МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ С ЭЛЕМЕНТАМИ СТРОИТЕЛЬНОГО ЧЕРЧЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин», 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (по направлениям)»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области транспортной деятельности

Минск
БНТУ
2019

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я7
Н36

Авторы:
Л. С. Разумова, *А. Ю. Лешкевич*, *С. В. Гиль*, *Н. М. Грицко*

Рецензенты:
кафедра «Начертательная геометрия и инженерная графика»
УО «Брестский государственный технический университет»
(зав. кафедрой *Н.С. Винник*);
канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная графика» УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Н. П. Амельченко

Н36 **Начертательная** геометрия с элементами строительного черчения : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин», 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (по направлениям)» / Л. С. Разумова [и др.]. – Минск: БНТУ, 2019. – 102 с.
ISBN 978-985-583-059-8.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные темы раздела «Начертательная геометрия» с элементами строительного черчения, которые студенты изучают в первом семестре. Также представлены практические рекомендации перед выполнением индивидуальных заданий, вызывающих определенные сложности («Перспектива», «Числовые отметки»), проанализированы задачи с различными вариантами их решения. Издание дает необходимый объем знаний для выполнения студентами индивидуальных заданий по каждой теме в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Рекомендуется преподавателям кафедры в качестве методических рекомендаций к единому подходу в изложении основополагающих тем раздела «Начертательная геометрия» с элементами строительного черчения.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я7

ISBN 978-985-583-059-8

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Она преследует две цели: во-первых, дать методы для изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения (длину и ширину) любых тел природы, имеющих три измерения (длину, ширину, высоту) при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы; во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из форм и их взаимного расположения. Это определение дал начертательной геометрии ее основоположник, французский ученый и общественный деятель Гаспар Монж (1746–1818 гг.).

Первый курс начертательной геометрии, состоящий из 120 лекций, Г. Монж прочел в 1795 г. в нормальной школе (преобразованной в политехническую) преподавателей в Париже. В России преподавать начертательную геометрию начали с 1810 г. в Петербургском институте инженеров путей сообщения.

Многочисленные труды по начертательной геометрии и ее приложениям принадлежат профессорам С. А. Севастьянову, В. И. Курдюмову, Н. А. Рынину, М. А. Дешевому, академикам Е. С. Федорову, Н. Ф. Четверухину.

В разработке темы «Проекции с числовыми отметками» также участвовали Е. И. Царук и В. С. Евдокимова.

В основе начертательной геометрии лежит метод проекций. Всякая проекция – отображение, поэтому для ее определения следует внести следующие понятия:

– *объекты проецирования* (в их качестве могут выступать любые предметы окружающего нас мира);

– *поверхности проецирования* (в качестве поверхности проецирования может быть: плоская, цилиндрическая, сферическая);

– *способы проецирования* (могут задаваться лучами).

Рассмотрение метода проекций начинают с выбора простейших элементов аппарата проецирования (точка, плоскость, прямая).

1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

1.1. Центральные проекции

Для получения центральной проекции точки (A) необходимо задать плоскость проекций (P) и центр проекций (S) – точку, не лежащую в плоскости проекций (рис. 1.1). Проведя через S и A проецирующую прямую линию до пересечения ее с плоскостью P, получаем точку A_p – центральную проекцию точки A. Точно так же проецируем точки B и C. Каждой точке пространства будет соответствовать своя проекция, но имея проекцию, нельзя по ней определить положение самой точки в пространстве, так как любая точка (A_1) проецирующего луча (например, SA) проецируется в одну и ту же точку. Для единственного решения необходимы дополнительные условия.

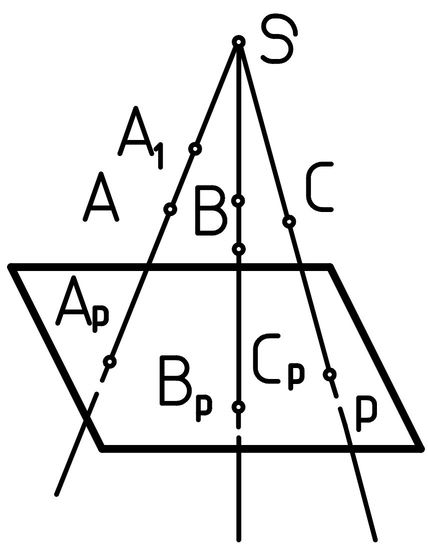


Рис. 1.1

Можно, не изменяя положение плоскости P, взять новый центр S_1, спроецировав точку A дважды из двух центров S и S_1. По полученным проекциям (A_p, A_{1p}) положение точки в пространстве будет однозначно определено (рис. 1.2).

Проекцию линии можно построить, проецируя ряд ее точек (рис. 1.3). При этом проецирующие прямые в своей совокупности образуют коническую поверхность. От проецирования точки и линии можно перейти к проецированию поверхности.

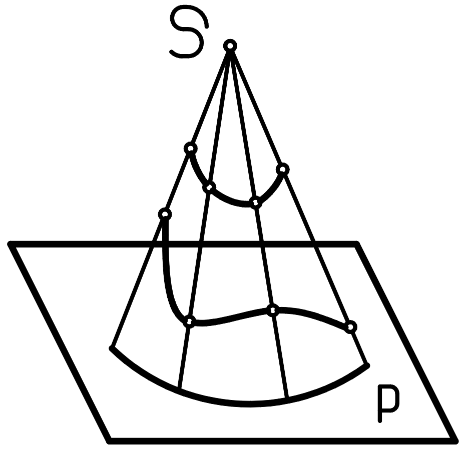


Рис. 1.2

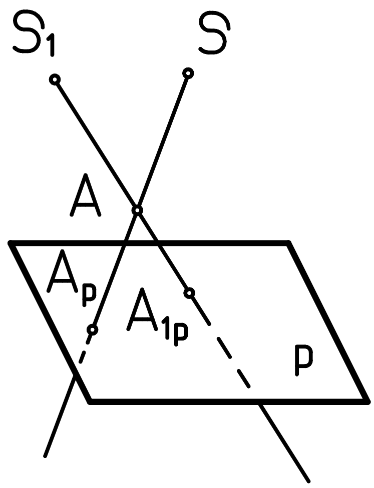


Рис. 1.3

1.2. Параллельные проекции

Если центр проецирования – бесконечно удаленная точка, проецирующие лучи будут параллельны (параллельное проецирование). Для их проведения должно быть указано направление. Оно может быть наклонено под любым углом к плоскости проекций.

Параллельные проекции делятся:

– на косоугольные – направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол, не равный 90°;

– прямоугольные (ортогональные) – проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций.

Параллельная проекция точки – точка пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций (рис. 1.4).

Параллельную проекцию линии можно построить по проекциям ряда ее точек (рис. 1.5). При этом проецирующие прямые в совокупности образуют цилиндрическую поверхность.

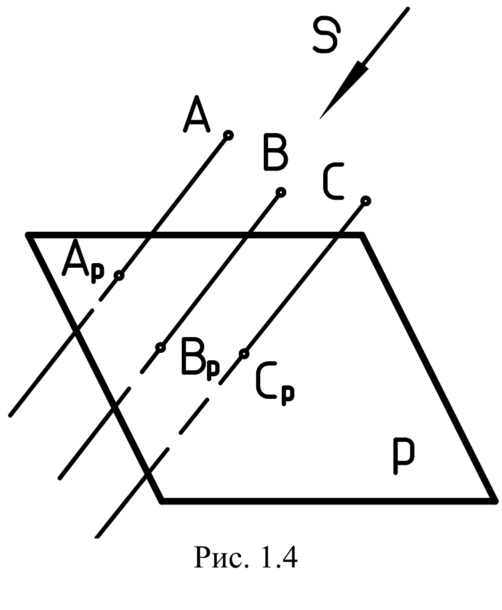


Рис. 1.4

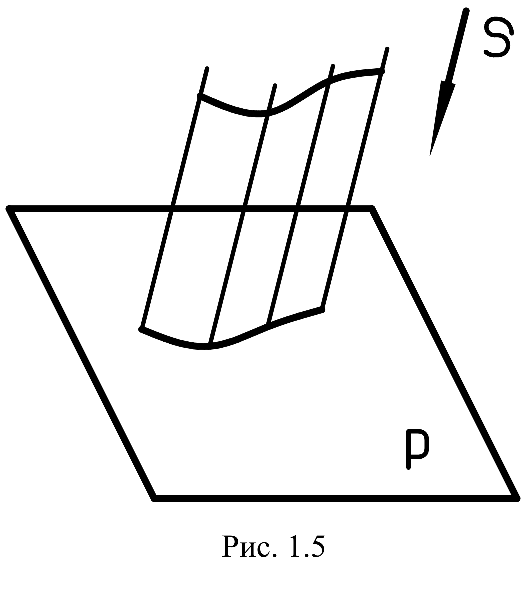


Рис. 1.5

Параллельному проецированию присущи все общие закономерности центрального проецирования, в частности и то, что оно не является взаимооднозначным.

1.3. Свойства параллельного проецирования

Перечень свойств параллельного проецирования:

– каждой точке пространства соответствует одна единственная проекция;

– проекция прямой линии в общем случае – прямая;

– если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой;

– если точка делит отрезок прямой в данном отношении, то и ее проекция делит одноименную проекцию отрезка в том же отношении;

– при параллельном переносе плоскости проекций по направлению проецирования проекция фигуры по величине и форме не изменяется.

2. МЕТОД МОНЖА

Точка трехмерного пространства задается тремя числами (координатами), каждое из которых может быть рассмотрено как расстояние до некоторой плоскости.

За три опорных элемента отсчета принимают три взаимно перпендикулярные плоскости – плоскости проекций (рис. 2.1):

H – горизонтальная плоскость проекций;

V – фронтальная плоскость проекций;

W – профильная плоскость проекций.

Линия пересечения плоскостей проекций – ось проекций: $x = V \cap H$; $y = H \cap W$; $z = V \cap W$.

Точка пересечения трех плоскостей проекций O – начало координат.

Спроецируем ортогонально точку пространства A на три плоскости проекций. Обозначим:

A' – горизонтальная проекция;

A'' – фронтальная проекция точки;

A''' – профильная проекция точки.

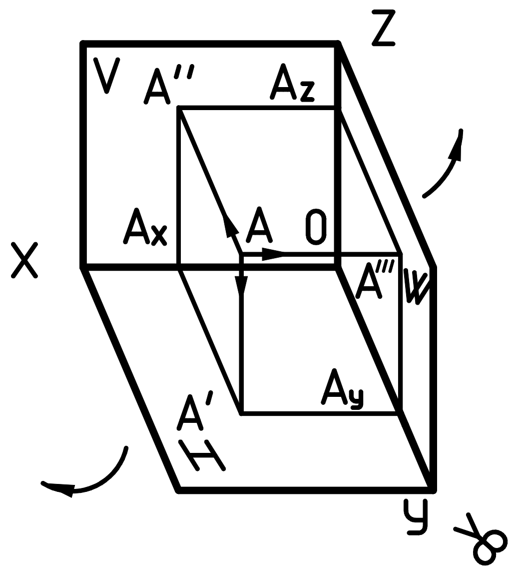


Рис. 2.1

Проведем из точек A', A'', A''' перпендикуляры к осям проекций. Мысленно разрежем трехгранник плоскостей по оси y и повернем плоскости H и W до общей плоскости чертежа (рис. 2.2).

Из чертежа видно, что A' и A'' лежат на одном перпендикуляре (линии связи) к оси x; A'' и A''' – на одном перпендикуляре к оси z; A' и A''' – на одном перпендикуляре к оси y.

Каждая из проекций точек определяется двумя координатами:

$A'(x, y)$;

$A''(x, z)$;

$A'''(y, z)$.

В какой бы комбинации не взяли попарно эти проекции, там будут присутствовать все три координаты.

Следовательно, для однозначного определения точки в пространстве необходимо и достаточно задать на чертеже какие-либо две ее проекции.

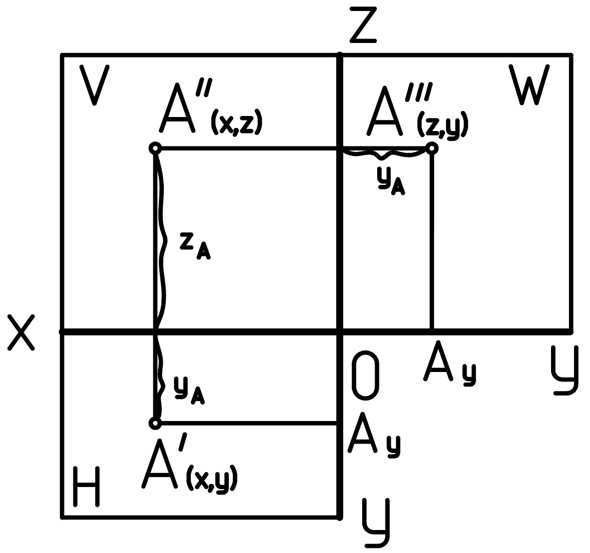


Рис. 2.2

Обычно в качестве основных выбирают горизонтальную H и фронтальную V плоскости проекций и расположенные на них проекции точек.

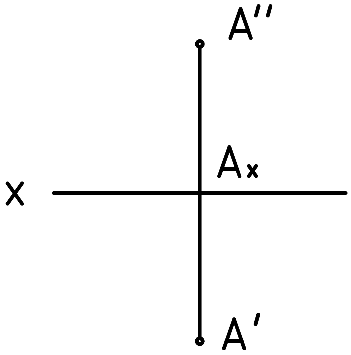


Рис. 2.3

Третью плоскость проекций, а с ней и оси z и y, убирают. При этом исчезает сам изображаемый объект и проецирующие лучи. Полученный чертеж, составленный из двух или более связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры, называют *комплексным чертежом* или *эпюром Монжа* (рис. 2.3).

2.1. Точки в четвертях и октантах пространства

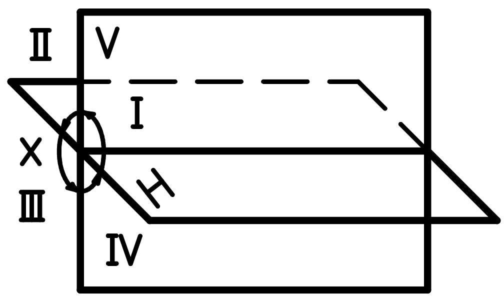


Рис. 2.4

Плоскости V и H делят пространство на четыре части – *четверти.* Порядок отсчета указан на рис. 2.4.

Три плоскости проекций V, H, W делят пространство на восемь частей – *октантов.* Октанты принято нумеровать, как указано на рис. 2.5.

Применяя для отсчета координат точки систему знаков, указанную на рис. 2.5, получим табл. 2.1.

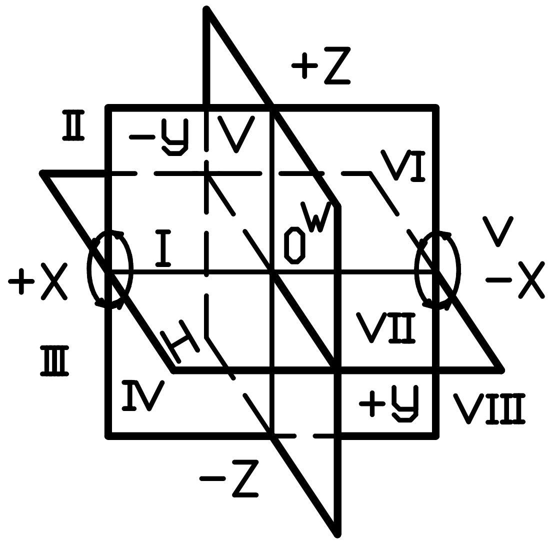


Рис. 2.5

Таблица 2.1

Октант	Знаки координат		
	x	*y*	*z*
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+
VII	–	–	–
VIII	–	+	–

На рис. 2.6 даны чертежи точек *A* (20, 10, 20), расположенной в первом октанте, *B* (–30, –10, –25), расположенной в седьмом октанте. Если одна из координат точки равна 0, следовательно, точка лежит в плоскости проекций. Точка *C* (30, 15, 0) лежит в плоскости *H*. Если две координаты точки из трех равны 0, то точка принадлежит координатной оси (см. рис. 2.6).

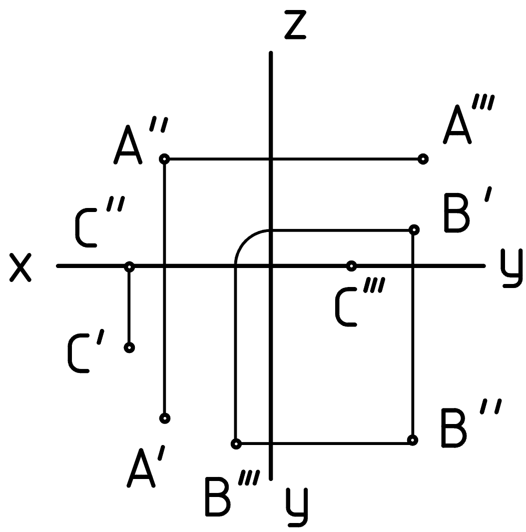


Рис. 2.6

2.2. Ортогональные проекции прямой

При ортогональном проецировании на плоскость прямая, не перпендикулярная плоскости проекций, проецируется в прямую, поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух нетождественных точек, принадлежащих этой прямой ℓ (*A*, *B*) (рис. 2.7).

Каждая из проекций отрезка *AB* прямой ℓ меньше самого отрезка *AB* (рис. 2.8). Углы между прямой ℓ и плоскостями *H*, *V*, *W* обозначают соответственно α, β и γ. Прямую ℓ, произвольно расположенную по отношению к плоскостям проекций, называют *прямой общего положения*. Углы α, β и γ произвольные, но отличные от 0° и 90°.

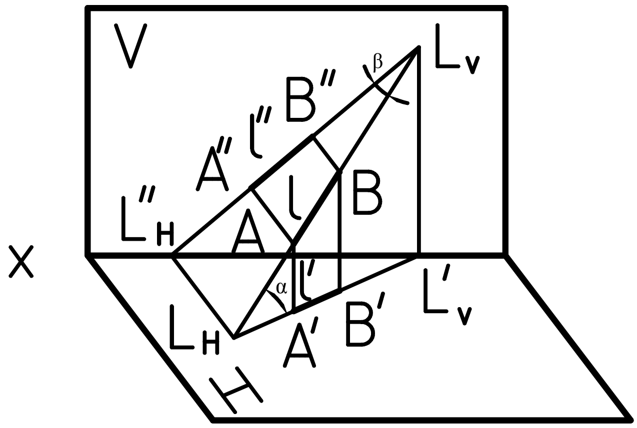


Рис. 2.7

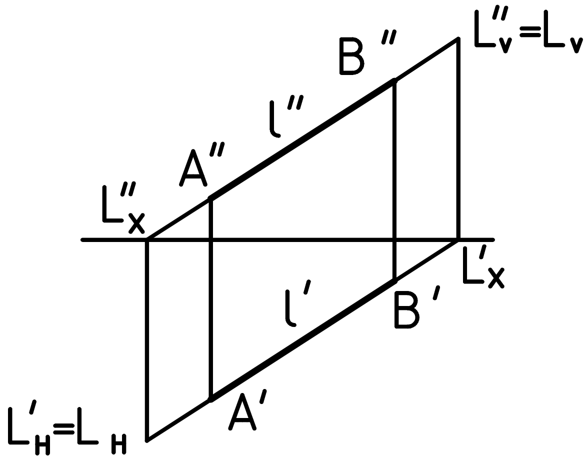


Рис. 2.8

2.3. Следы прямой

Прямая общего положения ℓ пересекает все основные плоскости проекций. Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется *следом прямой*. На рис. 2.7 и 2.8 ℓ_H – горизонтальный след прямой ℓ; ℓ_V – фронтальный след прямой ℓ.

Прямая не имеет следа на плоскости в том случае, когда она параллельна этой плоскости.

2.4. Частные случаи расположения прямой относительно плоскостей проекций

Существуют следующие частные случаи расположения прямой относительно плоскостей проекций:

– прямая параллельна одной плоскости проекций – *прямая уровня*;

– прямая перпендикулярна плоскости проекций – *проецирующая прямая*, параллельная двум плоскостям проекций.

2.5. Прямые уровня

1. Прямая, параллельная плоскости *H*, – *горизонталь (h)*. Горизонтальная проекция отрезка этой прямой равна самому отрезку (рис. 2.9).

2. Прямая, параллельная плоскости *V*, – *фронталь (f)*. Фронтальная проекция отрезка такой прямой равна самому отрезку (рис. 2.10).

3. Прямая, параллельная плоскости *W*, – *профильная (p)*. Профильная проекция отрезка такой прямой равна самому отрезку (рис. 2.11).

Характерная особенность проекций таких прямых – параллельность одной из проекций оси *x* (см. рис. 2.9, 2.10), параллельность двух проекций осям *y*, *z* (см. рис. 2.11).

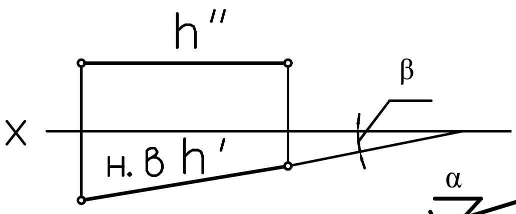


Рис. 2.9

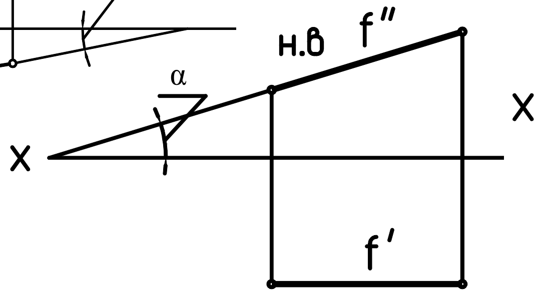


Рис. 2.10

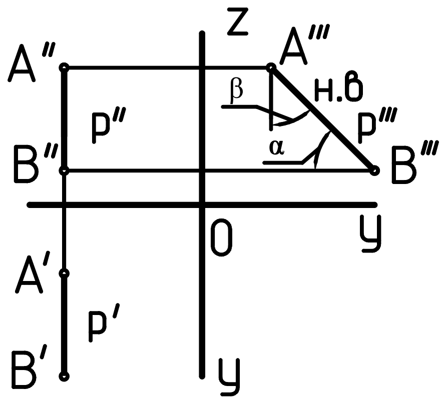


Рис. 2.11

2.6. Проецирующие прямые

Перечень проецирующих прямых:

– прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций – *горизонтально-проецирующая* (рис. 2.12);

– прямая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций – *фронтально-проецирующая* (рис. 2.13);

– прямая перпендикулярна профильной плоскости проекций – *профильно-проецирующая* (рис. 2.14).

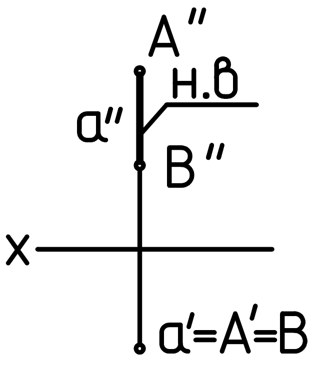


Рис. 2.12

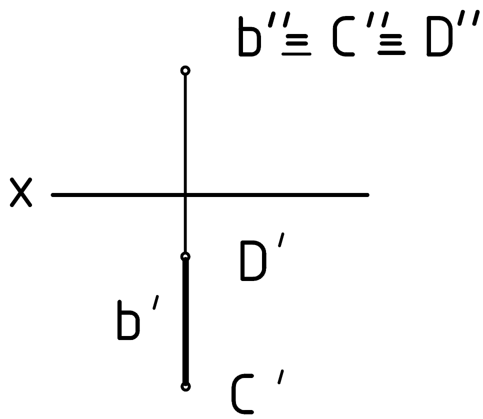


Рис. 2.13

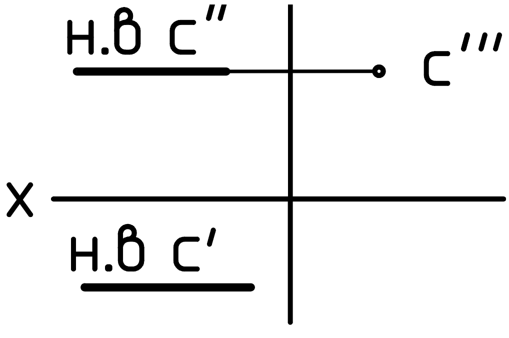


Рис. 2.14

Проекция любой точки, лежащей на проецирующей прямой (рис. 2.15), совпадает с вырожденной проекцией прямой (точки A, B и C, D).

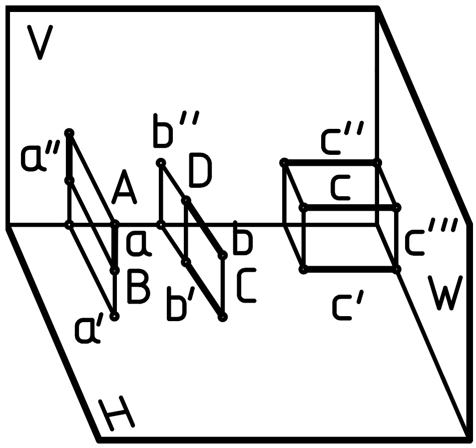


Рис. 2.15

2.7. Определение на чертеже натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций методом прямоугольного треугольника

Зависимость между длиной отрезка и длиной его проекции видна из рис. 2.16. Отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника ΔABB_1, в котором один катет равен проекции отрезка ($AB_1 = A'B'$), а другой катет равен разности концов отрезка от плоскости проекций ($BB_1 = |z_B - z_A|$). Аналогично можно рассмотреть ΔABA_1.

Графически на эпюре для определения натуральной величины отрезка достаточно построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является проекция отрезка на какую-либо плоскость проекций, а величина другого катета равна разности расстояний концов отрезка до этой плоскости проекций. Длина гипотенузы равна искомой величине отрезка, а угол между катетом – проекцией и гипотенузой равен углу наклона отрезка к этой плоскости проекций (рис. 2.17).

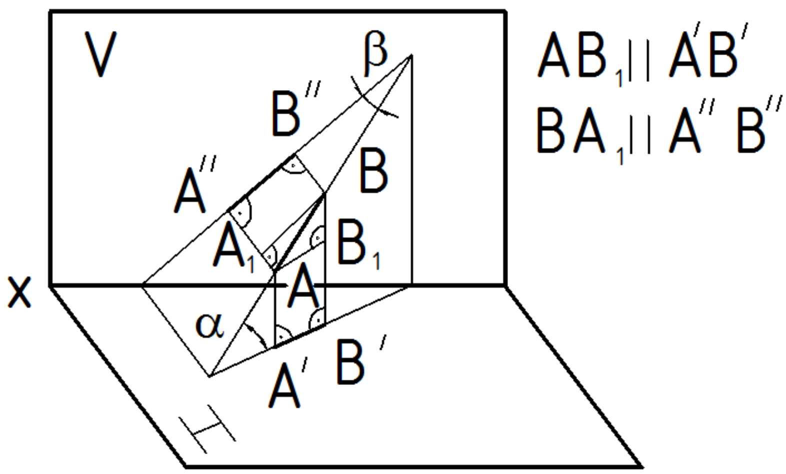


Рис. 2.16

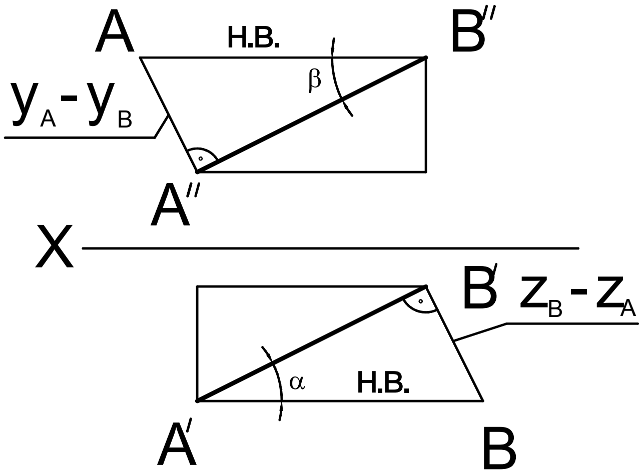


Рис. 2.17

3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

3.1. Параллельные прямые

К числу свойств параллельного проецирования относится следующее: проекции двух параллельных прямых параллельны между собой. Если прямая (*а*) параллельна прямой (*в*) (рис. 3.1), то горизонтальные проекции этих прямых параллельны между собой, фронтальные проекции параллельны между собой и профильные проекции также параллельны между собой.

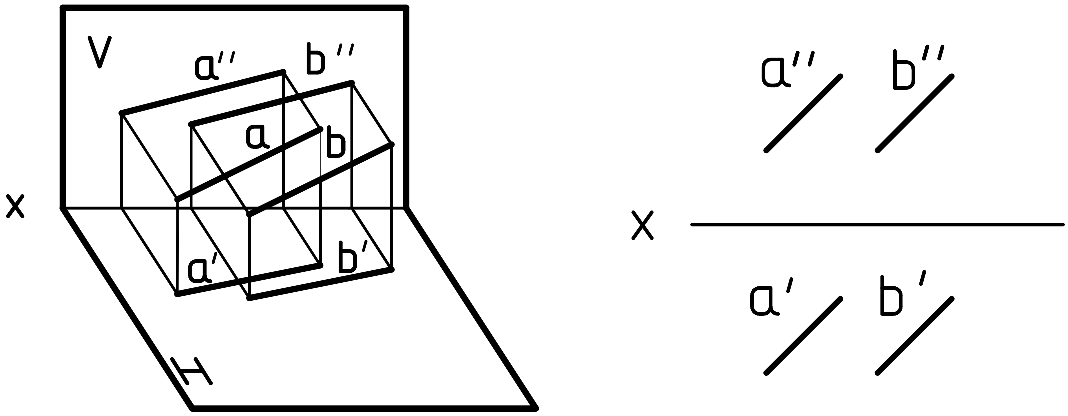


Рис. 3.1

Однако если даны параллельные между собой проекции прямых лишь на двух плоскостях проекций, то параллельность этих прямых в пространстве подтверждается всегда для прямых общего положения и может не подтвердиться для прямых, параллельных одной из плоскостей проекций. В этом случае необходимо рассмотреть расположение проекций прямых на той плоскости проекций, относительно которой данные прямые параллельны. Из рис. 3.2 видно, что прямые *AB* и *CD* не параллельны.

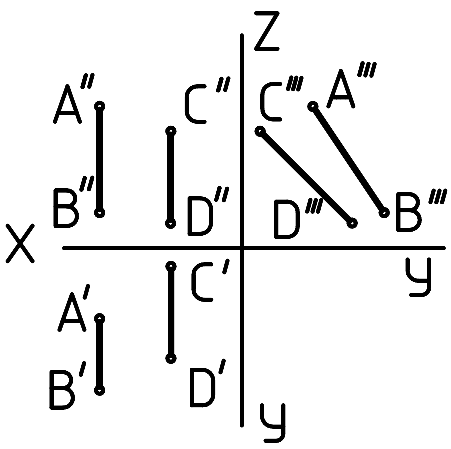


Рис. 3.2

3.2. Пересекающиеся прямые

Если прямые пересекаются в некоторой точке, то их проекции пересекаются в соответствующих проекциях этой точки. Необходимым и достаточным условием пересечения прямых общего положения является то, что точки пересечения одноименных проекций прямых должны находиться на одном и том же перпендикуляре к соответствующей оси проекций (на одной линии связи, рис. 3.3).

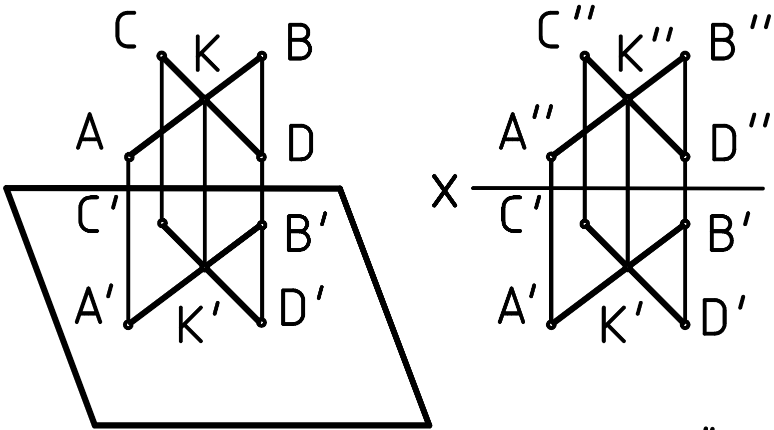


Рис. 3.3

Если хотя бы одна из прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, а на чертеже не даны проекции на этой же плоскости, то нельзя утверждать, что такие прямые пересекаются между собой (рис. 3.4). Из построений профильной проекции видно, что прямые *AB* и *CD*, из которых прямая *AB* параллельна плоскости *W*, не пересекаются.

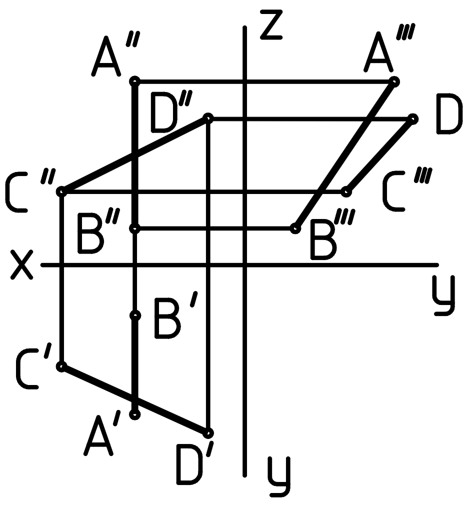


Рис. 3.4

3.3. Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны между собой (рис. 3.5). Точки пересечения проекций прямых не могут быть соединены одной линией связи. Точки, лежащие на одном проецирующем луче, называются *конкурирующими* (1, 2 и 3, 4).

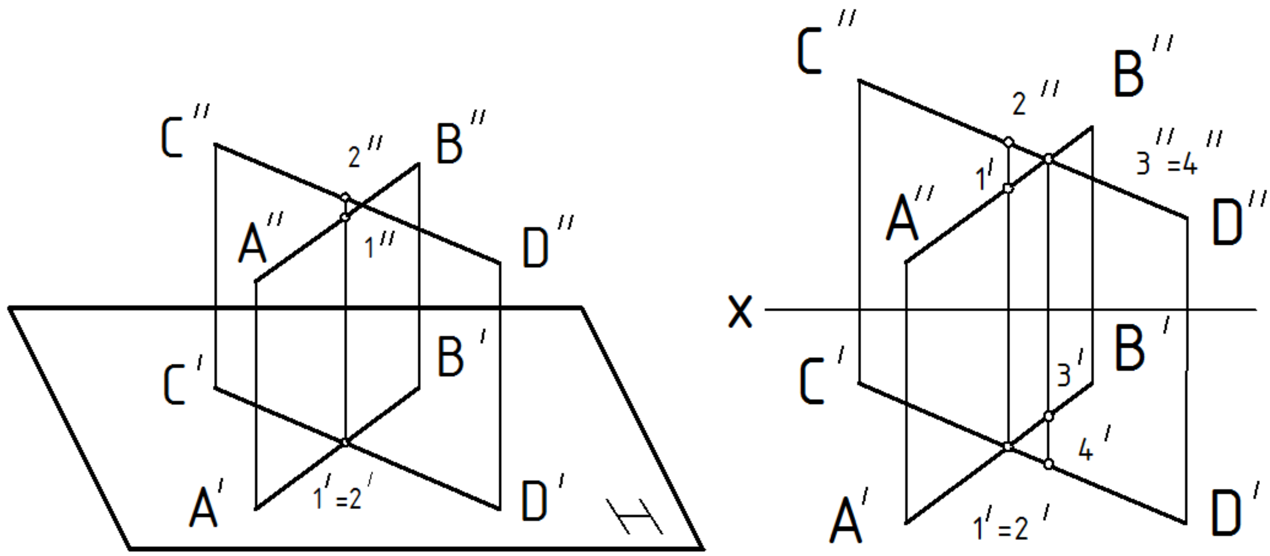


Рис. 3.5

4. ПРОЕКЦИИ ПЛОСКИХ УГЛОВ

1. Если стороны угла не параллельны плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость с искажением.

Из рис. 4.1 видно, что все углы с вершиной на прямой *MN*, стороны которых расположены в проецирующих плоскостях α и β, проецируются в $\angle KNL$, при этом проецируемые углы могут изменяться в пределах 0–180°.

2. Если хотя бы одна сторона тупого, прямого или острого угла параллельна плоскости проекций, то проекция угла на эту плоскость будет с тем же названием, что и сам угол (тупой, прямой, острый). При этом, как видно из рис. 4.2:

– проекция острого угла меньше проецируемого ($\angle ABC$);

– прямой угол проецируется без искажения ($\angle ABD$);

– проекция тупого угла больше проецируемого угла ($\angle ABE$).

3. Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то на эту плоскость он проецируется без искажения.

Проекции острого и тупого углов могут проецироваться на плоскость проекций без искажения не только при условии параллельности сторон угла плоскости проекции. Из рис. 4.1 видно, что все углы, стороны которых расположены в плоскостях α и β, имеют своей проекцией $\angle KNL$; среди этих углов может быть и угол, равный своей проекции.

4. Если стороны угла параллельны плоскости проекции или одинаково наклонены к ней, то деление пополам проекции угла соответствует его делению пополам в пространстве.

Следует особо выделить *теорему о проецировании прямого угла. Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.* Базируясь на этой теореме, можно просто решить на эпюре следующие задачи:

– построение прямых, перпендикулярных друг другу;

– построение прямой, перпендикулярной плоскости;

– построение взаимно перпендикулярных плоскостей.

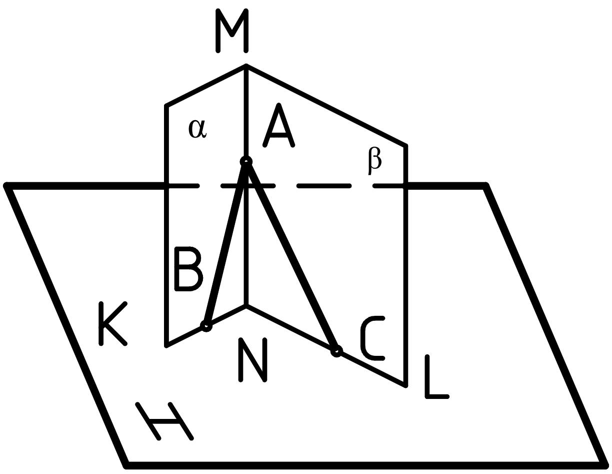


Рис. 4.1

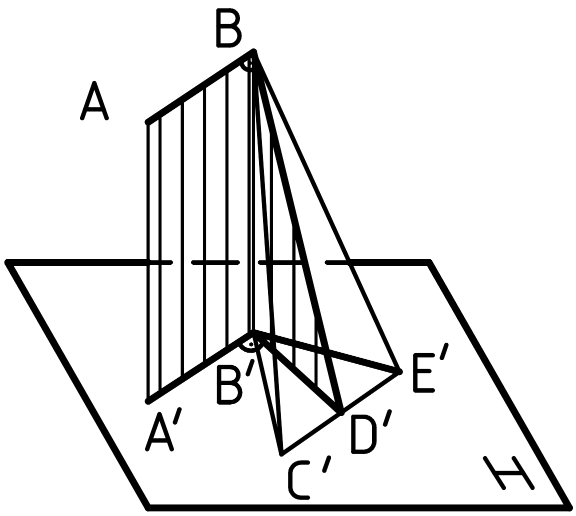


Рис. 4.2

5. ПЛОСКОСТЬ

5.1. Способы задания плоскости на чертеже

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой линии, поэтому на чертеже плоскость (α) может быть задана:

– проекциями этих точек α (A, B, C);

– точкой и прямой, проходящей через две другие точки α (A, ℓ);

– двумя параллельными прямыми α ($\ell \parallel m$);

– двумя пересекающимися прямыми α ($a \cap b$), в частности эти пересекающиеся прямые могут быть горизонталью и фронталью α ($h \cap f$), а если эти горизонталь и фронталь лежат в плоскостях проекций (нулевые), то они являются следами плоскости $\alpha(\alpha_H, \alpha_V)$ (рис. 5.1).

