

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теория механизмов и машин»

П. П. Анципорович  
В. К. Акулич  
Е. М. Дубовская

# СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Пособие

для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология  
машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2019

УДК 621.8 (076.5)

ББК 34.41я7

А74

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ  
(зав. кафедрой – д-р техн. наук, профессор *А. Н. Орда*);  
д-р техн. наук, профессор *В. М. Сурин*

**Анципорович, П. П.**

А74      Синтез зубчатых зацеплений : пособие для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Е. М. Дубовская. – Минск: БНТУ, 2019. – 57 с.

ISBN 978-985-550-856-5.

Пособие представляет собой текст лекций по разделу проектирования зубчатых зацеплений. Рассмотрены основы получения профилей зубчатых колес и свойства эвольвентных зацеплений.

Рекомендуется студентам инженерно-технических специальностей.

**УДК 621.8 (076.5)**

**ББК 34.41я7**

**ISBN 978-985-550-856-5**

© Анципорович П. П., Акулич В. К.,  
Дубовская Е. М., 2019

© Белорусский национальный  
технический университет, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Основная теорема плоского зацепления (теорема Виллиса).....	4
2. Эвольвента окружности, ее уравнения и свойства.....	8
3. Основные геометрические параметры зубчатых колес .....	10
4. Основные свойства и характеристики эвольвентного зацепления.....	14
5. Качественные показатели зацепления.....	19
6. Методы нарезания эвольвентных зубчатых колес .....	23
7. Исходный производящий контур. Колеса без смещения и со смещением исходного контура.....	25
8. Станочное зацепление нарезаемого колеса с реечным инструментом.....	28
9. Подрезание зубьев.....	31
10. Определение угла зацепления.....	34
11. Интерференция зубьев .....	37
12. Особенности косозубых эвольвентных колес .....	39
13. Особенности внутреннего зацепления цилиндрических эвольвентных колес .....	42
14. Общие сведения о неэвольвентных зацеплениях.....	45
15. Общие сведения о конических зубчатых передачах .....	49
16. Общие сведения о червячных передачах .....	53
Список использованной литературы .....	57

# 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПЛОСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ (ТЕОРЕМА ВИЛЛИСА)

*Зубчатым зацеплением* называется высшая кинематическая пара, образуемая последовательно взаимодействующими поверхностями зубьев. В случае плоских зацеплений можно рассматривать взаимодействующие профили, то есть кривые, получаемые в сечении сопряженных поверхностей плоскостью, параллельной плоскости движения. Профили, обеспечивающие передачу движения с заданным законом их относительного движения, называются *сопряженными*. Синтез зубчатого зацепления заключается в определении размеров и формы сопряженных профилей зубьев по заданному закону преобразования вращательного движения. Для решения этой задачи используется основная теорема плоского зацепления (теорема Виллиса), устанавливающая геометрические условия сопряжения профилей, передающих движение с заданным законом изменения передаточного отношения.

*Общая нормаль, проведенная через точку касания двух соприкасающихся звеньев, образующих высшую кинематическую пару качения и скольжения, делит межосевое расстояние на части, обратно пропорциональные мгновенным угловым скоростям звеньев* (рис. 1).

$$\frac{O_2 W}{O_1 W} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

## *Доказательство*

Точку контакта звеньев  $K$  можно рассматривать как две слитные точки  $K_1$  и  $K_2$ , принадлежащие соответственно звеньям 1 и 2.

$$V_{K_1} = \omega_1 O_1 K,$$

$$V_{K_2} = \omega_2 O_2 K.$$

Каждую из этих скоростей разложим на нормальную и касательную составляющие.

$$\vec{V}_{K1} = \vec{V}_{K1}^n + \vec{V}_{K1}^t, \quad \vec{V}_{K2} = \vec{V}_{K2}^n + \vec{V}_{K2}^t.$$

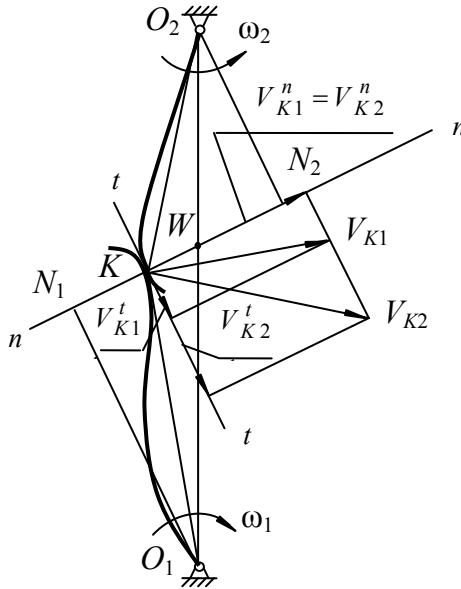


Рис. 1

Чтобы профили не отставали и не внедрялись друг в друга, должно соблюдаться равенство

$$\vec{V}_{K1}^n = \vec{V}_{K2}^n.$$

Из подобия  $\Delta O_1KN_1$  и  $\Delta KV_{K1}V_{K1}^n$  следует, что

$$\frac{O_1N_1}{O_1K} = \frac{V_{K1}^n}{V_{K1}} = \frac{V_{K1}^n}{O_1K \cdot \omega_1}.$$

Отсюда  $V_{K1}^n = O_1 N_1 \cdot \omega_1$ .

Аналогично, из подобия  $\Delta O_2 K N_2$  и  $\Delta K V_{K2} V_{K2}^n$  следует, что

$$\frac{O_2 N_2}{O_2 K} = \frac{V_{K2}^n}{V_{K2}} = \frac{V_{K2}^n}{O_2 K \cdot \omega_2}.$$

Отсюда  $V_{K2}^n = O_2 N_2 \cdot \omega_2$ .

Так как  $V_{K1}^n = V_{K2}^n$ , то  $O_1 N_1 \cdot \omega_1 = O_2 N_2 \cdot \omega_2$  или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1}.$$

Из подобия  $\Delta O_2 N_2 W$  и  $\Delta O_1 N_1 W$  следует, что

$$\frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 W}{O_1 W}.$$

Значит,

$$\frac{O_2 W}{O_1 W} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Точка  $W$ , в которой нормаль  $n-n$  пересекает межосевую линию  $O_1 O_2$ , является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев 1 и 2 ( $V_{W1} = \omega_1 \cdot O_1 W = \omega_2 \cdot O_2 W = V_{W2}$ ) и называется **полюсом зацепления**.

### *Следствия из теоремы*

1. При  $U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \text{const}$  полюс зацепления перемещается по

межосевой линии.

2. При  $U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$  полюс зацепления является неподвижной

точкой и определяет радиусы  $r_{W1} = O_1W$  и  $r_{W2} = O_2W$  окружностей, которые перекатываются одна по другой без скольжения (подобно гладким дискам фрикционной передачи) и называются **начальными**, то есть они являются центроидами в относительном движении.

3. Произвольно выбранному профилю зуба одного колеса соответствует вполне определенный сопряженный профиль зуба другого колеса. При этом сопряженные профили зубьев являются **взаимоогибаемыми**, то есть не пересекающимися друг с другом в процессе контакта. К кривым, удовлетворяющим приведенным требованиям, относятся такие, как эвольвента окружности, циклоидные кривые и некоторые другие.

## 2. ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ, ЕЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА

При передаче вращения между параллельными осями преимущественно используется эвольвентное зацепление, в котором боковые профили зубьев выполнены по эвольвенте окружности.

*Эвольвентой окружности* называется траектория любой точки прямой линии, перекатывающейся по окружности без скольжения (рис. 2).

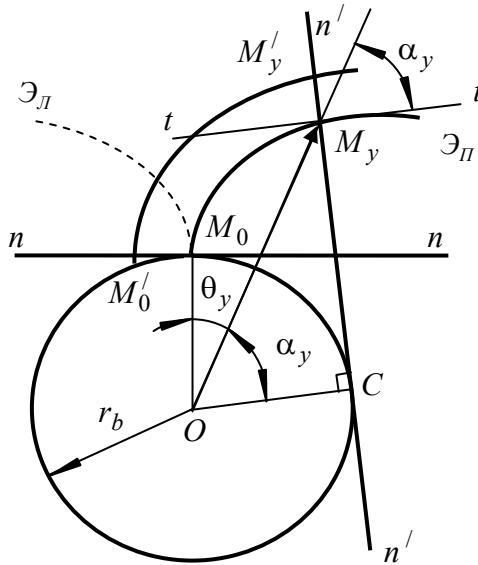


Рис. 2

Окружность, по которой перекатывается прямая  $n-n$ , образующая эвольвенту, называется *основной окружностью*. Эвольвенту можно также представить как траекторию любой точки гибкой нерастяжимой нити, развертываемой с круглого барабана.

Уравнения эвольвенты получаются из условия перекатывания прямой без скольжения по основной окружности радиуса  $r_b$ , то



есть  $\cup CM_O = CM_y$ . Так как  $\cup CM_O = r_b(\theta_y + \alpha_y)$ , а из  $\Delta OCM_y$   $CM_y = r_b \operatorname{tg} \alpha_y$ , то  $r_b(\theta_y + \alpha_y) = r_b \operatorname{tg} \alpha_y$ , откуда

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

Функция  $\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$  называется **инволютой** и обозначается  $\operatorname{inv} \alpha_y$ . Тогда

$$\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y. \quad (1)$$

Полярный угол  $\theta_y$  называется **эвольвентным углом профиля** в данной точке  $M_y$ .

Радиус-вектор  $\overline{OM_y}$  произвольной точки  $M_y$  эвольвенты равен (из  $\Delta OCM_y$ )

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}. \quad (2)$$

**Углом профиля эвольвенты** в данной точке  $M_y$  называется острый угол  $\alpha_y$  между касательной  $t-t$  к эвольвенте и радиусом-вектором  $\overline{OM_y}$ , проведенным в данную точку. Этот угол равен углу  $\angle COM_y$ .

Уравнения (1) и (2), рассматриваемые совместно, являются **уравнениями эвольвенты** в полярных координатах в параметрической форме (параметр – угол профиля  $\alpha_y$ ).

Угол  $\nu_y = \theta_y + \alpha_y$  называется **углом развернутости эвольвенты**. Эвольвента является разверткой основной окружности.

Из условия образования эвольвенты вытекают следующие ее **свойства**.

1. Эвольвента начинается на основной окружности и имеет правую и левую ветви ( $M_O \mathcal{E}_П$  и  $M_O \mathcal{E}_Л$ ).

2. Нормаль к эвольвенте в любой ее точке является касательной к основной окружности, причем точка касания есть центр кривизны, а расстояние по нормали от точки касания до эвольвенты есть радиус кривизны эвольвенты в данной точке ( $\rho_y = CM_y$ ).

