УДК 539.3

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

[1] Захарчук Ю.В.

[1] Белорусский государственный университет транспорта

Приведены постановка и аналитическое решение задачи об изгибе упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом заполнителе учтен поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб изменяются линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат r, φ, z. Решение выписано в функциях Бесселя.

Введение. Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных, элементов конструкций посвящены многочисленные исследования. Динамическое нагружение исследовалось в статьях [1–4], изотермическое квазистатическое, в том числе переменное – в работах [5–7]. Результаты, связанные с поведением трехслойных конструкций в температурном поле, опубликованы в статьях [8–11].

Следует отметить, что в основном публикации по деформированию трехслойных круговых пластин не учитывают сжимаемость заполнителя. В статьях [12–15] отражены постановка и решение задачи об изгибе упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Здесь приводятся уравнения равновесия и их аналитическое рекуррентное решение для упругопластической круговой трехслойной пластины.

1 Постановка краевой задачи. Рассмотрим упругопластическую круговую трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем (рисунок 1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности своего слоя. В заполнителе h_3=2c, воспринимающем нагрузку в вертикальном и тангенциальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Деформируемость по толщине заполнителя принимается линейной.

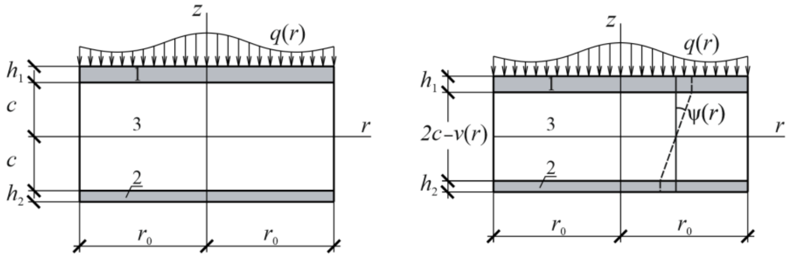

Рис.1. Расчетная схема трехслойной пластины

На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя (ψ

$= 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция обжатия заполнителя, h_k – толщина k-го слоя.

Радиальные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

▪ в несущих слоях *1, 2*

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right), \quad w^{(1)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + v\left(r\right) \quad (c \le z \le c+h);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r, \quad w^{(2)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) \quad (-c-h \le z \le -c);$$

▪ в заполнителе *3*

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right], \quad w^{(3)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + \frac{v\left(r\right)}{2c}\left(z+c\right) \quad (-c \le z \le c); \qquad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr}\right), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}\left(u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right)\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr}\right), \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}\left(u - c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right)\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - z\left[w,_{rr} + \frac{v,_{rr}}{2c}\left(z+c\right)\right], \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{z}{2c}v,_r\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}. \qquad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\text{э}_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3;\ \alpha = r, \varphi),$$

$$s_z^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\text{э}_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\text{э}_{rz}^{(3)}, \qquad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\text{э}_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k-го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) [10], которые при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность сжимаемого заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $s_z^{(3)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $\text{э}_z^{(3)}$, $\text{э}_{rz}^{(3)}$ – девиаторы тензоров в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k-м слое

$$\varepsilon_u^{(k)} = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{zr}^2)}.$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем интенсивности обобщенных внутренних усилий и моментов в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)}\,\mathrm{d}z, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z\,\mathrm{d}z,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2\,\mathrm{d}z, \qquad (4)$$

где интегралы берутся по толщине k-го слоя.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)} - 2G_k \omega_k Э_\alpha^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3),$$
$$\sigma_z^{(3)} = 2G_3 Э_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)} - 2G_3 \omega_3 Э_z^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 Э_{rz}^{(3)}. \quad (5)$$

Выделим в тензоре напряжений (5) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3), \quad \sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad (6)$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k Э_\alpha^{(k)},$$
$$\sigma_{ze}^{(3)} = 2G_3 Э_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 Э_z^{(3)},$$
$$\sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 Э_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad S_\alpha^{(3)} = S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha\omega}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (7)$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ и $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$ $(\alpha = r, \varphi)$ из соотношений (6).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha\omega}^{(k)},$$
$$H_\alpha = H_{\alpha e} - H_{\alpha\omega}, \quad H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c\left(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}\right), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c\left(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}\right),$$
$$D_\alpha = D_{\alpha e} - D_{\alpha\omega}, \quad D_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)}, \quad D_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3)}. \quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (4), описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем, была получена с помощью принципа Лагранжа в [14] без применения соотношений связи напряжений и деформаций. Поэтому ее можно использовать здесь как исходную. Выделив в обобщенных внутренних усилиях, входящих в нее, линейные и нелинейные составляющие в соответствии с формулами (8), получим:

$$\begin{cases} T_r,_r + \dfrac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \\ H_r,_r + \dfrac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \\ M_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q + q_\omega, \\ D_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}\left(2D_r,_r - D_\varphi,_r\right) = -q + g_\omega. \end{cases} \quad (9)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \quad M_r,_r + \frac{1}{r}\left(M_r - M_\varphi\right) = M_{r\omega},_r + \frac{1}{r}\left(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}\right),$$
$$D_r = D_r^0 + D_{r\omega}, \quad D_r,_r + \frac{1}{r}\left(D_r - \mathrm{D}_\varphi\right) = D_{r\omega},_r + \frac{1}{r}\left(D_{r\omega} - \mathrm{D}_{\varphi\omega}\right). \quad (10)$$

где нижний индекс «e» для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (9), (10) и включенные в слагаемые с нижним индексом «ω», будут определяться формулами:

$$p_\omega = T_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\varphi\omega},_r)\,, \quad g_\omega = D_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}\left(2D_{r\omega},_r - D_{\varphi\omega},_r\right). \qquad (11)$$

2 Разрешающая система дифференциальных уравнений. Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, приведенными в [14], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), приводится к виду:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r - a_4 v,_r) + K_3^- v,_r = p_\omega\,,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_5\psi - a_6 w,_r - a_7 v,_r) = h_\omega\,,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u + a_6\psi - a_8 w,_r - a_9 v,_r) = -q + q_\omega\,,$$
$$\mathrm{L}_3(a_4 u + a_7\psi - a_9 w,_r - a_{10} v,_r) + \frac{c}{6}K_3^-\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) = -q + g_\omega\,. \qquad (12)$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+\,, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+)\,, \quad a_3 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+\,,$$

$$a_4 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+\,, \quad a_5 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\,,$$

$$a_6 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right], \quad a_7 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+\right],$$

$$a_8 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\,, \quad a_9 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{c^3}{3}K_3^+\,,$$

$$a_{10} = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{4}{15}c^3 K_3^+\,, \quad \mathrm{L}_2(g) = \frac{1}{r}\left((rg),_r\right),_r\,, \quad \mathrm{L}_3(g) = \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r\,.$$

Краевая задача замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (12) силовых (11) или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке контура пластины при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w,_r = v,_r = 0\,,$$

при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = v = w,_{rr} = v,_{rr} = 0\,. \qquad (13)$$

Система уравнений равновесия (12) является существенно нелинейной. Для ее решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. В результате система принимает итерационный вид

$$\mathrm{L}_2(a_1 u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3 w^{(n)},_r - a_4 v^{(n)},_r) + K_3^- v^{(n)},_r = p_\omega^{(n-1)}\,,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6 w^{(n)},_r - a_7 v^{(n)},_r) = h_\omega^{(n-1)}\,,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u^{(n)} + a_6\psi^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) = -q + q_\omega^{(n-1)}\,,$$
$$\mathrm{L}_3(a_4 u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_9 w^{(n)},_r - a_{10} v^{(n)},_r) + \frac{c}{6}K_3^-\left(v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r}\right) = -q + g_\omega^{(n-1)}\,, \qquad (14)$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки в (14) вычисляются по результатам предыдущего приближения. Они определяются соотношениями $(\alpha = r, \psi)$

$$p_\omega^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)})\,, \quad h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)})\,,$$

$$q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r)\,, \quad g_\omega^{(n-1)} = D_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r}\left(2D_{r\omega}^{(n-1)},_r - D_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r\right),$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)}=\sum_{k=1}^{3}2G_k\int_{h_k}\omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)})\text{Э}_\alpha^{(k,n-1)}\,\mathrm{d}z\,,\quad M_{\alpha\omega}^{(n-1)}=\sum_{k=1}^{3}2G_k\int_{h_k}\omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)})\text{Э}_\alpha^{(k,n-1)}z\,\mathrm{d}z\,,$$

$$S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}=2G_3\int_{-c}^{c}\omega_3(\varepsilon_u^{(3,n-1)})\text{Э}_\alpha^{(3,n-1)}z^2\,\mathrm{d}z\,,\quad H_{\alpha\omega}^{(n-1)}=M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}+c\left(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)}-T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}\right),$$

$$D_{\alpha\omega}^{(n-1)}=M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)}+\frac{1}{2}M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}+\frac{1}{2c}S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}\,.$$