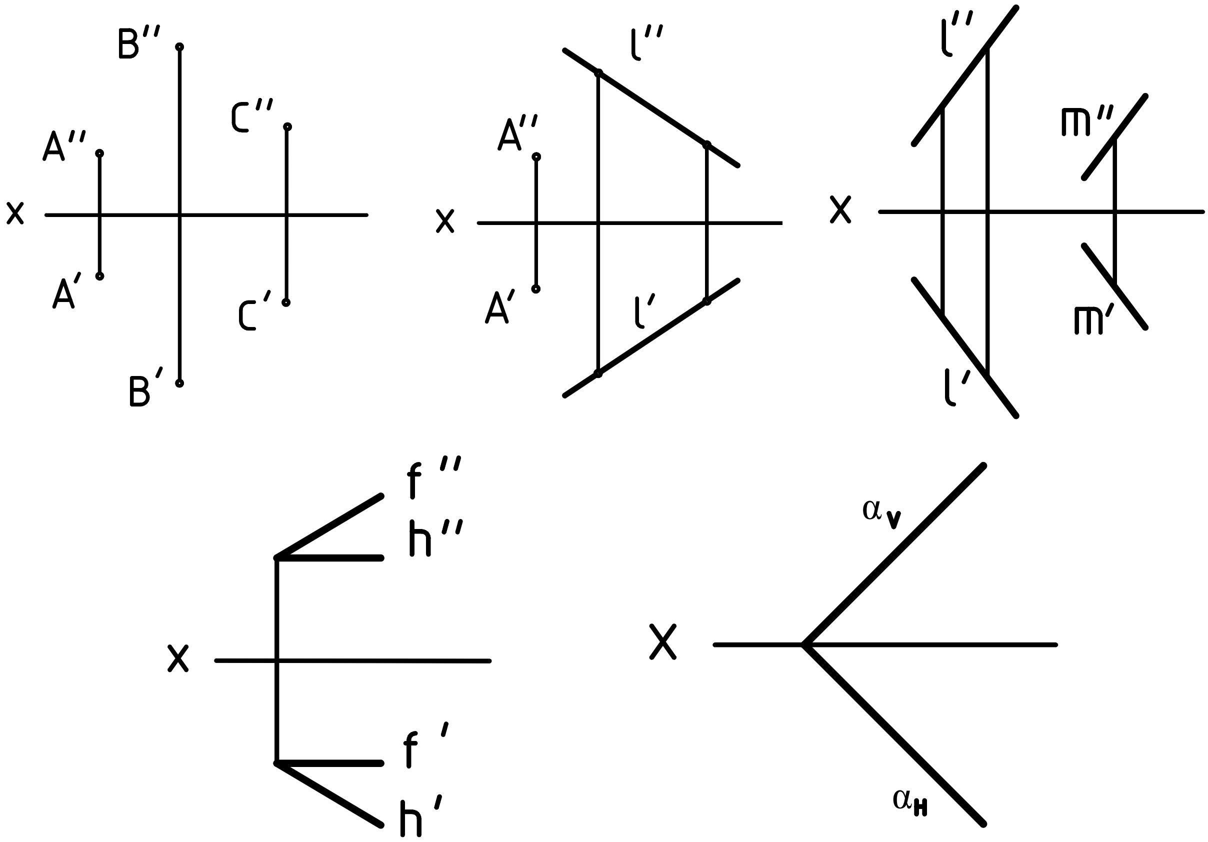


Рис. 5.1

Плоскость, занимающая произвольное положение относительно плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения* (рис. 5.2).

Следы плоскости – прямые, по которым плоскость пересекает плоскости проекций:

– α_H – горизонтальный след плоскости;

– α_V – фронтальный след плоскости;

– α_W – профильный след плоскости.

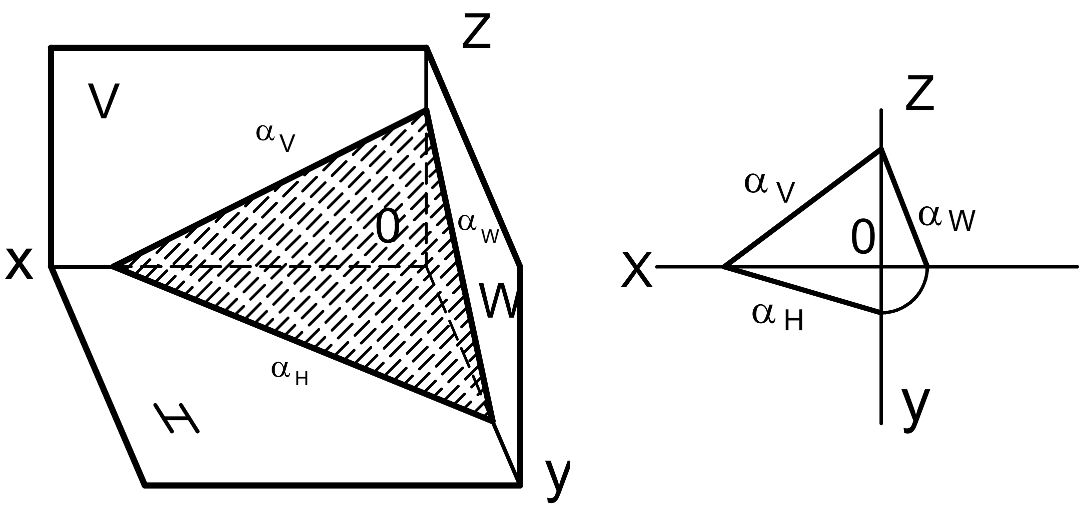


Рис. 5.2

5.2. Частные случаи расположения плоскости

1. *Проецирующие плоскости* – плоскости, перпендикулярные к плоскости проекций (рис. 5.3).

При этом различают:

– горизонтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp H$;

– фронтально-проецирующую плоскость $\beta \perp V$;

– профильно-проецирующую плоскость $\gamma \perp W$.

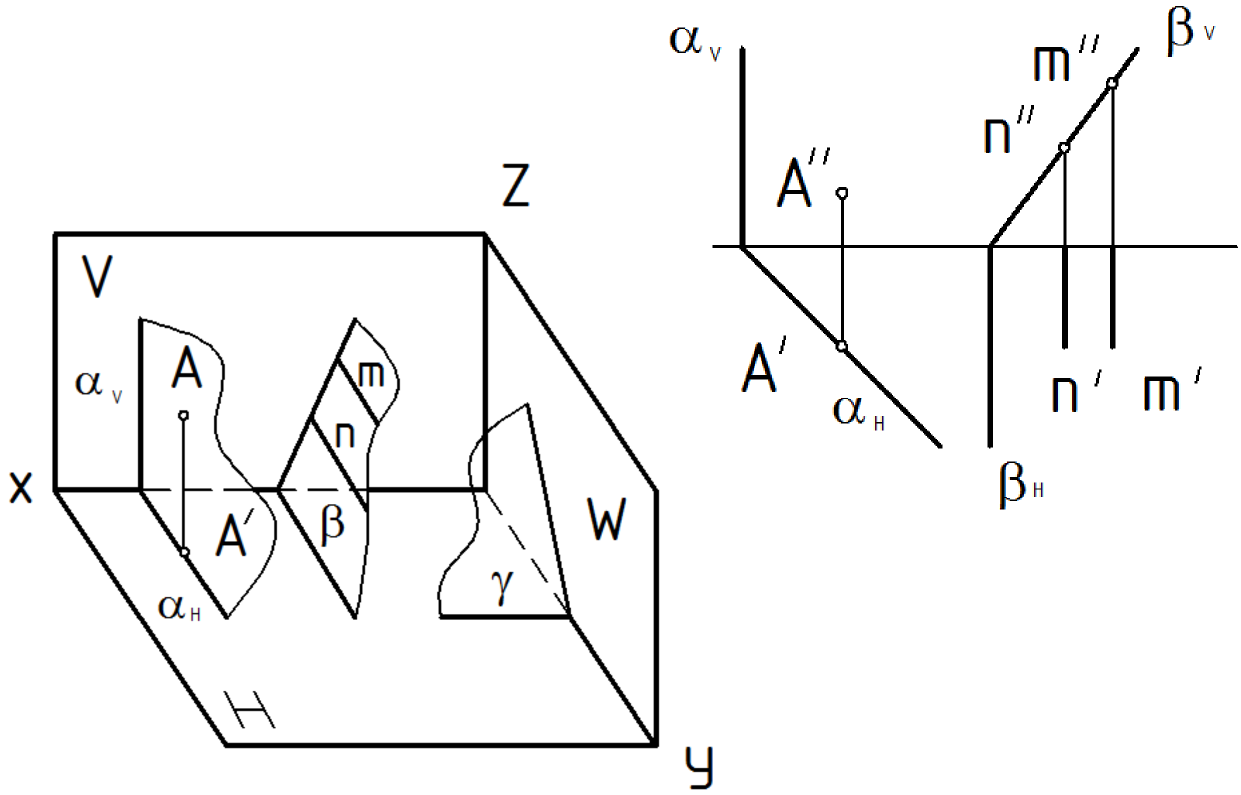


Рис. 5.3

Характерный признак проецирующей плоскости (α, β) на чертеже – один из следов перпендикулярен оси x.

Горизонтальная проекция любой точки, прямой или плоской фигуры, принадлежащей горизонтально-проецирующей плоскости, лежит на вырожденной проекции плоскости, которая обладает собирательным свойством. Аналогично можно рассмотреть фронтально-проецирующую (β) и профильно-проецирующую (γ) плоскости.

2. *Плоскости уровня* – плоскости, параллельные плоскости проекций. Эти плоскости перпендикулярны двум плоскостям проекций.

При этом различают:

– горизонтальную плоскость $\alpha \parallel H$;

– фронтальную плоскость $\beta \parallel V$;

– профильную плоскость $\gamma \parallel W$.

На рис. 5.4 показаны горизонтальная α и фронтальная β плоскости.

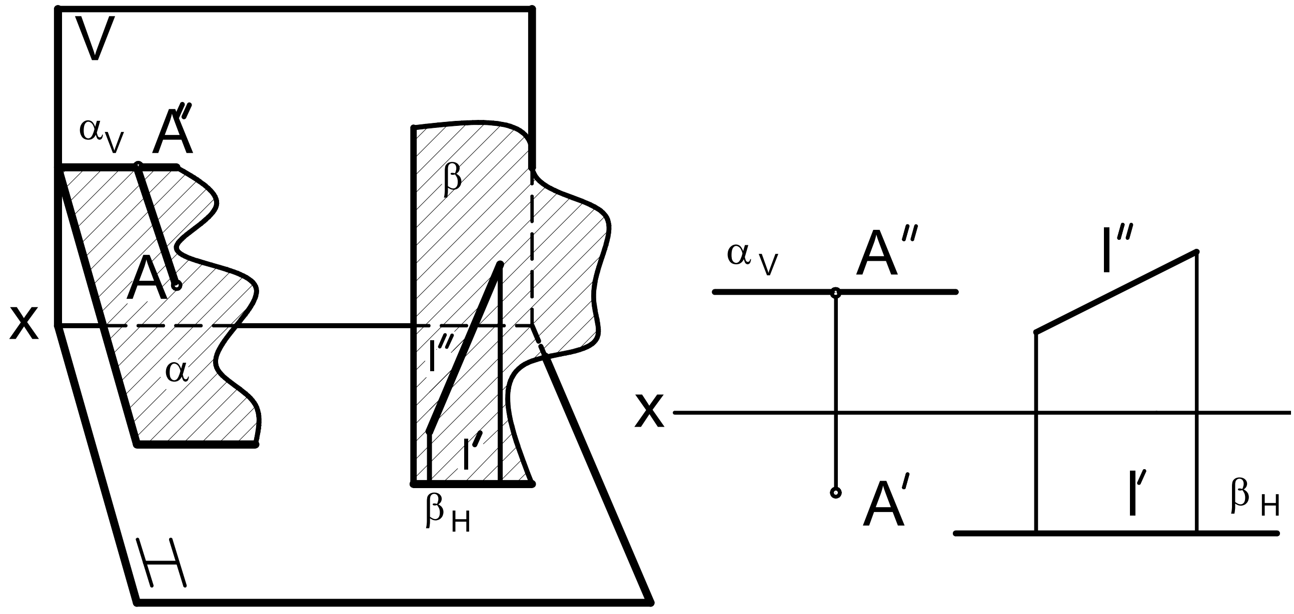


Рис. 5.4

5.3. Прямая и точка в плоскости

1. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости (рис. 5.5).

2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или параллельной.

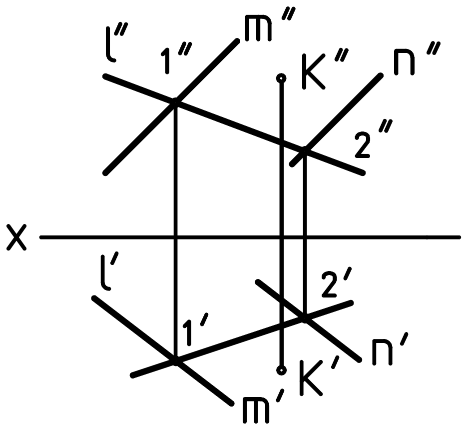


Рис. 5.5

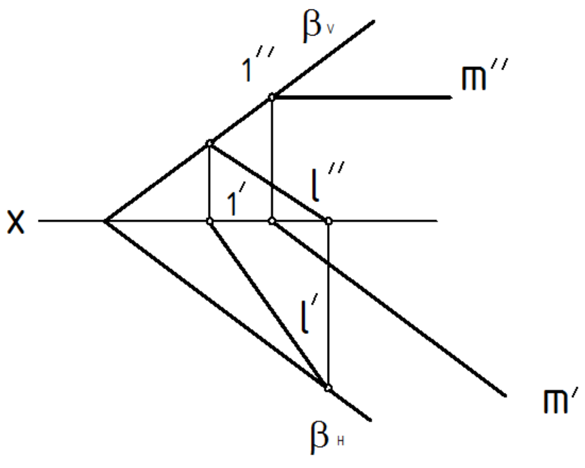


Рис. 5.6

Если плоскость β задана следами, то прямая (ℓ) принадлежит плоскости, если следы прямой находятся на одноименных с ними следах плоскости или если прямая (m) параллельна одному из следов плоскости и имеет с другим следом общую точку (рис. 5.6).

5.4. Главные линии плоскости

Прямые уровня – прямые, принадлежащие плоскости и параллельные какой-либо плоскости проекций (рис. 5.7):

– горизонталь (*h*) – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная плоскости *H*;

– фронталь (*f*) – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная плоскости *V*;

– профильная прямая (*p*) параллельная плоскости *W*.

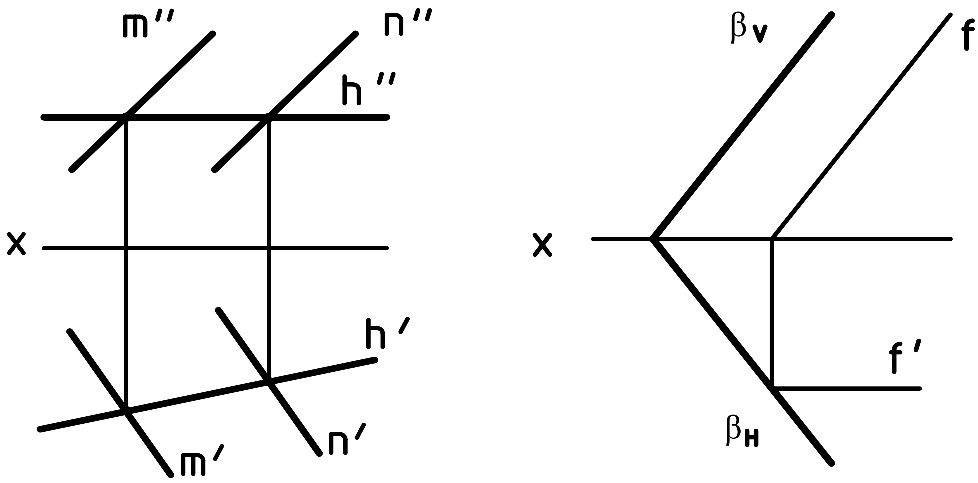


Рис. 5.7

Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций *H*, *V* или *W* – прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные к горизонтали, фронтали или профильной прямой соответственно.

Этими линиями пользуются для определения углов наклона плоскости к плоскостям проекций.

На рис. 5.8 показана линия наибольшего наклона плоскости к плоскости *H* (*MN*); эту линию называют *линией ската*.

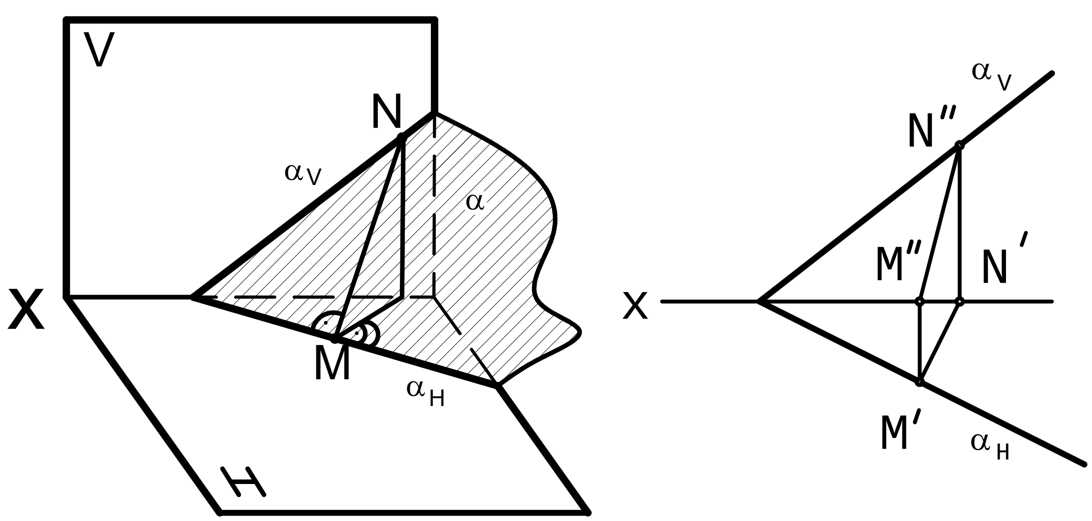


Рис. 5.8

5.5. Проведение проецирующей плоскости через прямую линию

Через прямую общего положения ℓ необходимо провести какую-либо проецирующую плоскость. Примеры даны на рис. 5.9

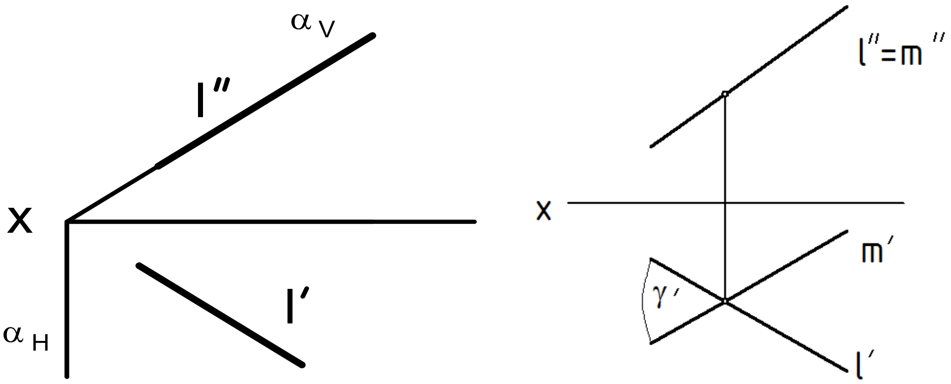


Рис. 5.9

Через прямую общего положения нельзя провести плоскость уровня (горизонтальную, фронтальную и профильную).

6. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Взаимное положение прямой линии и плоскости в пространстве может быть следующим:

– прямая лежит в плоскости;
– прямая пересекает плоскость;
– прямая параллельна плоскости.

6.1. Проведение проецирующей плоскости через прямую линию ℓ

Через прямую общего положения ℓ можно провести проецирующую плоскость, но нельзя провести плоскость уровня (рис. 6.1, 6.2).

На рис. 6.2 проведена горизонтальная плоскость уровня γ через соответствующую прямую (*h* – горизонталь).

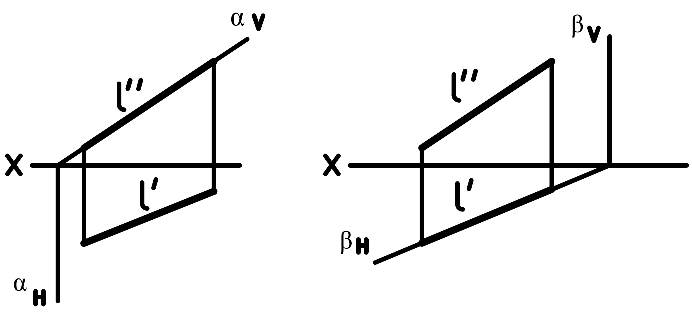


Рис. 6.1

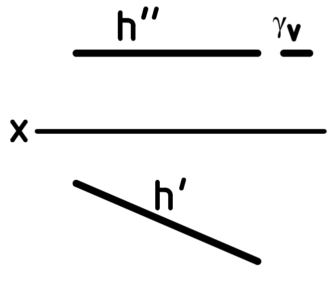


Рис. 6.2

6.2. Пересечение прямой линии с плоскостью (частные случаи)

Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью

ℓ – прямая общего положения;

ΔABC – горизонтально-проецирующая плоскость.

На рис. 6.3 горизонтальная проекция точки K (K') – пересечение прямой ℓ с ΔABC определяется в пресечении горизонтальных проекций ℓ' и $\Delta A'B'C'$, так как ΔABC проецируется на плоскость H в виде прямой линии. Определяем положение фронтальной проекции K''. Относительная видимость прямой определена с помощью конкурирующих точек (*1* и *2*).

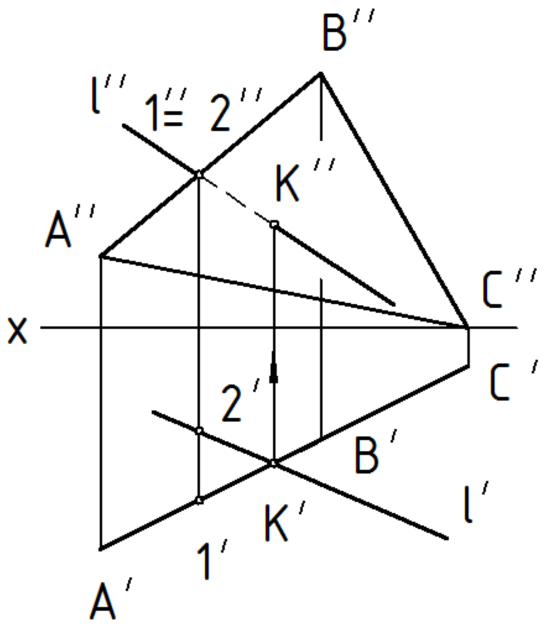


Рис. 6.3

Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения

ℓ – горизонтально-проецирующая прямая;

ΔABC – плоскость общего положения.

Фронтальная проекции точки K (K'') – пересечение прямой с плоскостью определена с помощью линии α_1, лежащей в плоскости (рис. 6.4).

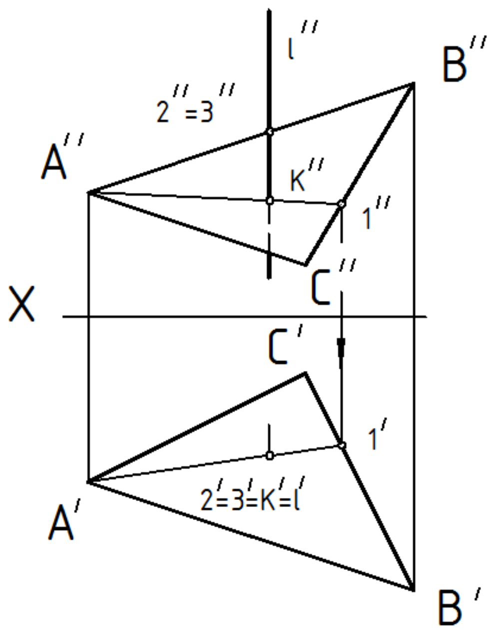


Рис. 6.4

6.3. Параллельность прямой и плоскости

Прямая, параллельная плоскости, должна быть параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 6.5).

$c \in \alpha\ (a \cap в)$ $\quad \ell'' \parallel c''\ \Lambda\ \ell' \parallel c' <=> \ell \parallel \Lambda\ \ell \parallel \alpha$

Две плоскости могут быть либо взаимно параллельными, либо пересекающимися. Взаимно перпендикулярные плоскости – частный случай пересекающихся плоскостей.

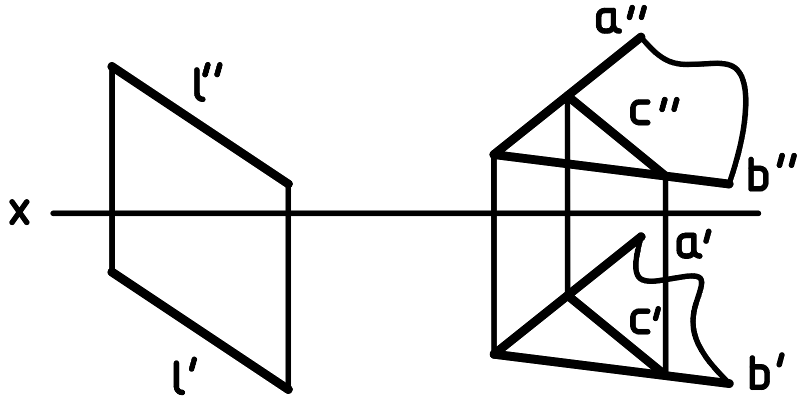


Рис. 6.5

6.4. Параллельные плоскости

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

При решении задач часто приходится через данную точку *A* проводить плоскость β, параллельную данной плоскости α (*а* ∩ *в*). На рис. 6.6 искомая плоскость β определена пересекающимися прямыми *c* и *d* соответственно параллельными *а* и *в* и проходящими через точку *A*. В частности, если плоскости заданы следами, то у параллельных плоскостей будут параллельны их одноименные следы (рис. 6.7).

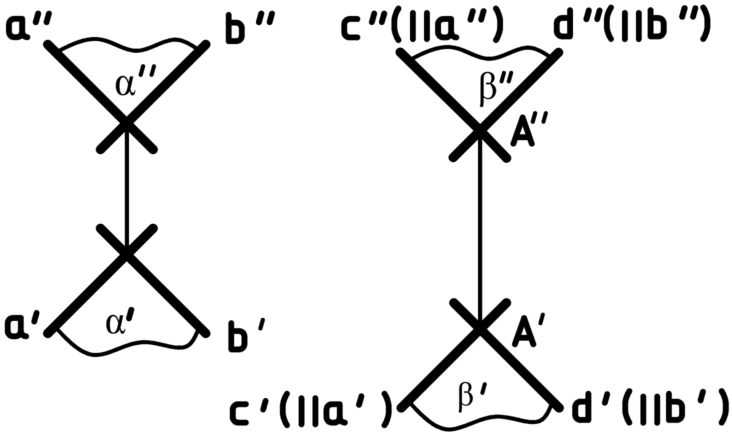


Рис. 6.6

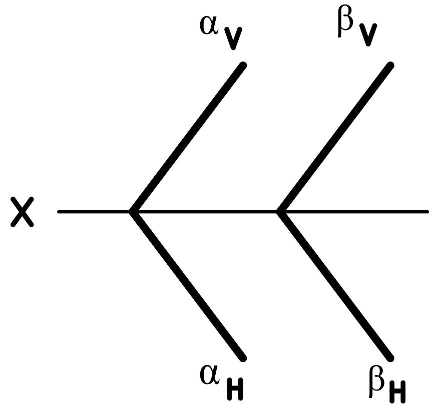


Рис. 6.7

6.5. Построение линии пересечения двух плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей.

Чтобы найти такие точки, достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости и дважды выполнить последовательность операций по следующему алгоритму (рис. 6.8):

1) вводим вспомогательную секущую плоскость γ_1;

2) определяем линии пересечения этой вспомогательной плоскости γ_1 с каждой из заданных плоскостей α и β – линии 1, 2 и 3, 4;

3) находим точку K_1, в которой пересекаются полученные линии пересечения;

4) аналогичным образом определяем вторую точку K_2 искомой линии пересечения двух плоскостей, вводя вторую вспомогательную плоскость γ_2;

5) по конкурирующим точкам определяем относительную видимость двух пересекающихся плоскостей;

6) вводим плоскости γ_1 ($\gamma_1 \parallel V$); γ_2 ($\gamma_2 \parallel V$);

7) определяем точки $1, 2 = \gamma_1 \cap \alpha$; $3, 4 = \gamma_1 \cap \beta$;

8) $K_1 = 1, 2 \cap 3, 4$; $K_1 K_2 = \alpha \cap \beta$ – искомая прямая.

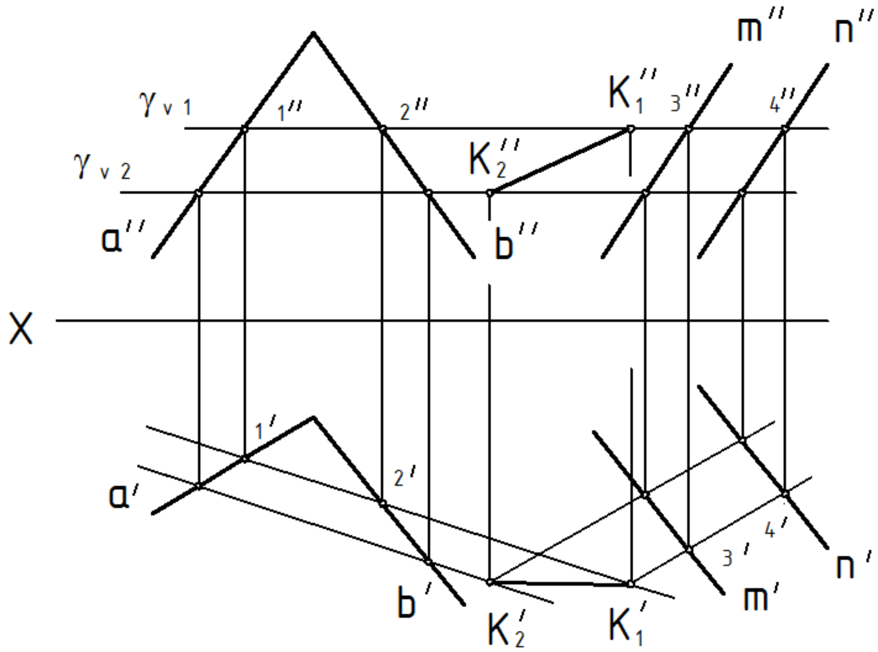


Рис. 6.8

6.6. Пересечение прямой линии плоскостью общего положения

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью необходимо (рис. 6.9):

1) через данную прямую ℓ провести вспомогательную плоскость γ;

2) построить прямую MN пересечения данной плоскости α ($a \cap в$) и вспомогательной γ;

3) определить положение точки K пересечения прямых – данной ℓ и построенной MN;

4) по конкурирующим точкам определить относительную видимость пересекающихся прямой линии и плоскости общего положения.

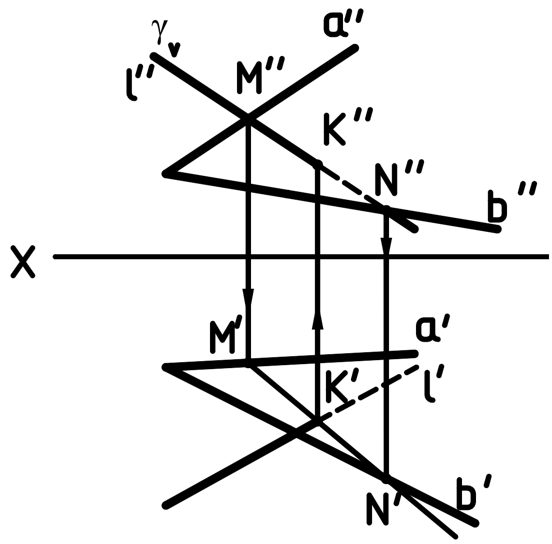


Рис. 6.9

6.7. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых с плоскостью

Линия пересечения MN треугольников ΔABC и ΔDEF построена по точкам пересечения сторон AC и AB треугольника ΔABC с плоскостью треугольника ΔDEF (рис. 6.10).

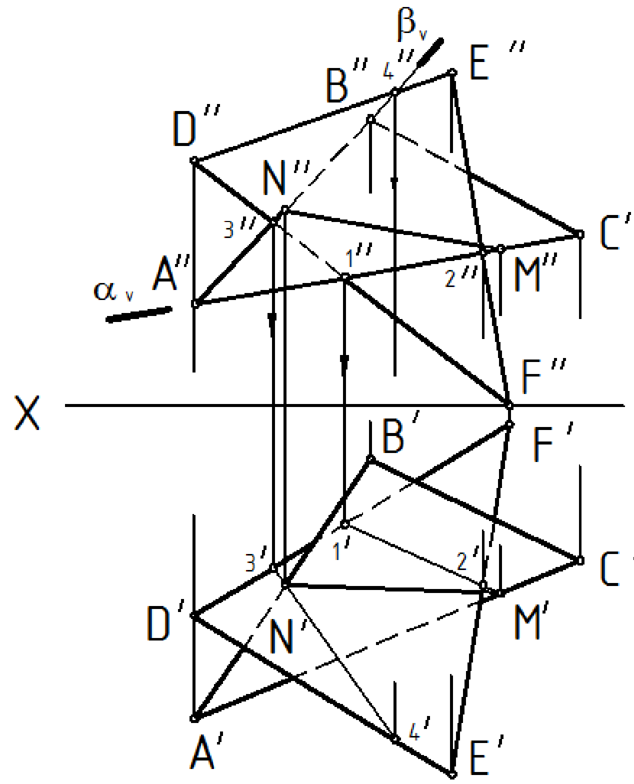


Рис. 6.10

7. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна хотя бы двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Если в плоскости взять не произвольные прямые, а горизонталь и фронталь, то можно воспользоваться ***теоремой о проецировании прямого угла***.

Для того, чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция этой прямой была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярно-фронтальной проекции фронтали той же плоскости.

На рис. 7.1 из точки K проведен перпендикуляр к плоскости треугольника ΔABC. $m' \perp h'$; $m'' \perp f''$.

Если плоскость задана следами, то для того чтобы прямая m в пространстве была перпендикулярна плоскости α, необходимо и достаточно, чтобы проекции этой прямой были перпендикулярны к одноименным следам плоскости (рис. 7.2).

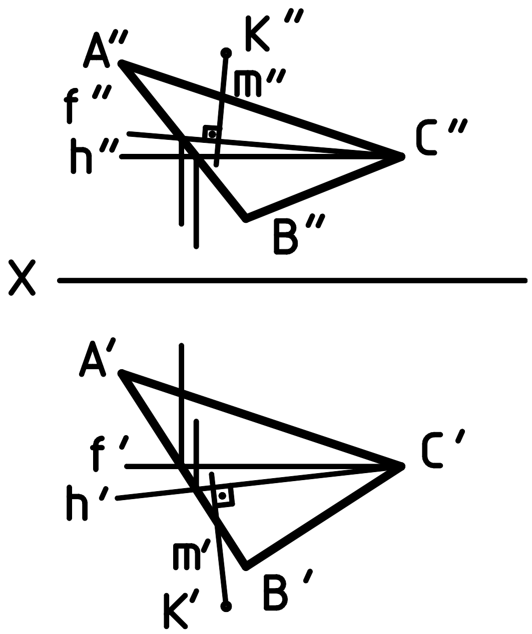


Рис. 7.1

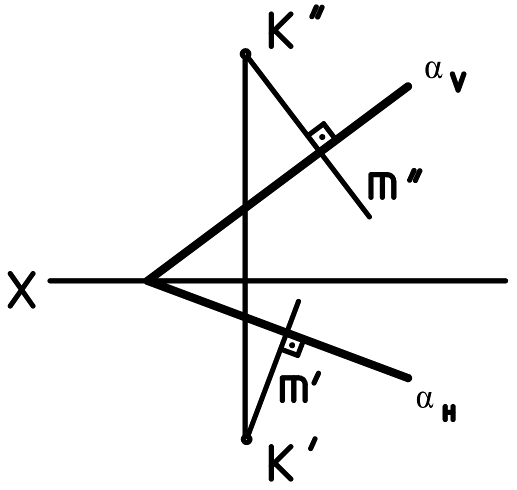


Рис. 7.2

8. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Для проведения перпендикуляра m к плоскости α (ΔABC) в ней взяты горизонталь h и фронталь f. Точка D – произвольная точка пространства (рис. 8.1). Через данную точку D можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости α. Чтобы конкретизировать ответ, необходимо указать дополнительные условия.

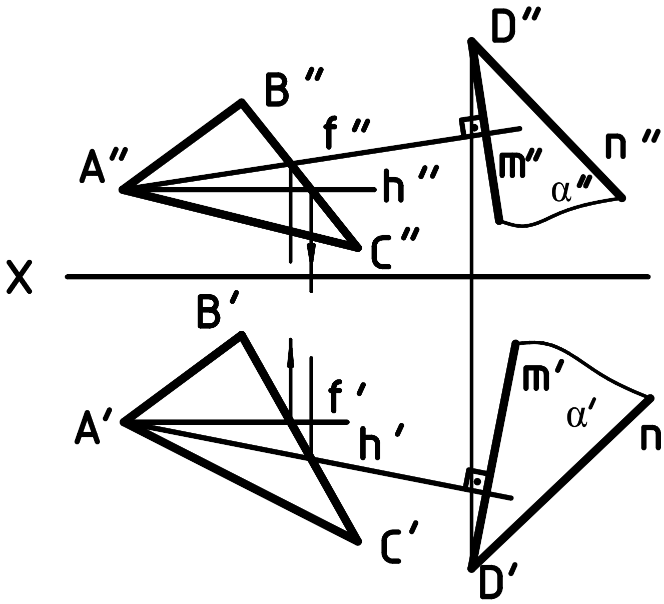


Рис. 8.1

Построение плоскости α, перпендикулярной к плоскости β, можно осуществить двумя путями:

1) провести прямую m, перпендикулярную к плоскости β, затем прямую m заключаем в плоскость α;

2) провести прямую n, принадлежащую или параллельную плоскости β, затем строим плоскость α, перпендикулярную прямой n.

Если одноименные следы двух плоскостей α *и* β *взаимно перпендикулярны, то эти плоскости в пространстве не перпендикулярны.*

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ УГЛА МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на данной плоскости (рис. 9.1).

План решения:

– из произвольной точки $A \in \ell$ проводим перпендикуляр к плоскости α;

– определяем точку встречи этого перпендикуляра с плоскостью α (точка A_α);

– находим точку пересечения прямой ℓ с плоскостью α (точку L_α);

– проводим $A_\alpha L_\alpha$ – проекцию прямой ℓ на плоскость α;

– определяем действительную величину угла $\angle AL_\alpha A_\alpha$ (угол φ).

Решение упрощается, если находить не угол φ, а угол γ; $\varphi^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ$.

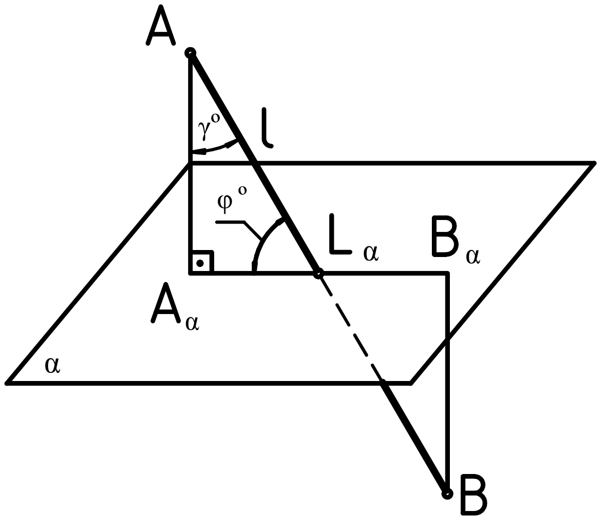


Рис. 9.1

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру (рис. 10.1).

План решения:

– определяем m – линию пересечения плоскостей α и β ($m = \alpha \cap \beta$);

– проводим плоскость $\gamma \perp m$ ($\gamma \perp \alpha$ и $\perp \beta$);

– определяем прямые a и $в$ – пересечение плоскости γ с заданными плоскостями α и β ($a = \gamma \cap \alpha$; $в = \gamma \cap \beta$);

– определяем действительную величину угла φ между прямыми a и $в$.

Решение задачи значительно упрощается, если находить угол Ψ ($\Psi^\circ = 180^\circ - \gamma^\circ$).

