УДК 621.317.32:624.042.2

РАСЧЕТ КОНТУРНОГО УСИЛИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

[1] Мартыненко Т.М., [2] Скляр О.Н., [2] Мартыненко И.М.

[1] Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск
[2]УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Одной из основных задач, возникающих при проектировании строительных конструкций, является задача определения полей перемещений и напряжений от действия заданных на конструкцию нагрузок. При этом поле напряжений имеет первостепенное значение. В общем случае, в соответствии с теорией упругости [1-4], решение такой задачи сводится к системе дифференциальных уравнений равновесия и совместности перемещений, при выполнении граничных условий для напряжений и перемещений. При этом напряжения и деформации связаны уравнениями состояния материала или законом Гука. При больших растягивающих усилиях возможно возникновение краевых эффектов, исследование которых позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки как суперпозицию основного и дополнительного [4]. Основное напряженно-деформированное состояние, как правило, описывается уравнениями безмоментной теории, дополнительное – линеаризованной системой уравнений относительно исходной системы уравнений движения [7]. Настоящая работа развивает это актуальное направление исследований и посвящена определению полей перемещений и напряжений, возникающих в непологой сферической оболочке от действия заданных нагрузок.

В качестве координатных линий будем рассматривать меридианы и параллели сферы, являющиеся линиями главных кривизн сферической оболочки. При этом оба главных радиуса кривизны R_1 и R_2 равны друг другу и равны радиусу сферы r_0; положение любой точки на меридиане определяется углом θ, отсчитываемым от вершины сферы. В соответствии с технической теорией оболочек Кирхгофа–Лява [1-6] уравнения равновесия осесимметричной деформации сферической оболочки представим в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\theta}\left(T_1\sin(\theta)\right)-T_2\cos(\theta)+N_1\sin(\theta)=0,\\
\frac{d}{d\theta}\left(N_1\sin(\theta)\right)-\left(T_1+T_2\right)\sin(\theta)=pr_0\sin(\theta),\\
\frac{d}{d\theta}\left(M_1\sin(\theta)\right)-M_2\cos(\theta)-N_1r_0\sin(\theta)=0,
\end{gathered}\tag{1.1}$$

где T_1 – нормальное усилие, направленное по касательной к меридианному кругу; T_2 – нормальное усилие, направленное по касательной к параллельному кругу; M_1 – изгибающий момент, действующий в площадках, перпендикулярных меридиану; M_2 – изгибающий момент, действующий в площадках, перпендикулярных параллельному кругу; θ – окружная координата; N_1 – касательные усилия, отнесенные к единице длинны срединной поверхности; p – интенсивность равномерно распределенной нагрузки нормального к поверхности сферической оболочке; r_0 – радиус сферы.

Таким образом, для сферической оболочки, загруженной поперечной радиальной равномерно распределенной нагрузкой p, получим следующие частные решения:

$$T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = -\frac{pr_0}{2},\ N_1 = M_1 = M_2 = 0, \tag{1.2}$$

где $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ – нормальное усилие, направленное по касательной к меридианному кругу посередине пролета, соответственно.
Согласно закону Гука [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta}\left(T_1 - \mu T_2\right),\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta}\left(T_2 - \mu T_1\right). \tag{1.3}$$

Здесь E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, δ – толщина срединной поверхности оболочки.

Из соотношений (1.3) следуют выражения для компонентов деформации, соответствующие частному решению (1.2)

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = -\frac{pr_0}{2E\delta}\left(1-\mu\right). \tag{1.4}$$

Вектор перемещений любой точки срединной поверхности оболочки разложим на три составляющих u – перемещение в направлении касательной к меридиану, v – перемещение в направлении касательной к параллельному кругу, ω – перемещение в направлении нормали к срединной поверхности (к центру сферы). При осесимметричном деформировании срединной поверхности оболочки соотношения, связывающие деформации и перемещения срединной поверхности (u, ω – проекция перемещения точки срединной поверхности) имеют вид [4, 7]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0}\left(\frac{du}{d\theta} - \omega\right),\ \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0}\left(u\operatorname{ctg}\left(\theta\right) - \omega\right), \tag{1.5}$$