3. Две одноименные эвольвенты одной и той же окружности являются эквидистантными (равноотстоящими); расстояние между ними по нормали равно дуге основной окружности, заключенной между началами эвольвент ( $M'_y M_y = \cup M'_O M_O$ ).

4. Форма эвольвенты зависит только от радиуса основной окружности. В пределе при  $r_b \rightarrow \infty$  эвольвента обращается в прямую линию.

Теоретически эвольвента может быть образована как огибающая в относительном движении прямолинейного профиля зуборезной рейки или эвольвентного профиля зуба другого колеса (зуборезного долбяка). Подробнее см. п. 6.

### 3. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Рассмотрим торцовое сечение цилиндрического прямозубого колеса с внешними зубьями (рис. 3).

- $r_a$  – радиус окружности вершин зубьев;
- $r_y$  – радиус окружности произвольного радиуса;
- $r$  – радиус делительной окружности;
- $r_b$  – радиус основной окружности;
- $r_f$  – радиус окружности впадин.

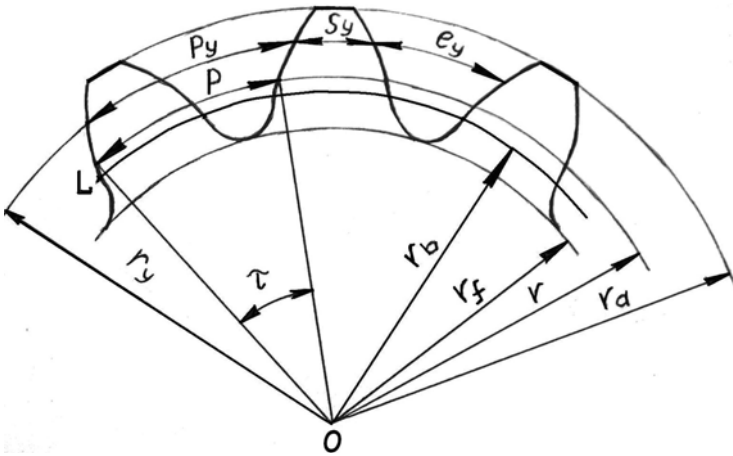


Рис. 3

Высота зубьев ограничена окружностью вершин и окружностью впадин:

$$h = r_a - r_f.$$

Профили зубьев являются эвольвентами основной окружности радиуса  $r_b$ . Эвольвентный профиль и окружность впадин соединяются переходной кривой, которая имеет различное очертание в зависимости от способа нарезания зубьев.

Общая точка  $L$  эвольвенты и переходной кривой называется **граничной точкой профиля**.

Расстояние между одноименными (левыми или правыми) профилями соседних зубьев по дуге окружности называется **окружным шагом зубьев**. Шаг  $p_y$  складывается из окружной толщины зуба  $s_y$  и окружной ширины впадины  $e_y$ . Для окружности произвольного радиуса  $r_y$

$$p_y = s_y + e_y.$$

Длину окружности можно представить как  $2\pi r_y = z p_y$ , где  $z$  – число зубьев колеса. Тогда

$$r_y = \frac{p_y}{\pi} \cdot \frac{z}{2} = \frac{m_y z}{2}.$$

Отношение  $m_y = \frac{p_y}{\pi}$  называется **окружным модулем зубьев** на окружности радиуса  $r_y$ . Шаг  $p_y$  и модуль  $m_y$  зависят от того, к какой окружности они относятся. На колесе выделяется расчетная окружность, окружной модуль на которой равен стандартному модулю зуборезного инструмента. Эта окружность называется **делительной**, а окружной модуль зубьев на делительной окружности называется **расчетным модулем** зубчатого колеса

$$m = \frac{p}{\pi},$$

где  $p$  – шаг по делительной окружности.

Расчетный модуль – основной параметр зубчатого колеса, его значения (в мм) определены ГОСТ 9563–60. Два колеса в зацеплении должны иметь одинаковые расчетные модули. Радиус делительной окружности (делительный радиус) равен

$$r = \frac{m z}{2}. \quad (3)$$

На основании уравнения эвольвенты (2)

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол профиля эвольвенты на делительной окружности. Для прямозубых колес, нарезанных стандартным инструментом,  $\alpha = 20^\circ$ .

Из формул (3) и (4) следует, что радиус основной окружности (основной радиус) равен

$$r_b = r \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha. \quad (5)$$

Часть зуба, заключенная между окружностью вершин и делительной окружностью, называется **делительной головкой зуба**. Ее высота

$$h_a = r_a - r.$$

Часть зуба, заключенная между делительной окружностью и окружностью впадин, называется **делительной ножкой зуба**. Ее высота

$$h_f = r - r_f.$$

Центральный угол  $\tau = \frac{2\pi}{z}$ , или  $\tau = \frac{360^\circ}{z}$ , называется **угловым шагом зубьев**.

#### 4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим внешнее эвольвентное зацепление цилиндрических зубчатых колес (рис. 4).

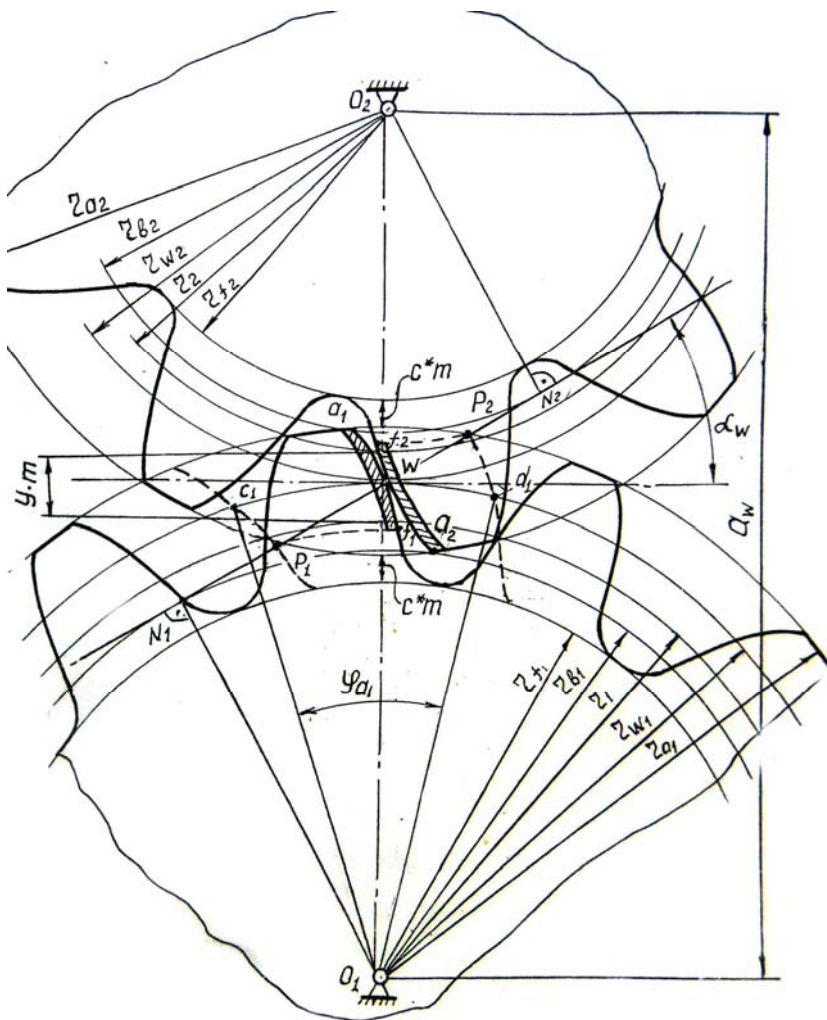


Рис. 4

Оно обладает следующими основными **свойствами**:

1. Если профиль зуба одного колеса является эвольвентным, то сопряженный профиль зуба парного колеса также является эвольвентным (или прямолинейным в реечном зацеплении).

Доказательство этого положения состоит в следующем. Пусть профиль зуба колеса 1 очерчен по эвольвенте основной окружности радиуса  $r_{b1}$ . Из подобия  $\Delta O_1 N_1 W$  и  $\Delta O_2 N_2 W$  следует, что

$$U_{12} = \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 N_2}{r_{b1}} = \text{const},$$

откуда следует, что  $O_2 N_2 = \text{const}$ . Характерным признаком эвольвенты является постоянство расстояний до ее нормалей от центра основной окружности. Но так как  $O_2 N_2 = \text{const}$ , то профиль зуба колеса 2 есть эвольвента окружности радиуса  $r_{b2} = O_2 N_2$ .

2. Передаточное отношение в эвольвентном зацеплении постоянно:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}.$$

Это следует из того, что при вращении колес общая нормаль к сопряженным профилям в точке их касания одновременно является общей касательной к основным окружностям и поэтому при изменении точек касания не изменяет своего положения и по-прежнему проходит через неподвижный полюс зацепления  $W$ .

3. **Линией зацепления** называется траектория общей точки контакта профилей зубьев.

Линией зацепления в эвольвентном зацеплении является прямая  $N_1 N_2$ , общая касательная к основным окружностям.

**Активной линией** зацепления называется участок  $P_1 P_2$  линии зацепления, точки  $P_1$  и  $P_2$  которой ограничены пересечением линии  $N_1 N_2$  с окружностями вершин колес. Эвольвентные профили контактируют только на этом участке, причем в контакте участвуют только части профилей  $a_1 f_1$  и  $a_2 f_2$ , называемые **активными профилями**.

Верхние точки активных профилей ( $a_1$  и  $a_2$ ) находятся на окружностях вершин зубьев, а нижние точки ( $f_1$  и  $f_2$ ) получаются при пересечении профилей окружностями радиусов  $O_1P_1$  и  $O_2P_2$ . Нерабочие участки профиля закругляются у окружности впадин.

4. Угол зацепления в эвольвентном зацеплении постояен. **Углом зацепления**  $\alpha_W$  называется острый угол между линией зацепления  $N_1N_2$  и перпендикуляром к межосевой линии. Так как согласно уравнению эвольвенты (2) для точки  $W$

$$r_{W1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_W}, \quad r_{W2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_W}, \quad (6)$$

то угол зацепления  $\alpha_W$  равен углу профиля эвольвент на начальных окружностях.

5. Взаимоогibaемость двух эвольвентных профилей возможна только на участке  $N_1N_2$  линии зацепления.

Это объясняется тем, что эвольвента – кривая, ограниченная с одной стороны, а точка контакта перемещается по эвольвенте. Поэтому вне отрезка  $N_1N_2$  эвольвенты не имеют общей нормали и пересекаются (явление интерференции). Подробнее см. п. 11.

С учетом формул (6) передаточное отношение  $U_{12}$  и межосевое расстояние  $a_W$  можно представить в следующем виде:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{W2}}{r_{W1}} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}}. \quad (7)$$

$$a_W = r_{W1} + r_{W2} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_W}. \quad (8)$$

Так как основные радиусы  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  являются постоянными для данной пары колес (их величины определяются в процессе нарезания), то из выражений (7) и (8) вытекает следующее свойство.



