.А. Фундаментальные и прикладные задачи трибофатики : курс лекций / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Минск: БГУ, 2011. – 488 с.*
9. *Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.*
10. *Щербаков, С. С. Гранично-элементное моделирование напряженного состояния образца для исследования трещиностойкости/ С. С. Щербаков, Л. А. Шемет, О. А. Насань// Прикладные задачи математики: материалы XXVI междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 17–21 сент. 2018 г. / СевГУ; науч. ред. Ю. Э. Обжерин. – Севастополь, 2011. – С. 174–179.*