Итерационное решение системы дифференциальных уравнений (14) будет

$$\psi^{(n)}=-\frac{1}{a_6}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)+\frac{C_1^{(n)}r}{4a_6}\left(2\ln r-1\right)-\frac{1}{a_6}\left(a_3u^{(n)}-a_8w^{(n)},_r-a_9v^{(n)},_r\right)+C_3^{(n)}\frac{r}{2}+C_4^{(n)}\frac{1}{r}\,,$$

$$u^{(n)}=b_1v^{(n)},_r+b_2\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)+b_3\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)-b_2C_1^{(n)}\frac{r}{4}\left(2\ln r-1\right)-$$

$$-b_3C_2^{(n)}\frac{r}{4}\left(2\ln r-1\right)+b_4\mathrm{L}_2^{-1}\left(h_\omega^{(n-1)}\right)+b_5\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)+C_5^{(n)}\frac{r}{2}+C_6^{(n)}\frac{1}{r}\,,$$

$$v^{(n)}=-\frac{C_7^{(n)}}{\beta}J_0(\beta r)-\frac{C_8^{(n)}}{\beta}Y_0(\beta r)+\frac{\pi}{2}\left(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r-\right.$$

$$\left.-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\right)+C_9^{(n)}\,,$$

$$w^{(n)}=b_6\int u^{(n)}\,\mathrm{d}r-\frac{a_6a_7-a_5a_9}{a_6^2-a_5a_8}v^{(n)}-\frac{a_5}{a_6^2-a_5a_8}\int\mathrm{L}_3^{-1}(q-q_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r-$$

$$-\frac{a_6}{\left(a_6^2-a_5a_8\right)}\int\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r+\frac{C_1^{(n)}a_5}{\left(a_6^2-a_5a_8\right)}\frac{r^2}{4}\left(\ln r-1\right)+C_{10}^{(n)}\frac{r^2}{4}+C_{11}^{(n)}\ln r+C_{12}^{(n)}\,,\qquad(15)$$

где $q_1^{(n-1)}(r)$ – функция, зависящая от вида нагрузки.

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)}=C_2^{(n)}=C_4^{(n)}=C_6^{(n)}=C_8^{(n)}=C_{11}^{(n)}=0\,.$$

Если контур заделан, то из принятых граничных условий типа (13) получим:

$$C_3^{(n)}=\frac{2}{a_6r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0},\quad C_5^{(n)}=-\frac{2b_2}{r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-\frac{2b_3}{r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-\frac{2b_4}{r_0}\mathrm{L}_2^{-1}\left(h_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-$$

$$-\frac{2b_5}{r_0}\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0},\quad C_7^{(n)}=-\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)}\left(Y_1(\beta r_0)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}-\right.$$

$$\left.-J_1(\beta r_0)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}\right),\quad C_9^{(n)}=\frac{C_7^{(n)}}{\beta}J_0(\beta r_0)-\frac{\pi}{2}\left(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}-\right.$$

$$\left.-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}\right),$$

$$C_{10}^{(n)}=\frac{2a_5}{\left(a_6^2-a_5a_8\right)r_0}\mathrm{L}_3^{-1}(q-q_\omega^{(n-1)})\Big|_{r=r_0}+\frac{2a_6}{\left(a_6^2-a_5a_8\right)r_0^2}\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\Big|_{r=r_0}\,,$$

$$C_{12}^{(n)}=\left(\frac{a_5}{a_6^2-a_5a_8}-b_2b_6\right)\int\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}+\left(\frac{a_6}{\left(a_6^2-a_5a_8\right)r_0}-b_4b_6\right)\int\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}-$$

$$-b_5b_6\int\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}-b_3b_6\int\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}r\Big|_{r=r_0}-b_6C_5^{(n)}\frac{r_0^2}{4}-C_{10}^{(n)}\frac{r_0^2}{4}\,.$$

В случае шарнирного опирания контура имеем

$$C_3^{(n)}=\left(\frac{2a_6}{a_6^2-a_5a_8}\right)\frac{1}{r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}+\frac{2a_8}{a_6^2-a_5a_8}\frac{1}{r_0}\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\Big|_{r=r_0}-$$

$$
-\frac{2}{r_0}\left(\frac{a_9}{a_6}-\frac{a_8\left(a_6a_7-a_5a_9\right)}{a_6\left(a_6^2-a_5a_8\right)}\right)\left[C_7^{(n)}J_1(\beta r_0)+\frac{\pi}{2}\left(Y_1(\beta r_0)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-J_1(\beta r_0)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}\right)\right]-\frac{a_8}{a_6}C_{10}^{(n)},
$$

$$
C_5^{(n)}=-\frac{2b_1C_7^{(n)}J_1(\beta r_0)}{r_0}-\frac{b_1\pi}{r_0}\left(Y_1(\beta r_0)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}-\right.
$$