6. При изменении межосевого расстояния в эвольвентном зацеплении передаточное отношение не изменяется (вследствие неизменности радиусов основных и делительных окружностей):

$$\left| U_{12} \right| = \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = \frac{r_{b2} / \cos \alpha_W}{r_{b1} / \cos \alpha_W} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_1} = \text{const},$$

меняются лишь радиусы начальных окружностей и угол зацепления  $\alpha_W$ , все остальные размеры остаются без изменения.

Постоянство передаточного отношения при отступлении от расчетного межосевого расстояния является важным положительным свойством эвольвентного зацепления, так как этим исключается влияние погрешностей изготовления и сборки.

С учетом формул (5) и (8) межосевое расстояние при внешнем зацеплении

$$a_W = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W}. \quad (9)$$

Выражение для  $a_W$  представляют также в другом виде

$$a_W = a + ym = r_1 + r_2 + ym, \quad (10)$$

где  $a = r_1 + r_2 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$  – делительное межосевое расстояние;

$ym$  – воспринимаемое смещение, то есть расстояние между делительными окружностями колес;

$y$  – коэффициент воспринимаемого смещения.

Между окружностью вершин одного колеса и окружностью впадин другого колеса для предотвращения заклинивания предусматривается радиальный зазор  $c^* m = 0,25m$ . На основании этого радиусы окружностей вершин зубьев выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 r_{a1} &= a_W - r_{f2} - c^* m, \\
 r_{a2} &= a_W - r_{f1} - c^* m.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Радиусы  $r_{a1}$  и  $r_{a2}$  в процессе зубонарезания не изменяются и остаются равными радиусам заготовок. Формулы (11) можно также представить в ином виде (см. п. 8).

Как было показано, пара эвольвентных профилей всегда является сопряженной. Зубчатое колесо имеет не один, а несколько зубьев, и в некоторые моменты в контакте должно находиться несколько пар профилей одновременно. Для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы расстояние по общей нормали между двумя соседними эвольвентами для обоих колес было строго одинаковым. Из свойств эвольвенты следует, что шаг по нормали равен шагу  $p_b$  по основной окружности. Таким образом, для сопряжения двух эвольвентных зубчатых колес их основные шаги должны быть равны:

$$p_{b1} = p_{b2}.$$

## 5. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

### 5.1. Коэффициент перекрытия

Зацепление одной пары зубьев начинается в точке  $P_1$  активной линии зацепления (см. рис. 4). В этой точке ножка зуба первого колеса (точка  $f_1$ ) входит в соприкосновение с головкой зуба второго колеса (точкой  $a_2$ ). В точке  $P_2$  эта пара зубьев выйдет из зацепления (при соприкосновении точек  $a_1$  и  $f_2$ ). Непрерывность передачи вращения будет обеспечена, если выходу из зацепления одной пары зубьев будет предшествовать вступление в контакт другой пары, то есть необходимо перекрытие зацеплений. Угол поворота зубчатого колеса от положения входа зуба в зацепление (см. штриховой профиль в точке  $P_1$  на рис. 4) до выхода из зацепления (см. штриховой профиль в точке  $P_2$ ) называется *углом перекрытия*  $\varphi_\alpha$ . Перекрытие зацепления будет в том случае, когда угол перекрытия будет больше углового шага  $\tau$ .

Отношение угла перекрытия  $\varphi_\alpha$  зубчатого колеса к его угловому шагу  $\tau$  называется *коэффициентом перекрытия*  $\varepsilon_\alpha$ .

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha 2}}{\tau_2}.$$

Коэффициент перекрытия является показателем непрерывности и плавности работы зубчатой передачи. Чем больше его величина, тем выше плавность работы. Для прямозубых передач рекомендуется  $\varepsilon_\alpha \geq 1,2$ . Аналитически коэффициент  $\varepsilon_\alpha$  определяется как

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2\pi},$$

где  $\alpha_{a1}$  и  $\alpha_{a2}$  – углы профиля эвольвент на окружностях вершин зубьев. Из уравнения эвольвенты (2) следует, что

$$\alpha_{a1} = \arccos \frac{r_{b1}}{r_{a1}}, \quad \alpha_{a2} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{a2}}.$$

Коэффициент перекрытия возрастает с увеличением чисел зубьев  $z_1$  и  $z_2$ , убывает с увеличением угла зацепления  $\alpha_w$  и не зависит от модуля  $m$ .

## 5.2. Удельные скольжения профилей зубьев

Из основной теоремы зацепления (см. рис. 1) следует, что для того, чтобы в процессе передачи вращения касающиеся профили не отставали друг от друга и не внедрялись друг в друга, должно соблюдаться равенство нормальных составляющих скорости точки контакта  $K$  ( $\bar{V}_{K1}^n = \bar{V}_{K2}^n$ ). При этом касательные составляющие не равны друг другу, что приводит к скольжению одного профиля относительно другого профиля. Скорости скольжения:

$$V_{S1} = V_{K1}^t - V_{K2}^t,$$

$$V_{S2} = V_{K2}^t - V_{K1}^t.$$

*Удельным скольжением профилей зубьев* в контактной точке  $K$  называется отношение скорости скольжения профилей к касательной составляющей скорости точки контакта:

$$\lambda_1 = \frac{V_{S1}}{V_{K1}^t} = 1 - \frac{V_{K2}^t}{V_{K1}^t}, \quad \lambda_2 = \frac{V_{S2}}{V_{K2}^t} = 1 - \frac{V_{K1}^t}{V_{K2}^t}.$$

Из подобия  $\Delta O_1KN_1$  и  $\Delta KV_{K1}V_{K1}^n$  следует, что

$$\frac{KN_1}{O_1K} = \frac{V_{K1}^t}{V_{K1}} = \frac{V_{K1}^t}{O_1K \omega_1}.$$

Отсюда  $\bar{V}_{K1}^t = KN_1 \omega_1 = \rho_{K1} \omega_1$ .

Из подобия  $\Delta O_2KN_2$  и  $\Delta KV_{K2}V_{K2}^n$  следует, что

$$\frac{KN_2}{O_2K} = \frac{V_{K2}^t}{V_{K2}} = \frac{V_{K2}^t}{O_2K \omega_2}.$$

Отсюда  $\bar{V}_{K2}^t = KN_2 \omega_2 = \rho_{K2} \omega_2$ .

Здесь  $\rho_{K1}$  и  $\rho_{K2}$  – радиусы кривизны эвольвентных профилей в контактной точке  $K$ .

Тогда

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\rho_{K2} \omega_2}{\rho_{K1} \omega_1}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\rho_{K1} \omega_1}{\rho_{K2} \omega_2}.$$

Учитывая, что  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$ , имеем

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\rho_{K2} z_1}{\rho_{K1} z_2}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\rho_{K1} z_2}{\rho_{K2} z_1}.$$

Приняв  $\frac{z_2}{z_1} = U_{12}$  – передаточное число ( $z_2 \geq z_1$ ), получаем

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\rho_{K2}}{\rho_{K1} U_{12}}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\rho_{K1} U_{12}}{\rho_{K2}}.$$

Удельные скольжения являются показателями интенсивности абразивного износа зубьев под влиянием геометрических и кинематических факторов. Удельные скольжения неограниченно возрастают при приближении контактной точки к основной окружности.

Наибольшие значения удельные скольжения имеют в нижних точках активных профилей зубьев (точки  $f_1$  и  $f_2$  на рис. 4), расположенных вблизи основных окружностей.

### 5.3. Коэффициент удельного давления

*Коэффициентом удельного давления* называется отношение расчетного модуля  $m$  к приведенному радиусу кривизны профилей  $\rho_{\Pi}$ :

$$q = \frac{m}{\rho_{\Pi}},$$

где для внешнего зацепления

$$\rho_{\Pi} = \frac{\rho_{K1} \cdot \rho_{K2}}{\rho_{K1} + \rho_{K2}}.$$

Этот коэффициент учитывает влияние геометрических факторов на величину контактных напряжений, возникающих между зубьями. Он не зависит от модуля, так как  $\rho_{\Pi}$  пропорционален модулю. Поскольку контактная точка  $K$  движется вдоль линии зацепления, коэффициент удельного давления изменяется в процессе зацепления. За расчетный коэффициент удельного давления принимается тот, который соответствует контакту зубьев в полюсе зацепления.

В полюсе зацепления

$$\rho_{\Pi} = \frac{m z_1 z_2 \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_w}{2 \cdot (z_1 + z_2)}.$$

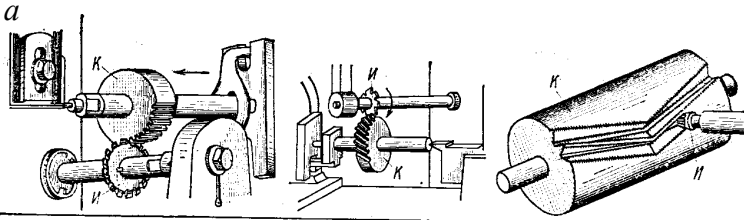
Считается, что должно быть  $q < 2$ .

## 6. МЕТОДЫ НАРЕЗАНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Существуют два принципиально отличающихся друг от друга метода нарезания цилиндрических эвольвентных колес – *метод копирования* и *метод обкатки (огибания)*.

При изготовлении колес *методом копирования* рабочие части инструмента имеют форму впадины между зубьями. К этому методу относится, например, фрезерование модульной дисковой (рис. 5, а) или пальцевой фрезой. Существенные недостатки метода копирования – низкая производительность, потребность в большом комплекте инструмента, невысокая точность.

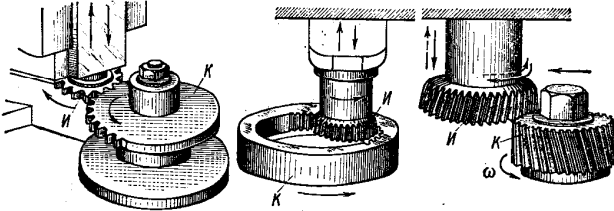
*Метод обкатки* является основным. При нарезании режущий инструмент и заготовка имеют такое же относительное движение, как и два зубчатых колеса в зацеплении (движение обкатки), поэтому инструмент (долбяк) представляет собой колесо с зубьями эвольвентного профиля, заточенными для резания (рис. 5, б). Кроме вращательного, долбяк совершает возвратно-поступательное движение вдоль оси заготовки (движение резания). Вместо долбяка в качестве зуборезного инструмента может быть использована рейка (гребенка) с прямолинейными профилями зубьев (рис. 5, в) или модульная червячная фреза (рис. 5, г), которая в осевом сечении имеет профиль рейки. Преимущества метода обкатки – высокая производительность, большая точность, возможность нарезания колес с различными числами зубьев одним инструментом данного модуля.