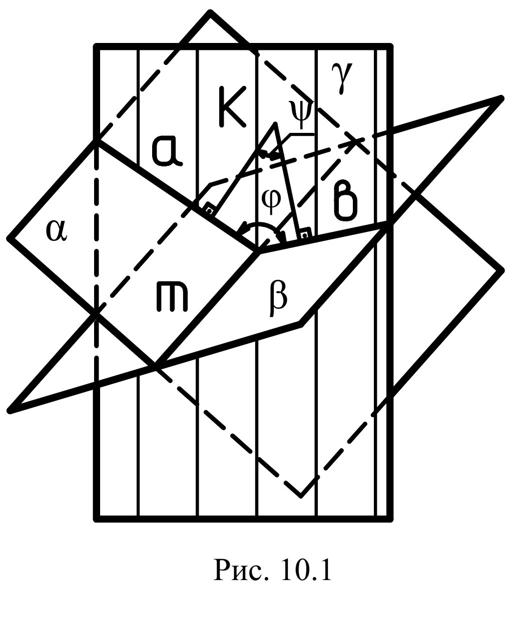


Рис. 10.1

11. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

При решении ряда задач могут встречаться значительные трудности, если заданные проекции не подвергнуть специальным преобразованиям.

Задание прямых линий и плоских фигур в частных положениях относительно плоскостей проекций значительно упрощает построение и решение задач.

Например, требуется определить расстояние от точки A до прямой ℓ. На рис. 11.1 даны проекции точки A и прямой ℓ. В первом случае $\ell \perp H$, во втором – $\ell \parallel V$, в третьем ℓ – прямая общего положения.

На рис. 11.1 горизонтальная проекция отрезка AK ($A'K'$) определяет искомое расстояние, так как ($AK \parallel H$).

На рис. 11.2 и 11.3 построены только проекции искомых отрезков, причем на рис. 11.3 построение сравнительно громоздкое.

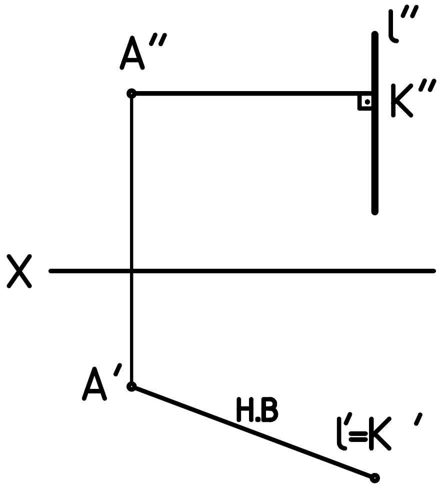


Рис. 11.1

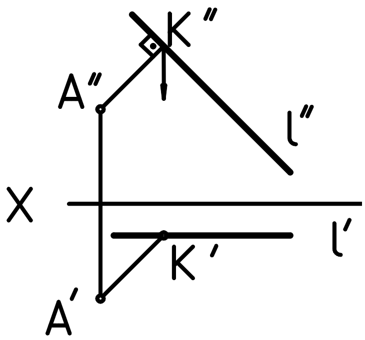


Рис. 11.2

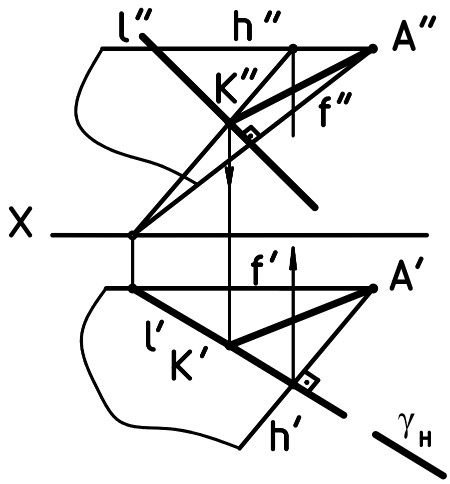


Рис. 11.3

Чтобы перейти от двух последних случаев к первому, можно:

1) переместить сам отрезок прямой относительно неподвижных плоскостей проекций и, ортогонально спроецировав, получить его новую проекцию в виде точки – это *способ изменения положения объекта проецирования*;

2) оставив отрезок неподвижным, ввести новую плоскость проекции и, спроецировав ортогонально отрезок на эту плоскость, получить его новую проекцию в виде точки – *это способ введения дополнительных плоскостей проекций.*

И в первом, и во втором случае строятся дополнительные проекции, а построение этих проекций называется *преобразованием чертежа.*

11.1. Четыре основные задачи способов преобразования чертежа

Задача 1. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня.
Задача 2. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую.
Задача 3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую.
Задача 4. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

11.2. Способ вращения

Сущность способа. Плоскости проекции неподвижны. При вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси (оси вращения) каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости вращения перпендикулярной оси. Точка вращается по окружности, центр которой расположен в точке пересечения оси вращения с плоскостью вращения. Радиус окружности вращения – расстояние от вращаемой точки до центра вращения (рис. 11.4).

Плоскость совмещения, с которой совмещается данная фигура, зависит от поставленной задачи.

i – ось вращения;

α – плоскость вращения ($\alpha \perp i$);

O – центр вращения; $O = \alpha \cap i$;

$R = |AO|$ – радиус вращения;

β – плоскость совмещения.

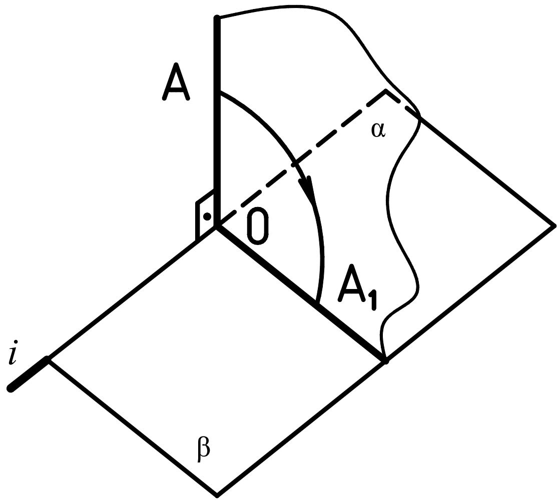


Рис. 11.4

11.3. Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций

На рис. 11.5 дано изображение точки A, вращающейся вокруг оси $i \perp V$. Точка перемещается по окружности, плоскость которой параллельна V. На плоскость V эта окружность проецируется без искажения, а на плоскость H – в виде отрезка прямой, параллельной оси X. На рис. 11.5 обозначено новое положение точки A – A_1, которое она занимает при повороте на некоторый угол φ.

Вращение точки A вокруг оси, перпендикулярной плоскости H, показано на рис. 11.6.

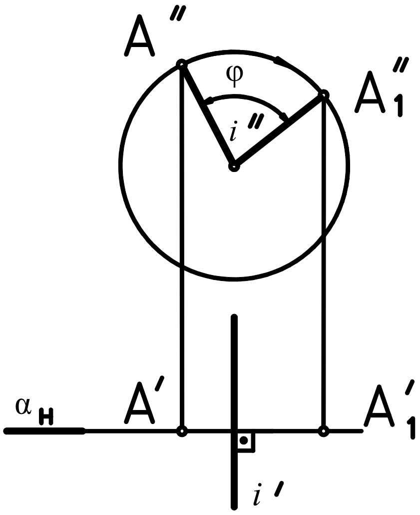


Рис. 11.5

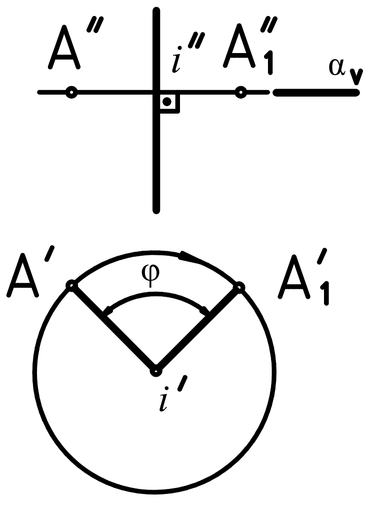


Рис. 11.6

Задача 1. Отрезок $|AB|$ прямой общего положения перевести в положение, параллельное плоскости V (рис. 11.7).

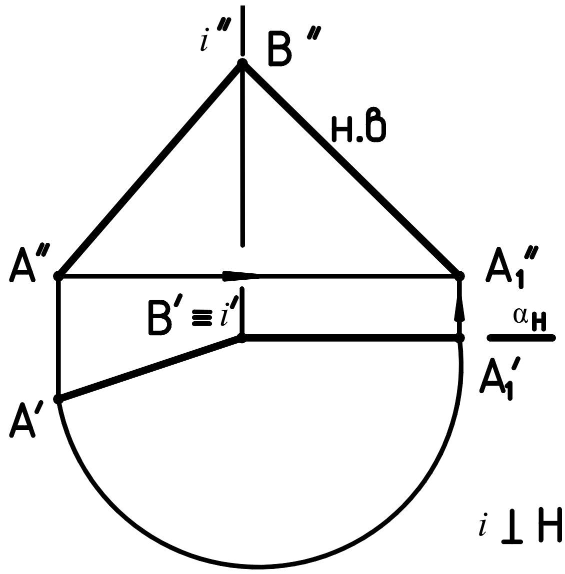


Рис. 11.7

Задача 2. Отрезок $|CD|$ прямой общего положения перевести в положение, перпендикулярное плоскости V (рис. 11.8).

Чтобы переместить отрезок CD из общего положения в проецирующее, выполнено два вращения вокруг осей $i_1 \perp V$ и $i_2 \perp H$.

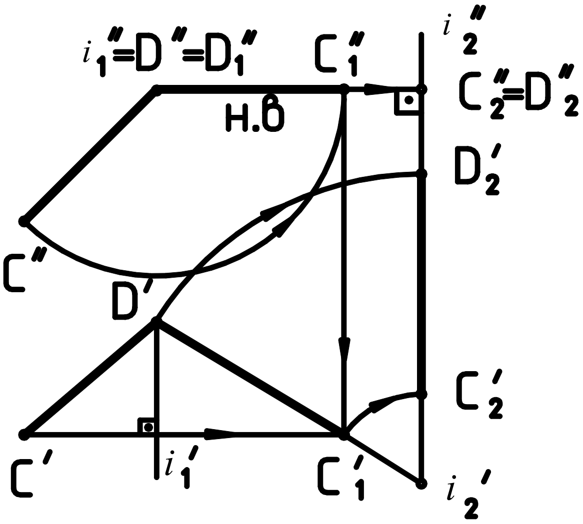


Рис. 11.8

Задача 3. Плоскость общего положения α (ΔABC) перевести в положение фронтально-проецирующей (рис. 11.9).

Известно, что отличительным признаком фронтально-проецирующей плоскости на эпюре является перпендикулярность горизонтальной проекции ее горизонтали оси X.

В плоскости ΔABC проведена горизонталь h, которая вращением на угол φ вокруг оси $i \perp H$, приведена в положение $C'D'_1 \perp V$. Вершины A и B треугольника ΔABC повернуты на тот же угол φ.

Фронтальная проекция треугольника – прямая, наклоненная под углом α к плоскости H.

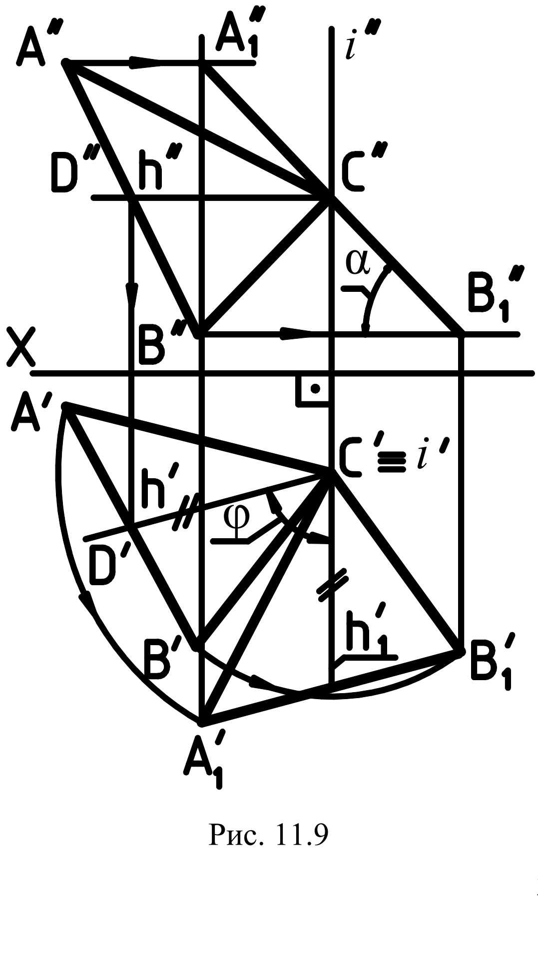


Рис. 11.9

Задача 4. Фронтально-проецирующую плоскость α (Δ*ABC*) перевести в положение плоскости уровня (рис. 11.10).

Плоскость Δ*ABC* повернута вокруг оси $i \perp V$ на угол φ. Фронтальные проекции вершин треугольника Δ*ABC* перемещаются по дугам, проведенным из точки *B*" как из центра, а горизонтальные – по прямым, параллельным плоскости *V*.

После поворота на угол φ плоскость треугольника Δ*ABC* расположена параллельно плоскости *H*, а горизонтальная проекция треугольника без искажения определяет его форму.

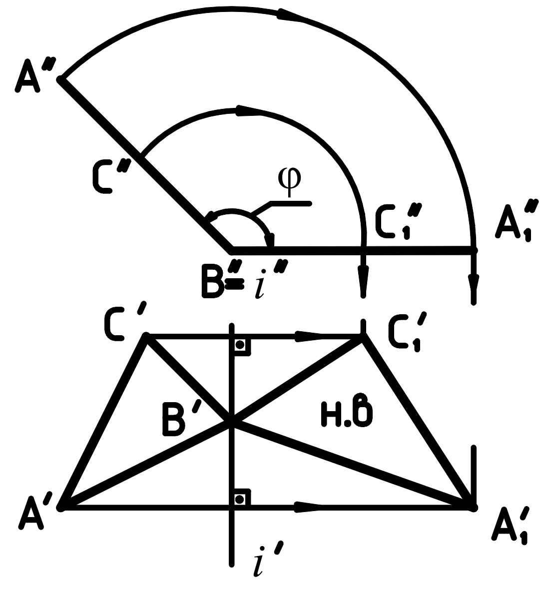


Рис. 11.10

Для приведения плоскости общего положения в плоскость уровня необходимо выполнить вращение вокруг двух осей.

Плоскость общего положения можно привести в положение плоскости уровня одним поворотом. Для этого в качестве оси вращения надо принять прямую уровня, которая еще до вращения параллельна одной из плоскостей проекции.

11.4. Способ вращения вокруг линии уровня

Путем такого вращения можно повернуть плоскость в положение, параллельное плоскости проекций. В этом случае ортогональная проекция фигуры, принадлежащей плоскости, будет спроецирована в натуральную величину, что позволит определить все ее метрические характеристики.

Главное в данном построении то, что в тот момент, когда плоскость будет параллельной плоскости проекции, проекции всех перемещающихся точек окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки.

Вращая плоскость вокруг горизонтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости *H*, а вращая вокруг фронтали – в положение, параллельное плоскости *V*.

Задача. Вращением вокруг горизонтали расположить плоскость Δ*ABC* параллельно плоскости *H* (рис. 11.11).

Построения выполняются в следующей последовательности:

– проводим горизонталь плоскости Δ*ABC*; удобнее провести ее через одну из вершин *C*, тогда точки *C* и *D*, лежащие на оси вращения, после поворота не изменят своего положения;

– точки *A* и *B* при вращении будут перемещаться по окружностям, принадлежащим плоскостям, перпендикулярным оси вращения; центры окружностей будут находиться на оси вращения; проводим через точку *A* и *B* плоскости $\alpha \perp h$ и $\beta \perp h$;

– определяем центр вращения точки A – точку O; $O' = h' \cap \alpha_н$;

– строим проекции радиуса вращения точки A – отрезки $O'A$ и $O''A''$;

– определяем величину радиуса вращения R_A; строим прямоугольный треугольник $\Delta O'A'A'_0$; величина его гипотенузы $|O'A'_0| = R_A$.

Так как траектория движения точки A – окружность с центром в точке O принадлежит плоскости α, новое после поворота положение точки A'_1 находится на месте пересечения дуги окружности, проведенной из центра O' радиусом, равным $|O'A_0|$, с горизонтальным следом плоскости α ($\alpha_н$);

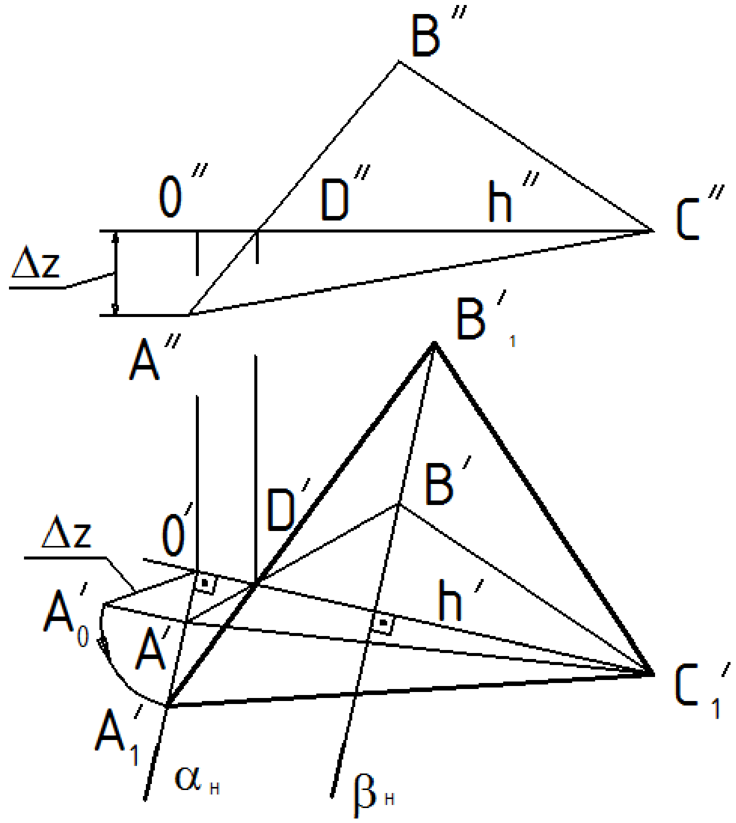


Рис. 11.11

– через полученную точку A'_1 и неподвижную D' проводим прямую до пересечения с горизонтальным следом плоскости β ($\beta_н$), в которой перемещается точка B;

– соединяем найденные точки A'_1 и B'_1 с неподвижной вершиной C'_1, получаем новую горизонтальную проекцию треугольника.

Эта проекция определяет натуральную величину ΔABC; фронтальная проекция треугольника – прямая, совпадающая с h''.

11.5. Способ плоскопараллельного перемещения

Применение способа вращения часто приводит к тому, что преобразованная проекция фигуры накладывается на заданную, что затрудняет построение и чтение чертежа.

Этого недостатка лишен способ плоскопараллельного перемещения, позволяющий более свободно пользоваться полем чертежа. При перемещении фигуры плоскопараллельным движением все ее точки движутся параллельно некоторой плоскости.

Задача. Повернуть отрезок AB прямой общего положения так, чтобы он расположился параллельно плоскости (рис. 11.12).

При перемещении отрезка фронтальные проекции точек A и B будут двигаться в плоскостях β и γ, параллельных плоскости H. Горизонтальную проекцию отрезка AB располагаем параллельно оси X, не изменяя ее величины.

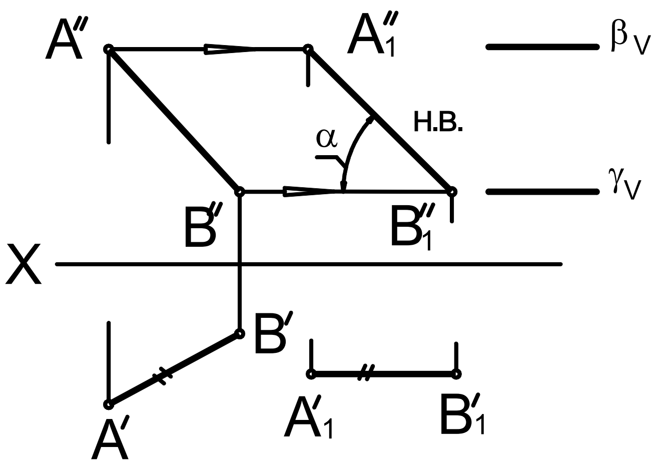


Рис. 11.12

Построенная фронтальная проекция отрезка определяет его натуральную величину, а угол α является углом наклона отрезка AB к плоскости H.

Способ вращения – частный случай способа плоскопараллельного перемещения.

11.6. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа: заданные геометрические фигуры неподвижны. Взамен одной из основных плоскостей проекций вводится новая дополнительная плоскость, перпендикулярная ко второй основной. Для получения новой дополнительной проекции геометрическая фигура ортогонально проецируется на введенную плоскость.

На рис. 11.13 показана замена фронтальной плоскости проекций на новую дополнительную плоскость V_1.

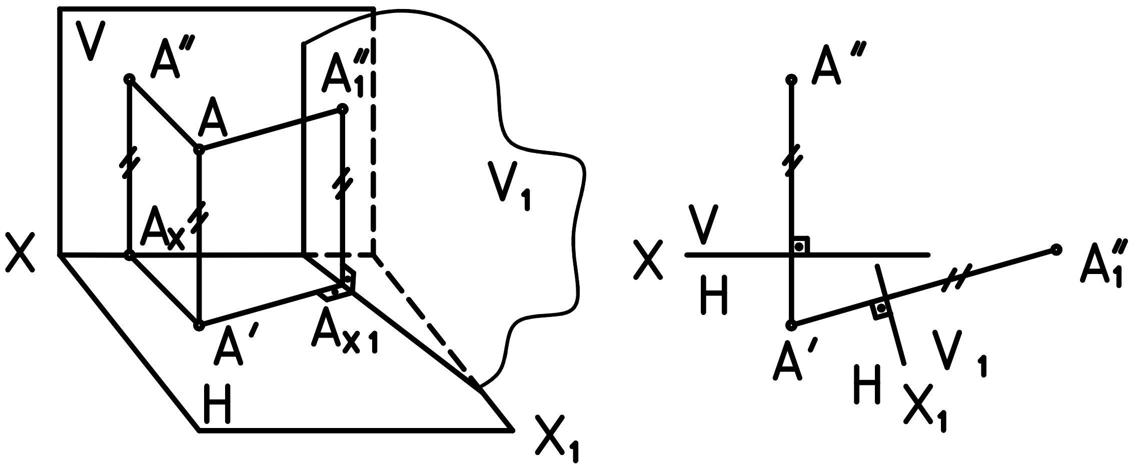


Рис. 11.13

На рисунке выбирается положение новой оси X_1, затем из горизонтальной проекции точки A' проводится линия связи перпендикулярно новой оси.

Для определения новой дополнительной проекции A_1'' на новой линии связи от новой оси X_1 откладывается отрезок, равный координате Z точки A.

При замене горизонтальной плоскости проекций план построения аналогичен. Необходимо только везде заменить слово «фронтальный» на «горизонтальный», а координату Z – на Y.

11.7. Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня ($X\ V/H \rightarrow X_1\ V_1/H$; $AB \parallel V_1$; $X_1 \parallel AB$).

Задача 2. Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую ($X_1\ V_1/H \rightarrow X_2\ V_1/H_1$; $AB \perp H_1$; $X_2 \perp A_1''B_1''$) (рис. 11.14).

Задача 3. Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую ($X\ V_1/H \rightarrow X_1\ V_1/H$; $\alpha\ (\Delta ABC) \perp V_1$; $X_1 \perp h'$).

Задача 4. Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня ($X_1\ V_1/H \rightarrow X_2\ V_1/H_1$; $\alpha\ (\Delta ABC) \parallel H_1$; $X_2 \parallel \Delta A_1''B_1''C_1''$) (рис. 11.15).

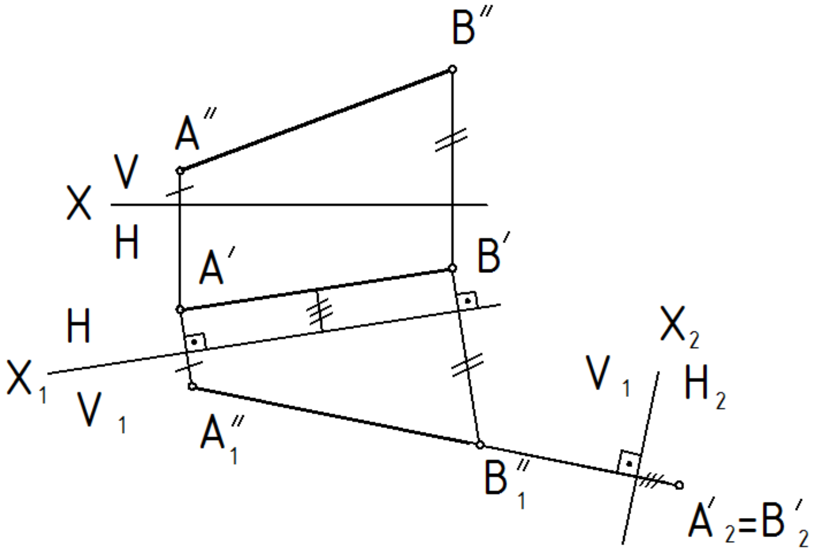


Рис. 11.14

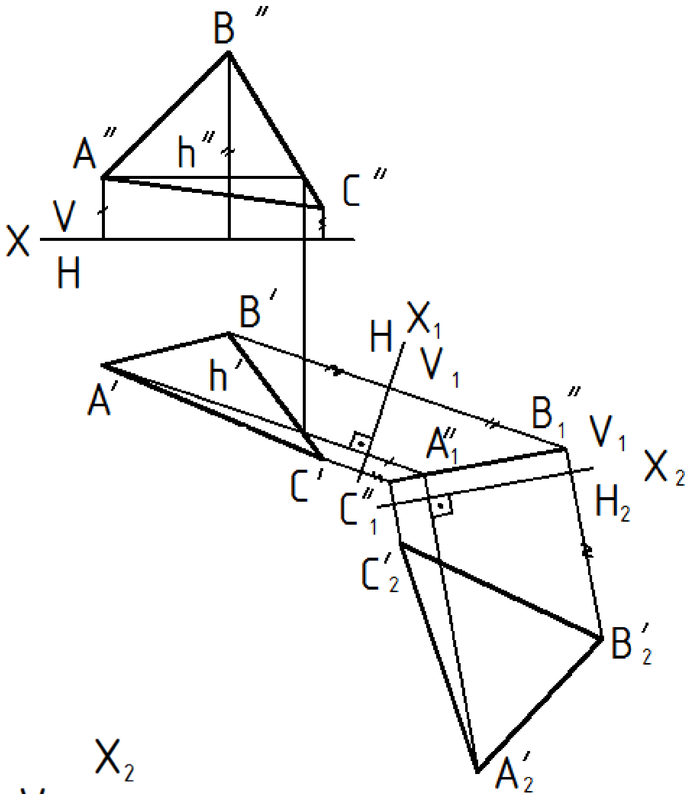


Рис. 11.15

Для преобразования прямой общего положения в проецирующую необходимо решить сначала задачу 1, затем задачу 2. Если необходимо преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня, необходимо последовательно решить две задачи: задачу 3 и задачу 4.

12. ПОВЕРХНОСТИ

В начертательной геометрии принят *кинематический принцип* образования поверхности, предположенный Г. Монжем. Поверхность рассматривается как множество положений движущейся в пространстве линии. Эта линия называется *образующейся поверхности* – она может быть прямой или кривой, иметь постоянную форму или изменять ее при движении. По виду образующей различают поверхности:

– *линейчатые* (образующая линия – прямая);

– *нелинейчатые* (образующая линия – кривая).

Значительный класс поверхностей формируется движением окружности постоянного или переменного радиуса. Это так называемые *циклические поверхности*.

Если группировать поверхности по закону движения образующей линии, то поверхности можно разделить:

– на поверхности вращения;

– винтовые поверхности;

– поверхности с плоскостью параллелизма;

– поверхности переноса.

Линии, по которым перемещается образующая, называют *направляющими*. Направляющие линии могут быть прямыми или кривыми, постоянного или переменного вида.

Ряд последовательных положений образующих *а* и направляющих *в* линий создает каркас поверхности (рис. 12.1). *Каркас поверхности* – упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности. На рис. 12.1 прямая *а* – образующая линия, *в* – направляющая.

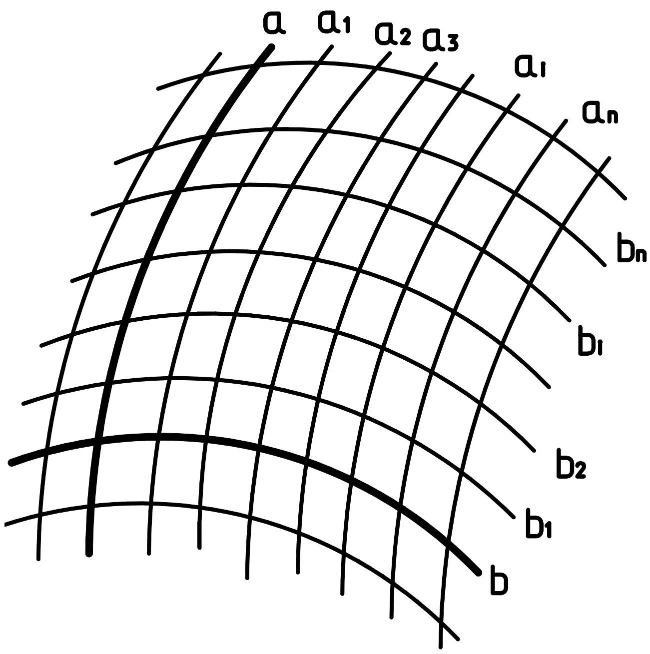


Рис. 12.1

Совокупность всех условий, задающих поверхность в пространстве, называется *определителем поверхности.*

Общая структура определителя имеет вид Ф (Г) [А],

где Ф – обозначение поверхности;

(Г) – геометрическая часть определителя; содержит геометрические фигуры, участвующие в образовании поверхности;

[А] – алгоритмическая часть определителя; указывает характер изменения формы образующей и закон ее перемещения.

Так как одна и та же поверхность может быть образована различными способами, она может иметь соответственно разные определители. Так, например, поверхность прямого кругового цилиндра (цилиндрическая поверхность вращения) с кинематической точки зрения можно представить:

1) как след, оставляемый в пространстве прямой a при ее вращении вокруг оси i (рис. 12.2):

$$\Phi\ (a,\ i);\ [\ a_i = \mathrm{R}_i\ (a)\ ];$$

2) как результат поступательного перемещения окружности a, при этом центр окружности точка O перемещается вдоль оси i, а ее плоскость α все время остается перпендикулярной к этой оси:

$$\Phi\ (a,\ i);\ [a_j = T_i\,(g) \wedge (O \in i) \wedge (g \in \alpha \perp i)],$$

где T_i – преобразование (параллельное перемещение, рис. 12.3).

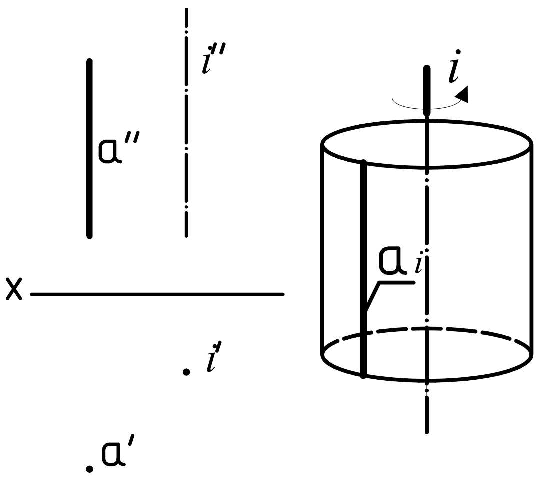


Рис. 12.2

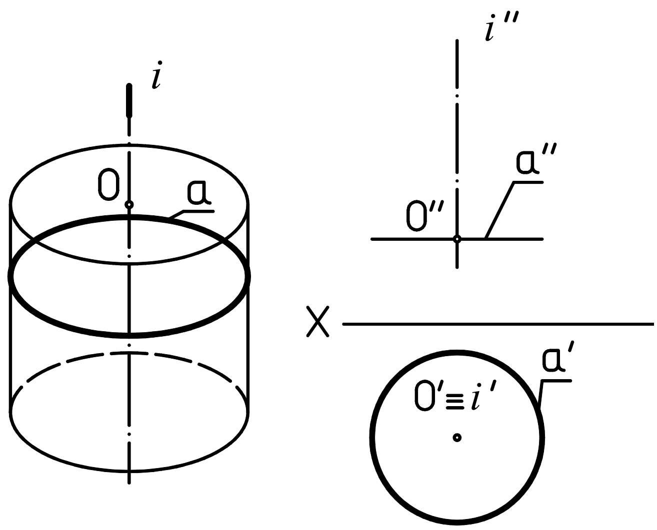


Рис. 12.3

Задание поверхности проекциями ее определителя не всегда обеспечивает наглядность, поэтому чаще для получения наглядного изображения поверхности на чертеже указывают *очерк* (очертание) этой поверхности. *Очерковые линии поверхности* – это линии, ограничивающие области ее проекций (рис. 12.4).

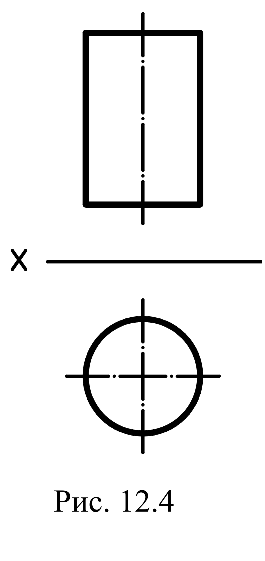


Рис. 12.4

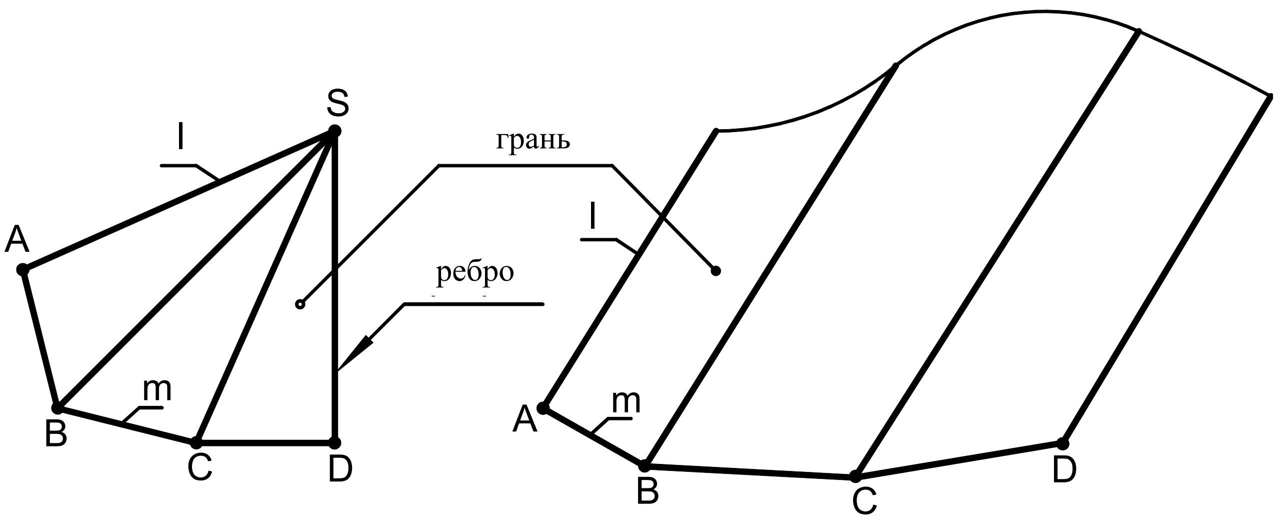
12.1. Принадлежность точки и линии поверхности

Для того, чтобы на чертеже поверхности указать проекции принадлежащей ей точки, необходимо построить проекции какой-либо линии, принадлежащей данной поверхности, а затем на этой линии определить точку. Построение линии, принадлежащей поверхности, сводится к построению проекций *n* точек, принадлежащих линии. В качестве линии предпочтение отдается наиболее простым и удобным для построения прямым и окружностям.

Из всего многообразия существующих поверхностей на дисциплине «Инженерная графика» рассматриваются гранные поверхности, поверхности вращения и винтовые поверхности.

12.2. Гранные поверхности

Гранные поверхности – поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии. Различают вершинные (пирамидальные, рис. 12.5) и безвершинные (призматические, рис. 12.6) поверхности.



I – образующая, *m* – направляющая, *S* – вершина

Рис. 12.5 Рис.12.6

Многогранники

Многогранник – замкнутая поверхностью, образованная некоторым количеством граней.

Чертежи призм

Для задания поверхности призмы можно задать одно из оснований призмы и длину бокового ребра. Выбирая положение призмы для ее изображения на чертеже, целесообразно располагать ее основание параллельно плоскости проекций. Призма называется *прямой*, если ее ребра перпендикулярны к плоскости основания, и *наклонной* – если не перпендикулярны.

На рис. 12.7 изображена правильная прямая треугольная призма. Построение профильной проекции и определение недостающих проекций точек 1 (1'') и 2 (2''') на поверхности призмы выполнены с применением вспомогательной базы отсчета (Б. О.).

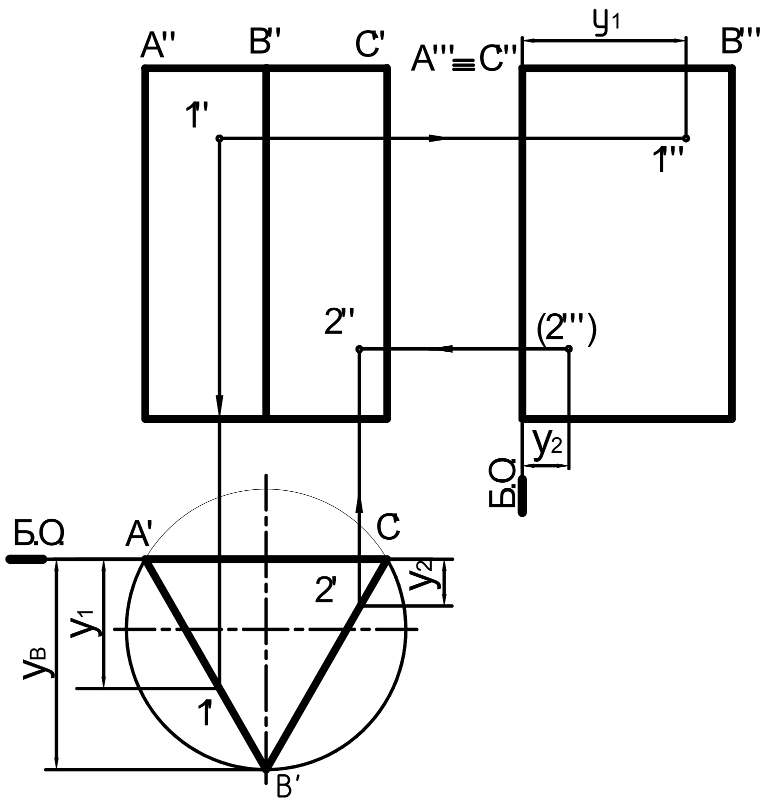


Рис. 12.7

Чертежи пирамид

Обычно пирамида задается на чертеже проекциями ее основания и вершины, а усеченная пирамида – проекциями обеих оснований.

На рис. 12.8 изображена правильная шестигранная пирамида. Построение проведено по полностью заданной фронтальной проекции и горизонтальной проекции основания. Построение точки 1 (1'') на поверхности пирамиды показано с помощью прямой *n*, проведенной через вершину S''; проекции точек 2 и 3 определены при помощи прямой *m*, параллельной *AB* и проходящей через точку 2 на ребре *AS*.

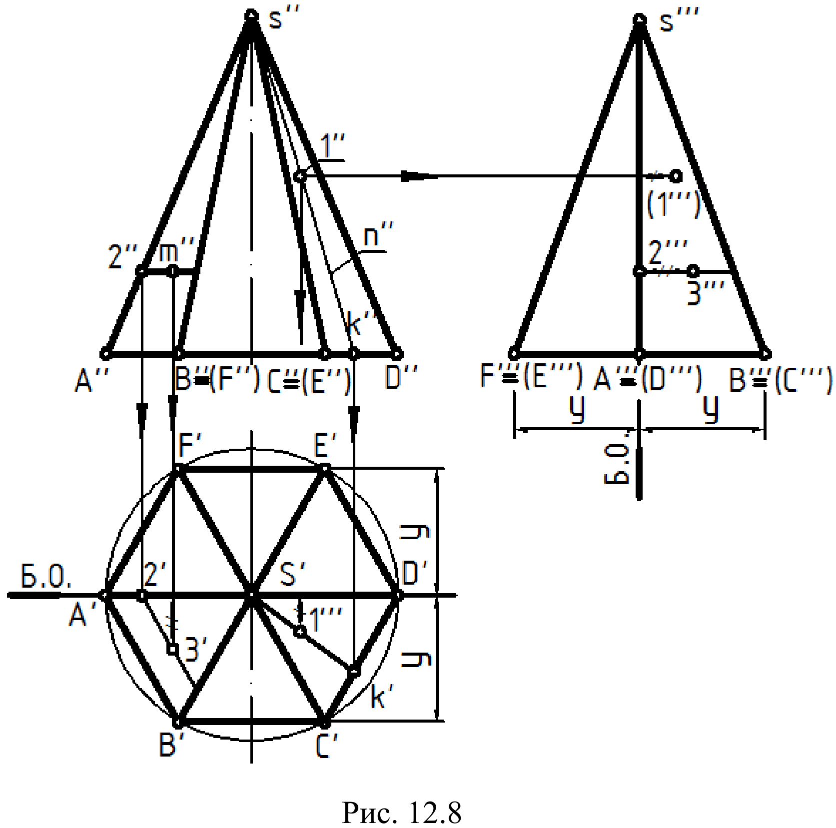


Рис. 12.8

12.3. Поверхности вращения

Поверхность вращения общего вида

Поверхность вращения общего вида – поверхность, которая образуется произвольной кривой *a* при ее вращении вокруг неподвижной оси *i* (рис. 12.9). Каждая точка образующей *a ABCD* при вращении вокруг оси *i* описывает окружность с центром на оси *i*. Эти окружности называются *параллелями*.