$$
\left.-J_1(\beta r_0)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}\right)-\frac{2b_2}{r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-\frac{2b_3}{r_0}\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-
$$

$$
-\frac{2b_4}{r_0}\mathrm{L}_2^{-1}\left(h_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-\frac{2b_5}{r_0}\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0},
$$

$$
C_7^{(n)}=\frac{\pi}{2\left(\beta J_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}J_1(\beta r_0)\right)}\left[\left(\beta J_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}J_1(\beta r_0)\right)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}-\right.
$$

$$
-\left(\beta Y_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}Y_1(\beta r_0)\right)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+J_1(\beta r_0)Y_1(\beta r_0)q_1^{(n-1)}(r_0)r_0-
$$

$$
\left.-Y_1(\beta r_0)J_1(\beta r_0)q_1^{(n-1)}(r_0)r_0\right],
$$

$$
C_9^{(n)}=\frac{C_7^{(n)}}{\beta}J_0(\beta r_0)-\frac{\pi}{2}\left(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}\right),
$$

$$
C_{10}^{(n)}=-2\left(\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_1-\frac{a_6a_7-a_5a_9}{a_6^2-a_5a_8}\right)C_7^{(n)}\left(\beta J_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}J_1(\beta r_0)\right)-
$$

$$
-\left(\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_1-\frac{a_6a_7-a_5a_9}{a_6^2-a_5a_8}\right)\pi\left[\left(\beta Y_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}Y_1(\beta r_0)\right)\int J_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+\right.
$$

$$
+Y_1(\beta r_0)J_1(\beta r_0)q_1^{(n-1)}(r_0)r_0-\left(\beta J_0(\beta r_0)-\frac{1}{r_0}J_1(\beta r_0)\right)\int Y_1(\beta r)q_1^{(n-1)}(r)r\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+
$$

$$
\left.+J_1(\beta r_0)Y_1(\beta r_0)q_1^{(n-1)}(r_0)r_0\right]-2\left(\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_2-\frac{a_5}{a_6^2-a_5a_8}\right)\left(\mathrm{L}_3^{-1}(q-q_\omega^{(n-1)})\right),_r\Big|_{r=r_0}-
$$

$$
-2\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_3\,\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-2\left(\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_4-\frac{a_6}{a_6^2-a_5a_8}\right)\left(\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\right),_r\Big|_{r=r_0}-
$$

$$
-2\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}b_5\,\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)\Big|_{r=r_0}-\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}C_5^{(n)},
$$

$$
C_{12}^{(n)}=-\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}\left(b_2\int\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-q_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+b_3\int\mathrm{L}_3^{-1}\left(q-g_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+\right.
$$

$$
\left.+b_4\int\mathrm{L}_2^{-1}\left(h_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+b_5\int\mathrm{L}_2^{-1}\left(p_\omega^{(n-1)}\right)\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}\right)+\frac{a_5}{a_6^2-a_5a_8}\int\mathrm{L}_3^{-1}(q-q_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}+
$$

$$
+\frac{a_6}{a_6^2-a_5a_8}\int\mathrm{L}_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}\,r\Big|_{r=r_0}-\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}C_5^{(n)}\frac{r_0^2}{4}-C_{10}^{(n)}\frac{r_0^2}{4}.
$$

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № Т18Р-090)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. 2003. Vol. 35. N 4. P. 346-352.*

2. *Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.*
3. *Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. 2010. Vol. 46. N 1. P. 86-93.*
4. *Starovoitov, E.I. Vibrations of Circular Composite Plates on an Elastic Foundation under the Action of Local Loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Composite Materials. – 2016. – Vol. 52, N 5. – pp. 665–672. DOI: 10.1007/s11029-016-9615-y.*
5. *Старовойтов, Э.И. О переменном нагружении вязко-пластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1980.– № 2. С. 92–96.*
6. *Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / Москвитин В.В. Старовойтов Э.И. // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 116–121.*
7. *Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2001. № 4. С. 37–40.*
8. *Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Старовойтов Э.И. // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.*
9. *Starovoitov, É.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials / É.I. Starovoitov// Strength of materials. – 1988 – Vol. 20, N 4. – P. 426–431.*
10. *Старовойтов Э.И. Термосиловое нагружение пологих трехслойных оболочек / Э.И. Старовойтов // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1989. Т. 5. С. 114–119.*
11. *Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44. – No. 9. – Pp.1032–1040.*
12. *Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – №4 (33). – С. 53–57.*
13. *Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – №10. – С. 55–66.*
14. *Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.*
15. *Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.*