Циклограмма

б

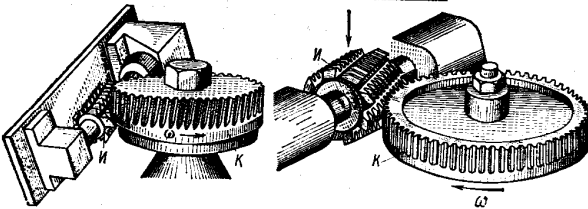
Далёк	Стоит вверх	Рабочий ход	Холодный ход
Колеса	Поворот	Неподвижно	



в

Циклограмма

Фреза	Вращение вокруг своей оси и опускание вдоль оси колеса
Колеса	Поворот



г

Циклограмма

Рейка	Находится вверху подача перпендикулярно к оси колеса	Рабочий ход	Холодный ход
Колеса	Поворот	Неподвижно	

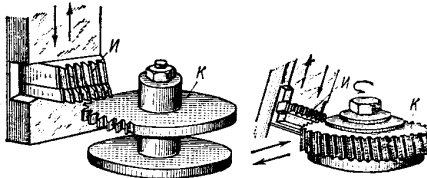


Рис. 5



## 7. ИСХОДНЫЙ ПРОИЗВОДЯЩИЙ КОНТУР. КОЛЕСА БЕЗ СМЕЩЕНИЯ И СО СМЕЩЕНИЕМ ИСХОДНОГО КОНТУРА

Параметры зуборезного инструмента, работающего по методу обкатки, определяются в соответствии со стандартным исходным контуром цилиндрических зубчатых колес, под которым понимается контур зубьев рейки в сечении плоскостью, перпендикулярной к направлению зубьев (для  $m \geq 1$  мм – ГОСТ 13755–81, для  $0,1 < m < 1,0$  – ГОСТ 9587-81).

Зубья инструментальной рейки очерчены по впадинам исходного контура. Сечение инструментальной рейки называется *исходным производящим контуром* (рис. 6).

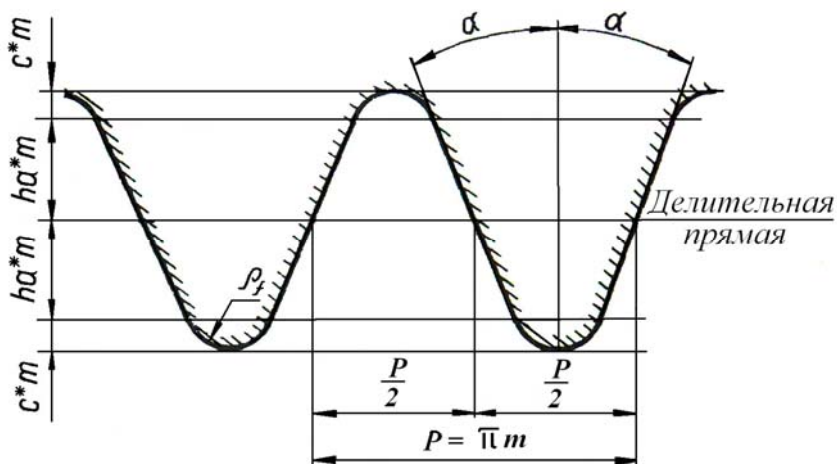


Рис. 6

Его основные параметры:

$\alpha = 20^\circ$  – угол профиля исходного контура;

$h_a^* = 1$  – коэффициент высоты головки зуба;

$c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора (в ряде случаев допускается увеличение до  $c^* = 0,35$ );

$\rho_f^* = 0,38$  – коэффициент радиуса кривизны переходной кривой.

В пределах высоты  $2h_a^*m$  профиль зубьев рейки – прямолинейный. Эвольвентная часть профиля зуба нарезаемого колеса формируется только этим участком, а переходная кривая между эвольвентой и окружностью впадин создается скругленным участком зубьев рейки.

Прямая, на которой толщина зуба рейки равна ширине впадины, называется **делительной (средней)**. Две прямые, параллельные делительной, которые определяют границы прямолинейного профиля зубьев рейки, называются **граничными прямыми**.

Если в станочном зацеплении делительная прямая исходного контура 1–1 касается делительной окружности нарезаемого колеса (рис. 7, а), то нарезается колесо без смещения (нулевое или нормальное). Если же в станочном зацеплении делительной окружности касается любая другая прямая 2–2, параллельная делительной (такая прямая называется **начальной**), то нарезается колесо со смещением (рис. 7, б, в). Расстояние  $xm$  между делительной прямой и делительной окружностью представляет собой **смещение исходного контура** от номинального положения (рис. 7). Отношение смещения исходного контура к расчетному модулю называется **коэффициентом смещения** исходного контура ( $x$ ).

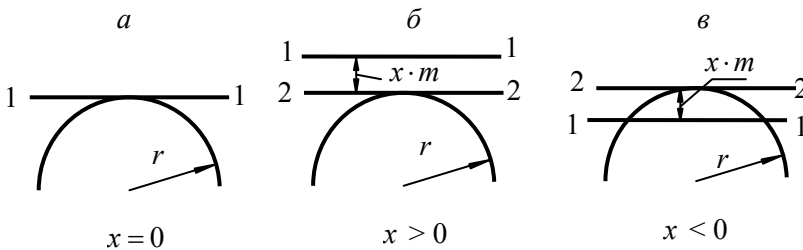


Рис. 7

Смещение считается положительным ( $x > 0$ ), если делительная прямая не пересекает делительной окружности нарезаемого колеса (рис. 7, а), и отрицательным ( $x < 0$ ), если пересекает ее (рис. 7, в). Для колес без смещения (нулевых)  $x = 0$ .

Делительная окружность колеса и начальная прямая рейки в процессе зубонарезания перекатываются одна по другой без смещения (являются центроидами в относительном движении). Поэтому толщина зуба  $S$  по делительной окружности равна ширине впадины по начальной прямой рейки (рис. 8). На основании этого

$$S = \frac{1}{2} \pi m + 2x m \operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha \right) m. \quad (12)$$

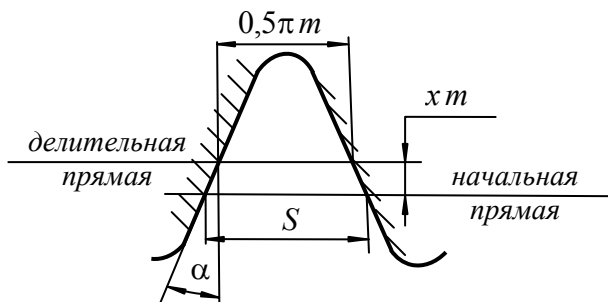


Рис. 8

## 8. СТАНОЧНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ НАРЕЗАЕМОГО КОЛЕСА С РЕЕЧНЫМ ИНСТРУМЕНТОМ

На рис. 9 показана схема станочного зацепления при нарезании колеса реечным инструментом по методу обкатки. В процессе обкатки отношение скоростей поступательного ( $V_p$ ) и вращательного ( $\omega$ ) движений должно быть таким, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{V_p}{\omega} = r = \frac{r_b}{\cos \alpha}.$$

Прямая вершин рейки касается окружности впадин колеса. Поэтому радиус окружности впадин

$$r_f = r - (h_a^* + c^* - x) m. \quad (13)$$

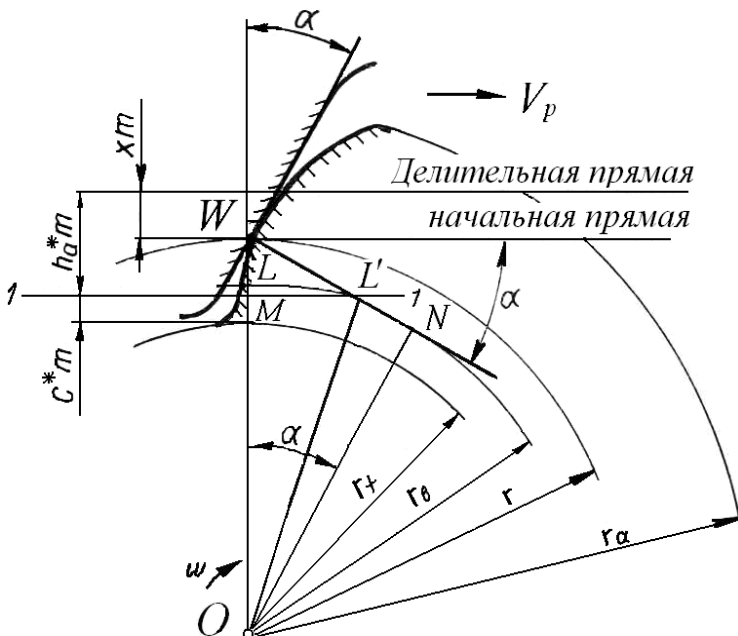


Рис. 9

Радиус  $r_b = OL' = OL$  определяет окружность, на которой начинается эвольвентная часть профиля зуба колеса,  $L$  – граничная точка профиля,  $\rho_l = NL'$  – радиус кривизны эвольвенты в граничной точке

$$NL' = WN - WL', \quad WN = r \sin \alpha = \frac{mz}{2} \sin \alpha;$$

$$WL' = \frac{WM}{\sin \alpha} = \frac{(h_a^* - x)m}{\sin \alpha};$$

$$\rho_l = \frac{mz}{2} \sin \alpha - \frac{(h_a^* - x)m}{\sin \alpha};$$

$$r_l = \sqrt{r_b^2 + \rho_l^2}.$$

Как было отмечено в п. 4, радиусы окружностей вершин зубьев  $r_{a1}$  и  $r_{a2}$  в процессе зубонарезания не изменяются и остаются равными радиусам заготовок. С учетом зависимостей (10) и (13) формулы (10) можно представить в виде

$$r_{a1} = r_1 + (h_a^* + y - x_2)m, \quad (14)$$

$$r_{a2} = r_2 + (h_a^* + y - x_1)m. \quad (15)$$

Высота зубьев

$$h = r_{a1} - r_{f1} = r_{a2} - r_{f2}$$

или с учетом формул (12)–(14)

$$h = \left[ 2h_a^* + c^* - (x_\Sigma - y) \right] m,$$

где  $x_\Sigma = x_1 + x_2$ .

Разность  $x_\Sigma - y$  называется **коэффициентом уравнительного смещения**

$$\Delta y = x_\Sigma - y, \tag{16}$$

а  $\Delta y \cdot m$  есть **уравнительное смещение**.