Отсюда с учетом (1.6) следует

$$u_0 = 0,\ \omega_0 = \frac{pr_0}{2E\delta}\left(1-\mu\right). \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что радиус сферы изменяется на величину ω_0. Заметим, что окружное перемещение v_0 тождественно равно нулю. Для замкнутой сферы, загруженной равномерно распределённой нагрузкой, безмоментное решение является общим решением, так что безмоментное напряжённое состояние является единственно возможным. Если же мы имеем не полную сферу, а лишь ее часть, для обеспечения безмоментного состояния этого сферического сегмента необходимо помимо внешнего давления p загрузить сферу на краю $\theta = \theta_0$ распределёнными по всему контуру нормальными усилиями, касательными к меридианами и равными:

$$T_1^0 = \frac{pr_0}{2}. \tag{1.7}$$

При этом, оболочка, должна обеспечить нормальное перемещение ω на её краю $\theta = \theta_0$, равное:

$$\omega = \omega_0 = \frac{pr_0}{2E\delta}\left(1-\mu\right). \tag{1.8}$$

Обозначим проекцию этого нормального перемещения на направление любого радиуса опорного контура сферической оболочки через Δ_0, тогда:

$$\Delta_0 = \omega_0 \sin\theta_0 = \frac{pr_0}{2E\delta}\left(1-\mu\right)\sin\theta_0. \tag{1.9}$$

Величина Δ_0 есть ни что иное, как изменение радиуса опорного контура сферической оболочки.

Для нахождения истинного напряженного состояния необходимо к частному решению системы (1.1) добавить решение соответствующей системы однородных уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}\left(T_1\sin(\theta)\right)-T_2\cos(\theta)+N_1\sin(\theta)=0,\\&\frac{d}{d\theta}\left(N_1\sin(\theta)\right)-\left(T_1+T_2\right)\sin(\theta)=0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Отсюда после соответствующих преобразований получим

$$T_1=N_1\mathrm{ctg}(\theta)+\frac{C}{\sin^2(\theta)}\tag{1.11}$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

С учетом равенства (1.11) первое уравнение системы (1.10) принимает вид

$$\frac{dN_1}{d\theta}-\frac{C}{\sin^2\theta}-T_2=0,$$

или

$$T_2=\frac{dN_1}{d\theta}-\frac{C}{\sin^2\theta}.\tag{1.12}$$

Поскольку из выражений (1.11) и (1.12) следует, что при $\theta=0$ (в вершине сферы) усилия T_1 и T_2 обращаются в бесконечность при любых заданных на краю усилиях, неизвестную постоянную интегрирования C примем равной нулю. Таким образом, решения однородных уравнений (1.10) принимают вид:

$$T_1=N_1\mathrm{ctg}(\theta),\ T_2=\frac{dN_1}{d\theta}.\tag{1.13}$$

Для нахождения перерезывающего усилия N_1 используем третье уравнение системы (1.1). С учетом выражений для изгибающих моментов $M_1=D\left(x_1+\mu x_2\right)$, $M_2=D\left(x_2+\mu x_1\right)$ и кривизн (1.2) это уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2}+\frac{d\chi}{d\theta}ctg\theta-\chi\left(\mu+ctg^2\theta\right)=\frac{N_1r_0^2}{D}.\tag{1.14}$$

Здесь $D=\dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость, χ – угол поворота меридиана.