Наибольшая параллель называется *экватором*, наименьшая – *горлом*.

Плоскости α, проходящие через ось вращения, называют *меридиональными*, а линии, по которым они пересекают поверхность, – *меридианами*.

Меридиональную плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют *главной меридиональной плоскостью*, а линию ее пересечения с поверхностью – *главным меридианом*.

Для построения проекций точки *K*, принадлежащей поверхности вращения, необходимо через точку провести параллель, построить проекции параллели и на них найти одноименные проекции точки.

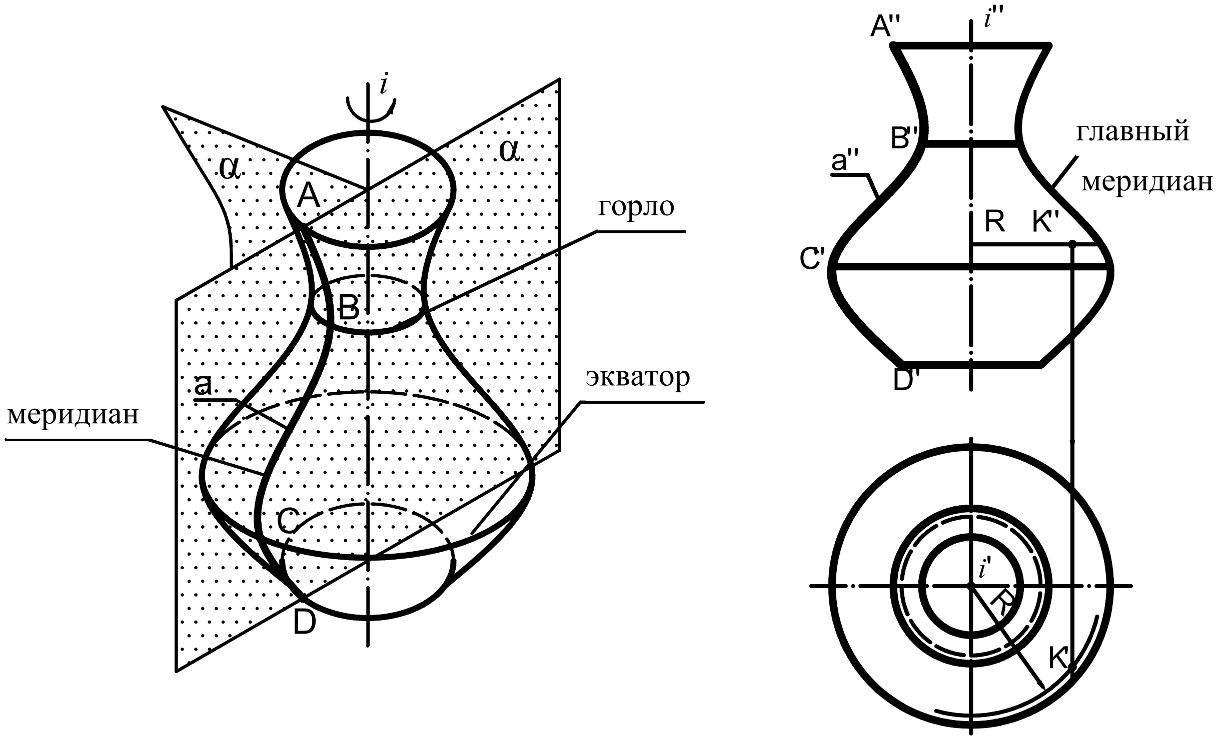


Рис. 12.9

Поверхности, образованные вращением прямой линии ℓ вокруг оси i

Таких поверхностей может быть столько, сколько существует взаимных положений этих прямых:

а) – $\ell \cap i$ – коническая поверхность вращения (рис. 12.10);

б) – $\ell \parallel i$ – цилиндрическая поверхность вращения (рис. 12.11);

в) ℓ и i – скрещивающиеся прямые – однополостный гиперболоид вращения (рис. 12.12).

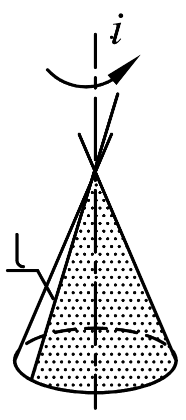


Рис. 12.10

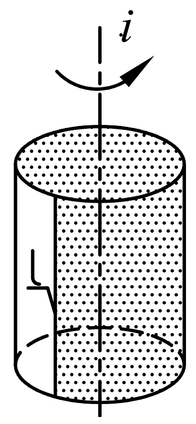


Рис. 12.11

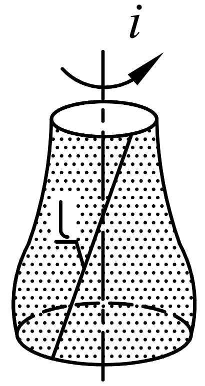


Рис. 12.12

Цилиндрическая поверхность вращения.
Пересечение цилиндрической поверхности секущими плоскостями

Возможны следующие варианты пересечения:

1) $\alpha \perp i$ – в сечении окружность; горизонтальная проекция сечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра; на фронтальную и профильную плоскости проекций окружность сечения проецируется в прямые;

2) $\beta \cap i$ – в сечении эллипс, малая ось которого равна диаметру основания цилиндра, а величина большой оси зависит от угла между секущей плоскостью и осью цилиндра.

Если бы секущая плоскость составляла с осью цилиндра угол 45°, то проекцией эллипса на плоскость W была бы окружность;

3) $\gamma \parallel i$ – в сечении прямые – образующие (рис. 12.13).

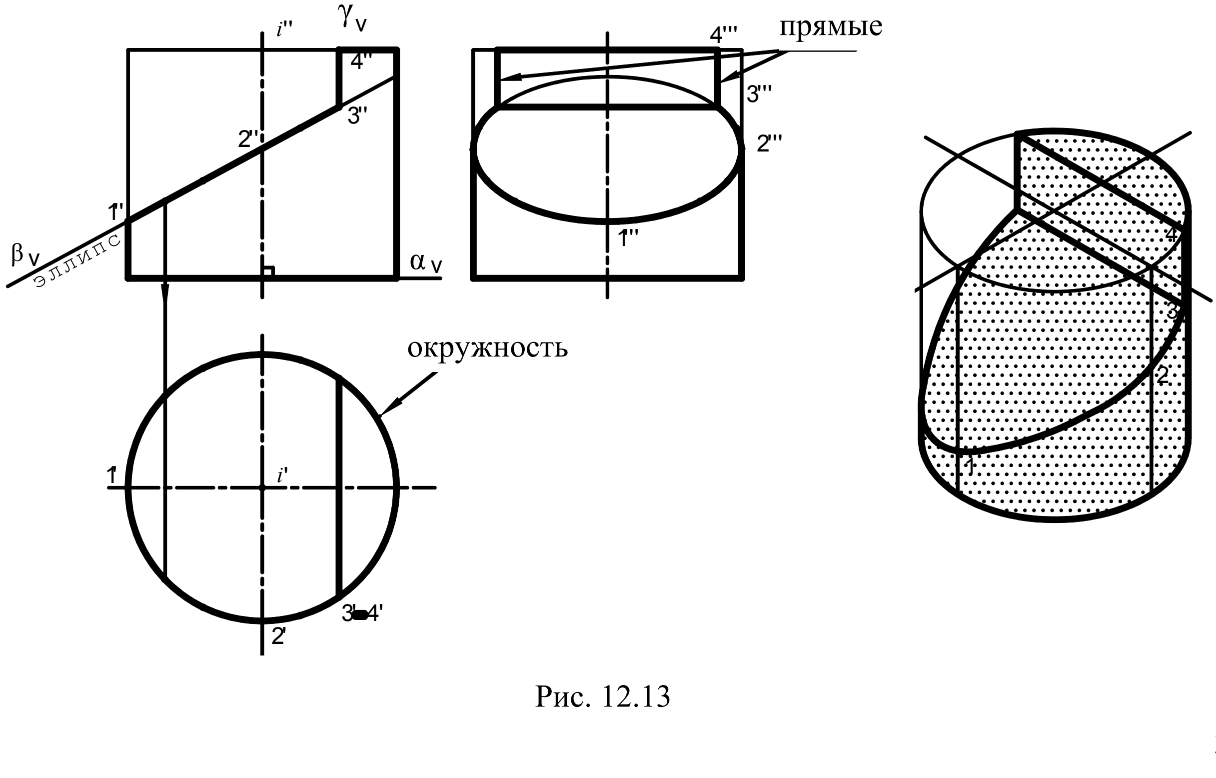


Рис. 12.13

Коническая поверхность вращения.
Пересечение конической поверхности секущими плоскостями

При сечении конической поверхности вращения плоскостями получаются плоские кривые второго порядка:

1) ***окружность*** – секущая плоскость $\alpha \perp i$;

2) ***эллипс*** – секущая плоскость β пересекает все прямолинейные образующие поверхности;

3) ***парабола*** – секущая плоскость γ параллельна одной образующей конической поверхности;

4) ***гипербола*** – секущая плоскость δ параллельна двум прямолинейным образующим;

5) если секущая плоскость λ проходит через вершину конической поверхности, то в сечении – ***две прямые*** – образующие (рис. 12.14).

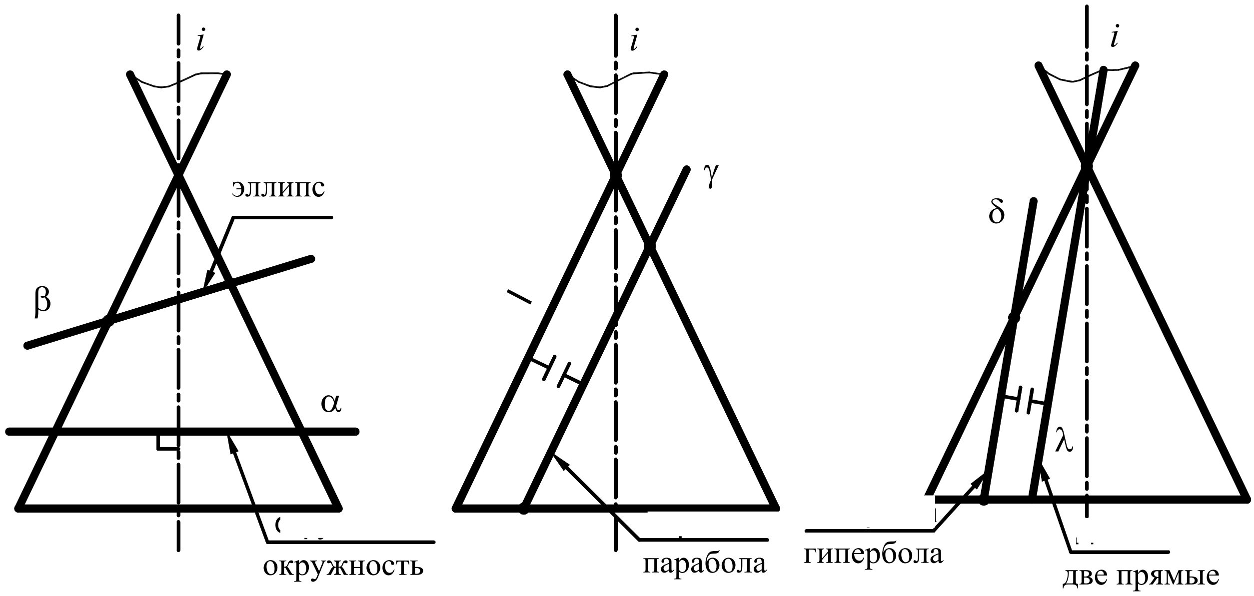


Рис. 12.14

Цилиндрические и конические поверхности являются одними из самых распространенных. Примерами этих поверхностей могут служить: валы, оси, втулки, трубы, сопла турбин, емкости для жидкостей и многое другое.

Задача. Построить проекции сечений конической поверхности плоскостями (рис. 12.15).

AB – большая ось эллипса;

CD – малая ось эллипса, расположенная в середине отрезка *AB*.

Проекции точки 2 определены с помощью прямой образующей.

Проекции точек 3, *C*, *D*, 6 – с помощью окружностей – параллелей (R_n).

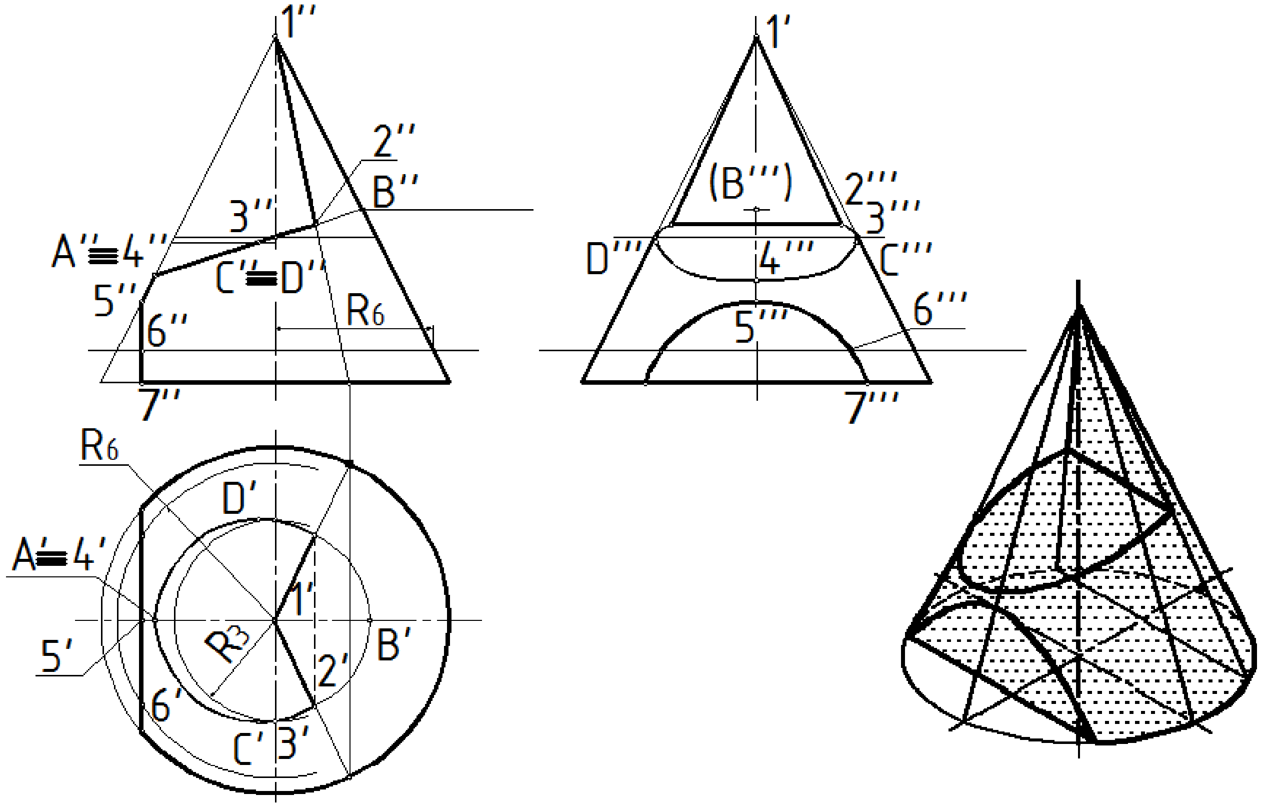


Рис. 12.15

12.4. Поверхности вращения, образующая которых – окружность

Тор – поверхность, которая может быть получена при вращении окружности вокруг оси i, не проходящей через ее центр.

В зависимости от соотношения величин R (радиуса образующей окружности) и t (расстояния от центра окружности O до оси вращения i) поверхности подразделяют:

– на *открытый тор* (кольцо) при $R < t$ (рис. 12.16);

– *закрытый тор* при $R > t$ (рис. 12.17);

– *сфера* образуется в том случае, когда центр окружности принадлежит оси вращения (рис. 12.18);

– *глобоид* (внутренняя часть тора); образующей этой поверхности является дуга окружности (*O* € *i*, рис. 12.19).

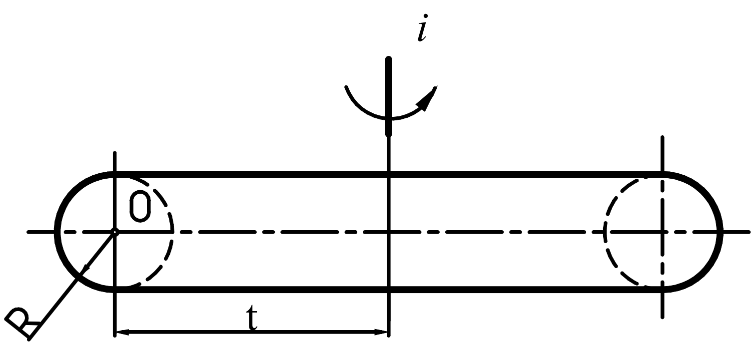


Рис. 12.16

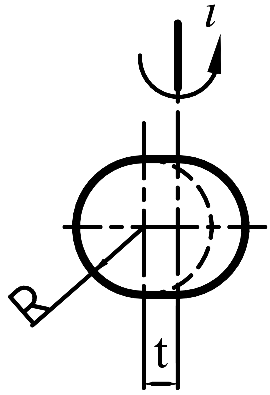


Рис. 12.17

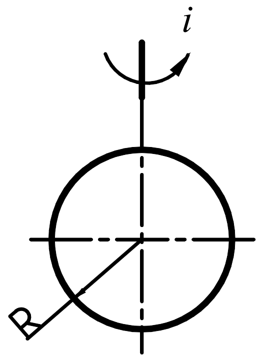


Рис. 12.18

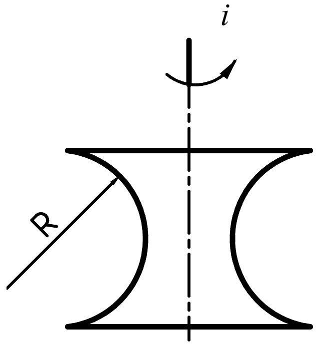


Рис. 12.19

Пересечение сферы и тора плоскостями

Линия пересечения сферы плоскостью – всегда *окружность*, которая может проецироваться в виде отрезка прямой, эллипса или окружности в зависимости от положения секущей плоскости относительно плоскости проекций (рис. 12.20).

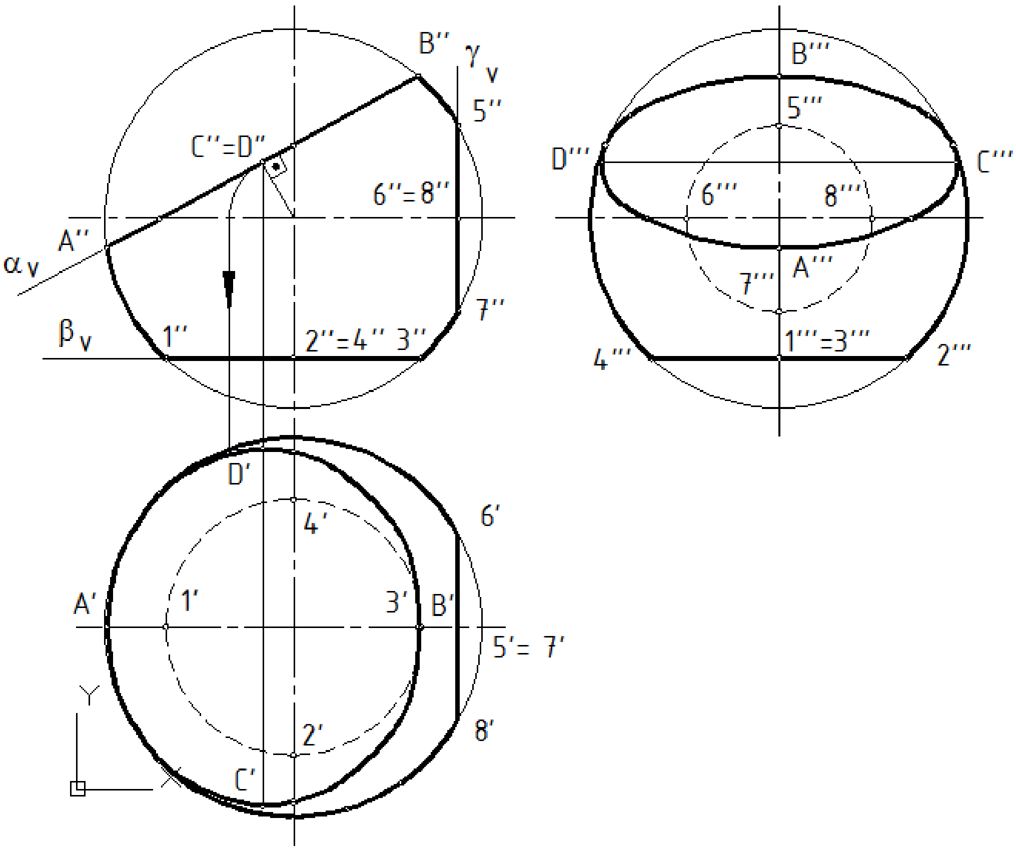


Рис. 12.20

Большая ось *AB* эллипса – фронтальной проекции окружности сечения плоскостью α – равна диаметру этой окружности. Малая ось *CD* эллипса определяется проецированием.

Открытый тор имеет две системы круговых сечений – в плоскостях α, перпендикулярных его оси, и в плоскостях β, проходящих через эту ось (рис. 12.21).

На рис. 12.22 показаны сечения поверхности открытого тора плоскостью γ, проходящей через ось тора по двум окружностям, а в остальных – по кривым линиям, в зависимости от ℓ (ℓ – расстояние секущей плоскости от оси i). Общее название получаемых кривых четвертого порядка – кривые Персея (геометра Древней Греции).

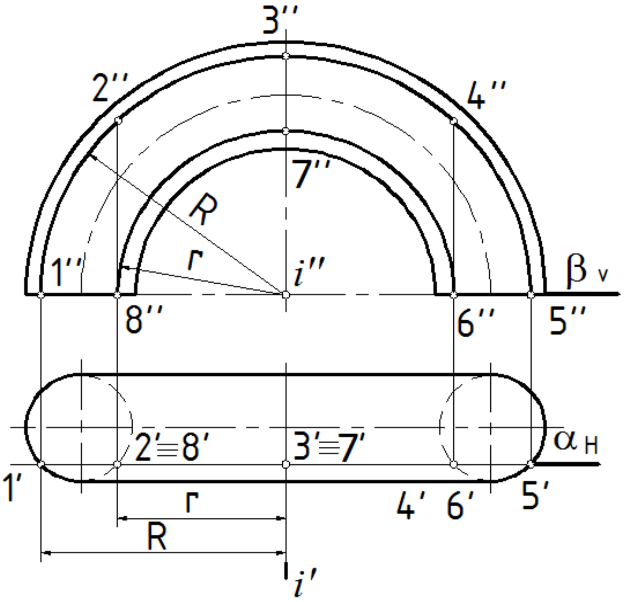


Рис. 12.21

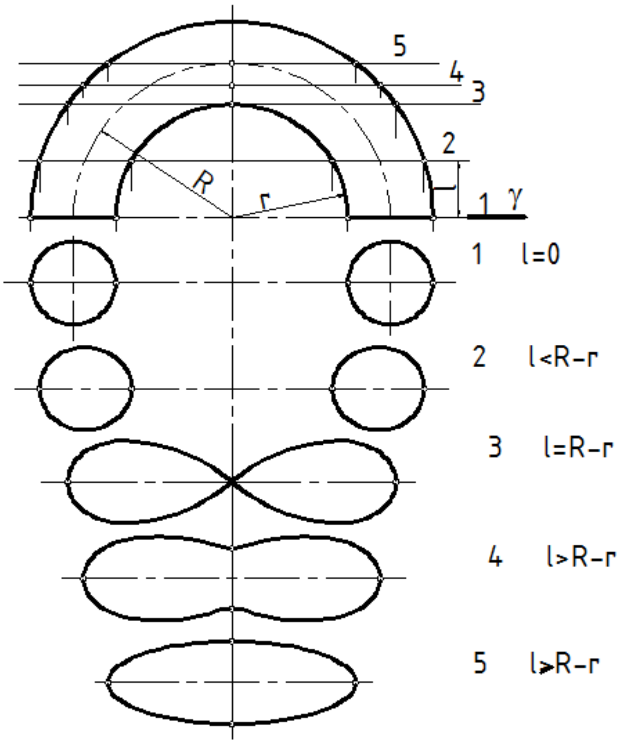


Рис. 12.22

12.5. Частные виды поверхностей вращения

Эллипсоид вращения

Эллипсоид вращения образуется при вращении эллипса вокруг его оси. При этом, если за ось вращения принять малую ось *CD*, получим *сжатый* эллипсоид вращения (рис. 12.23), если за ось вращения принять большую ось вращения *AB*, образуется *вытянутый эллипсоид вращения* (рис. 12.24).

Эллипс – плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от каждой точки которой до двух определенных точек фокусов, есть величина постоянная ($MF_1 + MF_2 = AB$).

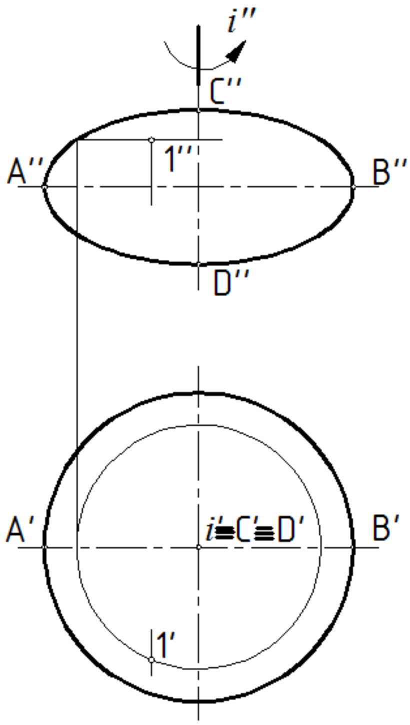


Рис. 12.23

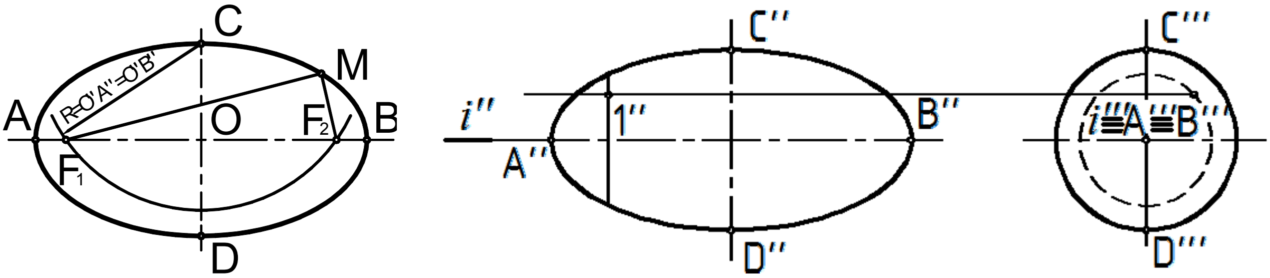


Рис. 12.24

Параболоид вращения

Образуется при вращении параболы вокруг ее оси, принятой за ось вращения (рис. 12.25).

Парабола – плоская незамкнутая кривая, каждая точка которой равноудалена от прямой *MN*, называемой директрисой, и от точки *F* – фокуса, расположенного на оси ее симметрии.

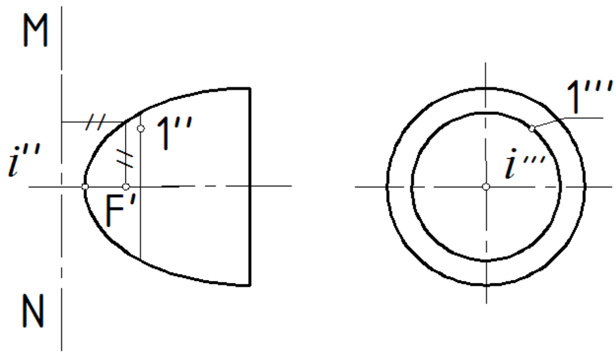


Рис. 12.25

Гиперболоид вращения

При вращении гиперболы можно получить две поверхности:

– *однополостный гиперболоид вращения*; образуется при вращении гиперболы вокруг ее мнимой оси i_1 (рис. 12.26).

– *двухполостный гиперболоид вращения*; образуется при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси *i* (рис. 12.27).

Гипербола – плоская незамкнутая кривая, разность расстояний от каждой точки которой до двух определенных точек – фокусов *F* и F_1 – есть величина постоянная и равная расстоянию между точками *A* и A_1 – вершинами гиперболы: $|FM| - |F_1M| = |AA_1|$.

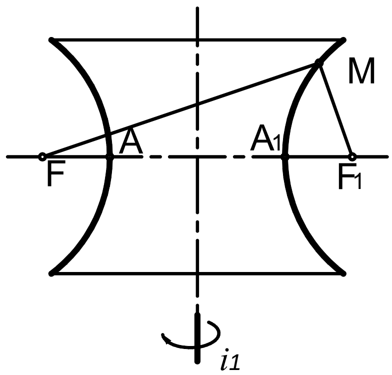


Рис. 12.26

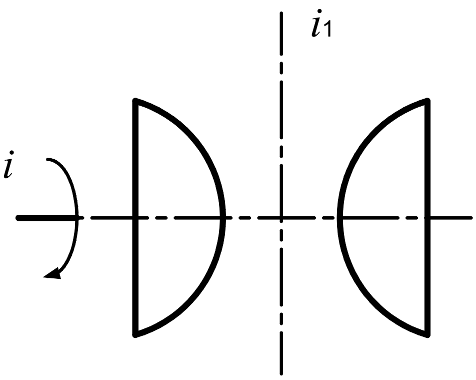


Рис. 12.27

12.6. Линейчатые поверхности с одной направляющей – торсы

Линейчатые поверхности с одной криволинейной направляющей называются *торсами*, а криволинейная направляющая таких поверхностей – *ребром возврата*.

Поверхность с ребром возврата образуется в результате движения прямой ℓ образующей, касающейся некоторой кривой – направляющей d (рис. 12.28).

Если ребро возврата вырождается в точку S, то получается частный вид торса – *коническая поверхность* (рис. 12.29), если точка S удалена в бесконечность – *цилиндрическая поверхность* (рис. 12.30).

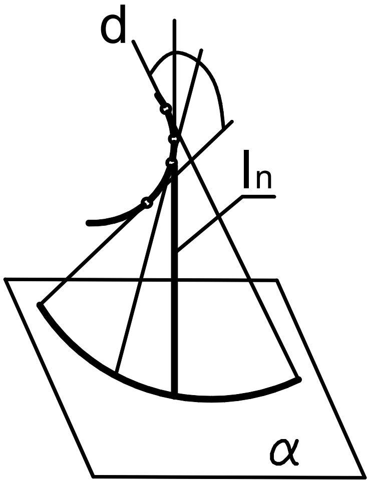


Рис. 12.28

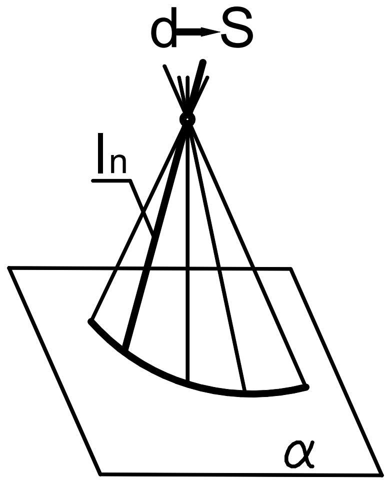


Рис. 12.29

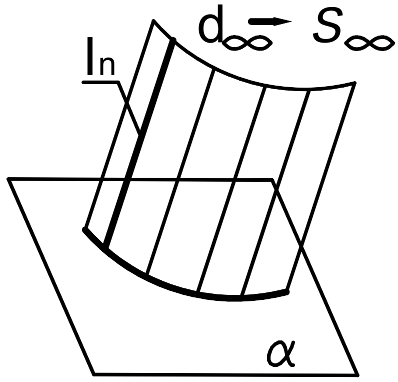


Рис. 12.30

12.7. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма

Пусть прямая линия ℓ образующая, перемещаясь по двум направляющим m и n, сохраняет постоянный угол по отношению к некоторой плоскости, называемой *направляющей плоскостью*. Если этот угол равен 0°, то такую плоскость называют *плоскостью параллелизма*.

Для задания поверхности этой группы на эпюре Монжа достаточно указать проекции направляющих m и n, а также положение плоскости параллелизма α. В зависимости от формы направляющей (прямая или кривая) поверхности с плоскостью параллелизма делятся на три вида:

– *цилиндроид* (обе направляющие кривые, рис. 12.31);

– *коноид* (одна направляющая – кривая m, другая – прямая n, рис. 12.32);

– *косая плоскость или гиперболический параболоид* (обе направляющие m и n – прямые, рис. 12.33).

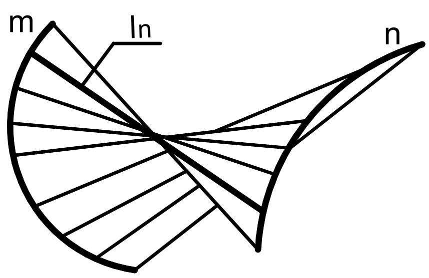


Рис. 12.31

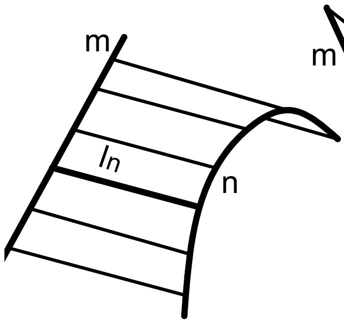


Рис. 12.32

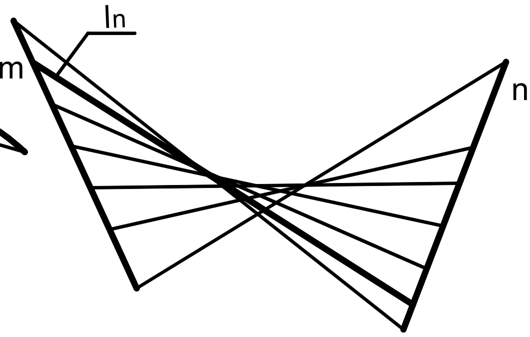


Рис. 12.33

12.8. Винтовые поверхности

Винтовая поверхность получается винтовым (вращательным и поступательным) перемещением образующей ℓ относительно оси i.

От вида образующей зависит тип винтовой поверхности.

Винтовая линия постоянного шага, построенная на поверхности прямого кругового цилиндра, называется *гелисой*. Линейчатые круговые поверхности, направляющая которых гелиса, называются *геликоидами*. В зависимости от величины угла наклона образующей к оси, геликоиды бывают *прямыми*, если этот угол равен 90° (рис. 12.34), и *косыми*, если угол отличный от 0° и 90° (рис. 12.35).

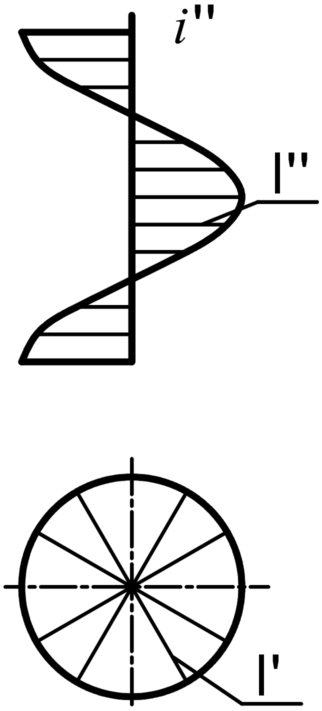


Рис. 12.34

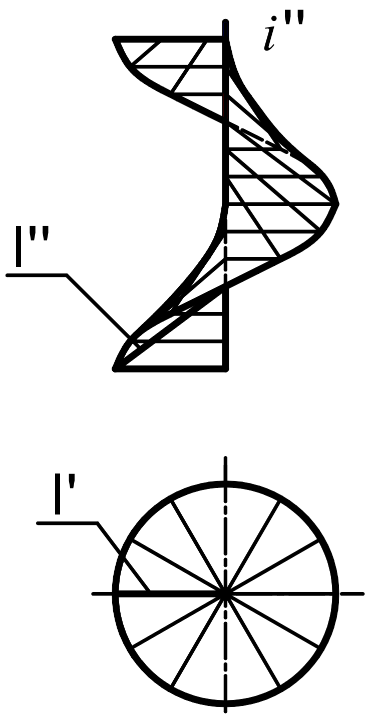


Рис. 12.35

Винтовые поверхности нашли широкое применение в технике: винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности вентиляторов, лопаток турбин, конструкции лестниц и другое.

13. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей.

В задачах на пересечение поверхностей можно выделить четыре случая:

– частичное врезание – линия пересечения – замкнутая пространственная линия (рис. 13.1);

– полное проницание – линия пересечения распадается на две и более отдельные линии (рис. 13.2);

– одностороннее соприкасание – линия пересечения – пространственная линия, которая пересекается сама с собой в точке касания K'' пересекающихся поверхностей (рис. 13.3);

– двойное соприкасание – линия пересечения – пространственная линия, дважды пересекается сама с собой в точках соприкосновения K'' и N'' поверхностей (рис. 13.4).

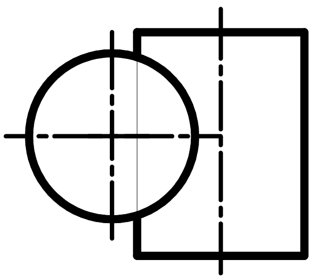


Рис. 13.1

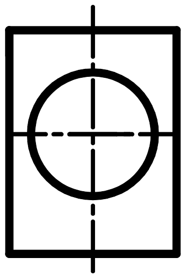


Рис. 13.2

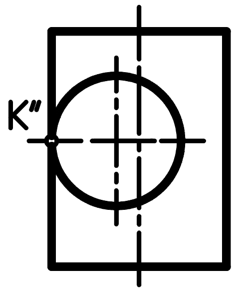


Рис. 13.3

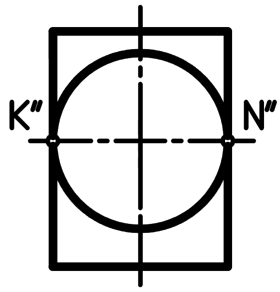


Рис. 13.4

13.1. Построение линии пересечения поверхностей (общий случай)

Для решения задач на построение линии пересечения двух поверхностей в качестве вспомогательной поверхности (посредника) следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные по наиболее простым для построения линиям – прямым или окружностям.

В качестве вспомогательных поверхностей-посредников наиболее часто используются плоскости, сферы, цилиндрические и конические поверхности.

Прежде чем выбрать вспомогательную поверхность для построения линии пересечения поверхностей, следует выяснить, не занимает ли одна из поверхностей проецирующее положение.

В этом случае решение задачи упрощается, так как одна из проекций линии пересечения будет совпадать со следом проецирующей поверхности. Решение задачи сводится к определению недостающей проекции линии пересечения из условия принадлежности ее точек второй, непроецирующей поверхности. На рис. 13.5 показано построение линии пересечения цилиндра со сферой. Горизонтальная проекция линии пересечения ℓ' известна (совпадает с горизонтальным очерком цилиндра); построение фронтальной проекции свелось к определению точек линии пересечения, принадлежащих поверхности сферы.