Если в формулы (14) и (15) вместо  $y$  подставить его значение  $y = x_\Sigma - \Delta y$  из формулы (16), то окончательно получим

$$r_{a1} = r_1 + \left( h_a^* + x_1 - \Delta y \right) m,$$

$$r_{a2} = r_2 + \left( h_a^* + x_2 - \Delta y \right) m.$$

## 9. ПОДРЕЗАНИЕ ЗУБЬЕВ

Если граничная прямая 1–1 у вершин зубьев инструментальной рейки (см. рис. 9) пересекает линию зацепления за предельной точкой  $N$ , то возникает **явление подрезания** зубьев, которое заключается в том, что часть эвольвентного профиля у основания зуба срезается (рис. 10) и эвольвента и переходная кривая не имеют плавного сопряжения. Причиной подрезания является интерференция профилей зубьев инструмента и нарезаемого колеса, которая возникает в силу невозможности касания профилей за предельной точкой  $N$ . Значительное подрезание ослабляет ножку зуба, может привести к уменьшению активного профиля и коэффициента перекрытия

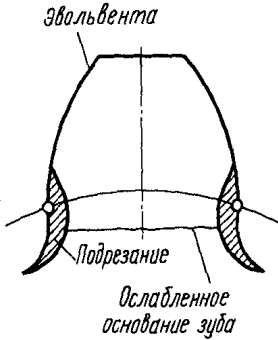


Рис. 10

и поэтому является недопустимым. Вместе с тем небольшое подрезание может оказаться полезным для улучшения условий контакта зубьев. При подрезании точка  $L'$  оказывается вне отрезка  $WN$ .

Тогда  $WL' > WN$  и  $NL' = \rho_l < 0$ .

Поэтому условие отсутствия подрезания состоит в том, чтобы  $\rho_l \geq 0$ . Рассматривая предельный случай, когда  $\rho_l = 0$ , найдем наименьшее число зубьев колеса  $z_{\min}$ , нарезаемое без подрезания при данном коэффициенте смещения  $x$ :

$$\frac{m z_{\min}}{2} \sin \alpha - \frac{(h_a^* - x) m}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда

$$z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x)}{\sin^2 \alpha}.$$

В случае нарезания колеса без смещения ( $x = 0$ ) реечным инструментом со стандартными параметрами  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$  получим  $z_{\min} \approx 17$ .

Подрезание при нарезании колеса с числом зубьев  $z < z_{\min}$  можно устранить путем соответствующего выбора коэффициента смещения  $x$ . Коэффициент наименьшего смещения  $x_{\min}$  для устранения подрезания получим, рассматривая предельный случай, когда  $\rho_l = 0$ :

$$\frac{mz}{2} \sin \alpha - \frac{(h_a^* - x_{\min})m}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда

$$x_{\min} = h_a^* - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha.$$

При  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$

$$x_{\min} = 1 - 0,0585z \quad \text{или} \quad x_{\min} \approx \frac{17 - z}{17}.$$

При  $x = x_{\min}$  граничная точка профиля  $L$  находится на основной окружности.

В практических расчетах, допуская незначительное подрезание, часто пользуются эмпирической формулой

$$x_{\min} = \frac{14 - z}{17}.$$

Условия  $z \geq z_{\min}$  и  $x \geq x_{\min}$ , так же как и  $\rho_l \geq 0$ , являются условиями отсутствия подрезания.



Колеса со смещением применяются не только для устранения подрезания, но и для повышения контактной и изгибной прочности зубьев, для уменьшения износа и повышения долговечности, для получения заданного межосевого расстояния пары колес и в ряде других случаев.

Следует отметить, что использование коэффициента смещения  $x > x_{\min}$  ограничивается опасностью заострения зубьев, когда толщина зуба на окружности вершин становится равной нулю, то есть  $S_a = 0$ . Толщина зуба  $S_a$  на окружности вершин определяется как

$$S_a = 2r_a \left( \frac{S}{2r} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_a \right).$$

Стандартом рекомендуется  $S_a = (0,3-0,4) m$ . Поэтому при выборе коэффициентов смещения следует учитывать это соотношение.

## 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Угол зацепления  $\alpha_W$  в зубчатой передаче определяется из условия, что между зубьями отсутствует боковой зазор. В этом случае толщина зуба  $S_W$  по начальной окружности одного колеса должна быть равна ширине впадины  $e_W$  по начальной окружности другого колеса и наоборот. В результате может быть получена формула

$$\operatorname{inv} \alpha_W = \operatorname{inv} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha}{z_1 + z_2}. \quad (17)$$

Зная  $\operatorname{inv} \alpha_W$ , по таблице эвольвентных углов можно найти угол зацепления  $\alpha_W$ .

Угол зацепления также связан с межосевым расстоянием  $a_W$  (9). Если величина  $a_W$  предварительно задана, то угол  $\alpha_W$  определяется из формулы (9):

$$\alpha_W = \arccos \frac{m(z_1 + z_2) \cos \alpha}{2 \cdot a_W},$$

а сумма коэффициентов смещения  $x_\Sigma = x_1 + x_2$  – из формулы (17).

Анализ формул (9) и (17) позволяет разделить передачи на следующие типы:

1. Передачи без смещения, у которых  $x_1 = x_2 = 0$ . При этом  $\alpha_W = \alpha$  (угол зацепления равен углу профиля исходного контура),  $r_{W1,2} = r_{1,2}$  (делительные окружности одновременно являются и начальными), толщина зуба по делительной окружности равна ширине впадины:  $S = e = \frac{\pi m}{2}$ , коэффициенты  $y = \Delta y = 0$ , высота зуба  $h = (2h_a^* + c^*) m = 2,25m$ .

2. Передачи со смещением. Эти передачи характеризуются суммарным коэффициентом смещений  $x_{\Sigma} = x_1 + x_2$ . Здесь различают три варианта: а)  $x_{\Sigma} > 0$  (положительная передача); б)  $x_{\Sigma} < 0$  (отрицательная передача); в)  $x_{\Sigma} = 0$  при  $x_2 = -x_1$  (равносмещенная передача). Если  $x_{\Sigma} > 0$ , то  $a_W > a$ ,  $\alpha_W > \alpha$ . Если  $x_{\Sigma} < 0$ , то  $a_W < a$ ,  $\alpha_W < \alpha$ . В равносмещенной передаче, как и в передаче без смещения,  $\alpha_W = \alpha$ ,  $r_{W1,2} = r_{1,2}$ ,  $y = \Delta y = 0$ ,  $a_W = a$ ,  $h = 2,25 m$ , но  $S \neq e$ .

*Пример 1.* Определить коэффициенты смещения зубчатых колес  $x_1$  и  $x_2$  (причем  $x_2 = -x_1$ ) в передаче, если межосевое расстояние  $a_W = 105$  мм, передаточное число  $U_{12} = 2,5$ , расчетный модуль  $m = 5$  мм.

Так как  $x_2 = -x_1$ , то  $\alpha_W = \alpha = 20^\circ$ . Составляем два уравнения:

$$1) a_W = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} \text{ или } 105 = \frac{5}{2}(z_1 + z_2) \cdot 1;$$

$$2) U_{12} = \frac{z_2}{z_1}, \text{ откуда } z_2 = 2,5 z_1.$$

В результате получим  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 30$ .

$$x_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 12}{17} = 0,3; \quad x_2 = -0,3.$$

Проверка на отсутствие подрезания:

$$x_{2\min} = \frac{17 - z_2}{17} = \frac{17 - 30}{17} = -0,764; \quad x_2 > x_{2\min}.$$

Подрезание отсутствует.

*Пример 2.* Определить коэффициенты смещения зубчатых колес  $x_1$  и  $x_2$  в передаче, если числа зубьев колес  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 28$ , расчетный модуль  $m = 5$  мм, межосевое расстояние  $a_W = 100$  мм.

Из формулы (3) находим

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_W} = \frac{2 \cdot a_W}{m(z_1 + z_2)} = \frac{2 \cdot 100}{5 \cdot (12 + 28)} = 1.$$

Следовательно,  $\alpha_W = \alpha = 20^\circ$ . Так как  $z_1 < 17$ , то следует принять  $x_2 = -x_1$ .

$$x_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 12}{17} = 0,3; \quad x_2 = -0,3.$$

Проверка на отсутствие подрезания:

$$x_{2\min} = \frac{17 - z_2}{17} = \frac{17 - 28}{17} = -0,6; \quad x_2 > x_{2\min}.$$

Подрезание отсутствует.

## 11. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗУБЬЕВ

*Интерференцией (наложением) зубьев* называется явление, при котором в теоретической картине зацепления часть пространства оказывается одновременно занятой двумя зубьями разных колес. Практически это приводит к нарушению правильности зацепления и может вызвать заклинивание и поломку передачи. При вычерчивании картины зацепления интерференция проявляется в пересечении профилей.

При внешнем зацеплении может происходить интерференция эвольвентных профилей между собой и интерференция эвольвентного профиля зуба одного колеса с переходной кривой зуба другого колеса. Первый случай имеет место, когда активная линия зацепления  $P_1P_2$  выходит за пределы участка  $N_1N_2$  линии зацепления (см. рис. 4). При этом происходит пересечение профиля головки зуба одного колеса и профиля ножки зуба парного колеса вне отрезка  $N_1N_2$ . Для недопущения интерференции эвольвент радиусы окружностей вершин зубьев должны удовлетворять условиям:  $r_{a1} \leq O_1N_2$  и  $r_{a2} \leq O_2N_1$ .

Из  $\Delta O_1N_1N_2$  и  $\Delta O_2N_1N_2$  можно получить

$$O_1N_2 = \sqrt{a_w^2 \sin^2 \alpha_w + r_{b1}^2};$$

$$O_2N_1 = \sqrt{a_w^2 \sin^2 \alpha_w + r_{b2}^2}.$$

Второй случай может иметь место при больших коэффициентах смещения, когда в процессе зацепления траектория кромки зуба одного колеса пересекается с переходной кривой профиля зуба другого колеса и происходит взаимодействие эвольвенты с неэвольвентной кривой. Для отсутствия этого явления активный профиль зуба не должен заходить за граничную точку профиля  $L$ . Это выполняется, если

$$\rho_{l1} \leq \rho_{p1}, \quad \rho_{l2} \leq \rho_{p2}, \quad (18)$$

где  $\rho_{l1}$  и  $\rho_{l2}$  – радиусы кривизны эвольвент в граничной точке  $L$  профиля зубьев,

$$\rho_{l1} = r_1 \sin \alpha - \frac{(h_a^* - x_1) m}{\sin \alpha},$$

$$\rho_{l2} = r_2 \sin \alpha - \frac{(h_a^* - x_2) m}{\sin \alpha};$$

$\rho_{p1}$  и  $\rho_{p2}$  – радиусы кривизны эвольвент в нижних точках активных профилей зубьев обоих колес (рис. 11).

Из рис. 4 можно получить

$$\rho_{p1} = N_1 P_1 = a_w \sin \alpha_w - r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2},$$

$$\rho_{p2} = N_2 P_2 = a_w \sin \alpha_w - r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1}.$$

При выполнении условий (18) исключается интерференция обоих видов.