Уравнение (1.14) следует дополнить условием неразрывности срединной поверхности оболочки. Для этого выпишем выражения для компонентов деформации ε_1, ε_2 и угла поворота меридиана χ:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{r_0}\left(\frac{du}{d\theta}-\omega\right),\ \varepsilon_2=\frac{1}{r_0}\left(u\mathrm{ctg}(\theta)-\omega\right),\ \chi=\frac{1}{r_0}\left(\frac{d\omega}{d\theta}+u\right).\tag{1.15}$$

Из второго и третьего равенств (1.15)

$$r_0\chi=\left(\frac{du}{d\theta}-u\mathrm{ctg}(\theta)\right)\mathrm{ctg}(\theta)-r_0\frac{d\varepsilon_2}{d\theta}.$$

Из первых двух равенств (1.17) следует, что $r_0\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)=\dfrac{du}{d\theta}-u\mathrm{ctg}(\theta)$, поэтому

$$\chi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\text{ctg}(\theta) - \frac{d\varepsilon_2}{d\theta}.$$

Отсюда, последовательно учитывая (1.15) и (1.13), будем иметь уравнение, связывающее перерезывающую силу N_1 с углом поворота χ, и дополняющее уравнение (1.14)

$$\frac{d^2N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta}\text{ctg}(\theta) + N_1\left(\mu - \text{ctg}^2(\theta)\right) = -E\delta\chi. \qquad (1.16)$$

Решение поставленной задачи сводится к интегрированию системы уравнений (1.14), (1.16).

Уравнение (1.16) и есть второе уравнение, связывающее перерезывающую силу N_1 с углом поворота χ и вытекающее из условий сплошности сферической оболочки. Таким образом, мы пришли к следующей системе двух уравнений:

$$\frac{d^2N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta}\text{ctg}(\theta) + N_1\left(\mu - \text{ctg}^2(\theta)\right) = -E\delta\chi; \quad \frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \frac{d\chi}{d\theta}\text{ctg}(\theta) - \chi\left(\mu + \text{ctg}^2(\theta)\right) = \frac{N_1 r_0^2}{D}.$$

к интегрированию которой и сводится решение поставленной задачи.

Определив T_1 и χ мы можем легко определить все усилия и моменты, а также изменения кривизны и изменение радиуса опорного контура по формулам:

$$T_1 = N_1 ctg\theta, \; T_2 = \frac{dN_1}{d\theta}. \qquad (1.17)$$

$$x_1 = \frac{1}{r_0}\frac{d\chi}{d\theta}; \; x_2 = \frac{1}{r_0}\chi ctg\theta. \qquad (1.18)$$

$$M_1 = D(x_1 + \mu x_2) = \frac{D_0}{r_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \mu\chi ctg\theta\right);$$

$$M_2 = D(x_2 + \mu x_1) = \frac{D_0}{r_0}\left(\chi ctg\theta + \mu\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right). \qquad (1.19)$$

Что касается величины Δ, (полное перемещение) то если учесть нормальное перемещение $\omega_0 = -r_0\varepsilon_2$, а также зависимости (1.3) и (1.17), для случая загрузки сферической оболочки контурными усилиями она будет равна:

$$\Delta_0 = -r_0\varepsilon_2\sin(\theta_0) = -\frac{r_0}{E\delta}(T_2 - \mu T_1)\sin(\theta_0) = -\frac{r_0\sin(\theta_0)}{E\delta}\left(\frac{dN_1}{d\theta} - \mu N_1\text{ctg}(\theta_0)\right). \qquad (1.20)$$

Формула (1.20) показывает, что в районе опорного контура в сферической оболочке возникают значительные изгибающие моменты, однако эти изгибающие моменты и им соответствующие изгибающие напряжения быстро затухают по мере удаления от опорного контура.

Заключение. Для обеспечения достаточной прочности относительно небольшой участок у опорного контура сферической оболочки необходимо сделать утолщенным, поэтому оболочка должна иметь ступенчато-переменную толщину. Анализ точного решения показывает, что у сферических оболочек, центральный угол который превышает 20-30^0, деформации, вызываемые приложенными к ее контуру внешними силами, очень быстро затухать по мере удаления от этого контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байков В. Н., Хампке Э., Рауэ Э. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1990.-232 с.*

2. *Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: STT, 2004.- 465с.*
3. *Bangash M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.*
4. *Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.*
5. *Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.*
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука , 1966г.*
7. *Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.*
8. *Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. Publisher Simulia, 2008. 711 p.*
9. *Matsagar Vasant A. Computing stress and displacement response of composite plates under blast. Disaster Advances. 2014. Vol. 7, No 1. P. 23−38.*