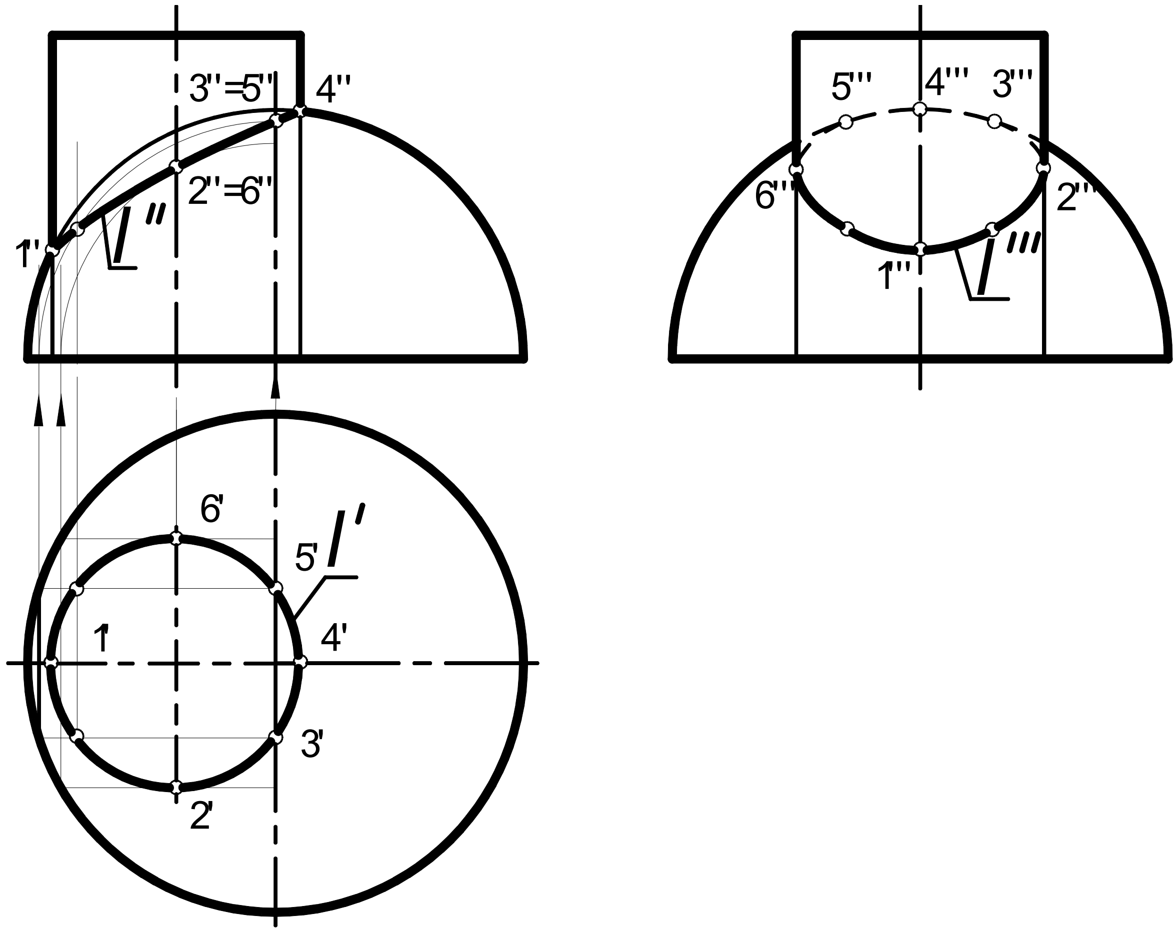


Рис. 13.5

Некоторые точки линии пересечения определяются без вспомогательных линий на поверхности, так как эти линии уже есть на чертеже (точки 1, 4 на фронтальном очерке). Такие точки называются *опорными* для линий пересечения поверхностей; с их определения начинают построение. Кроме таких точек есть так называемые *характерные* точки линии пересечения. Это высшая и низшая точки 1 и 4; точки, разделяющие видимую и невидимую часть проекции линии пересечения 1, 4 и 2, 6, и так далее.

Если поверхности даны в общем непроецирующем положении, тогда следует преобразовать чертеж так, чтобы хотя бы одна из них стала проецирующей.

Если же ни одна из поверхностей не может быть проецирующей, то для построения линии пересечения поверхности находят ряд точек, общих для этих поверхностей, и соединяют их линией. Для нахождения произвольной точки линии пересечения ℓ следует:

1) ввести вспомогательную поверхность γ_i;

2) построить линии пересечения a_i, $в_i$ вспомогательной поверхности с каждой из заданных α и β; $a_i = \alpha \cap \gamma$; $в_i = \beta \cap \gamma$;

3) на пересечении полученных линий найти искомую точку $L_i = a_i \cap в_i$;

4) $\ell = L_i \ldots L_n$; $\ell = a \cap \beta$.

13.2. Построение линии пересечения поверхности с помощью вспомогательных секущих плоскостей

Этот способ рекомендуется применять, если сечениями заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямые или окружности.

Сущность метода рассмотрим на примере решения задачи по определению линии пересечения сферы и эллиптического цилиндра (рис. 13.6).

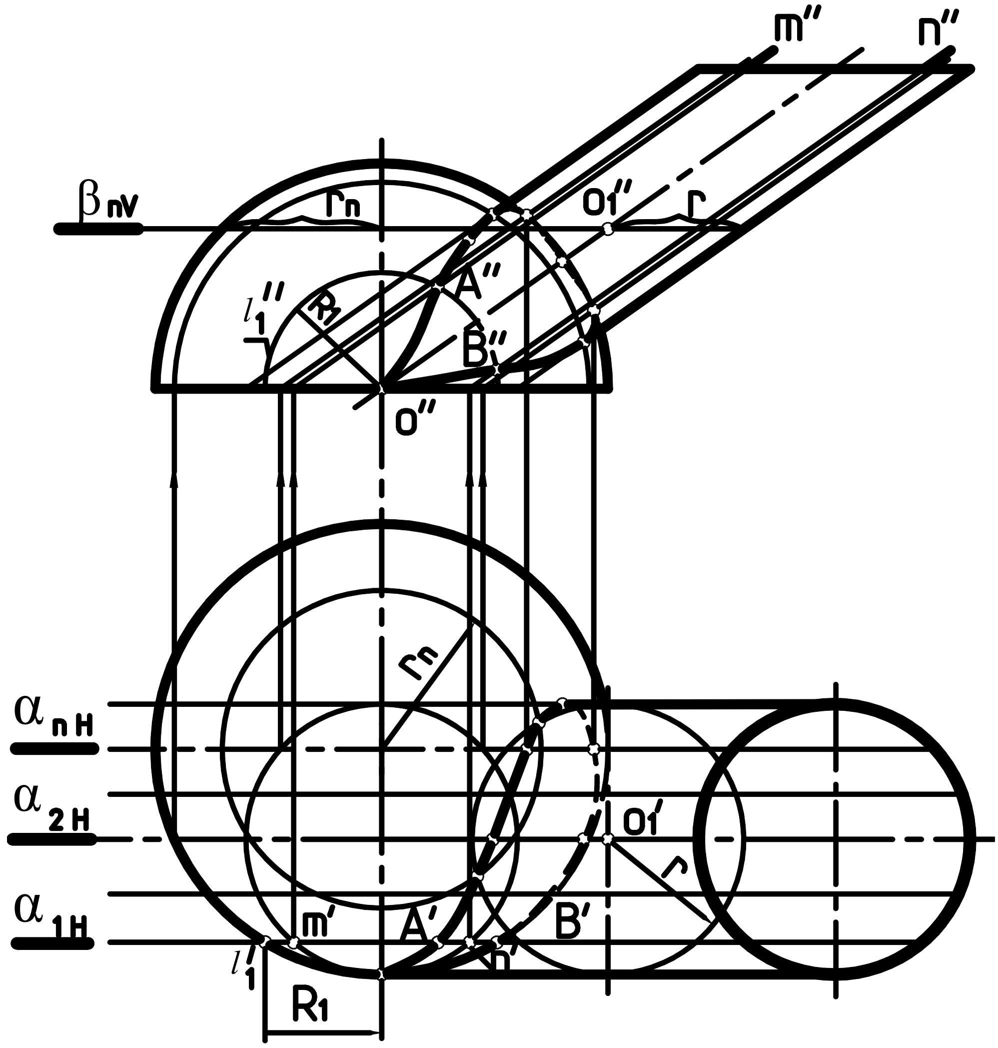


Рис. 13.6

В данном примере вспомогательные плоскости могут быть параллельны плоскостям *V* или *H*. В первом случае фронтальные плоскости α пересекают сферу по окружности R_n, а цилиндр – по прямолинейным образующим. Точки пересечения этих линий $A = \ell \cap m$; $B = \ell \cap n$ принадлежат искомой линии пересечения.

Плоскости β, параллельные *H*, пересекали бы каждую поверхность по окружностям радиусами r_n и r.

13.3. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных сфер

Для определения линии пересечения двух поверхностей вращения пользуются следующим свойством: две любые *соосные* поверхности вращения (т. е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям, перпендикулярным общей оси и проходящим через точки пересечения меридианов поверхностей (рис. 13.7).

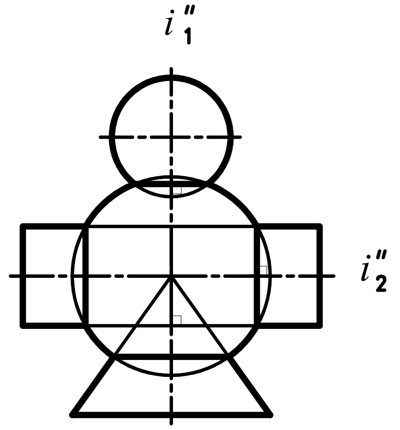


Рис. 13.7

Способ концентрических сфер

Этот способ применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются.

Для упрощения графического решения необходимо, чтобы плоскость, определяемая осями вращения, была параллельной какой-либо плоскости проекции или одна из осей была проецирующей прямой, а вторая – линией уровня. Задача, соответствующая первому случаю, представлена на рис. 13.8, второму – на рис. 13.9.

Задача. Построить линию пересечения двух конических поверхностей вращения (см. рис. 13.8).

Оси поверхностей вращения i_1 и i_2 параллельны плоскости V и пересекаются в точке O. Эта точка и принимается за центр всех вспомогательных концентрических сфер, каждая из которых пересечет поверхность Φ_2 по окружности n, которая проецируется на плоскость V в отрезок, а поверхность β – по окружности m, проецирующейся на плоскость V – в отрезок, а на плоскость H – без искажения в окружность, проведенную из центра O'.

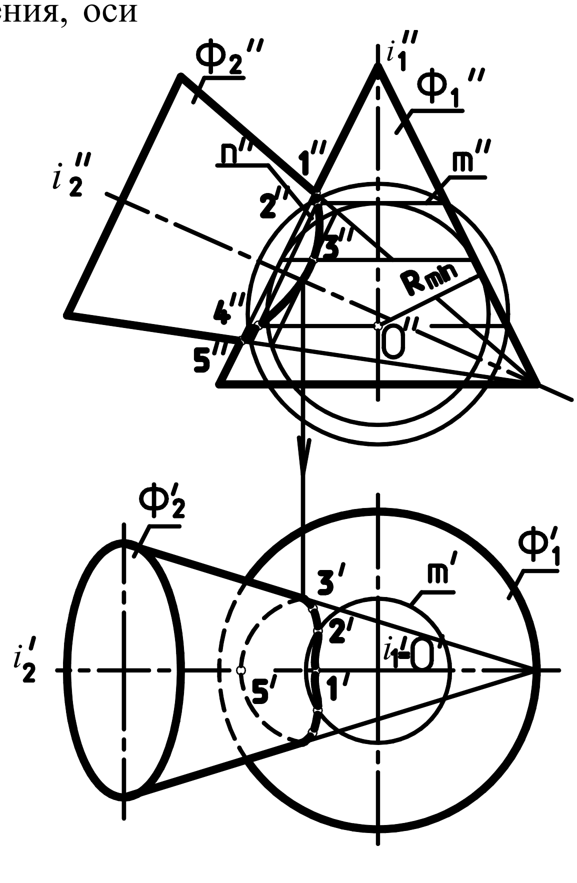


Рис. 13.8

Точки 2", 4" пересечения проекций построенных окружностей принадлежат проекции искомой линии пересечения. Величина радиуса вспомогательных сфер для определения линии пересечения изменяется от $R_{\min}$ = [O" M"] до $R_{\max}$ = = [O" 5"]. Сфера радиуса $R_{\min}$ лишь касается поверхности конуса Φ_1 и дает точку B" – «последнюю» для фронтальной проекции; сферы меньшего радиуса не дадут точек для искомой линии. Пересечение главных меридианов определяет крайние (опорные) точки 1" и 5".

Горизонтальная проекция линии пересечения построена с помощью горизонтальных проекций параллелей m'_n поверхности Φ_1.

Задача. Построить линию пересечения поверхностей вращения $\mathit{\Phi}_1$ и $\mathit{\Phi}_2$. Ось i_1 первой из заданных поверхностей является горизонтально-проецирующей прямой ($i_1 \perp H$), а ось i_2 второй поверхности – линией уровня ($i_2 \parallel H$) (рис. 13.9).

Точки искомой линии пересечения построены с помощью сферы радиуса R с центром в точке $O'' = i_2'' \cap i_2''$. Эта сфера пересекает поверхность Φ_2 по окружности n радиуса r, а поверхность Φ_2 по окружности m, которая показана на горизонтальной проекции поверхности m'. Пересечения горизонтальных проекций окружностей n' и m' определяют проекции 1' и 2' точек линии пересечения. Их фронтальные проекции 1'' и 2'' построены на линии n'' по линиям связи. Изменяя радиус R вспомогательной сферы, аналогично определяют остальные точки линии пересечения поверхностей.

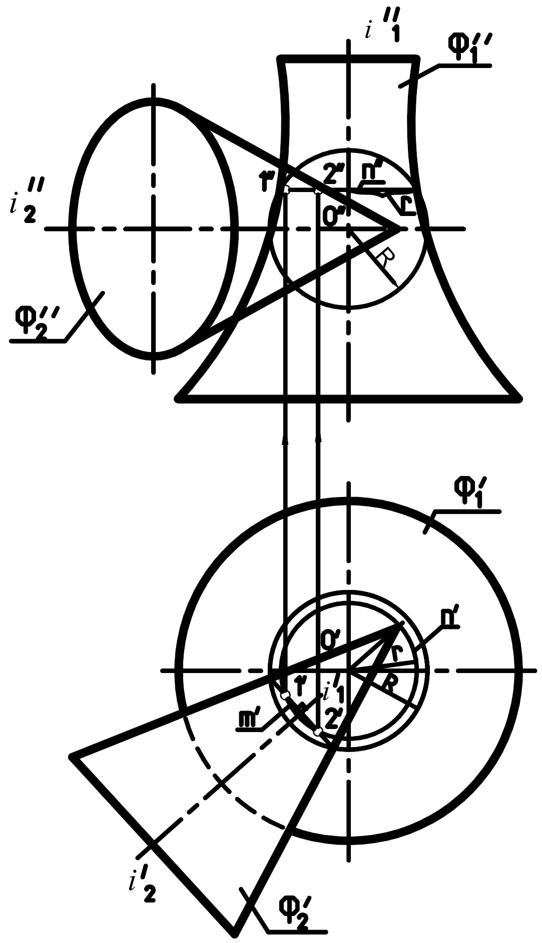


Рис. 13.9

Способ эксцентрических сфер

Этот способ применяется для построения линии пересечения двух поверхностей, одна из которых является поверхностью вращения, а вторая содержит семейство круговых сечений, причем обе поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Сущность метода рассмотрим на примере построения линии пересечения открытого тора с поверхностью конуса вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную плоскости V, в которой лежат опорные точки 1 и 2, принадлежащие очерковым линиям (рис. 13.10).

Обе поверхности имеют семейство окружностей, по которым они могут пересекаться эксцентрическими сферами, причем на поверхности тора имеется семейство окружностей, принадлежащих пучку плоскостей α, проходящему через ось тора. Для определения точки линии пересечения поверхность тора рассекают фронтально-проецирующей плоскостью α_{1V}, проходящей через его ось. Эта плоскость пересечет поверхность тора по окружности m, фронтальная проекция которой – отрезок $[A''B'']$.

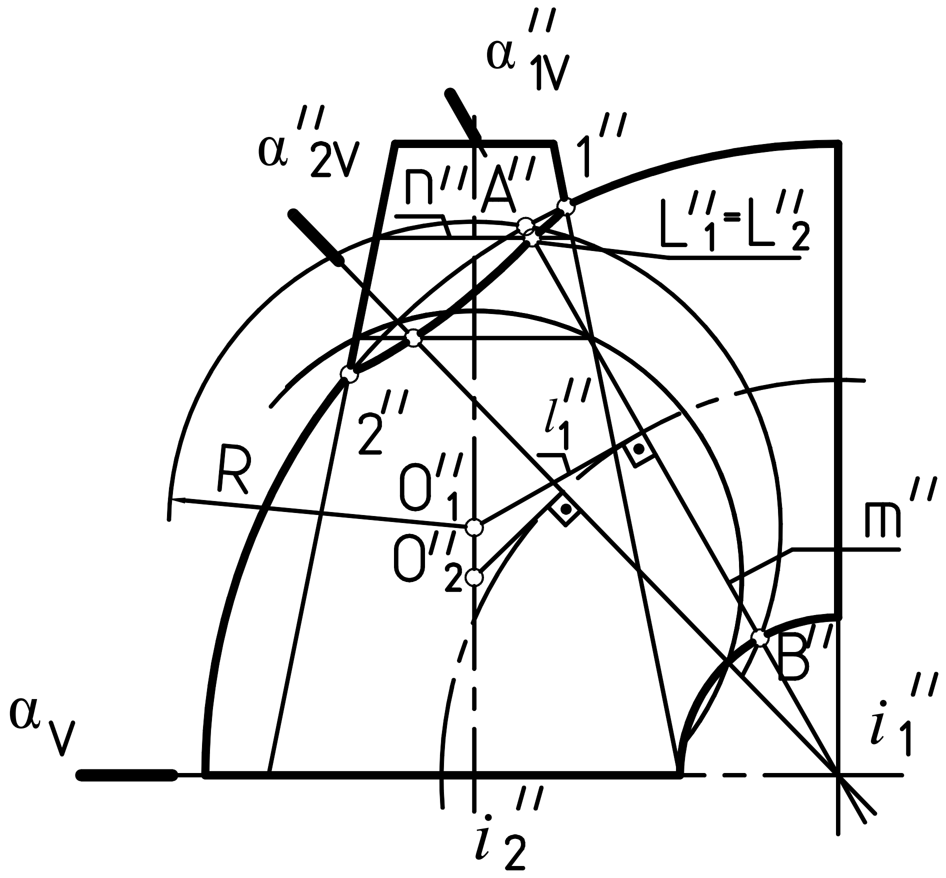


Рис. 13.10

Эта же окружность может быть получена, если поверхность тора пересечь сферами, центры которых расположены на перпендикуляре ℓ_1'', проведенном через центр окружности к ее плоскости. Для того, чтобы сфера пересекала по окружности и поверхность конуса вращения, необходимо, чтобы ее центр принадлежал оси i_2 этой поверхности. Центр вспомогательной сферы $O_1'' = i_2'' \cap \ell_1''$. Сфера $R = O_1''A''$ пересекает обе поверхности по окружностям, тор – по окружности m, а конус – по окружности n, которые пересекаются в точках L_1'' и L_2''.

Аналогично строятся и другие точки искомой линии пересечения. Горизонтальная проекция линии пересечения может быть построена с помощью параллелей n конуса.

В ряде частных случаев характер линии пересечения поверхностей можно указать заранее, что дает возможность простейшим образом получить на чертеже проекции линий пересечения. Эти случаи описываются теоремами, доказательство которых приводится в аналитической геометрии. Одна из этих теорем – *теорема Монжа.*

Если две поверхности второго порядка вписаны или описаны вокруг третьей поверхности второго порядка, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющие точки пересечения окружностей касания (рис. 13.11).

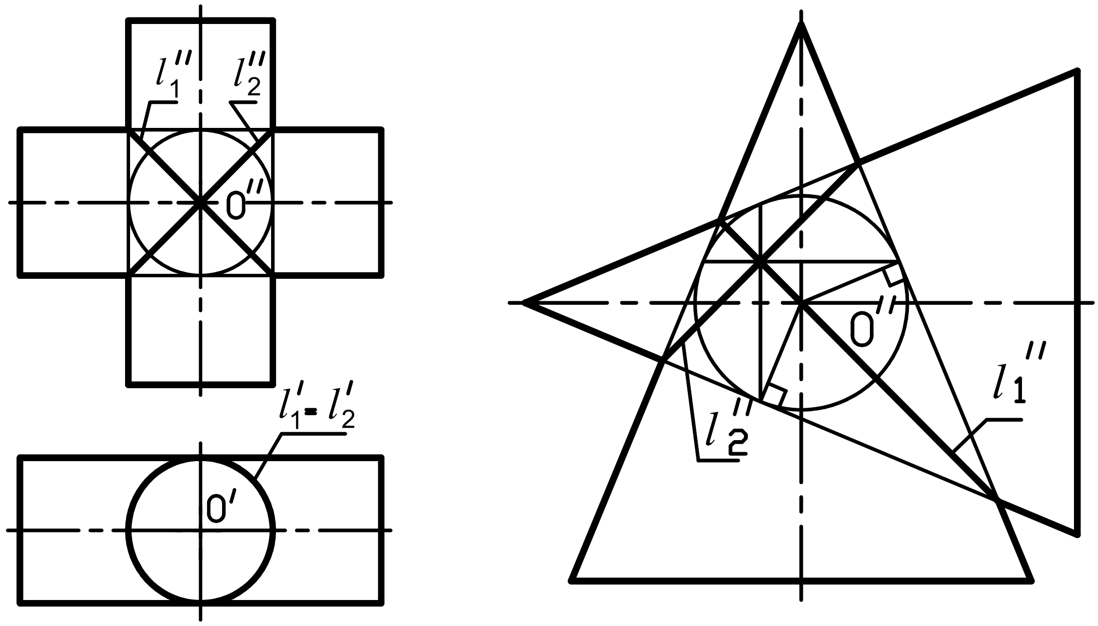


Рис. 13.11

На рис. 13.12 показано изменение характера проекции линии пересечения двух цилиндров вращения в зависимости от соотношения их диаметров.

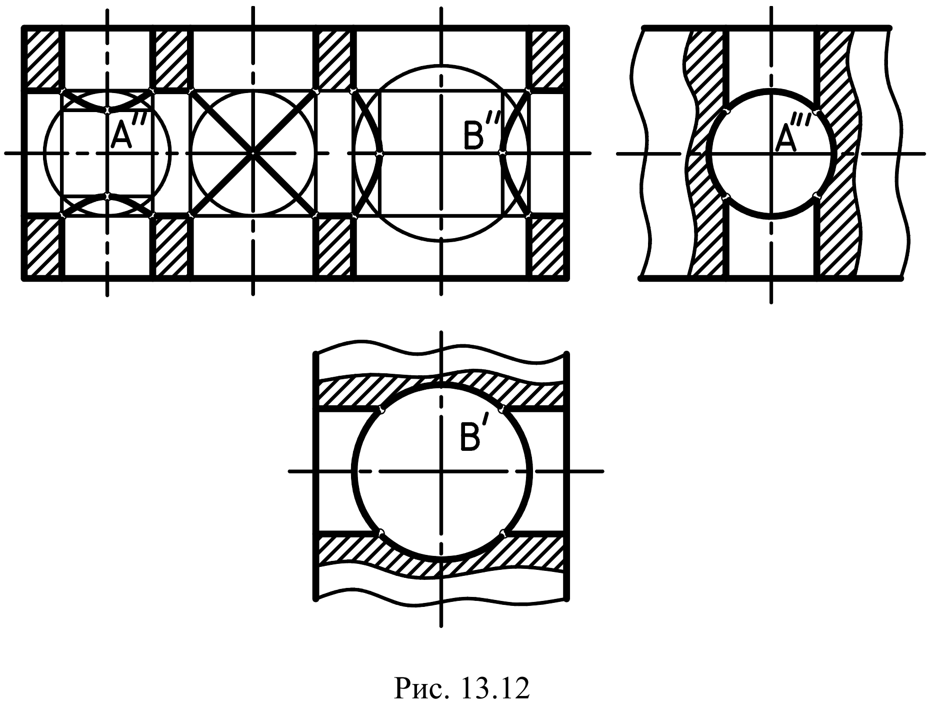


Рис. 13.12

14. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Задача по определению точек пересечения лини с поверхностью решается в следующей последовательности (рис. 14.1):

– заключить данную линию ℓ во вспомогательную плоскость γ;

– определить линию пересечения m вспомогательной плоскости с заданной поверхностью Ф;

– на пересечении полученной линии и заданной отметить искомые точки K.

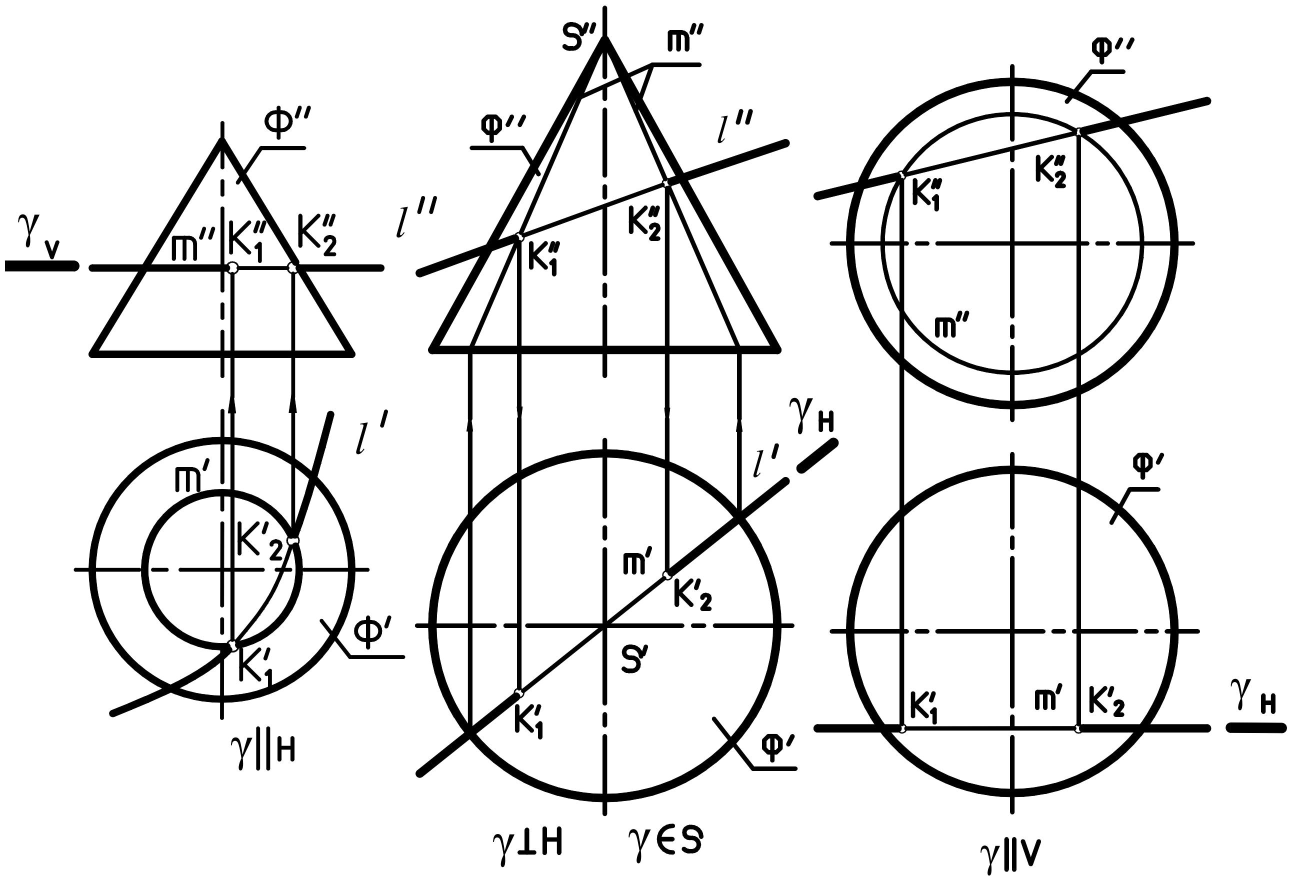


Рис. 14.1

Рациональность решения задачи зависит от выбора вспомогательной плоскости (частного или общего положения). На рис. 14.2 γ ($\alpha \cap \ell$) (плоскость общего положения) проходит через вершину конуса S.

На рис. 14.3 задача решена с помощью метода замены плоскостей проекций, где плоскость $V_1 \parallel \ell$.

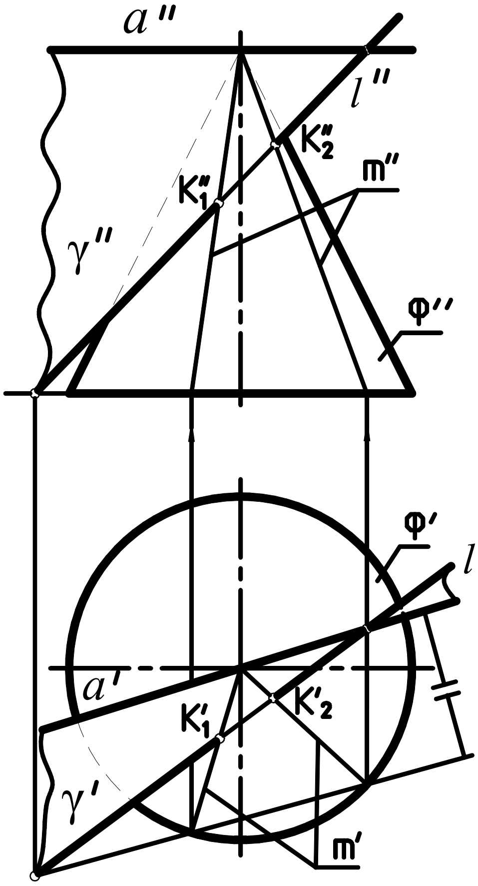


Рис. 14.2

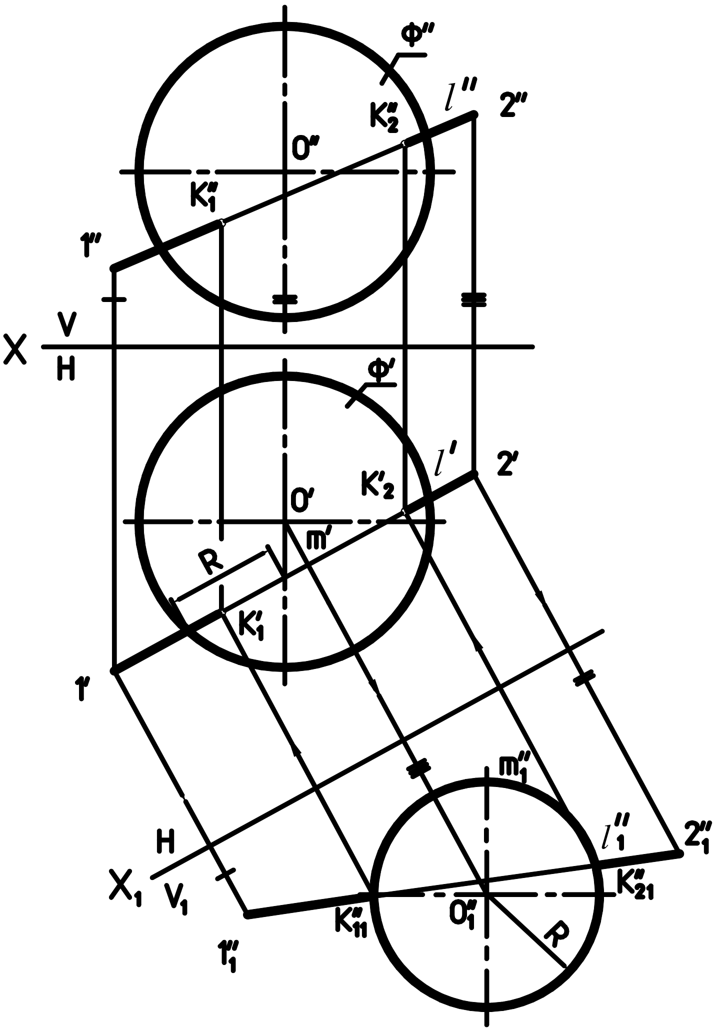


Рис. 14.3

15. ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К КРИВЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Для построения плоскости, касательной к поверхности в заданной на ней точке, следует провести через эту точку две линии, принадлежащие поверхности, а затем две пересекающиеся прямые, касательные к ним в данной точке. Эти прямые задают искомую плоскость.

На поверхности лучше выбирать линии, которые проецируются в виде отрезков прямых и дуг окружностей. Касательная линия к прямой совпадает с ней, а касательная к окружности – лежит в одной плоскости с ней и перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

На рис. 15.1 проведена плоскость α ($t_1 \cap t_2$), касательная к сфере в точке K. В качестве линий на поверхности выбраны окружности ℓ_1 и ℓ_2, проецирующиеся на одну из плоскостей проекций в виде отрезка прямой, а на другую – в виде окружности.

На рис. 15.2 касательные проведены к двум простейшим линиям на конической поверхности – образующей ℓ_1 и окружности ℓ_2.

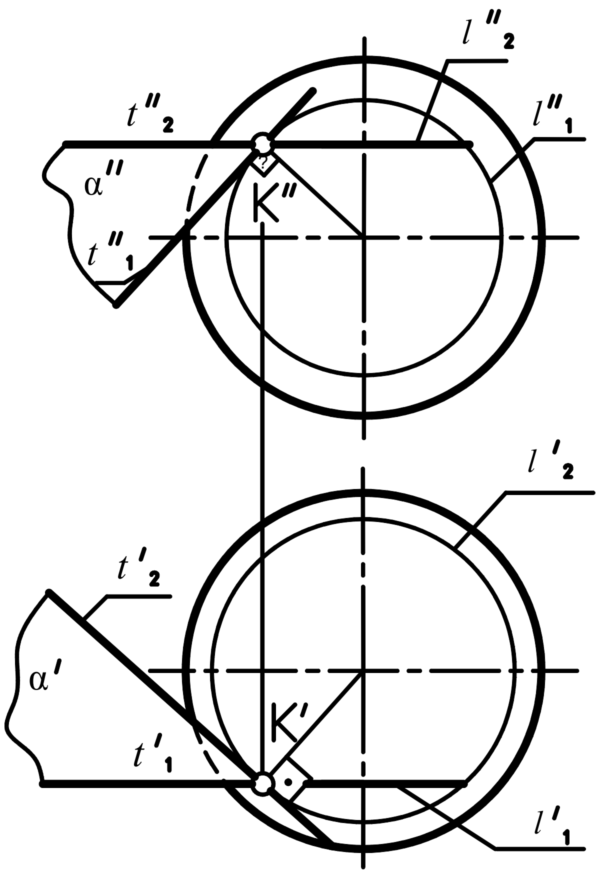


Рис. 15.1

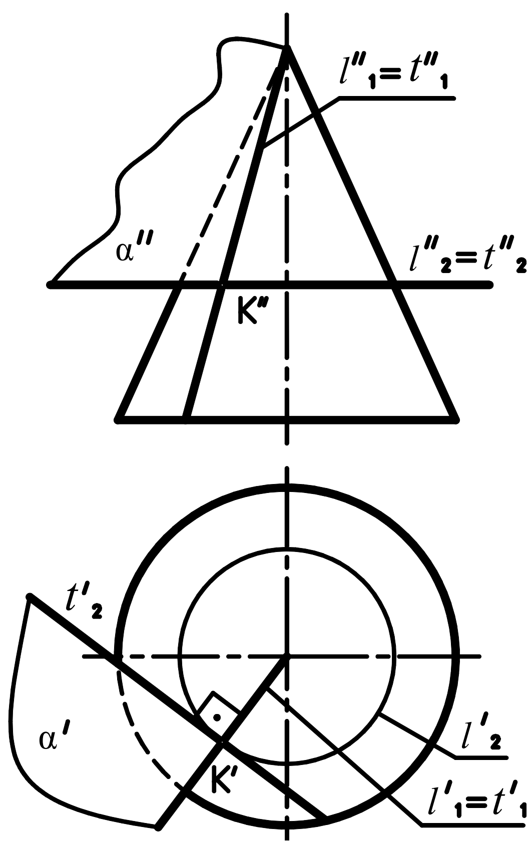


Рис. 15.2

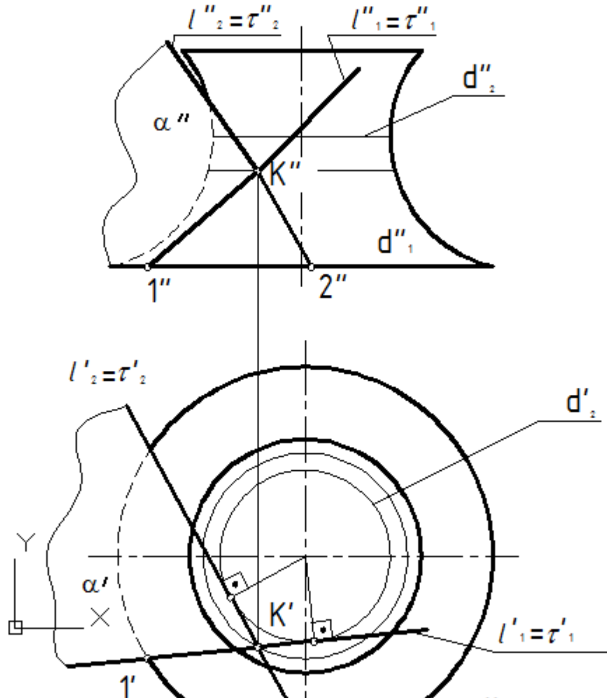


Рис. 15.3

На рис. 15.3 касательные совпадают с двумя прямолинейными образующими однополосного гиперболоида, проходящими через заданную точку *K*'. Эти образующие являются одновременно касательными к поверхности. Плоскость, касательная к поверхности однополосного гиперболоида, пересекает эту поверхность по двум прямым, для построения проекций которых из горизонтальной проекции точки *K* (*K*') проведены касательные τ_1 и τ_2 к горизонтальной проекции окружности d_2 – горло поверхности. Определены проекции точек 1' и 2', в которых ℓ_1' и ℓ_2' пересекают одну из направляющих поверхности d_1. По проекциям точек 1' и 2' находим точки 1" и 2", которые совместно с *K*" определяют фронтальные проекции искомых прямых.

В первом случае плоскость касается поверхности в одной точке, во втором –

плоскость касается поверхности по линии (образующей), в третьем случае плоскость касается поверхности по двум линиям (образующим). Это три возможных варианта расположения касательной плоскости и поверхности.

16. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ НА ОДНУ ПЛОСКОСТЬ

16.1. Аксонометрические проекции

Аксонометрические проекции применяют для построения более наглядных изображений предметов наряду с изображением в ортогональных проекциях, а также как самостоятельные изображения.

Сущность метода аксонометрического преобразования заключается в том, что предмет вместе с осями прямоугольных координат, к которым он отнесен в пространстве, параллельно проецируется на одну плоскость.

На рис. 16.1 показана схема проецирования точки A, положение которой относительно осей координат определено на некоторую плоскость α, которую называют *плоскостью аксонометрических проекций.* Для получения наглядного аксонометрического изображения, направление проецирования S не должно быть параллельным ни одной из координатных осей x, y, z.

1) Прямые Ox, Oy, Oz – оси координат в пространстве;

2) Прямые $O\alpha$ $X\alpha$; $O\alpha$; $Y\alpha$; $O\alpha$ $Z\alpha$ – их проекции на плоскость α, называемые *аксонометрическими осями*;

3) $A\alpha$ – аксонометрическая проекция точки A (см. рис. 16.1).