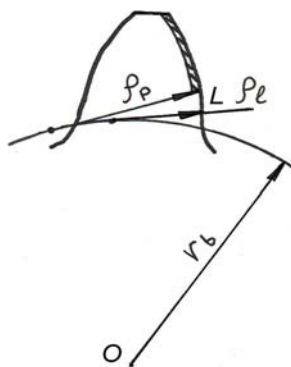


Рис. 11

## 12. ОСОБЕННОСТИ КОСОЗУБЫХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ КОЛЕС

Боковая поверхность зубьев косозубого колеса представляет собой винтовую эвольвентную поверхность. Эта поверхность получается при перемещении эвольвенты 1 вдоль винтовой линии 2 на основном цилиндре (рис. 12). Для косозубых колес понятия «основной и делительный цилиндры» соответствуют понятиям «основная и делительная окружности» для прямозубых колес. Развернем на плоскость поверхность делительного цилиндра колеса (рис. 13). На плоскости винтовые линии зубьев станут параллельными прямыми. Угол  $\beta$  называется **углом наклона линии зуба** на делительном цилиндре. Два колеса, находящиеся в зацеплении, должны иметь одинаковые углы  $\beta$ , но при внешнем зацеплении направление винтовых линий должно быть разноименным: на одном колесе – правое, на другом – левое.

У косозубых колес различают окружной (торцовый) шаг  $p_t$  (в торцовом сечении), нормальный шаг  $p_n$  (в нормальном сечении), осевой шаг  $p_x$  (в осевом сечении) и соответствующие модули зубьев:

$$m_t = \frac{p_t}{\pi}, \quad m_n = \frac{p_n}{\pi}, \quad m_x = \frac{p_x}{\pi}.$$

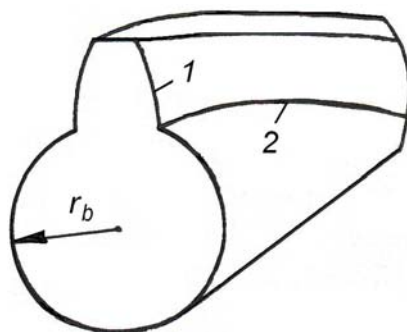


Рис. 12

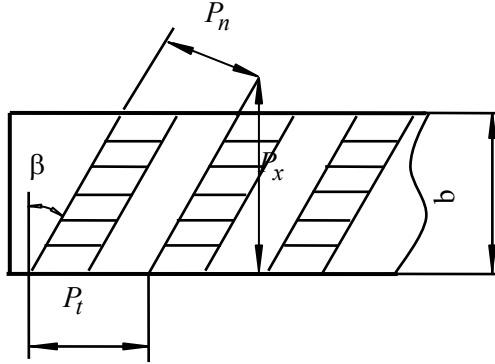


Рис. 13

Очевидны следующие соотношения:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}; \quad p_x = \frac{p_n}{\sin \beta}; \quad m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}; \quad m_x = \frac{m_n}{\sin \beta}.$$

В качестве стандартного расчетного модуля колеса принимается нормальный модуль  $m_n$  на делительном цилиндре, то есть  $m = m_n$ .

Зацепление косозубых колес в торцовом сечении аналогично зацеплению прямозубых колес. Поэтому геометрический расчет косозубых колес можно вести по формулам для прямозубых колес, исходя из параметров торцового сечения. Например, радиус делительной окружности

$$r = \frac{m_t z}{2} = \frac{m z}{2 \cos \beta},$$

радиус основной окружности  $r_b = r \cos \alpha_t$ , где  $\alpha_t$  – угол профиля исходного контура, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos \beta}.$$



Минимальное число зубьев, нарезаемое без подрезания,

$$z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x) \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t}.$$

Например, при  $x = 0$ ,  $\alpha = 20^\circ$  и  $\beta = 21^\circ$  получим  $z_{\min} = 14$ .

Косые зубья входят в зацепление не сразу по всей длине, как прямые зубья, а постепенно. Поэтому косозубая передача характеризуется более плавной работой. Коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$ , где  $\varepsilon_\alpha$  – коэффициент торцового перекрытия, определяемый, как и для прямозубых колес;  $\varepsilon_\beta$  – коэффициент осевого перекрытия, равный

$$\varepsilon_\beta = \frac{b}{p_x} = \frac{b \sin \beta}{\pi m}.$$

Косозубые колеса при тех же размерах позволяют передавать мощность большую, чем при прямозубых колесах. Недостатком косозубых передач является возникающая в зацеплении дополнительная осевая сила, отсутствующая у прямозубых колес. Это требует установки упорных подшипников.

### 13. ОСОБЕННОСТИ ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ КОЛЕС

В зубчатой передаче внутреннего зацепления одно из колес (шестерня 1) имеет внешние зубья с выпуклым профилем, а второе (колесо 2) – внутренние зубья с вогнутым профилем (рис. 14).

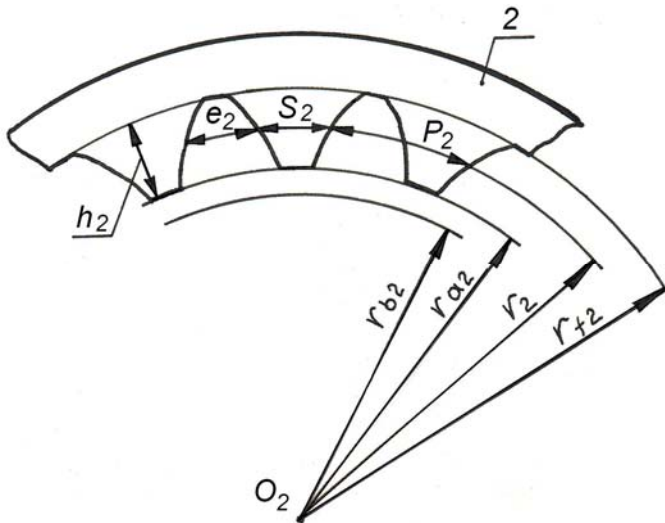


Рис. 14

В отличие от внешнего зацепления, контактная точка  $K$  эвольвентных профилей может находиться на линии зацепления только за пределами отрезка  $N_1N_2$  (рис. 15).

Колеса с внутренними зубьями нарезаются в основном долбяком по методу обкатки, при этом подрезание зубьев у основания не может иметь места, но может происходить срезание вершин зубьев (рис. 16) двух видов:

1) срезание вершин ножкой зуба долбяка при заходе окружности вершин зубьев долбяка за предельную точку линии станочного зацепления;

2) срезание вершин головкой зуба долбяка при радиальной подаче долбяка на глубину зуба.

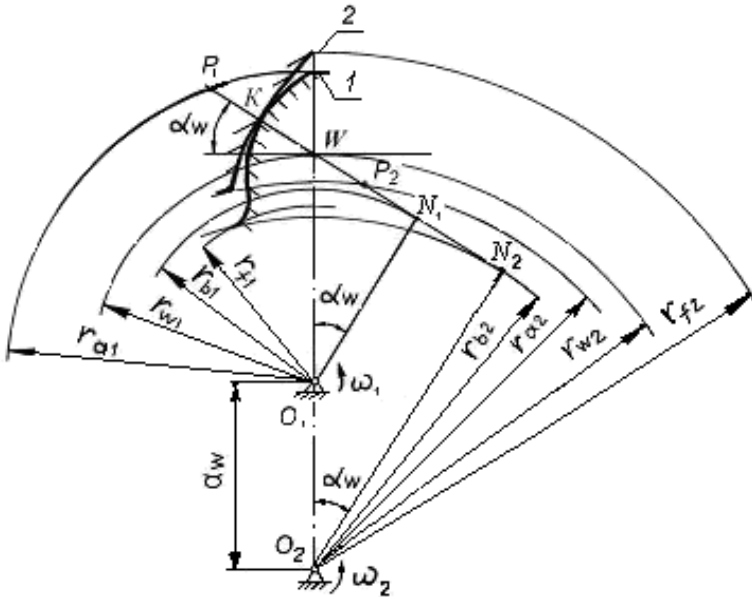


Рис. 15

Несмотря на то, что колесо с внутренними зубьями не может сцепляться с рейкой, геометрию его зубьев целесообразно строить, опираясь на геометрию того же исходного контура, который принят для колес с внешними зубьями. При таком подходе многие расчетные формулы для колеса с внутренними зубьями получаются с помощью введения в рассмотрение так называемого совпадающего колеса с внешними зубьями (как шаблон и контршаблон).



Рис. 16

– межосевое расстояние

В частности, коэффициентом смещения у колеса с внутренними зубьями считается коэффициент смещения совпадающего колеса. Приведем некоторые формулы:

$$a_w = r_{w2} - r_{w1} = \frac{m(z_2 - z_1)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w};$$

– толщина внутренних зубьев на делительной окружности

$$S_2 = \left( \frac{\pi}{2} - 2x_2 \operatorname{tg} \alpha \right) m;$$

– коэффициент перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \left( \operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w \right) - z_2 \left( \operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w \right)}{2\pi}.$$

В передаче внутреннего зацепления может происходить интерференция двух видов: 1) интерференция эвольвентного профиля зуба одного колеса с переходной кривой профиля зуба другого колеса (как и во внешнем зацеплении); 2) интерференция профилей зубьев у их вершин (при малой разности чисел зубьев  $z_2 - z_1$ ). Для недопущения обоих видов интерференции в случае колес без смещения необходимо, чтобы  $z_1 \geq 20$ ,  $z_2 \geq 85$ ,  $z_2 - z_1 \geq 8$ .

По сравнению с внешним зацеплением внутреннее зацепление характеризуется более высокой контактной прочностью (так как происходит контакт выпуклого и вогнутого профилей), меньшим относительным скольжением зубьев и, следовательно, меньшим износом.

## 14. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

### 14.1. Циклоидное зацепление

Во внешнем зацеплении головки зубьев очерчены по эпициклоиде, а ножки зубьев – по гипоциклоиде. Для получения профильных кривых используются две вспомогательные окружности  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 17), радиусы которых рекомендуется принимать равными  $\rho_{1,2} = (0,35-0,45)r_{W1,2}$ . При перекатывании без скольжения окружности  $S_1$  по начальной окружности колеса 2 точка  $W$  описывает эпициклоиду  $WЭ_2$ , а при перекатывании этой же окружности внутри начальной окружности колеса 1 точка  $W$  описывает гипоциклоиду  $WT_1$ . Аналогично при перекатывании окружности  $S_2$  по начальным окружностям получаются эпициклоида  $WЭ_1$  и гипоциклоида  $WT_2$ . Активная линия зацепления  $P_1P_2$  состоит из дуг вспомогательных окружностей  $\cup P_1W$  и  $\cup WP_2$ . Угол зацепления переменный, в полюсе  $\alpha_W = 0$ . К достоинствам циклоидного зацепления по сравнению с эвольвентным относятся: а) меньшее удельное давление, скольжение и износ зубьев, так как выпуклый профиль одного колеса (эпициклоида) контактирует с вогнутым профилем другого колеса (гипоциклоидой); б) больший коэффициент перекрытия; в) малое допустимое число зубьев  $z_{\min} \geq 6$  и возможность получения больших передаточных отношений  $U_{12} = 12-15$  при небольших размерах колес. Недостатками циклоидного зацепления являются чувствительность к изменению межосевого расстояния, потребность в большом количестве зуборезного инструмента и его сложность.

Циклоидное зацепление имеет ограниченное применение, преимущественно в механизмах некоторых приборов, в винтовых насосах.

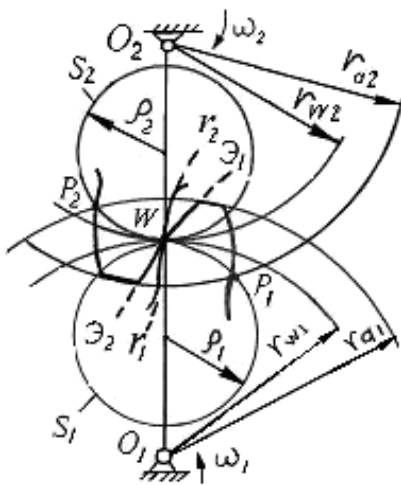


Рис. 17

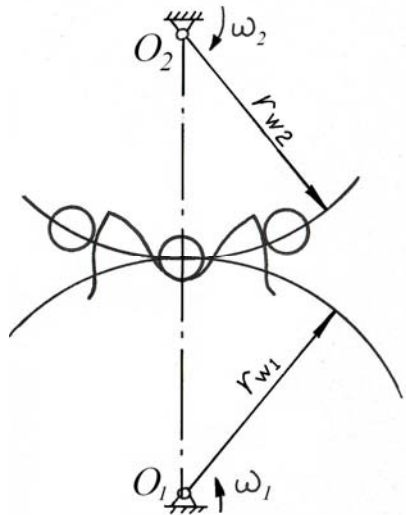


Рис. 18

## 14.2. Цевочное зацепление

Если в циклоидном зацеплении в качестве вспомогательной окружности  $S_2$  принять саму начальную окружность колеса 2, а в качестве вспомогательной окружности  $S_1$  – точку, то профиль зуба колеса 2 превратится в точку. Для практического осуществления такой передачи вместо точки используют цилиндр, называемый *цевкой*, а профиль зуба колеса 1 выполняют по кривой, эквидистантной эпициклоиде (рис. 18). Цевки можно сделать вращающимися вокруг своих осей, что значительно снижает потери на трение в зацеплении. Цевочное зацепление применяется в основном в громоздких тихоходных передачах, например в поворотных механизмах башенных кранов и экскаваторов при передаче вращения от малого зубчатого колеса к большому колесу (диаметром 2–3 м и более), выполняемому в виде цевочного.

## 14.3. Часовое зацепление

Часовое зацепление представляет собой приближенное циклоидное. Головка зуба выполняется по дуге окружности, близкой к эпи-

циклоиде, а ножка зуба имеет прямолинейное очертание, что соответствует гипоциклоиде, когда радиус вспомогательной окружности  $\rho = 0,5 r_W$ . Часовое зацепление применяется в часовых механизмах, счетчиках и других приборах при невысокой требовательности к кинематической точности передачи.

#### 14.4. Зацепление Новикова

В теории эвольвентного зацепления рассматривается касание плоских эвольвентных профилей зубьев в точке на линии зацепления. Фактически же в реальных зубчатых колесах, имеющих определенную ширину венца, в зацеплении участвуют не профили, а поверхности зубьев, которые касаются по контактной линии на плоскости зацепления. Поэтому эвольвентное зацепление относится к зацеплениям с линейным контактом.

В 1955 году М. Л. Новиков предложил качественно новое зацепление цилиндрических зубчатых колес с точечным контактом. Это зацепление характеризуется тем, что в пространстве поверхности зубьев контактируют только в точке. В нормальном сечении профили зубьев очерчены по дугам окружностей. Выпуклые профили зубьев меньшего колеса  $1$  очерчены из центра, совпадающего с плюсом  $W$ , по дуге окружности радиуса  $\rho_1 = 1,35m_n$  (рис. 19).

Вогнутые профили зубьев большего колеса  $2$  очерчены по дуге окружности радиуса  $\rho_2 = (1,03-1,1) \rho_1$  из точки, лежащей на линии  $n-n$ . При малой разнице радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  профили зубьев почти совпадают. Точка контакта  $K$  в процессе передачи вращения перемещается по линии, параллельной осям колес, от одного торца колеса к другому. Эта линия и является линией зацепления. В торцовом сечении нет линии зацепления и профили зубьев не являются взаимоогibaемыми кривыми. Непрерывность зацепления обеспечивается тем, что колеса в зацеплении Новикова могут быть только косозубыми. Коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha = 0$ , а коэффициент осевого перекрытия  $\varepsilon_\beta = 1,1-1,3$ . Угол наклона линии зуба на делительном цилиндре  $\beta = 10^\circ-30^\circ$ . Угол зацепления  $\alpha_{tW} = 20^\circ-30^\circ$ .

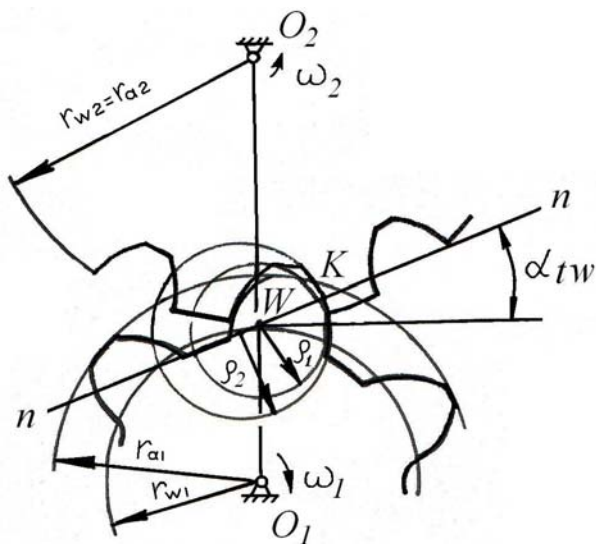


Рис. 19

Во избежание интерференции зубьев одно из колес должно иметь только головку, а второе – ножку зуба. При этом головка зуба имеет выпуклый профиль, а ножка – вогнутый, каждый из которых заканчивается на начальной окружности. Хотя теоретически в зацеплении Новикова имеет место точечный контакт зубьев, в результате приработки передачи под нагрузкой в зацеплении появляется площадка значительных размеров, что способствует существенному увеличению контактной прочности зубьев по сравнению с эвольвентным зацеплением. Использование зацепления Новикова целесообразно в тяжело нагруженных передачах. Основным недостатком передач с зацеплением Новикова – это повышенная чувствительность к перекосам и изменению межосевого расстояния.

Имеется разновидность зацепления Новикова с двумя линиями зацепления, параллельными осям колес (до полюса и за полюсом). В этом варианте головки зубьев обоих колес выпуклые, а ножки вогнутые. Такая передача обладает большей нагрузочной способностью, чем передача с одной линией зацепления.



## 15. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КОНИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Конические передачи используются для передачи вращения между пересекающимися осями. Аналогично начальным цилиндрам в цилиндрической зубчатой передаче в конической передаче рассматриваются начальные конусы 1 и 2, касающиеся друг друга по общей образующей  $OW$  и перекатывающиеся один по другому без скольжения (рис. 20). Общая образующая  $OW$  является мгновенной осью относительного вращения. Межосевой угол  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$ , где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – углы начальных конусов. Чаще всего  $\Sigma = 90^\circ$ .

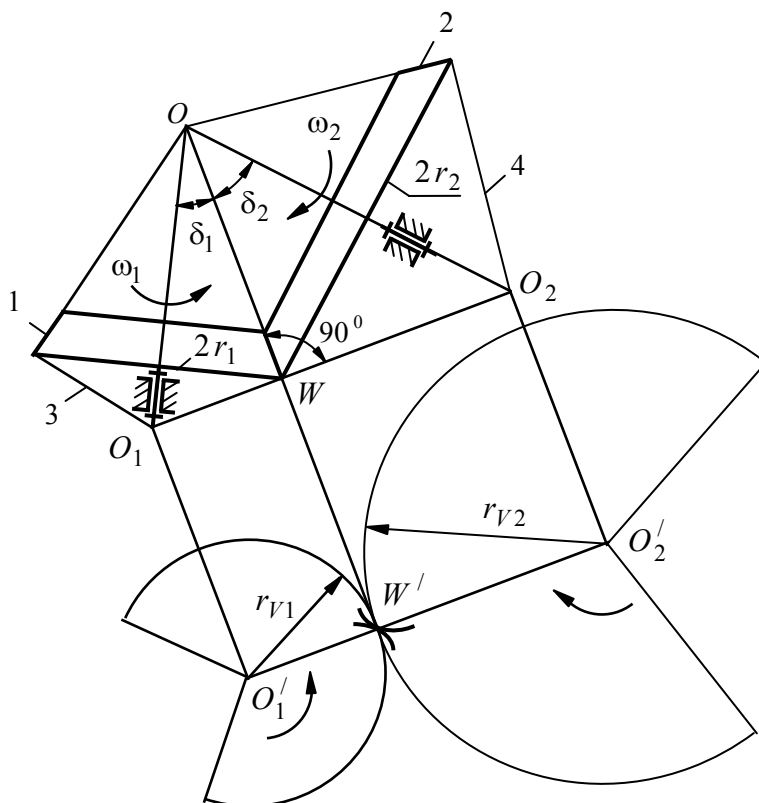


Рис. 20

Так как  $V_{W1} = V_{W2}$ , то  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$  и  $\omega_1 OW \sin \delta_1 = \omega_2 OW \sin \delta_2$ , откуда передаточное отношение конической передачи

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}.$$

Если  $z_2 \geq z_1$ , то  $U_{12} = U$  – передаточное число. При заданных  $\Sigma$  и  $U$  углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  определяются следующим образом:

$$U = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_1)}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \Sigma \cos \delta_1 - \cos \Sigma \sin \delta_1}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \Sigma}{\operatorname{tg} \delta_1} - \cos \Sigma,$$

откуда

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sin \Sigma}{U + \cos \Sigma}, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

Если  $\Sigma = 90^\circ$ , то  $\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{U}$ .