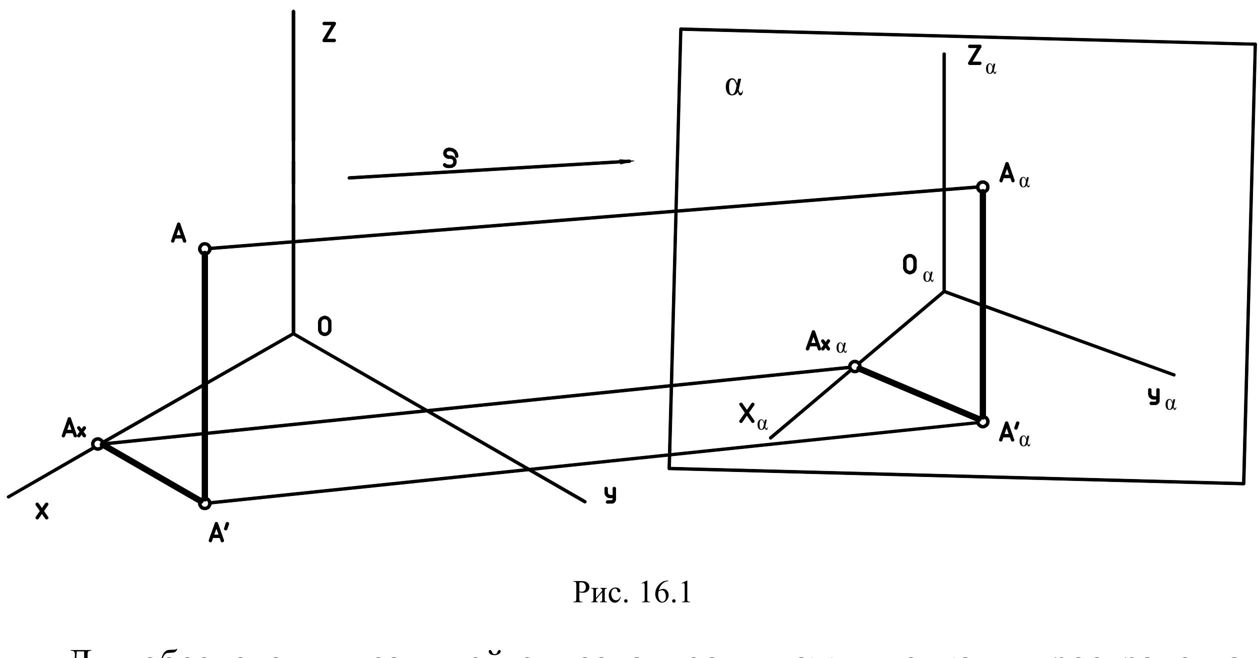


Рис. 16.1

Для обеспечения взаимной однозначности между точками пространства и их аксонометрическими проекциями на плоскость α проецируют не только точку A, но и одну из ее ортогональных проекций (обычно горизонтальную). Точку $A\alpha'$ называют *вторичной проекцией*, так как ее получают в результате двух последовательных проецирований.

Аксонометрическая проекция точки и ее вторичная проекция однозначно определяют положение точки в пространстве.

Пространственная линия $OAxA'A$ спроецировалась в плоскую ломаную линию $O\alpha Ax\alpha A\alpha' A\alpha$.

В общем случае длина отрезков координат в пространстве не равна длине их проекций. Отношение длины аксонометрической проекции отрезка, лежащего на координатной оси, к его истиной длине называется *коэффициентом искажения.*

Коэффициент искажения по оси X – $Kx = O\alpha\ X\alpha\ /\ OX$, по осям Y и Z соответственно $Ky = O\alpha\ Y\alpha\ /\ OY$ и $Kz = Oz\ Z\alpha\ /\ OZ$.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции делятся:

– на *изометрические* (если все три коэффициента искажения по осям равны между собой $Kx = Ky = Kz$);

– *диметрические* (если коэффициенты искажения одинаковы для каких-либо двух осей, например, $Kx = Kz \neq Ky$);

– *триметрические* (если все три коэффициента искажения по осям различны $Kx \neq Ky \neq Kz$).

Аксонометрические проекции различаются также и по углу φ между проецирующим лучом S и плоскостью проекций α. Если этот угол прямой, то аксонометрическая проекция называется *прямоугольной*, в противном случае ее называют *косоугольной*.

Между коэффициентами искажения и углом φ существует следующая зависимость:

$$Kx^2 + Ky^2 + Kz^2 = 2 + \mathrm{ctg}^2\,\varphi.$$

16.2. Основная теорема аксонометрии – теорема К. Польке

Три произвольно выбранных отрезка на плоскости, выходящих из одной точки, представляют параллельную проекцию трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, выходящих из некоторой точки пространства.

На основании этой теоремы системы аксонометрических осей, а также отношение коэффициентов искажения по ним могут быть заданы совершенно произвольно. На практике чаще всего пользуются аксонометрическими проекциями, рекомендуемыми ГОСТ 2.317–69 «Аксонометрические проекции».

16.3. Стандартные аксонометрические проекции

Прямоугольная изометрия

Для прямоугольной изометрии φ = 90° (рис. 16.2).

$Kx^2 + Ky^2 + Kz^2 = 2$, откуда следует, что $Kx = Ky = Kz = \sqrt{2/3} = 0{,}82$.

При построении аксонометрий обычно пользуются не самими коэффициентами искажения, а некоторыми величинами, им пропорциональными, которые называют *приведенными коэффициентами искажения.* Наибольший коэффициент принимается равным единице.

При использовании приведенных коэффициентов искажения изображения в прямоугольной изометрии увеличиваются в 1,22 раза (1 : 0,82 = = 1,22). Каждый же отрезок, откладываемый по осям *X*, *Y*, *Z* или параллельно им, сохраняет свою величину.

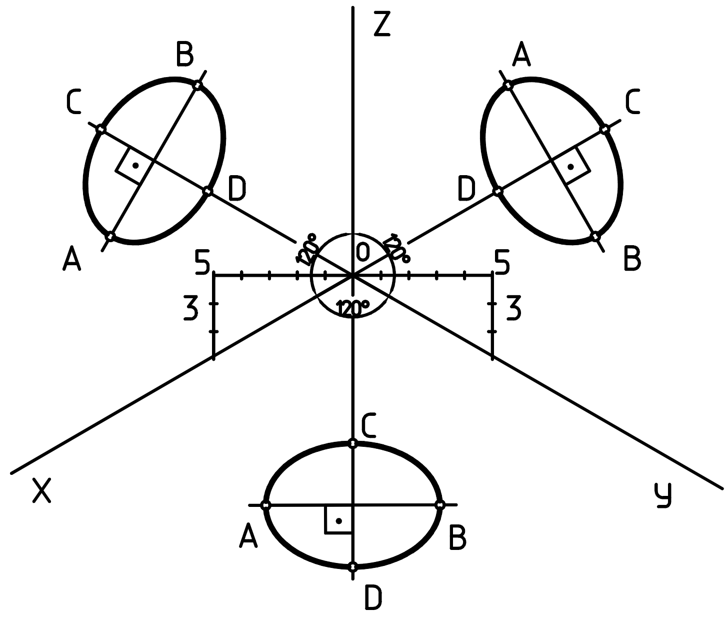


Рис. 16.2

Прямоугольная диметрия

Для прямоугольной диметрии φ = 90° (рис. 16.3).

Коэффициенты искажения Kx = = $Kz \approx 0{,}94$; $Ky \approx 0{,}47$.

На практике принимают $Kx = Kz$ = = 1, а $Ky = 0{,}5$. Изображение, построенное по приведенным коэффициентам искажения, будет увеличено в 1,06 раза (1: 0,94 = 0,5 : 0,47 = 1,06).

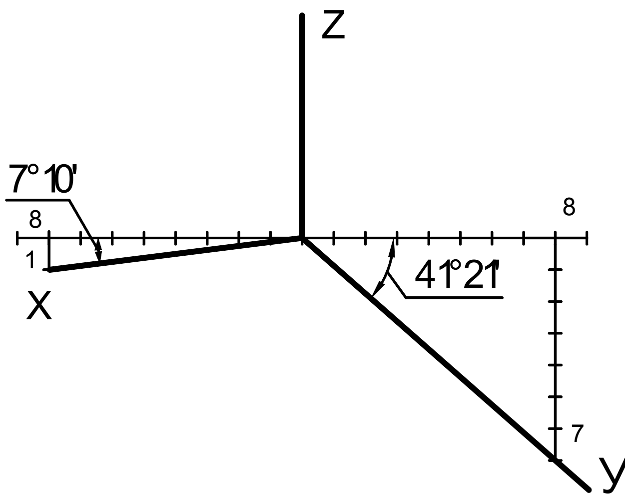


Рис. 16.3

Косоугольные аксонометрические проекции

Косоугольные аксонометрические проекции характеризуются основными признаками:

– плоскость аксонометрических проекций располагается параллельно одной из координатных плоскостей; в этом случае все фигуры, расположенные в этой плоскости или параллельной ей, изображаются без искажения;

– направление проецирования составляет с плоскостью проекций острый угол, что дает возможность спроецировать и две другие стороны объекта, но уже с искажением.

Фронтальная изометрия и диметрия

Для изометрии $Kx = Ky = Kz = 1$.

Для диметрии $Kx = Kz = 1$; $Ky = 0{,}5$. Применяют аксонометрии в основном тогда, когда изображаемый предмет имеет большое количество окружностей, расположенных во фронтальной плоскости (рис. 16.4).

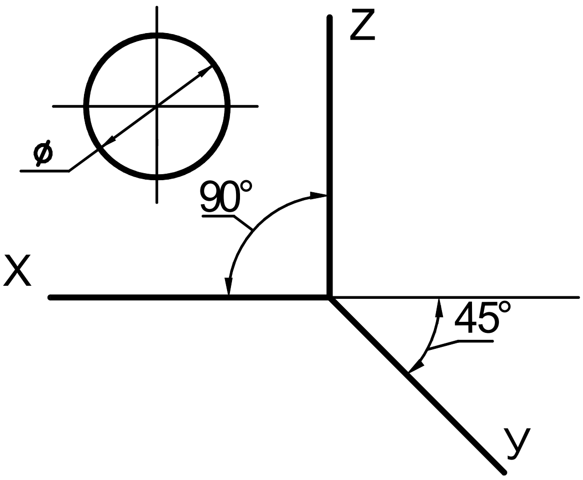


Рис. 16.4

Горизонтальная изометрия

$Kx = Ky = Kz = 1$.

Применение этого вида аксонометрии целесообразно в тех случаях, когда изображаемый предмет имеет большое количество окружностей, расположенных в горизонтальных плоскостях (рис. 16.5).

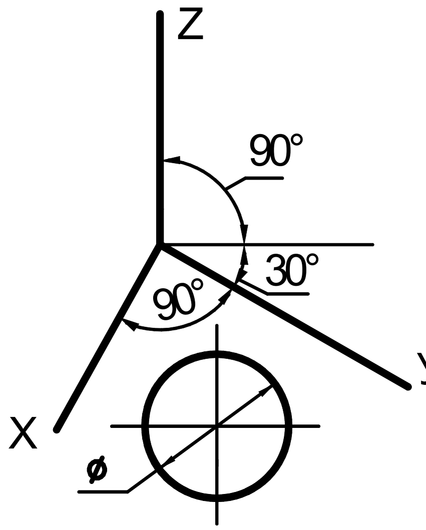


Рис. 16.5

16.4. Примеры построения аксонометрических проекций

Построения в аксонометрии рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

– на ортогональном чертеже выбирают оси прямоугольной системы координат, к которой относят данный предмет; оси обычно совмещают с осями симметрии или с основными гранями;

– строят оси выбранной аксонометрической проекции;

– строят вторичную проекцию предмета по размерам, взятым с ортогональных проекций, и с учетом коэффициентов искажения;

– достраивают аксонометрию предмета, построив высоты характерных точек вторичной проекции.

Задача. Построить прямоугольную изометрию призмы (рис. 16.6).

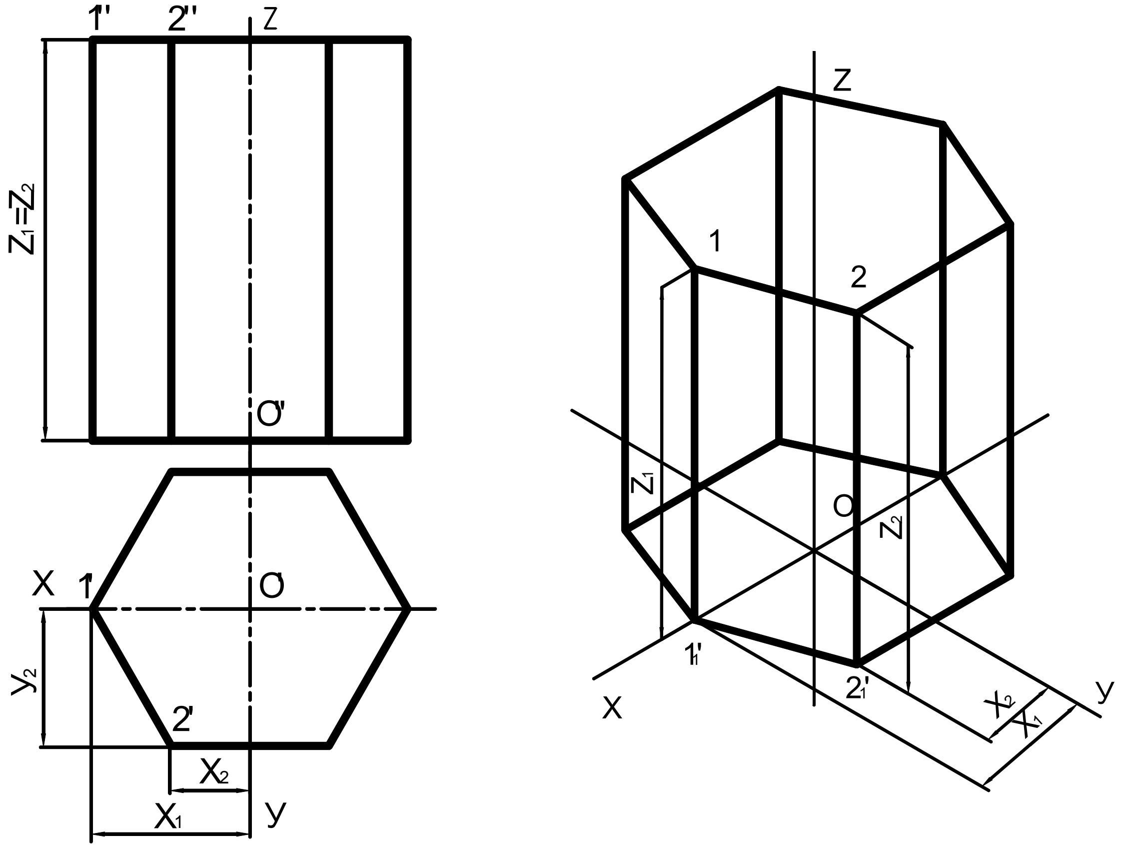


Рис. 16.6

Задача. Построить прямоугольную диметрию пирамиды (рис. 16.7).

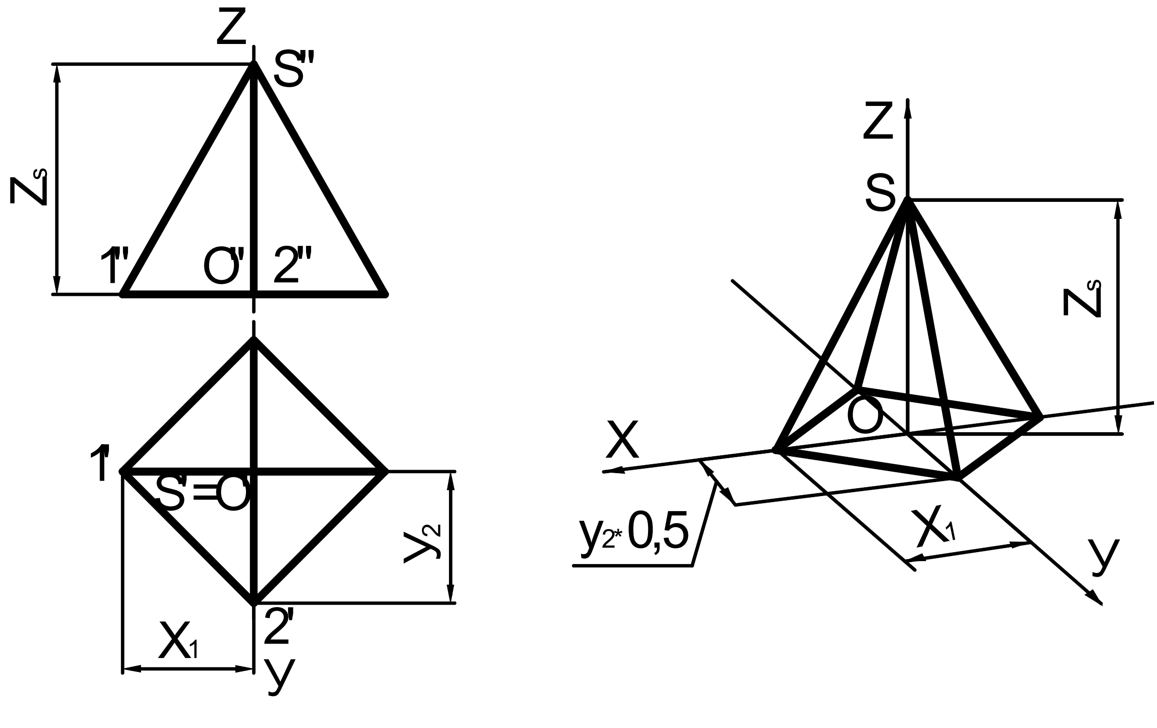


Рис. 16.7

16.5. Проекции с числовыми отметками

Основные сведения

На определенном этапе развития общества практические потребности привели человека к тому, что возникла необходимость изобразить не отдельный предмет, а обширную территорию. Это требовалось в картографии, дорожном строительстве, в практике градостроительства.

При этом необходимы знания особого метода изображения рельефа, когда вертикальные измерения объекта значительно меньше горизонтальных. Это метод проекций с числовыми отметками.

Теоретически обосновал и систематизировал этот курс военный инженер Нуазье. В дальнейшем этот раздел войдет почти во все курсы начертательной геометрии.

Проекции с числовыми отметками выполняются на основе прямоугольного проецирования на одну плоскость. В архитектурно-строительной практике в качестве этой плоскости принимается горизонтальная плоскость проекций и называется ***нулевой плоскостью***. На территории бывшего СССР за плоскость нулевого уровня принят уровень Балтийского моря. При проектировании инженерных сооружений в качестве этой плоскости может быть принята любая горизонтальная плоскость при условии, что известно расстояние до нулевого уровня (в практике это уровень пола 1-го этажа здания).

Основные элементы объекта (точки, линии) проецируют перпендикулярно на плоскость и у полученных проекций проставляют числа, показывающие расстояние их от этой плоскости, которые и называются ***числовыми отметками***. Отметки, отсчитываемые вверх от нулевой плоскости, считаются положительными, отсчитываемые вниз, – отрицательными. Отметки точек, расположенных в плоскости проекций, называются ***нулевыми*** (рис. 16.8).

В отличие от других чертежей чертежи в проекциях с числовыми отметками выполняются со значительным уменьшением. Горизонтальная проекция объекта называется ***планом***. Координатные оси на чертеже не указывают. Чертеж снабжается линейным или числовым масштабом, размеры обычно указываются в метрах (рис. 16.9).

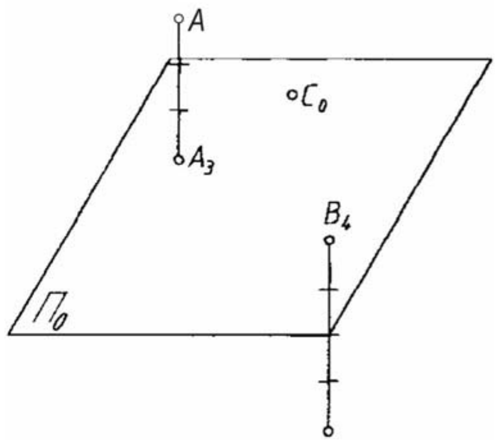


Рис. 16.8

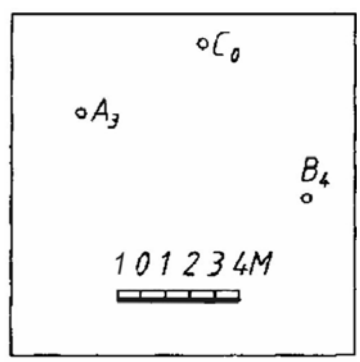


Рис. 16.9

Часто, особенно при изображении земной поверхности со слабо выраженным рельефом, принимаются различные масштабы для вертикальных и горизонтальных измерений.

Список используемых терминов

1. *Бергштрихи* – чередующиеся с равным интервалом короткие штрихи, показывающие направление спуска от какого-либо контура в проекциях с главными числовыми отметками
2. *Градуирование плоскости* – построение градуированной плоскости с отметками, выраженными целыми числами и отличающимися на единицу.
3. *Градуирование прямой* – определение точки прямой с отметками, выраженными целыми числами и отличающимися друг от друга на единицу длины.
4. *Заложение отрезка* – проекция отрезка на плоскость нулевого уровня.
5. *Интервал прямой* – величина заложения отрезка, у которого разность отметок концевых точек равна единице.
6. *Масштаб уклона плоскости* – градуированная проекция линии ската.
7. *Отметка* – расстояние от точки до плоскости проекций (плоскости нулевого уровня).
8. *Плоскость нулевого уровня* – плоскость, от которой производится отсчет высот в проекциях с числовыми отметками.
9. *Поверхность равного уклона* – линейчатая поверхность, образованная перемещением прямого кругового конуса по заданной направляющей.
10. *Профиль* – фигура сечения поверхности вертикальной плоскости.
11. *Уклон прямой* – отношение разности отметок концевых точек отрезка и его горизонтальной проекции (заложению).

Уклон прямой линии обратно пропорционален его интервалу.

Точка. Прямая

Точка задается отметкой с указанием знака (+ обычно опускается).

Прямая задается:

– проекциями двух ее точек с отметками;

– отметкой одной точки, углом наклона и указанием (стрелкой) направления наклона;

– отметкой одной точки и уклоном прямой; направление наклона (спуска) указывается стрелкой (рис. 16.10).

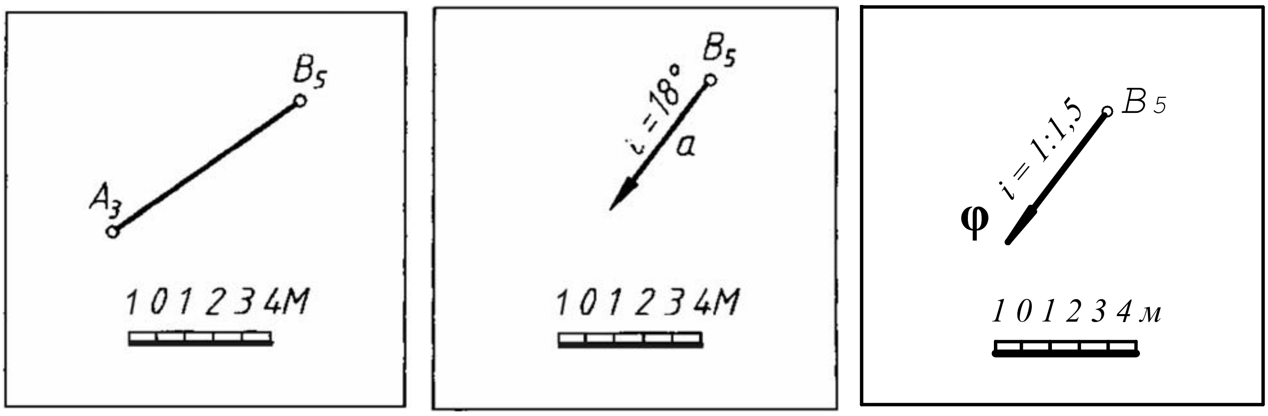


Рис. 16.10

Градуирование прямой

Длина горизонтальной проекции отрезка прямой называется ***заложением прямой***. Например, отрезок A_3B_5 представляет собой заложение отрезка AB. ***Уклон (i) отрезка*** равен отношению разности отметок концов отрезка ($\triangle H$) – ***превышения*** к расстоянию между ними – ***заложению ℓ***(рис. 16.11).

$$i = \frac{H_B - H_A}{L} = \mathrm{tg}\varphi,$$

где φ – угол наклона прямой к плоскости проекции.

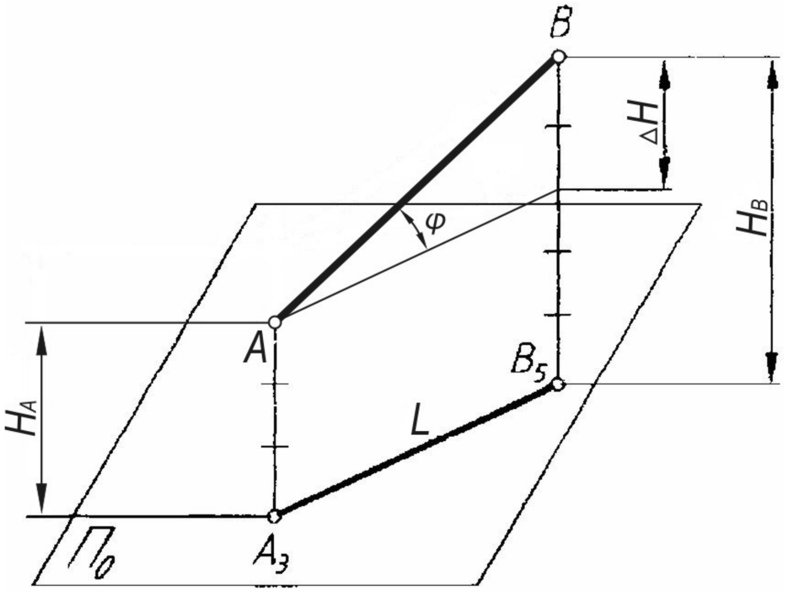


Рис. 16.11

Если разность отметок концевых точек отрезка равна единице длины, то заложение отрезка называется ***интервалом прямой ℓ.***

При $H_B - H_A = 1$; $L = \ell$.

Интервалом пользуются при градуировании проекции прямой линии. ***Проградуировать проекцию прямой*** – определить на ней точки с постоянной разностью отметок, равной единице. Уклон прямой линии обратно пропорционален интервалу $i = 1/\ell$.

Наиболее распространенные способы градуирования прямой

Пропорциональное деление отрезка

Через один из концов отрезка (в данном случае $A_{3,5}$) проводится вспомогательная прямая любого направления, на которой в произвольном масштабе откладываются величины, соответствующие превышениям между концевыми и искомыми точками отрезка. Искомые точки на заданном отрезке прямой определены с помощью отрезков, параллельных прямой, соединяющей конечные точки заданной и вспомогательной прямых (рис. 16.12).

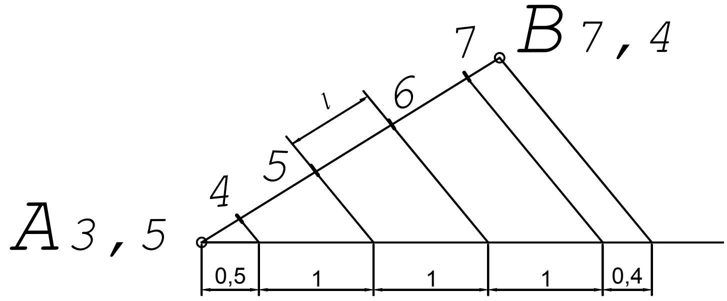


Рис. 16.12

Использование графика уклона прямой – масштаба уклонов

Этим способом пользуются, если прямая задана проекцией одной точки с целой числовой отметкой и известен уклон прямой (i) или угол ее наклона к плоскости проекций (φ) (рис. 16.13).

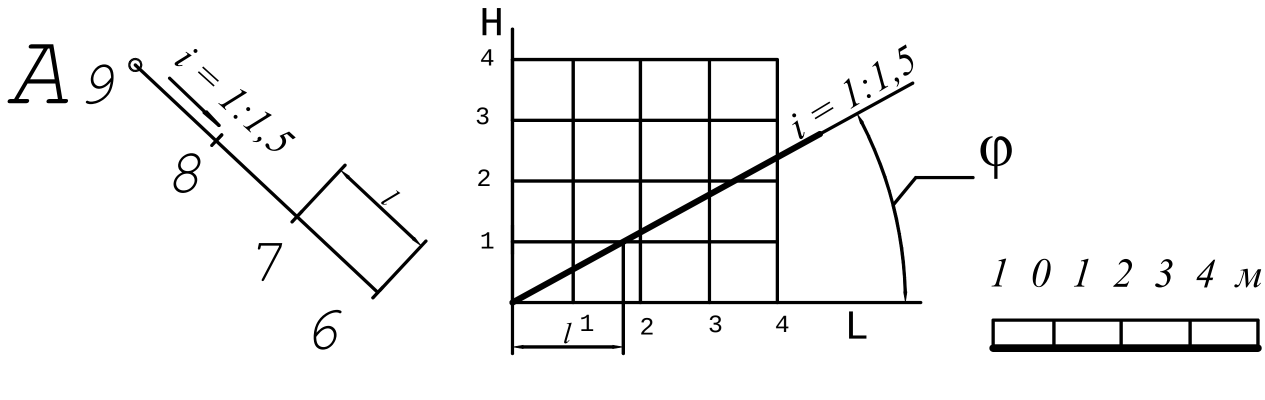


Рис. 16.13

Градуирование прямой в практических задачах
(три возможных варианта)

1. Отметки точек являются целыми числами, например, A_{16}, B_{20} (рис. 16.14).

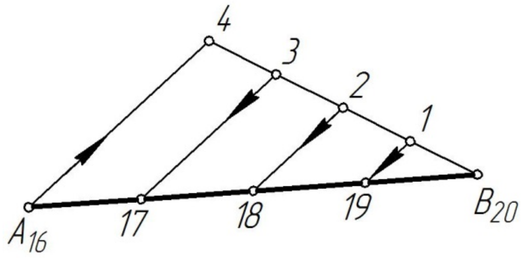


Рис. 16.14

2. Если концы отрезка имеют дробные отметки, то от конца отрезка с меньшей отметкой откладывают только дробную часть, а от другого конца откладывают разницу целых отметок и дробную часть (рис. 16.15).

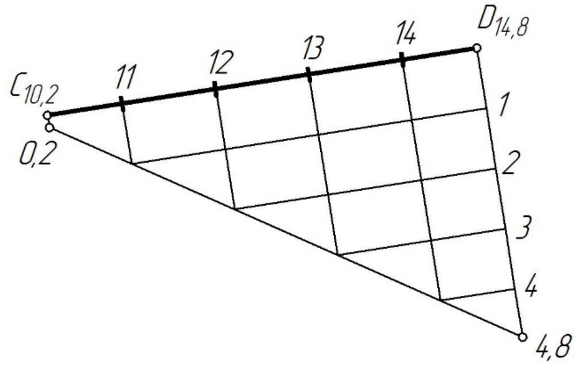


Рис. 16.15

3. Когда отметки концов отрезка имеют разные знаки. Значения отметок откладывают в разные стороны (рис. 16.16).

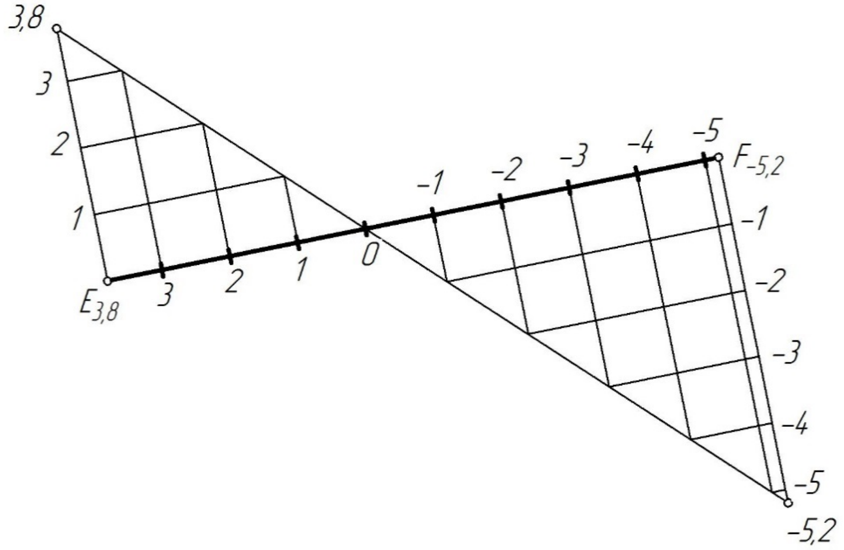


Рис. 16.16

Взаимное расположение прямых

Все признаки, определяющие взаимное расположение прямых в ортогональных проекциях, являются такими же и для проекций с числовыми отметками, но так как отсутствует вторая проекция, необходимо проградуировать прямые и сравнить интервалы, уклоны, отметки прямых.

Пересекающиеся прямые

Проекции таких прямых пересекаются в точке, отметка которой одинаковая для каждой из пересекающихся прямых, а прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны и являются горизонталями плоскости, проходящей через данные пересекающиеся прямые (рис. 16.17).

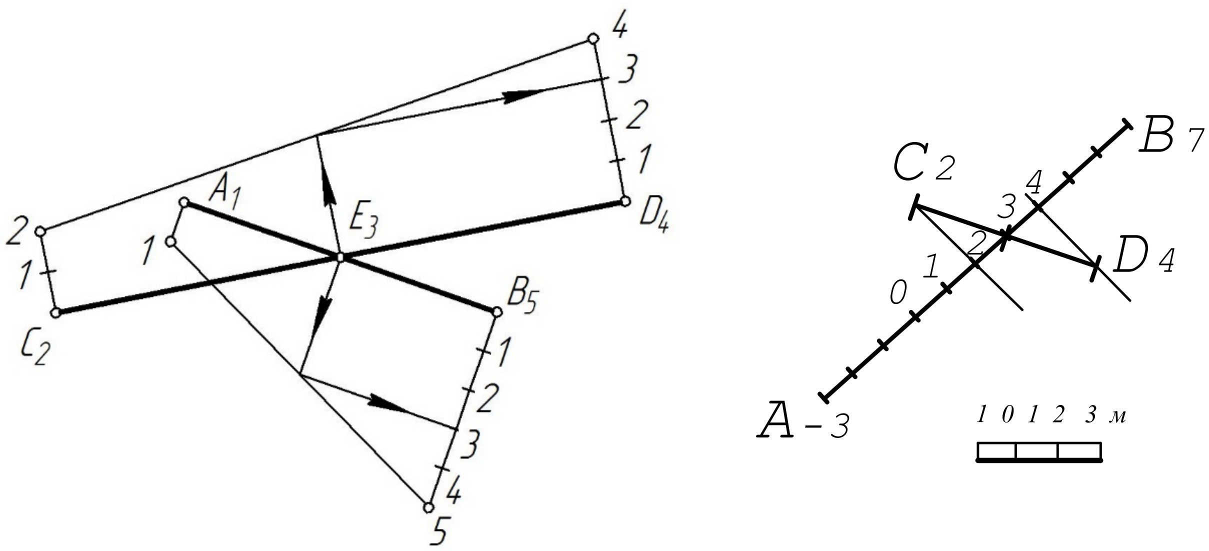


Рис. 16.17

Параллельные прямые

Изображаются в проекциях с числовыми отметками также в виде параллельных прямых.

Кроме параллельных проекций, у параллельных прямых должно быть одинаковое направление спуска и один и тот же интервал, а следовательно, и уклон. Например, прямые *AB* и *CD* параллельны. Прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками (горизонтали), параллельны, и определяют плоскость, проходящую через заданные прямые (рис. 16.18).

Определение параллельности прямых сводится к проводке следующих условий:

1) заложения отрезков, параллельных между собой;

2) направления возрастания и убавления отметок одинаковы;

3) интервалы (уклоны) отрезков одинаковы.

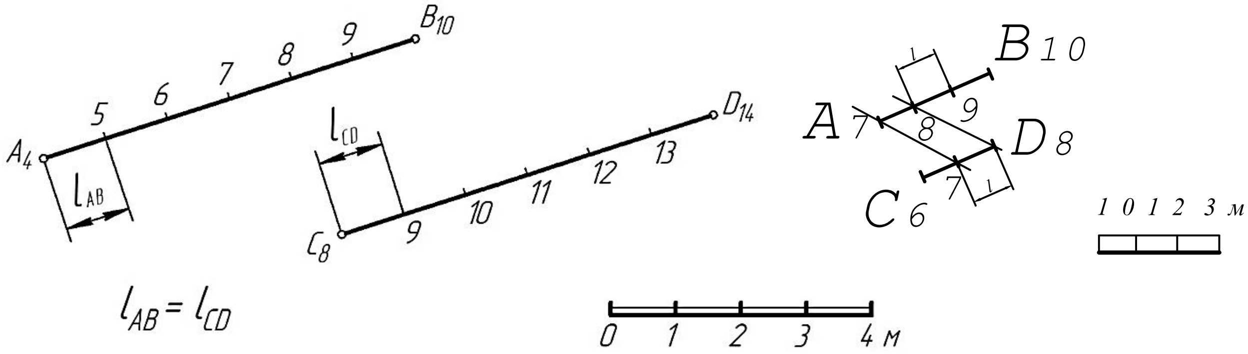


Рис. 16.18

Скрещивающиеся прямые

У скрещивающихся прямых признаки пересечения и параллельности отсутствуют, а прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, не параллельны. Отметки конкурирующих точек различны ($N_{3,\ 2}$, $P_{2,\ 3}$), следовательно, прямые скрещиваются (рис. 16.19).

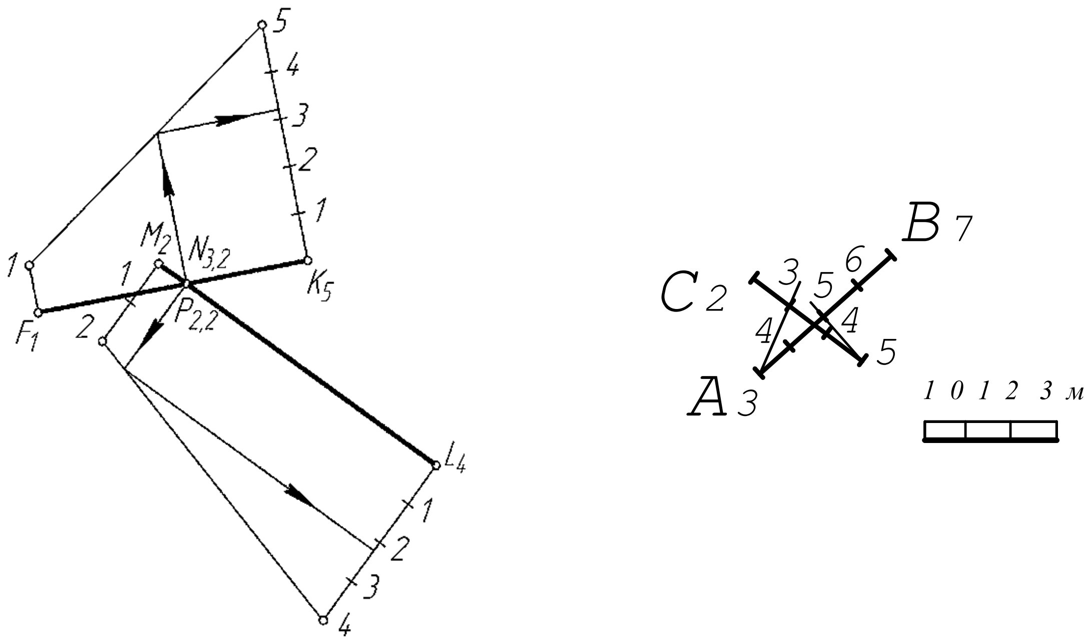
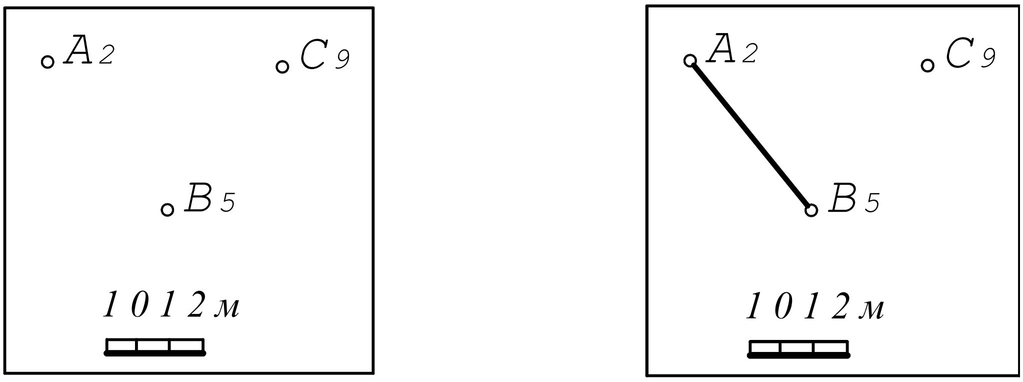


Рис. 16.19

Плоскость

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана проекциями с числовыми отметками:

1) трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 16.20, *а*);
2) прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис. 16.20, *б*);
3) параллельных прямых (см. рис. 16.18);
4) пересекающихся прямых (см. рис. 16.17).



а *б*

Рис. 16.20

Проекции и градуирование плоскости

При решении большинства метрических и позиционных задач удобно, когда плоскость задана горизонталями. Для этого нужно ***градуировать плоскость***, т. е. построить ее горизонтали с отметками, выраженными целыми числами и отличающимися друг от друга на единицу длины (рис. 16.21).