У конических колес различают конусы вершин, впадин, делительный конус. Обычно делительный и начальный конусы совпадают. Вершина конуса вершин не совпадает с вершиной начального конуса и конуса впадин. Это связано с требованием получить радиальный зазор в передаче постоянным по всей длине зубьев.

Для упрощения некоторых расчетов конические колеса заменяют эквивалентными цилиндрическими колесами, которые получаются разверткой дополнительных конусов 3 и 4 на плоскость. Радиусы начальных окружностей эквивалентных цилиндрических колес

$$r_{V1} = O_1W = \frac{r_1}{\cos \delta_1}; \quad r_{V2} = O_2W = \frac{r_2}{\cos \delta_2}.$$

Числа зубьев

$$z_{V1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1}; \quad z_{V2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}.$$

$z_{V1}$  и  $z_{V2}$  являются нецелыми числами и не округляются. Передаточное число эквивалентной цилиндрической передачи

$$U_V = \frac{z_{V2}}{z_{V1}} = \frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2} = U \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}.$$

Если  $\Sigma = 90^\circ$ , то  $U_V = U \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_1} = U^2$ .

В зависимости от формы линии зуба на развертке делительного конуса различают колеса: 1) с прямыми (рис. 21, *а*); 2) с тангенциальными (рис. 21, *б*); 3) с круговыми (рис. 21, *в*); 4) с криволинейными зубьями. Наиболее высокие эксплуатационные показатели имеют конические передачи с круговыми зубьями.

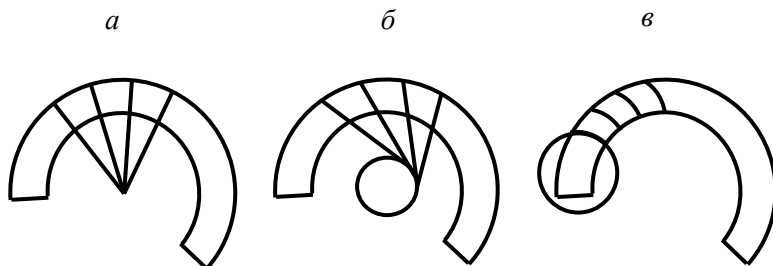


Рис. 21

В осевом сечении колеса различают три формы зуба: 1) пропорционально понижающиеся (рис. 22, *а*); 2) понижающиеся (рис. 22, *б*); 3) равновысокие (рис. 22, *в*).

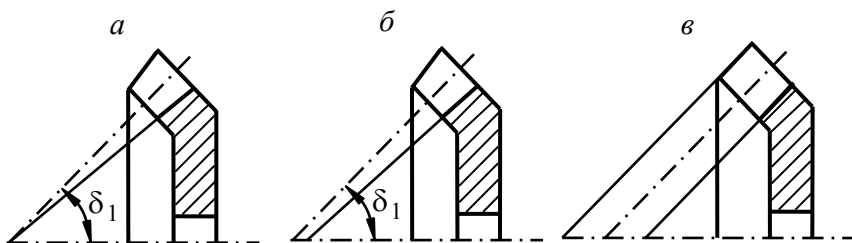


Рис. 22

Для прямозубых конических колес применяется только первая форма зуба. Теоретически сопряженными поверхностями зубьев конических колес могут быть эвольвентные конические поверхности. Однако эвольвентное зацепление для конических колес нетехнологично и на современных зубострогальных станках воспроизводится лишь приближенно. Чаще всего конические колеса нарезают методом обкатки инструментом, в основу которого положено плосковершинное производящее колесо с плоской боковой поверхностью зубьев, у которого угол конуса вершин равен  $90^\circ$ . Зубья производящего колеса воспроизводятся движением двух резцов, каждый из которых нарезает одну из сторон зуба конического колеса. В результате получается так называемое квазиэвольвентное зацепление, которое, строго говоря, является несопряженным.

## 16. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Червячные передачи используются для передачи вращения между скрещивающимися осями. Как правило, угол скрещивания осей равен  $90^\circ$ . Червячная передача состоит из червяка 1 и червячного колеса 2 (рис. 23).

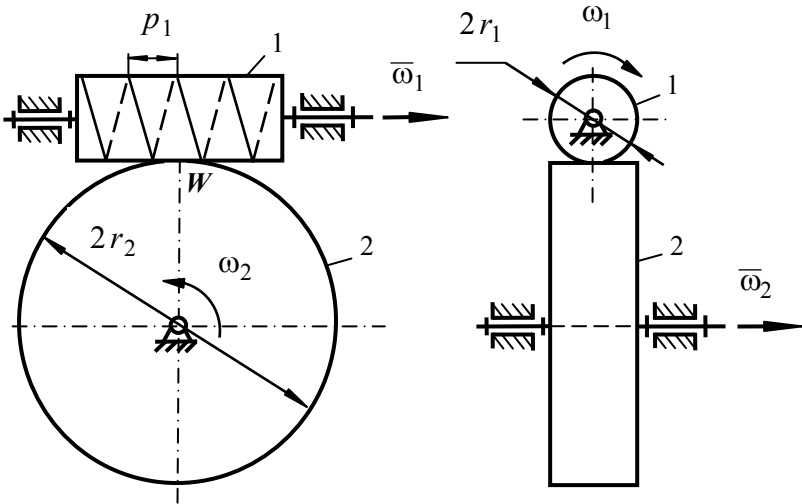


Рис. 23

На рис. 24 показана развертка винтовой линии витка на делительном цилиндре червяка.

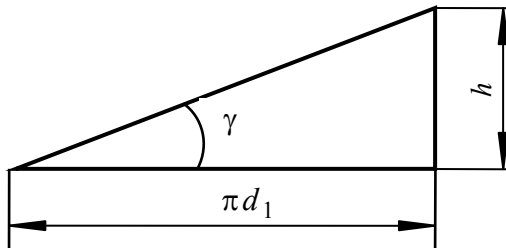


Рис. 24

Угол  $\gamma$  называется *углом подъема линии витка*,  $h$  – ходом витка, причем  $h = z_1 p_1$ , где  $z_1$  – число витков (заходов),  $p_1$  – осевой шаг червяка.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{\pi d_1} = \frac{z_1 p_1}{\pi d_1} = \frac{m z_1}{d_1},$$

где  $m = \frac{p_1}{\pi}$  – осевой модуль червяка.

Отношение  $\frac{d_1}{m} = q$  называется *коэффициентом диаметра червяка*. Тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1}{q}.$$

Значения  $m$  и  $q$  определены стандартом. Обычно  $z_1 = 1-4$ ,  $q = 8-28$ ,  $z_2 = 24-120$ . В кинематических передачах величина  $z_2$  может доходить до 1000.

Для нормальной работы передачи необходимо, чтобы осевой шаг червяка  $p_1$  и окружной шаг колеса по начальной окружности  $p_2$  были равны:  $p_1 = p_2 = \pi m$ . Угол наклона зубьев колеса  $\beta$  должен быть равен углу подъема линии витка червяка  $\gamma$ .

На рис. 25 показан план скоростей, построенный из точки  $W$  касания начальных цилиндров червяка и колеса согласно уравнению  $\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{21}$ , где  $V_1 = \omega_1 r_1$ ,  $V_2 = \omega_2 r_2$  – окружные скорости червяка и колеса,  $\vec{V}_{21}$  – относительная скорость, направленная вдоль касательной  $t-t$  к винтовым линиям. Построение соответствует правой винтовой линии червяка.

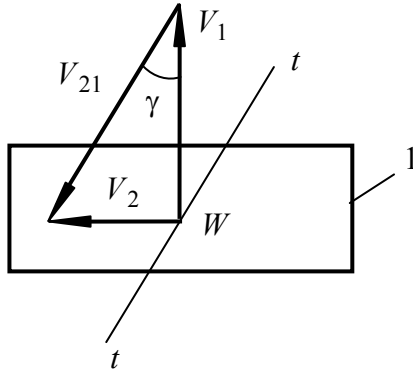


Рис. 25

Из треугольника скоростей  $V_2 = V_1 \operatorname{tg} \gamma$  и  $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1 \operatorname{tg} \gamma$ , откуда передаточное отношение червячной передачи

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1 \operatorname{tg} \gamma}.$$

Так как  $r_2 = \frac{m z_2}{2}$ , а из формулы (25)  $r_1 \operatorname{tg} \gamma = \frac{m z_1}{2}$ , то

$$U_{12} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Так как  $z_2 > z_1$ , то  $U_{12} = U$  – передаточное число.

В отличие от цилиндрических и конических передач в червячной передаче имеет место значительное скольжение вдоль винтовых линий

$$V_{\text{СК}} = V_{21} = \frac{V_1}{\cos \gamma} = \frac{\omega_1 r_1}{\cos \gamma}.$$

В качестве поверхностей витков червяка чаще всего используются архимедова и эвольвентная винтовые поверхности. У архимедова червяка в поперечном сечении получается спираль Архимеда, а в продольном сечении – рейка с прямолинейными профилями. У эвольвентного червяка соответственно получаются эвольвента окружности и рейка с выпуклыми профилями.

Достоинства червячных передач – компактность при больших передаточных числах, плавность и бесшумность работы. Недостатки – сравнительно низкий КПД, повышенная скорость скольжения, потребность в дорогостоящих антифрикционных материалах для изготовления колеса.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, В. К. Зубчатые передачи : текст лекций / В. К. Акулич, Н. И. Мицкевич, О. Н. Цитович. – Минск: БПИ, 1973. – 95 с.
2. Гавриленко, В. А. Основы теории эвольвентной зубчатой передачи / В. А. Гавриленко. – 2-е изд., перераб. – Москва: Машиностроение, 1969. – 432 с.
3. Литвин, Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф. Л. Литвин. – Москва: Наука, 1968. – 584 с.
4. Передачи зубчатые. Термины, определения и обозначения: ГОСТ 16530–83. – Москва: Издательство стандартов, 1984.
5. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии: ГОСТ 16532–70. – Москва: Издательство стандартов, 1971.
6. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внутреннего зацепления. Расчет геометрии: ГОСТ 19274–73. – Москва: Издательство стандартов, 1974.
7. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / И. А. Болотовский [и др.]; под ред. И. А. Болотовского. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 1986. – 448 с.
8. Теория механизмов и механика машин / К. В. Фролов [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – 5-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2005. – 496 с.
9. Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления / И. А. Болотовский [и др.]. – Москва: Машиностроение, 1974. – 160 с.
10. Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внутреннего зацепления / И. А. Болотовский [и др.]. – Москва: Машиностроение, 1977. – 192 с.

Учебное издание

**АНЦИПОРОВИЧ** Петр Петрович  
**АКУЛИЧ** Валерий Константинович  
**ДУБОВСКАЯ** Елена Михайловна

## **СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ**

Пособие

для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология  
машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»

Редактор *Ю. В. Ходочинская*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 18.01.2019. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 3,37. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 500. Заказ 597.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.