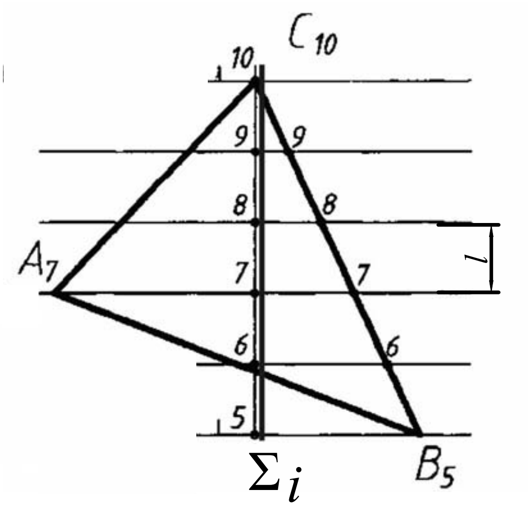


Рис. 16.21

Проградуируем плоскость, заданную треугольником *ABC*. Градуируем сторону треугольника, расположенную между вершинами, имеющими наибольшую разность отметок. В данном случае это сторона *BC*. Разность между отметками концов отрезка *BC* равна 5; делим его проекцию на пять частей и отмечаем точки 6, 7, 8, 9.

Соединим прямой линией точку A_7 с точкой 7 на стороне *BC*. Эта линия – горизонталь плоскости, так как две ее точки имеют одну и ту же отметку. Проведя через точки 6, 8, 9 прямые, параллельные прямой 7, получим горизонтали плоскости *ABC*.

Проведем через произвольную точку (*C*) треугольника прямую, лежащую в плоскости и перпендикулярную горизонталям. Такая линия, как уже известно, называется линией ската плоскости. В данном случае линия ската градуирована, так как точки ее пересечения с горизонталями плоскости имеют те же отметки, что и горизонтали, и различаются между собой на единицу длины.

Градуированная проекция линии ската называется ***масштабом уклона плоскости*** или ***масштабом падения***.

На чертежах масштаб уклона (проекция линии ската) выделяется двумя параллельными линиями (толстой и тонкой) и обозначается той же буквой, что и плоскость с добавлением индекса *i* (см. рис. 16.21). Цифры числовых отметок указывают со стороны тонкой линией.

Плоскость имеет спуск в направлении линии ската от горизонталей с большими отметками к горизонталям – с меньшими отметками.

Угол падения плоскости – угол наклона плоскости к плоскости проекций. На чертеже угол α определяется из прямоугольного треугольника, у которого один катет равен интервалу линии ската, а второй катет равен единице высоты в масштабе чертежа.

Направление простирания плоскости – правое направление ее горизонталей, если смотреть на плоскость в сторону возрастания отметок.

***Угол простирания плоскости* φ** – угол между меридианами земли и направлением простирания. Угол φ измеряют от северного конца меридиана против часовой стрелки (рис. 16.22). В топографии, геологии и других науках плоскость задают углом падения и направлением простирания (рис. 16.23).

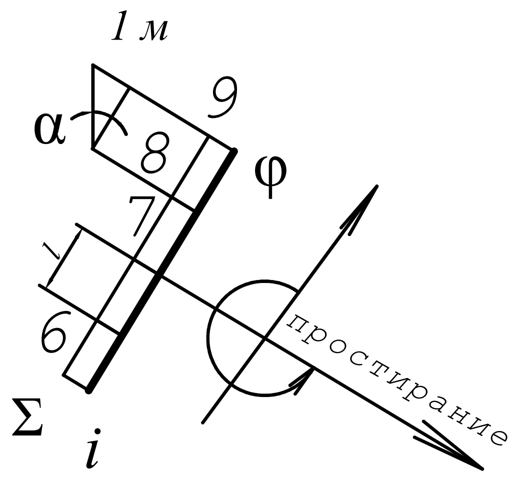


Рис. 16.22

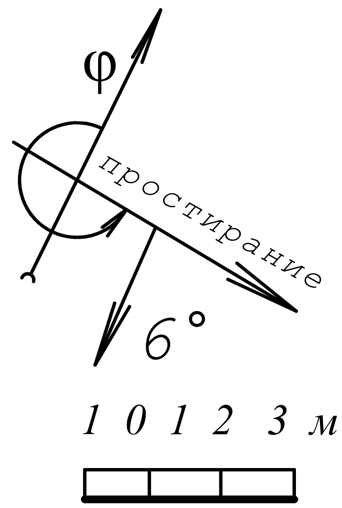


Рис. 16.23

Точка и линия в плоскости

Точка в плоскости строится с помощью произвольной прямой в плоскости. Определим отметку точки *A*, проекция которой дана и о которой известно, что она лежит в плоскости, заданной масштабом уклонов α_i (рис. 16.24).

Проведем через точку *A* прямую произвольного направления, принадлежащую плоскости, и отметим точки ее пересечения с произвольными горизонталями плоскости (B_6, C_{10}).

Построив фронтальную проекцию прямой (B_2, C_2), найдем фронтальную проекцию точки *A* и определим ее отметку (она равна 9). Тот же прием можно использовать при необходимости проверить, лежит ли точка, заданная проекцией и отметкой, в данной плоскости.

Например, отметка точки Д равна 8,4 единицы. Построив ее фронтальную проекцию, убеждаемся, что она совпадает с фронтальной проекцией прямой *BC*, принадлежащей плоскости. Следовательно, точка *D* в плоскости лежит.

Точка *E* (E_{11}) не лежит в плоскости, заданной масштабом уклонов, так как тогда ее отметка должна была бы быть больше 9, но меньше 10 единиц.

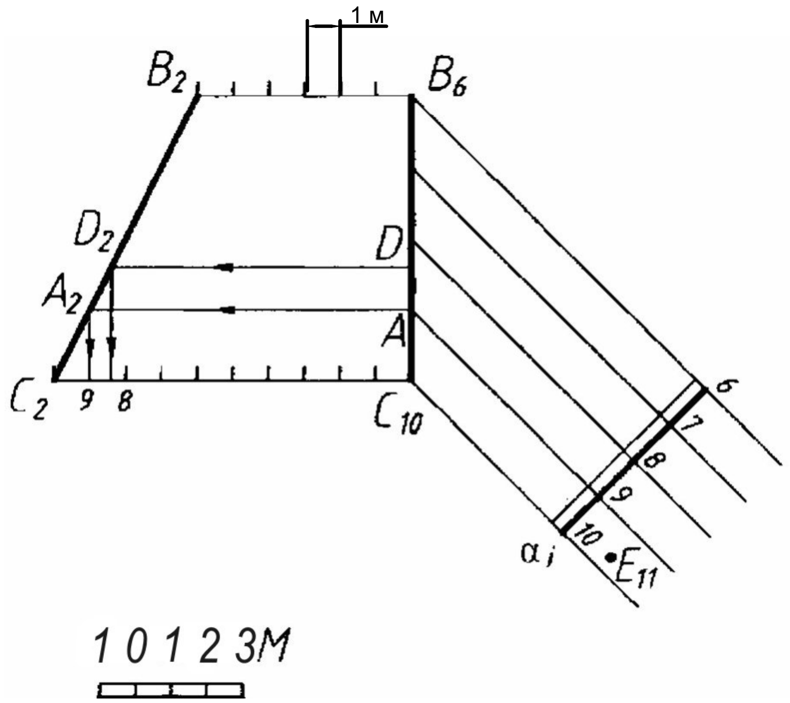


Рис. 16.24

Взаиморасположение плоскостей

Параллельность плоскостей

Две плоскости параллельны, если у них одинаковые углы простирания и уклоны. Однако можно вывести и другие признаки параллельности плоскостей. Например, если горизонтали обеих плоскостей параллельны, одинаков уклон плоскостей и совпадает направление спуска, то плоскости параллельны (рис. 16.25, *а*).

У параллельных плоскостей линии ската параллельны (рис. 16.25, *б*)

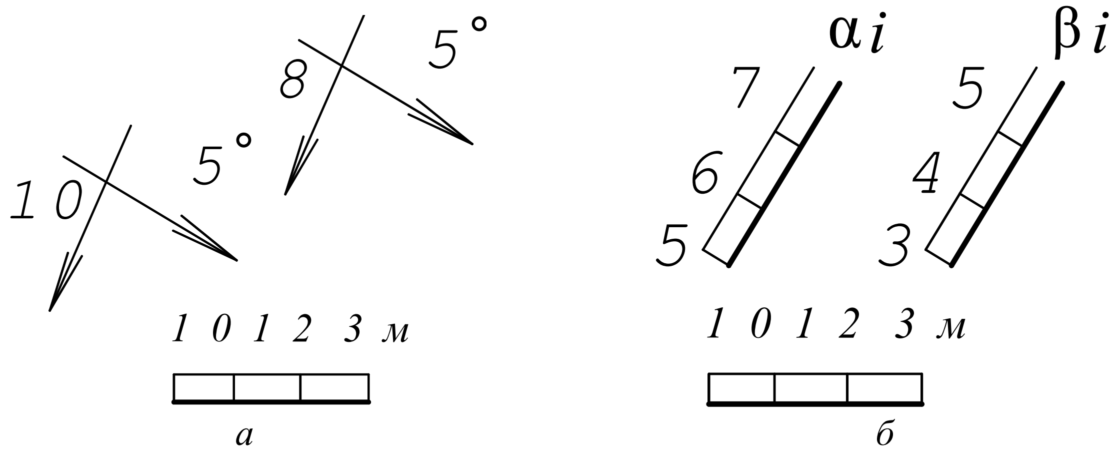


Рис. 16.25

Линия пересечения двух плоскостей определяется двумя точками пересечения двух пар горизонталей, имеющих одинаковые отметки (рис. 16.26, *а*).

Если плоскости имеют один угол наклона, линия их пересечения располагается по биссектрисе угла между горизонталями (рис. 16.26, *б*).

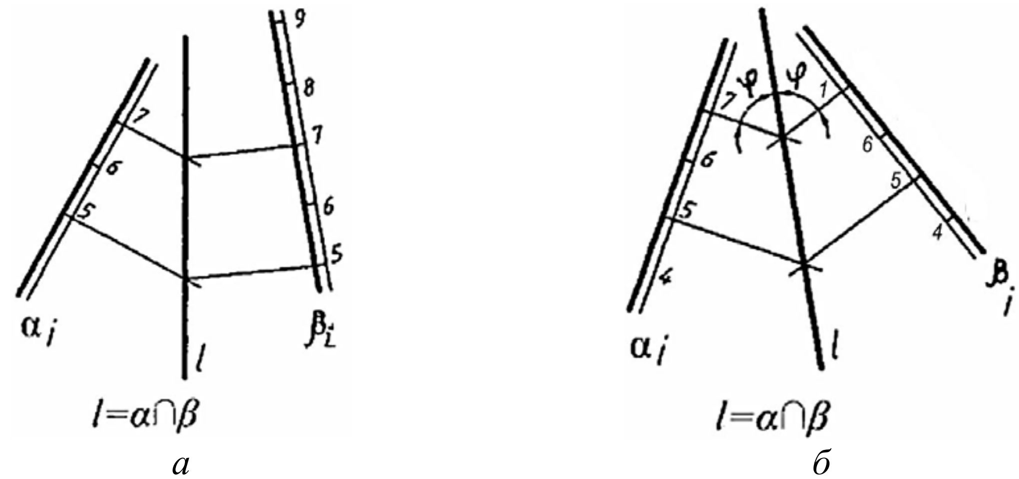


Рис. 16.26

Построить линию пересечения плоскостей, одна из которых задана треугольником *ABC*, вторая – масштабом уклонов di (рис. 16.27), $\ell = \alpha \cap \triangle ABC$.

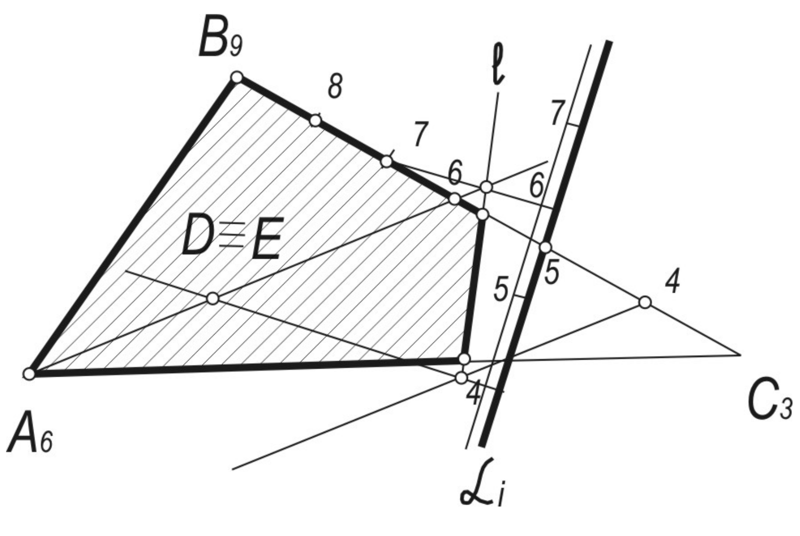


Рис. 16.27

Градуируем плоскость треугольника и проводим ее произвольные, например, 4 и 6, горизонтали до пересечения с однозначными горизонталями плоскости *а*. Линией пересечения является прямая ℓ. Для определения видимости отсека плоскости, заданной треугольником, воспользуемся конкурирующими точками, расположенными в месте кажущегося пересечения горизонталей разных плоскостей. Пусть точка *D* принадлежит плоскости треугольника, тогда ее отметка равна 6. Точка E, лежащая в плоскости, заданной масштабом уклонов, имеет отметку, равную 4. Так как точка D расположена выше точки E, то плоскость треугольника в месте точек D и E окажется видимой.

В случае, когда одна из плоскостей проецирующая, проекция линии пересечения плоскостей может быть определена без вспомогательных построений. На рис. 16.28 построена линия пересечения плоскости общего положения и проецирующей плоскости Ω.

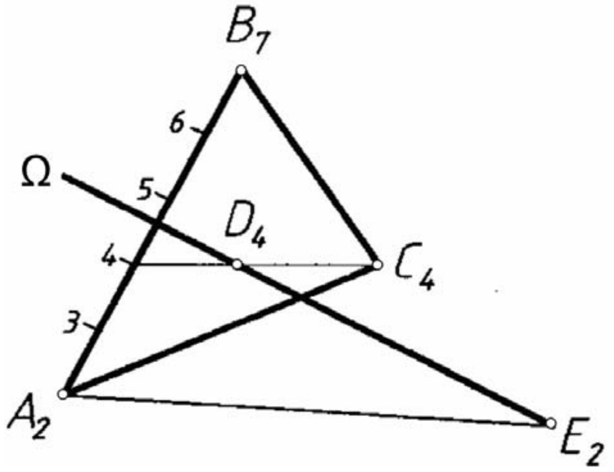


Рис. 16.28

Проекция линии пересечения совпадает с проекцией плоскости Ω. Отметки двух точек этой линии можно узнать, построив точки пересечения двух (2 и 4) горизонталей плоскости треугольника с проецирующей плоскостью. Это точки D и E, отметки которых равны отметкам горизонталей, на которых они расположены.

Пересечение прямой с плоскостью

Точка пересечения прямой с плоскостью определяется аналогично в других методах проецирования, т. е. проведением через прямую вспомогательной секущей плоскости (горизонтально-проецирующей или произвольной). Последняя удобнее. Рассмотрим оба варианта для решения этой задачи (рис. 16.29, 16.30).

Первый способ

Заключим прямую AB и проецирующую плоскость β и построим линию ее пересечения с заданной плоскостью (C_2D_6). Возьмем произвольную фронтальную плоскость, ее положение определяется осью x_1, спроецируем на нее заданную прямую AB и прямую CD. В их пересечении отметим фронтальную проекцию точки K, ее горизонтальную проекцию найдем с помощью линии проекционной связи. Описанный прием позволяет установить и отметку точки K (отрезок h).

Для определения видимости используем конкурирующие точки E и F. Нужно построить их фронтальные проекции (E_2, F_2).

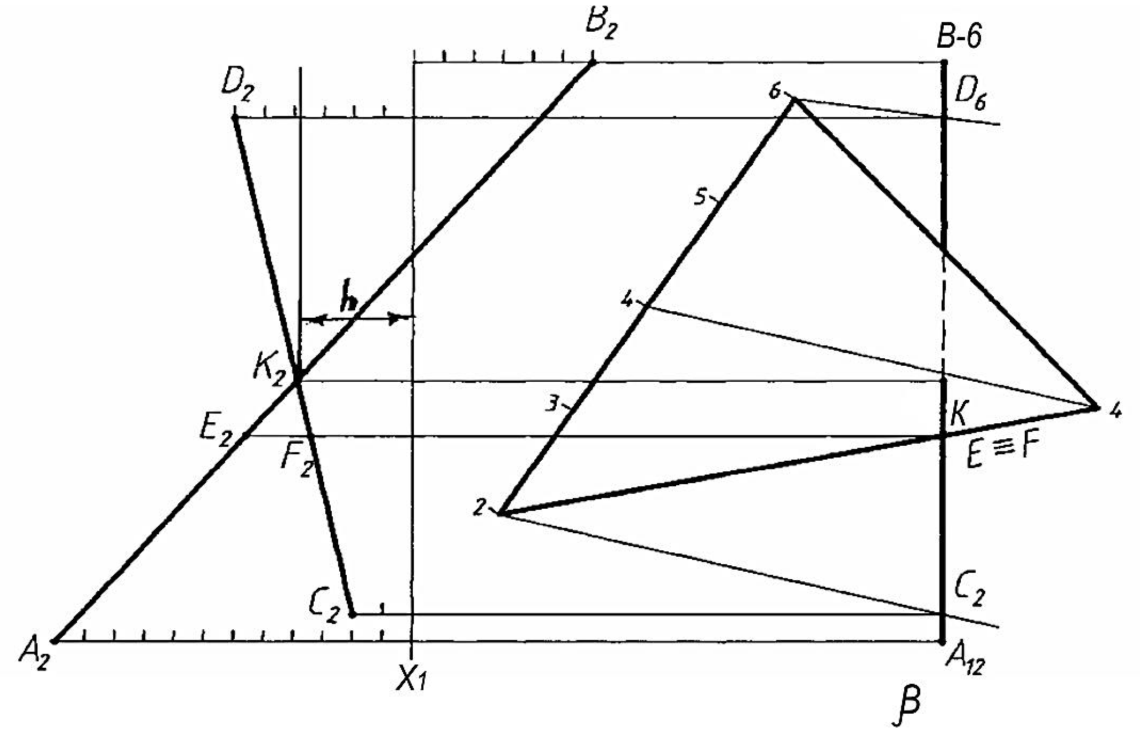


Рис. 16.29

Второй способ

1. Прямая AB градуируется.

2. Проводится вспомогательная плоскость β общего положения через две точки на прямой AB (плоскость задаем двумя произвольными горизонталями).

3. Точки пересечения однозначных горизонталей определяют прямую $CD = \beta \cap \triangle 264$, $K = CD \cap AB = AB \cap \triangle 264$ (см. рис. 16.30).

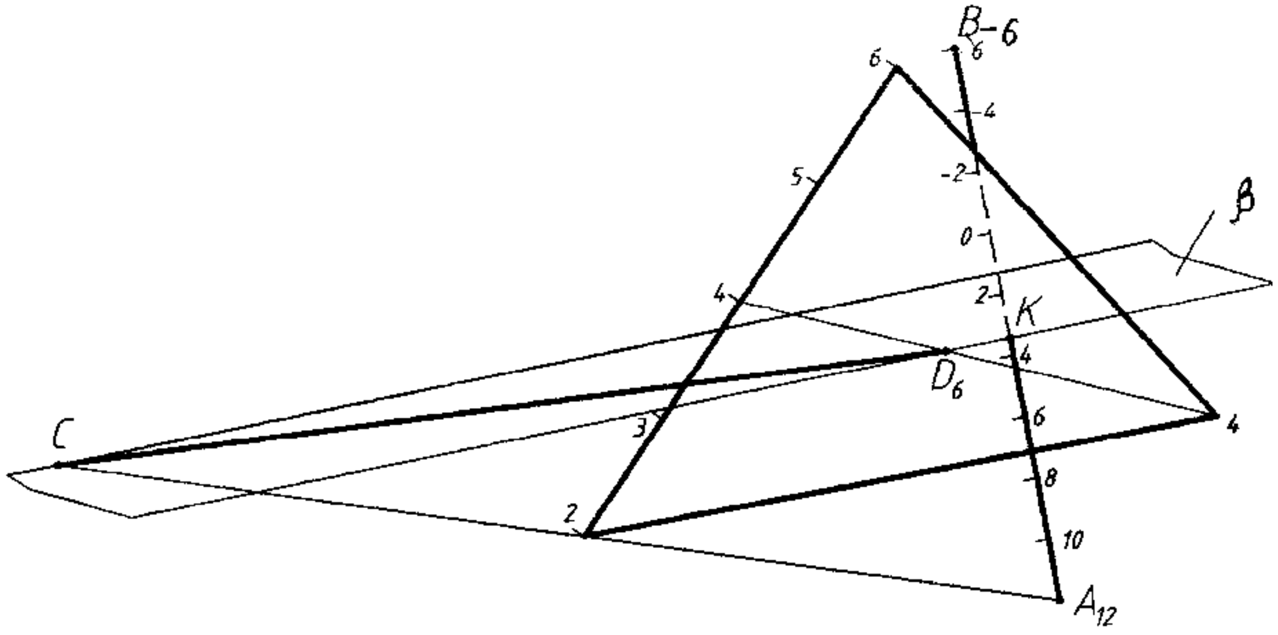


Рис. 16.30

Решение практической задачи

Дано:

1) плоскость α – задана масштабом уклона, α_i;

2) прямая $A_{13}B_9$.

Найти точку K их взаимного пересечения. (Задача решена в двух вариантах.)

1. Градуируем прямую AB.

2. Заключаем прямую AB в плоскость-посредник общего положения (для этого проводим в произвольном направлении горизонтали этой плоскости, например, n_{11} и h_9 через точки 11 и 9 на прямой AB.

3. Находим точки пересечения одноименных горизонталей плоскости посредника и заданной α_i.

4. Через полученные точки находим линию пересечения двух плоскостей $M_{11}P_9$ (рис. 16.31, 16.32).

Пример 1

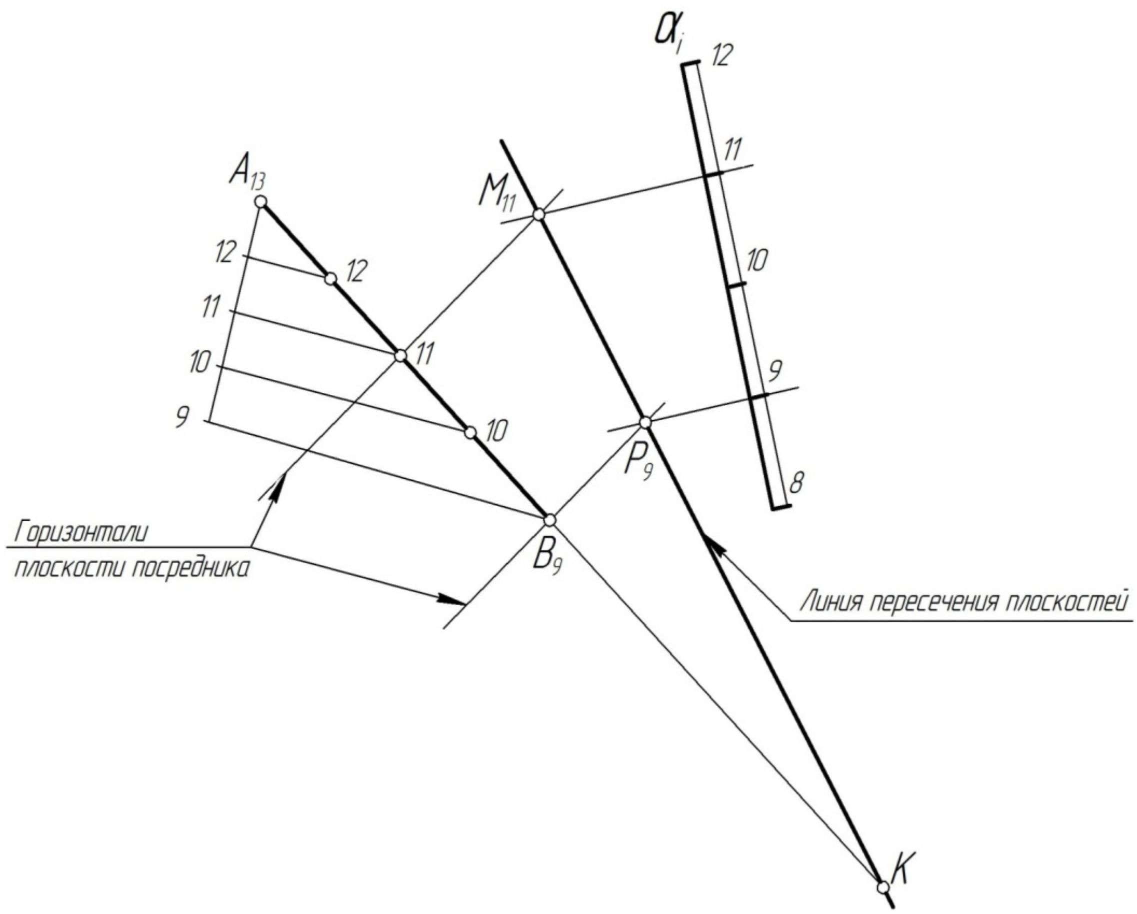


Рис. 16.31

Пример 2

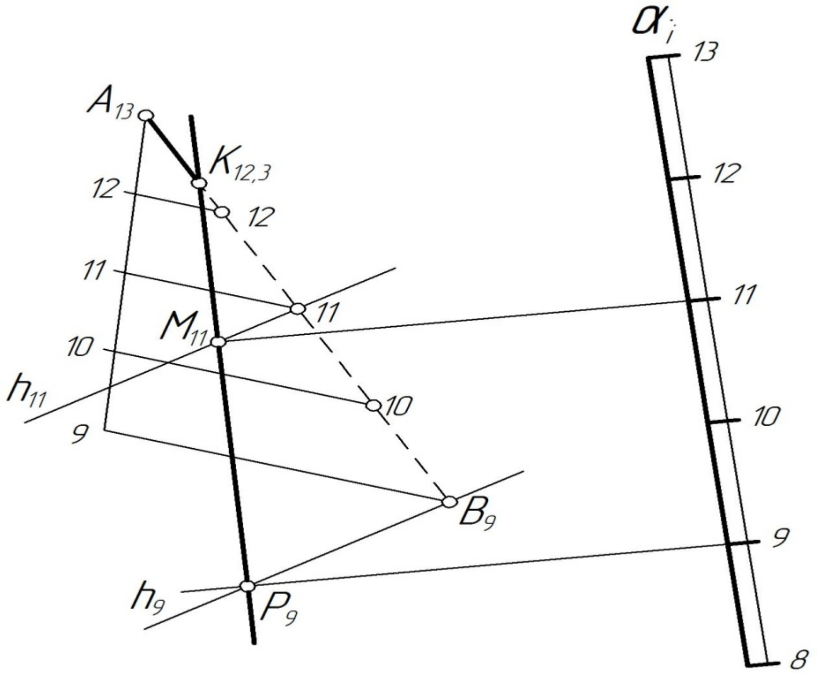


Рис. 16.32

Прямая, перпендикулярная плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой этой плоскости, в том числе и к линии ската (см. рис. 16.33).

Следовательно, угол наклона прямой к плоскости проекции равен (90° – α), где α – угол наклона плоскости к плоскости проекции. Так как уклон плоскости равен tgα, то уклон перпендикулярной ей прямой равен tg(90° – α) или ctgα. Уклон плоскости и уклон перпендикулярной к плоскости прямой обратно пропорциональны.

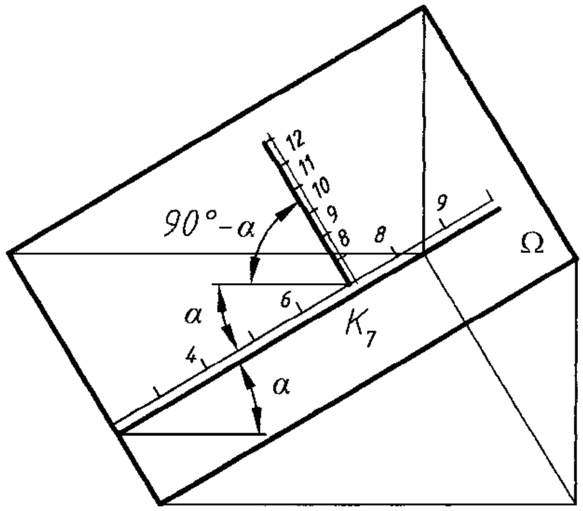


Рис. 16.33

Поверхность

В проекциях с числовыми отметками поверхности большей частью задаются горизонталями – линиями их сечения горизонтальными плоскостями, взятыми по высоте через одинаковые расстояния (от 10 см до 1–2 м, для географических карт – 5–10 м).

В разрыве этих горизонталей (или над ними) проставляются их отметки. Расстояние между горизонталями характеризует уклоны. Примеры изображения некоторых объектов представлены на рис. 16.34.

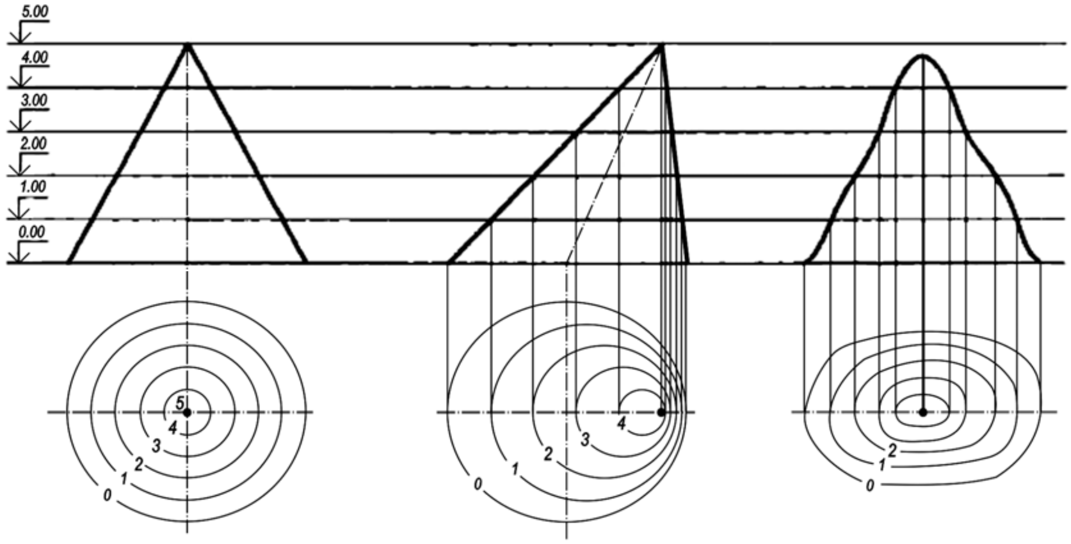


Рис. 16.34

Чтобы решать технические задачи, нужно знать, каково расположение горизонталей и линий ската некоторых закономерных плоскостей.

Линией ската называется линия поверхности, которая в данной точке наклонена к горизонтальной плоскости под наибольшим углом. Эта линия перпендикулярна горизонтали поверхности, проведенной через ту же точку.

Особенно важно изучить изображения поверхностей, ограничивающих земляные сооружения: дороги, каналы и их откосы. Если ось дороги наклонная или горизонтальная прямая, то откос дороги будет ограничен плоскостью, когда же ось дороги плоская или пространственная кривая, то откос ограничен поверхностью (конической, винтовой и т. д.).

Топографическая поверхность

Поверхности, строение которых нельзя описать математически строго, называют ***топографическими***. Один из примеров такой поверхности – рельеф земли.

Топографическая (земная) поверхность задается ее каркасом – системой горизонталей или профилей или тех и других.

На рис. 16.35 изображен участок топографической поверхности. Он задан горизонталями с их отметками.

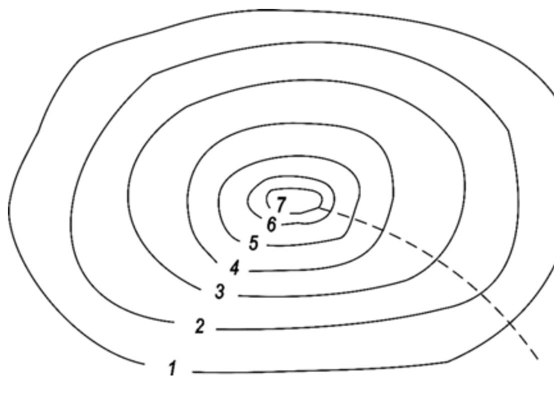


Рис. 16.35

По возрастанию горизонталей (левая часть чертежа) можно судить о том, что изображено возвышение (холм) – неровность земли выше окружающей местности. В правой части чертежа проставлены ***бергштрихи***, указывающие, в каком направлении происходит понижение поверхности. Подробно неровности местности классифицируются в курсе геодезии, изучаемом на строительных специальностях вузов.

Точка и линия на топографической поверхности

Всякая линия, проведенная на топографической поверхности, градуирована точками ее пересечения с соответствующими горизонталями поверхности. Отметка точки (A), расположенной между горизонталями, может быть определена приближенно.

Проведем через точку A прямую, пересекающуюся в произвольных точках B и C с ближайшими горизонталями поверхности. Построим фронтальную проекцию отрезка BC. Для этого нужно провести через точку произвольную линию, принадлежащую поверхности (BC), построить ее развертку или фронтальную проекцию на произвольно выбранной плоскости и определить отметку лежащей на ней искомой точки. Для этого построим прямоугольный треугольник CBB_2, катет BB_2 которого равен 1 м в масштабе чертежа (рис. 16.36). Точка A делит отрезок BC на части, пропорциональные превышениям. Измерив (с учетом принятого масштаба) отрезок AA_2, установим отметку точки A – она равна 14,53 м.

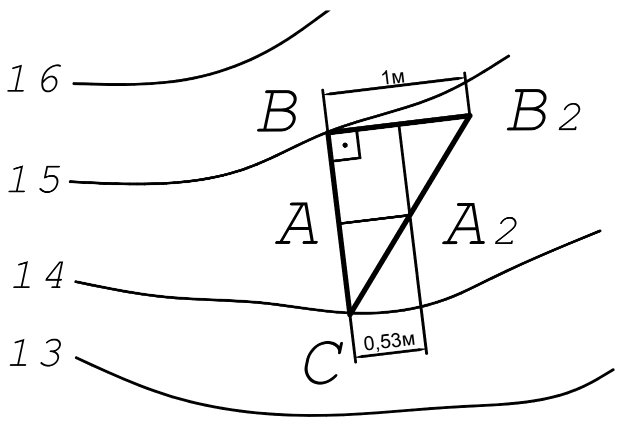


Рис. 16.36

Сечение поверхности проецирующей плоскостью

Фигура, полученная в результате сечения вертикальной (следовательно, проецирующей) плоскостью, называется ***профилем***. Когда поверхность задана горизонталями, способ построения профиля одинаков независимо от характера поверхности. Рассмотрим пример (рис. 16.37).

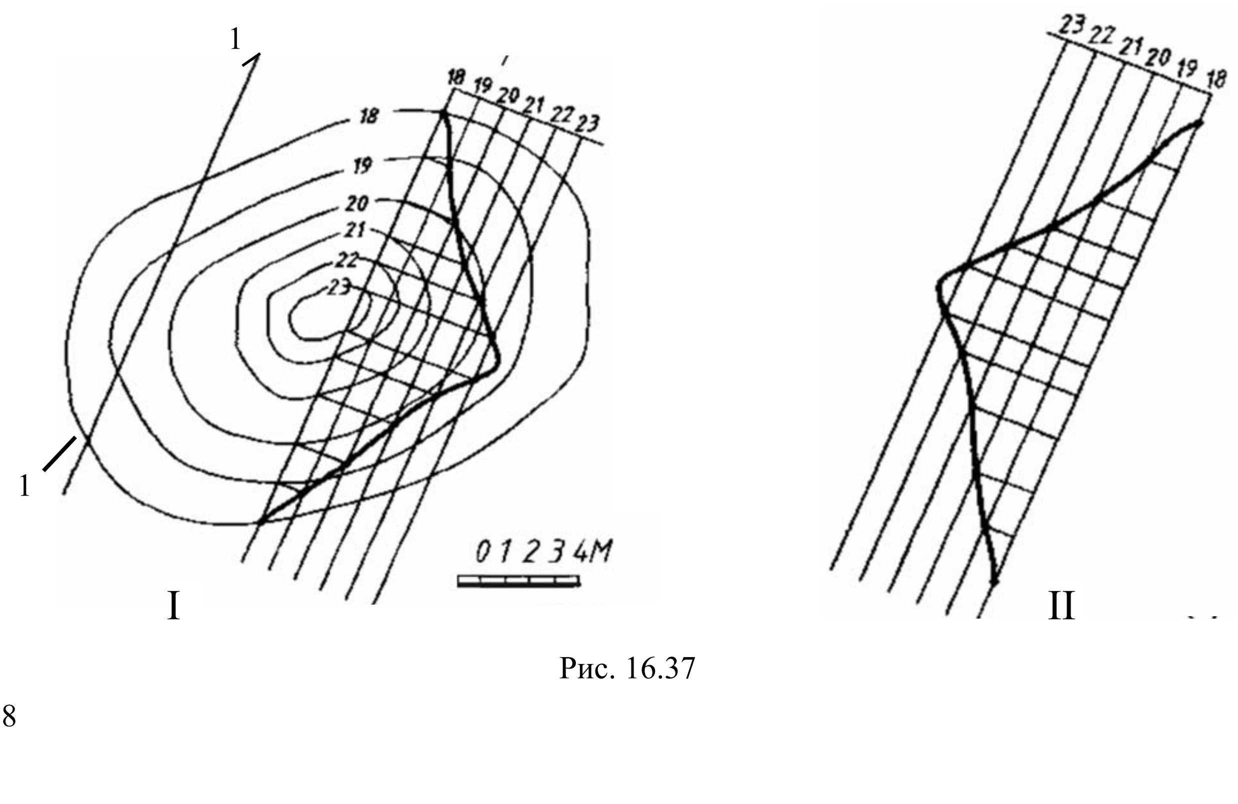


Рис. 16.37

Задана секущая плоскость (линия 1–1). Отметим точки, в которых плоскость пересекается с горизонталями поверхности, затем из этих точек проведем перпендикуляры к линии 1–1, на которых в масштабе чертежа отложим превышения над выбранной линией уровня – базой профиля. Эта линия представляет собой границу профиля (горизонталь 18). Построенные точки соединим плавной кривой, которая является фронтальной проекцией линии пересечения плоскости с топографической поверхностью – профилем поверхности. На профиль наносится сетка горизонталей. База может совпадать с проекцией секущей плоскости (наложенный профиль I) или изображаться на свободном поле чертежа (вынесенный профиль II).

Пересечение прямой линии с поверхностью рельефа

Чтобы построить точку пересечения прямой *a* (9,3) с заданной поверхностью, заключим данную прямую в плоскость общего положения (рис. 16.38). Для этого градуируем прямую и через точки 8, 7... проводим в произвольном направлении параллельные горизонтали, которыми и задаем плоскость так, чтобы они в пределах чертежа пересекали горизонтали топографической поверхности с одинаковыми отметками. Отметив точки пересечения однозначных горизонталей плоскости и поверхности, соединим их плавной кривой, являющейся проекцией линии их пересечения. В месте, где эта кривая встречается с заданной прямой, расположена искомая точка *K*. Определение видимости производится путем рассмотрения конкурирующих точек *A* и *B*.

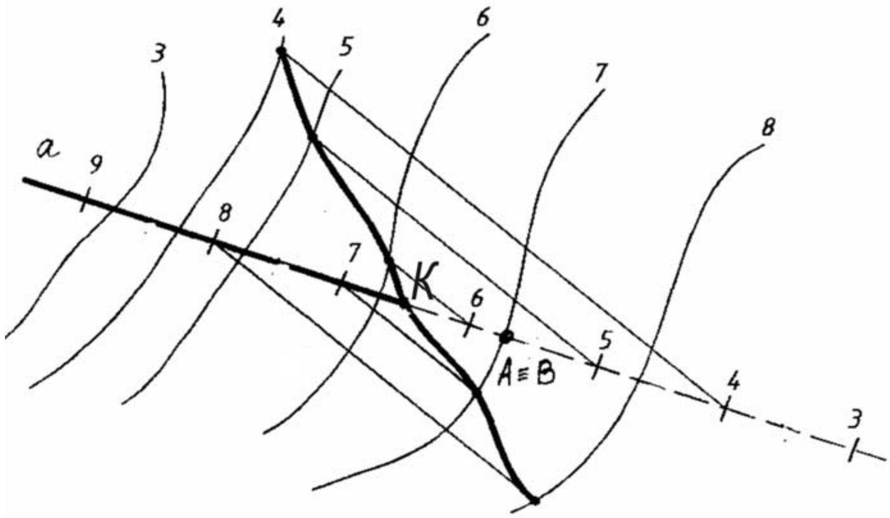


Рис. 16.38

Построение плоскости и поверхности по заданному уклону. Пересечение откосов сооружений

При решении ряда практических задач важно определить направление горизонталей откосов площадок. *Если исходные линии горизонтальные*, то для построения плоскостей скатов надо построить линии наклона каждой поверхности, их проградуировать и вычертить горизонтали. Пересечение однозначных горизонталей будет давать точки, определяющие линии пересечения двух плоскостей.

Направление стрелки указывает направление падения, которое обратно пропорционально интервалу.

Задание (рис. 16.39).

Решение.

1. Строим график масштаба уклонов (рис. 16.40).

2. Строим линии ската, градуируем их и перпендикулярно им проводим горизонтали.

3. По точкам пересечения горизонталей с одинаковыми отметками строим линии пересечения откосов (рис. 16.41).

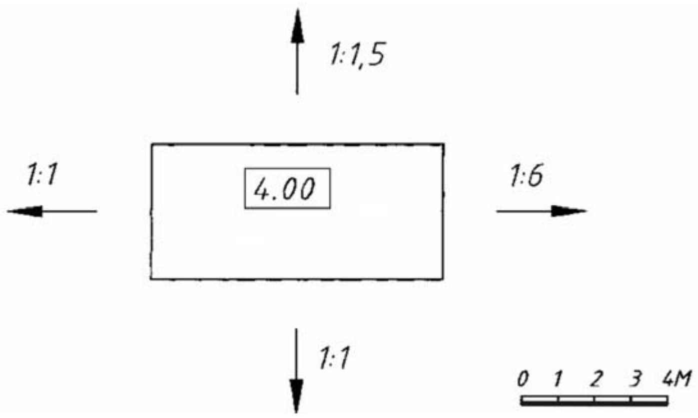


Рис. 16.39

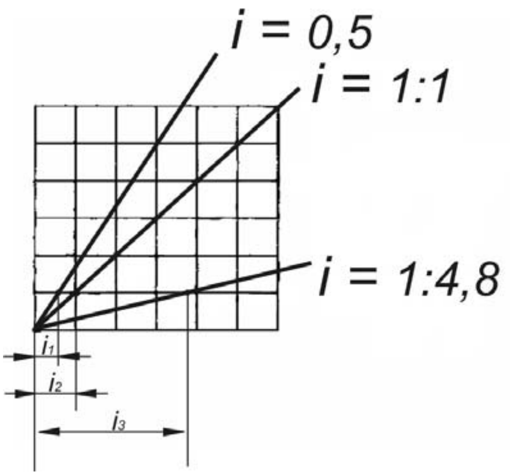


Рис. 16.40

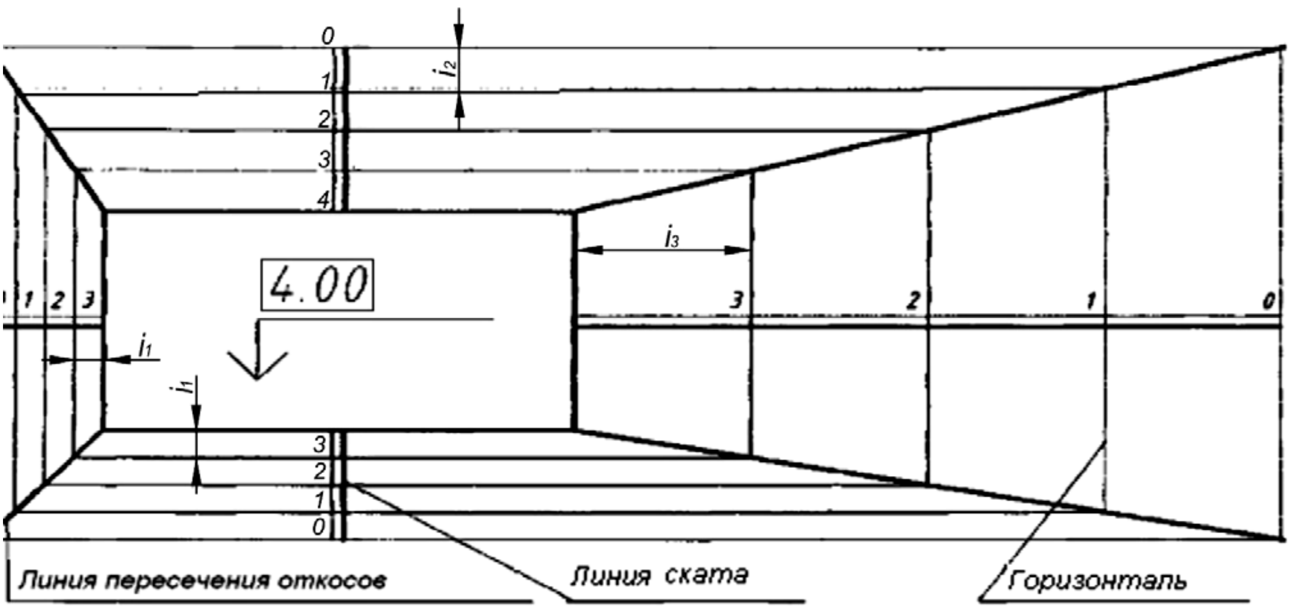


Рис. 16.41

Если исходная линия будет окружность, то скат имеет форму конической поверхности и линии уклона расположатся по направлению радиусов.

Линии пересечения конической поверхности с плоскостью будут:

$\alpha = \beta$ – парабола;

$\alpha < \beta$ – эллипс;

$\alpha > \beta$ – гипербола (рис. 16.42).

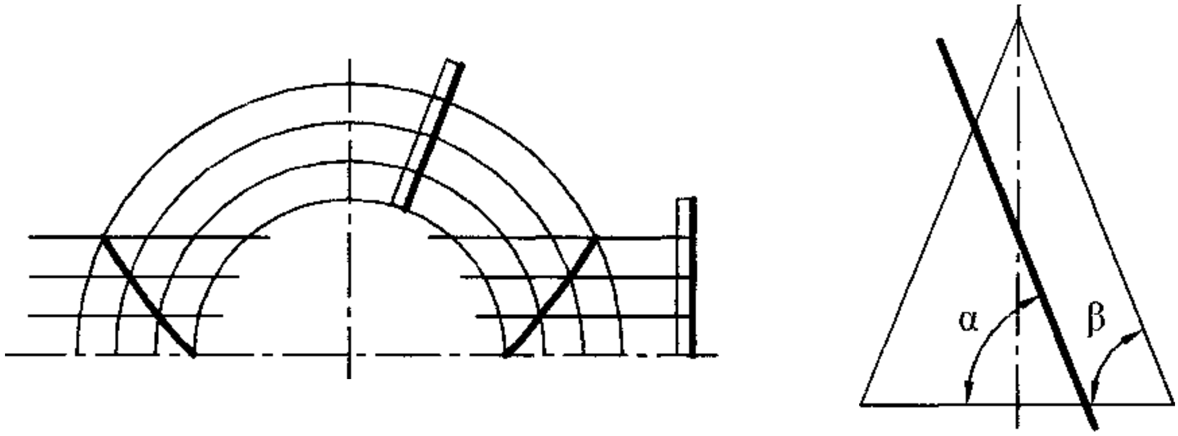


Рис. 16.42

Исходная линия – наклонная прямая.

Плоскость ската строится таким образом (рис. 16.43):

– данная наклонная прямая градуируется, и при какой-то точке вычерчивается окружность $R = i$ (интервалу); из точки исходной прямой с соответствующей отметкой проводится прямая, касательная к окружности основания этого конуса, который и определяет направление горизонта;

– за вершину вспомогательного конуса надо брать точку: при срезке с меньшей отметкой, при подсыпке – с большей.

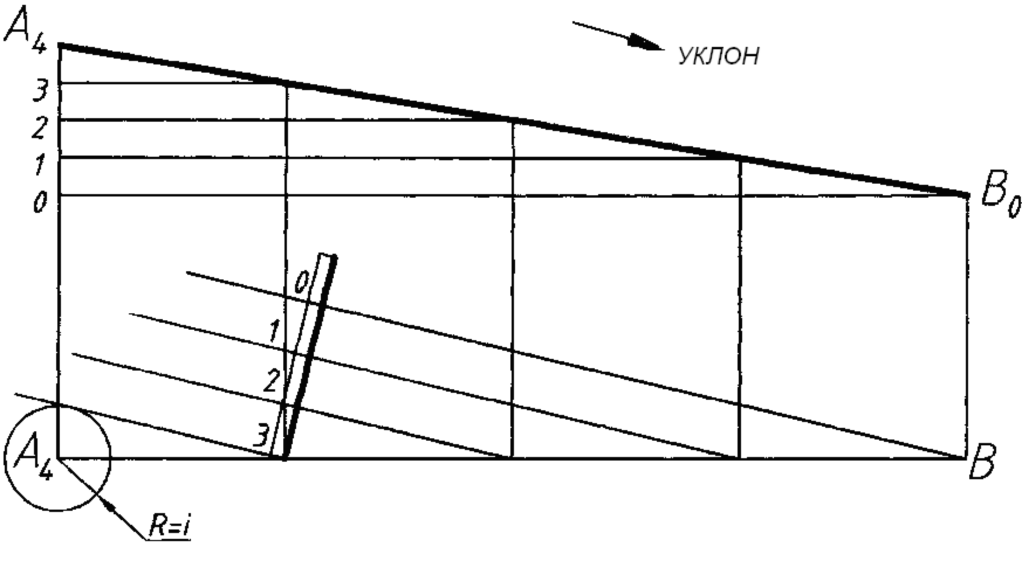


Рис. 16.43

Решение практических задач

Задача № 1. $L = \alpha_i \cap \Delta ABC$.

Видимость.

Пусть точке $D \in \Delta ABC$, тогда ее отметка равна 6.

Точка $E \in \alpha_i$ имеет отметку, равную 4. Точка D расположена выше точки $E \rightarrow$ плоскость ΔABC в месте точек D и E окажется видимой (рис. 16.44).

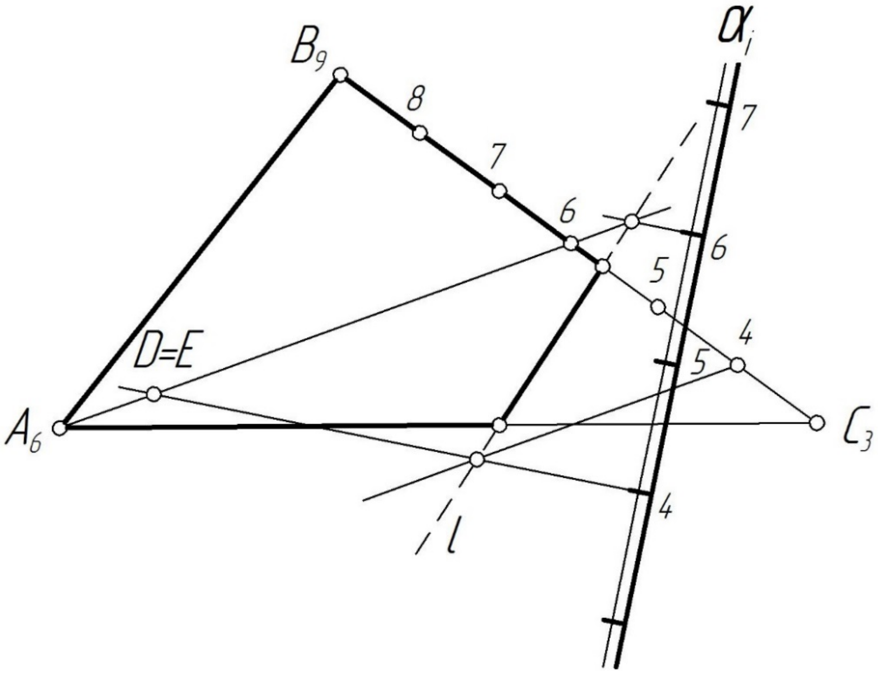


Рис. 16.44

Задача № 2. Построение линии пересечения плоскости с топографической поверхностью производят так же, как и пересечение плоскостей, т. е. строят пересечение горизонталей, имеющих одинаковые отметки. Но если при пересечении плоскостей достаточно найти две точки, принадлежащие линии пересечения, то при пересечении плоскости с топографической поверхностью необходимо найти пересечение всех горизонталей, так как в пересечении получится кривая линия. Иногда есть необходимость проводить промежуточные горизонтали для уточнения направления линии пересечения (рис. 16.45).

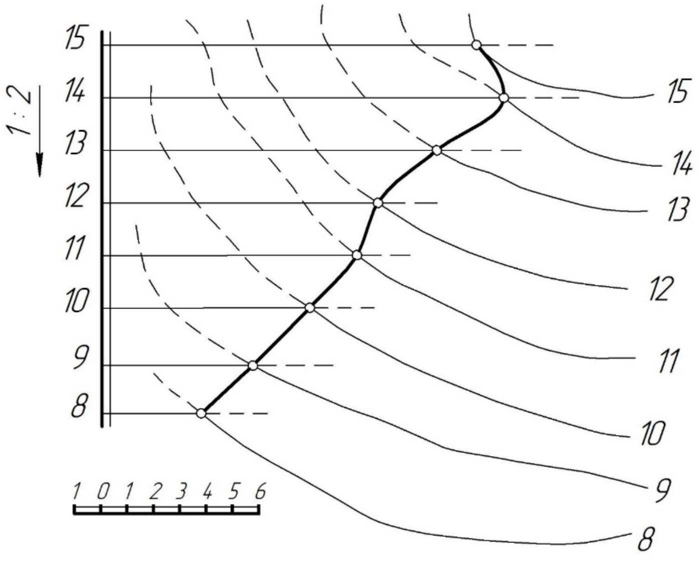


Рис. 16.45

Задача № 3. Дана прямая *a* (9,3). Построить точку *K* пересечения прямой *a* с заданной поверхностью.

1. Заключаем прямую *a* в плоскость общего положения. Для этого градуируем прямую через точки 8, 7, 6, 5, 4, проводим в произвольном направлении параллельные горизонтали, которыми и задаем плоскость.

2. Отмечаем точки пересечения однозначных горизонталей плоскости и поверхности.

3. Соединяем полученные точки плавной кривой, являющейся проекцией их линии пересечения.

4. На пересечении кривой с заданной прямой *a* и будет искомая точка.

5. Видимость определяется по конкурирующим точкам *A* и *B* (рис. 16.46).

$A \in a$ имеет отметки 5,3.

$B \in \alpha$ имеет отметку 7.

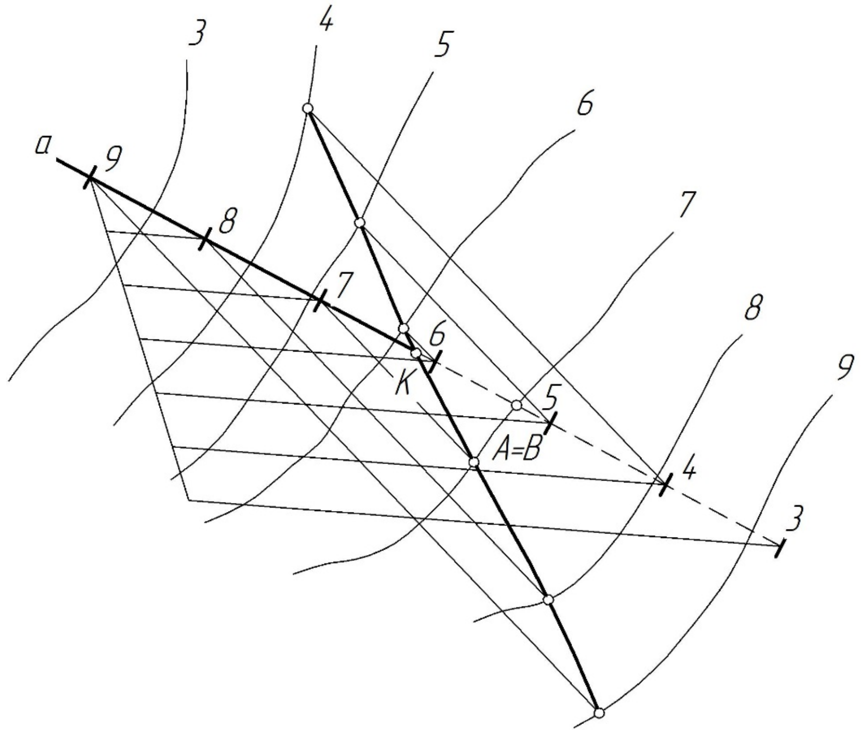


Рис. 16.46

Задача № 4. Построить линию сечения топографической поверхности проецирующей плоскостью.

Это сечение называется профилем поверхности. Секущая плоскость задана своей горизонтальной проекцией γ.

1. Отмечаем точки пересечения γ с горизонталями и строим профиль поверхности.

2. Выбираем базовую горизонталь (соответствует или ниже min отметки).

3. Проводим перпендикулярно следу плоскости линии связи.

4. Откладываем на них отметки соответствующих горизонталей.

5. Соединяем полученные точки кривой.

1. *Наложенный профиль* (рис. 16.47).

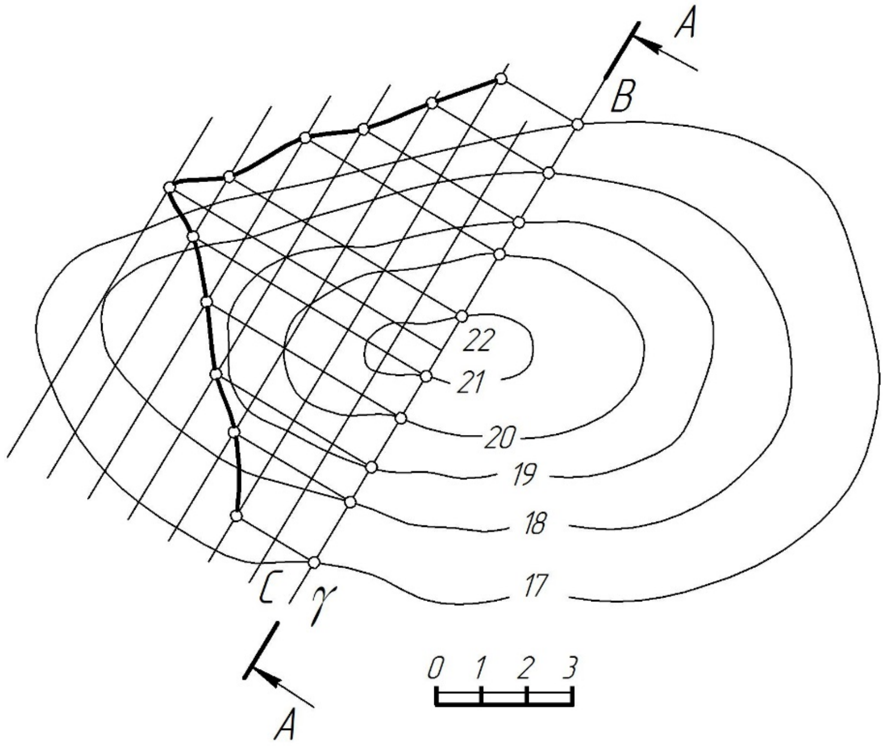


Рис. 16.47

2. *Вынесенный профиль* (рис. 16.48).

Выполняется в произвольном месте чертежа с произвольной ориентацией относительно секущей плоскости γ.

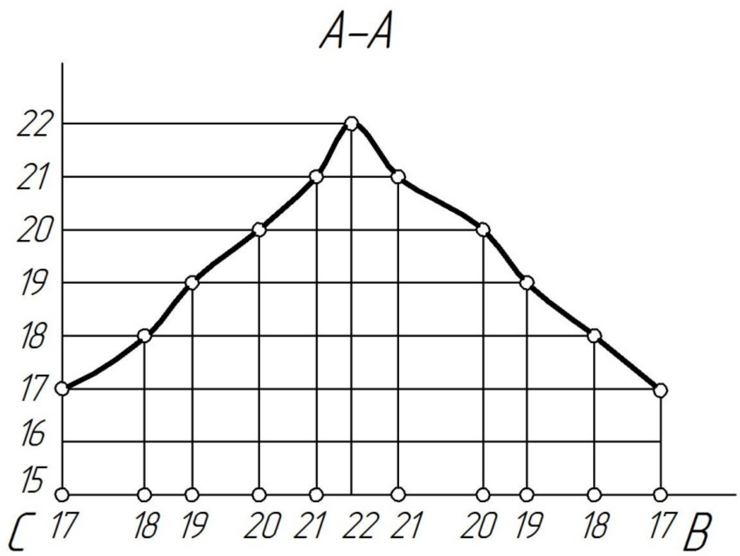


Рис. 16.48

16.6. Перспектива

Перспектива – способ изображения, основанный на применении центрального проецирования.

Изображение предмета при помощи этого способа отличается хорошей наглядностью. Перспектива передает кажущиеся изменения величины и формы предмета, вызванные его расположением и удаленностью от наблюдателя. Объясняется это особенностью зрительного восприятия, процесс которого тождественен с методом центрального проецирования.

Для построения перспективы предмета из некоторой точки S (точки зрения) проводят лучи ко всем точкам изображаемого предмета. На пути проецирующих лучей располагают поверхность π' (картину), на которой строят изображение по точкам пересечения лучей с поверхностью картины (рис. 16.49).

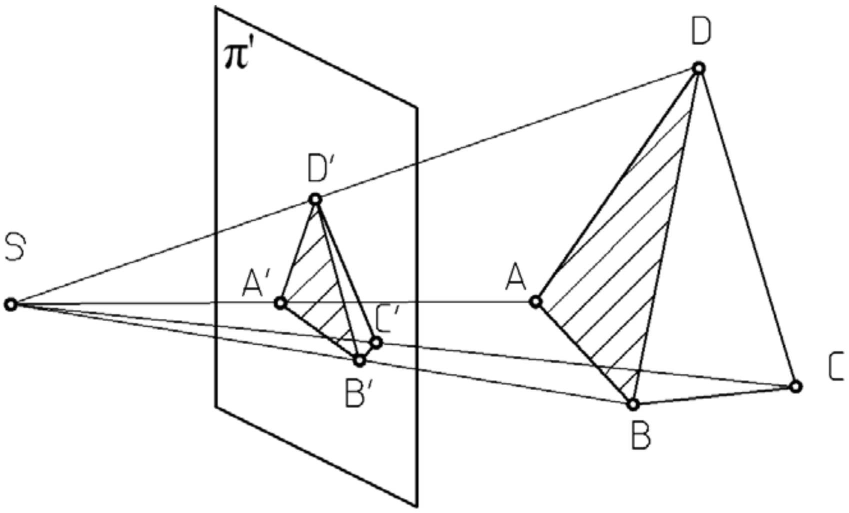


Рис. 16.49

В зависимости от вида поверхности, на которой строится перспектива, различают:

1) линейную (изображение на вертикальной плоскости);
2) панорамную (на внутренней поверхности цилиндра);
3) купольную (на сфере);
4) плафонную (на горизонтальной плоскости);
5) театральную (на нескольких плоскостях).

Рассмотрим только линейную перспективу, которая широко применяется в архитектуре.

Аппарат линейной перспективы

Рассмотрим четыре плоскости π, π_1, N, Γ (рис. 16.50).

π' – вертикальная плоскость картины, на которой строят перспективу;

π_1 – предметная плоскость, на ней располагается предмет $\pi' \perp \pi_1$;

O^1O^2 – основание картины; $O^1O^2 = \pi' \cap \pi_1$;

Г – плоскость горизонта;

N – нейтральная плоскость;

S – центр проекций (точка зрения);

S_1 – точка стояния, основание перпендикуляра, опущенного из точки S на предметную плоскость $SS_1 \perp \pi_1$.

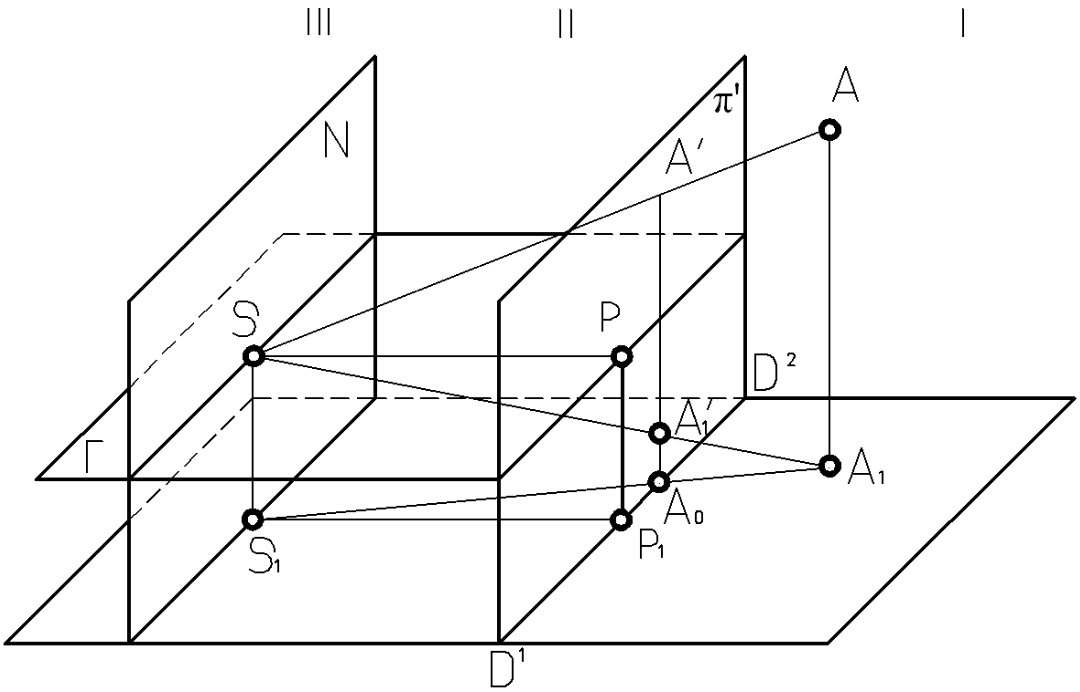


Рис. 16.50

Плоскости Г и N проходят через точку зрения S соответственно параллельно π_1 и π'.

h – линия горизонта, $h = \Gamma \cap \pi'$;

$SP \perp \pi'$ – главный луч картины;

P – главная точка картины, $P = SP \cap \pi'$;

PP_1 – главная линия картины.

Плоскости π' и N делят все пространство на три части:

I – предметное пространство;

II – промежуточное;

III – мнимое.

Перспектива точки

Как известно, одна центральная проекция точки не определяет ее положения в пространстве, так как каждой проекции точки A' соответствует любая точка проецирующего луча SA.

Для обеспечения однозначности между точками предмета и их проекциями на картинной плоскости поступают следующим образом.

Заданную точку A ортогонально проецируют на горизонтальную плоскость π_1, перпендикулярную картине π', а затем определяют перспективные проекции как точки A, так и ее горизонтальной проекции A_1.

A' – перспективная проекция точки A, $A' = SA \cap \pi'$;

A'_1 – перспектива горизонтальной проекции точки A (вторичная проекция), $A'_1 = SA_1 \cap \pi'$.

На плоскости π перспектива точки и ее вторичная проекция лежат на одной вертикальной прямой.

Перспектива точки и ее вторичная проекция однозначно определяют положение точки в пространстве (см. рис. 16.50).

Перспектива строится на картинной плоскости, которую совмещают с плоскостью чертежа (рис. 16.51).

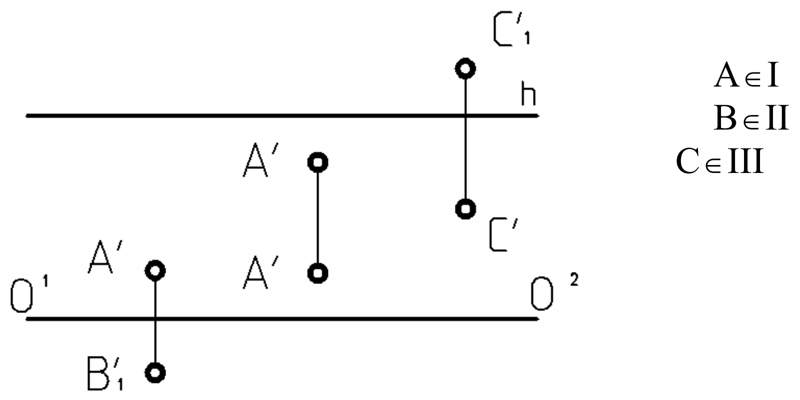


Рис. 16.51

Перспектива прямой линии

Проецирующие лучи, проходящие через точку S и некоторую прямую AB, образуют лучевую плоскость. Линия пересечения этой плоскости с картиной ($A'B'$) является перспективой заданной прямой (рис. 16.52). Если прямая проходит через точку зрения S, ее перспектива вырождается в точку.

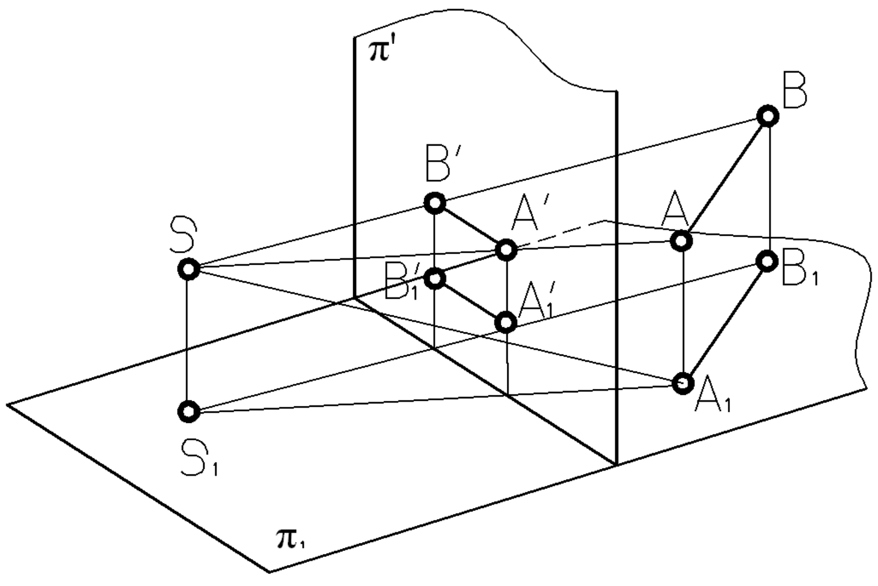


Рис. 16.52

Чтобы построить перспективу прямой (a), обычно определяют две характерные точки прямой:

– N' – начало прямой – точка пересечения прямой с картиной, вторичная ее проекция находится на основании картины;

– F' – точка схода прямой – перспектива бесконечно удаленной (несобственной) точки, вторичная проекция (F'_1) лежит на линии горизонта. Для построения точки схода прямой надо через точку зрения провести линию, параллельную прямой, до пересечения с картиной (рис. 16.53).

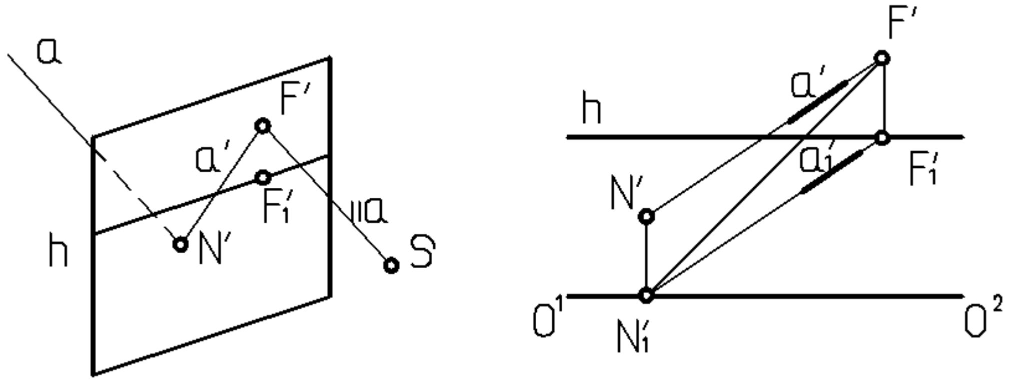


Рис. 16.53

Взаимное положение прямых. Параллельные прямые

Если прямые (a, b) параллельны в пространстве и не параллельны картине, то в перспективе они пересекаются. Точка пересечения связки параллельных прямых называется *точкой схода.*

Для построения перспектив прямых a и b (рис. 16.54) продолжим их до пересечения с картиной, точки N' и M' – начала прямых. Вторую точку F' находим, проведя из точки зрения S луч, параллельно данным прямым до пересечения с π'.

Перспектива и вторичные проекции параллельных прямых изображены на рис. 16.55.

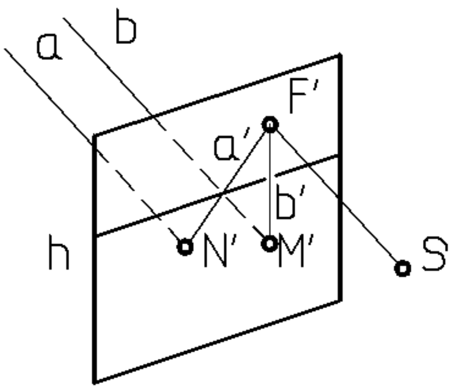


Рис. 16.54

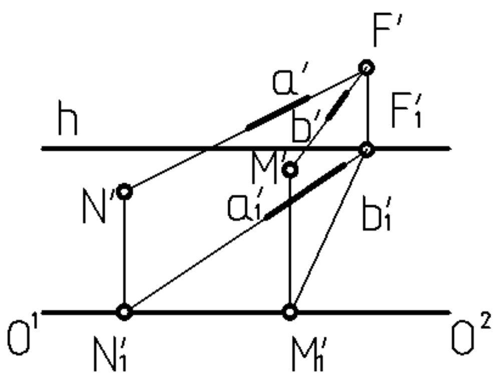


Рис. 16.55

1. Если параллельные прямые горизонтальные, их точка схода находится на линии горизонта (рис. 16.56).

2. Если горизонтальные прямые перпендикулярны к картине, то точкой их схода будет главная точка картины *P*.

3. Перспектива вертикального отрезка – вертикальный отрезок, а его вторичная проекция – точка (рис. 16.57).

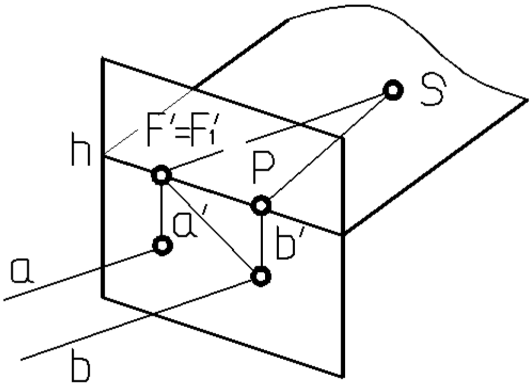


Рис. 16.56

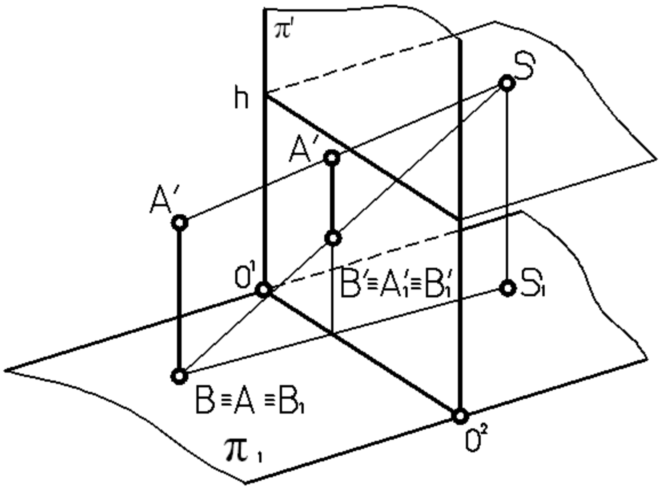


Рис. 16.57

Пересекающиеся и скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются, то точки пересечения их перспектив и вторичных проекций на картине должные лежать на общем перпендикуляре к линии горизонта (рис. 16.58).

Точке пересечения перспектив скрещивающихся прямых соответствуют две различные точки 1 и 2 (рис. 16.59).

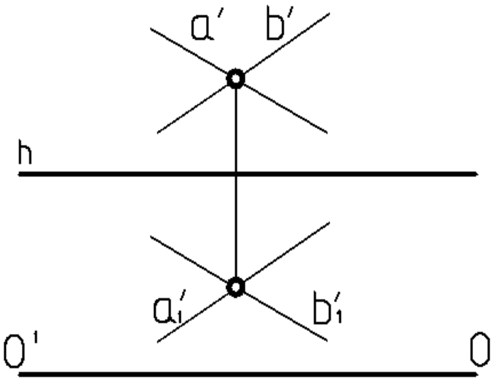


Рис. 16.58

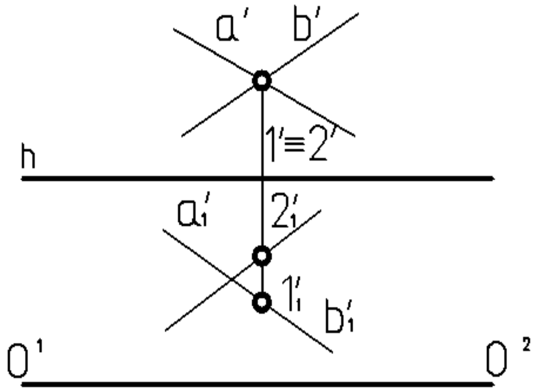


Рис. 16.59

Выбор точки зрения, угла зрения, ориентировка картинной плоскости

Построение перспективы предмета ведется с использованием ортогонального чертежа. Для обеспечения удачного перспективного изображения рекомендуются правила, выработанные практикой.

1. *Угол зрения* φ – угол между проецирующими лучами, направленными в крайние точки плана предмета, следует выбирать в пределах 20–60°, оптимальное значении 28°.

2. *Выбор точки зрения S* включает: *положение главного луча*, при симметричной композиции луч рекомендуется проводить примерно через середину; *расстояние точки зрения* от объекта принимается таким, чтобы он целиком размещался в конусе зрения с углом при вершине до 40° и осью, примерно совмещающейся с главным лучом; на практике точку зрения *S* берут на расстоянии 1,5–2 высоты предмета.

3. *Картинную плоскость* ориентируют так, чтобы:

а) угол наклона картины к фасаду объекта был в пределах 25–3° (рис. 16.60);

б) целесообразно картину провести через одно из ребер предмета, которое на перспективе изобразится в натуральную величину;

в) главный луч картины $SP \perp \pi'$ должен находиться в пределах средней трети угла зрения φ (рис. 16.61).

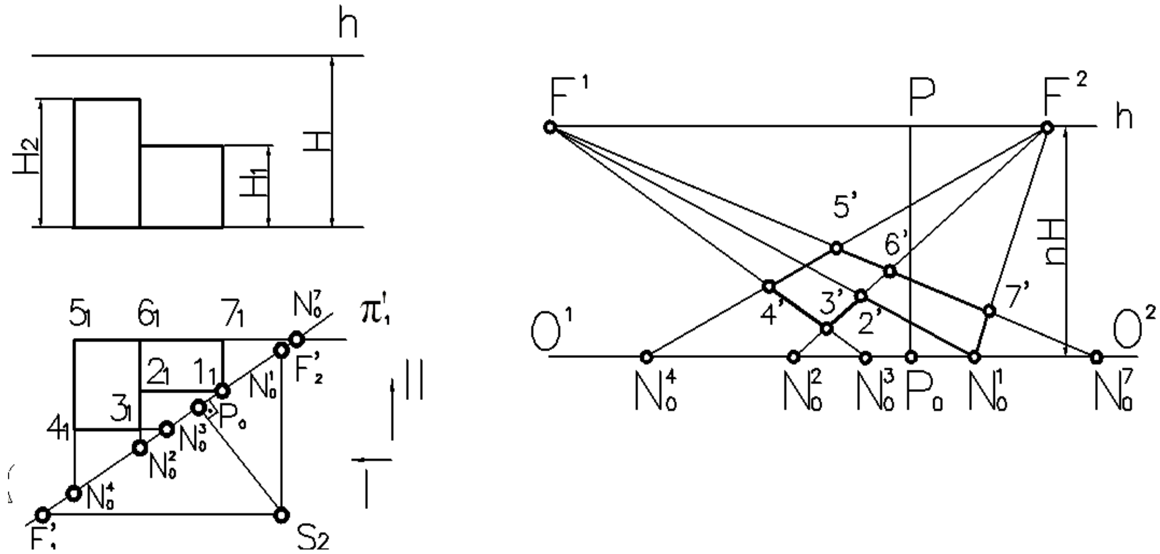


Рис. 16.60

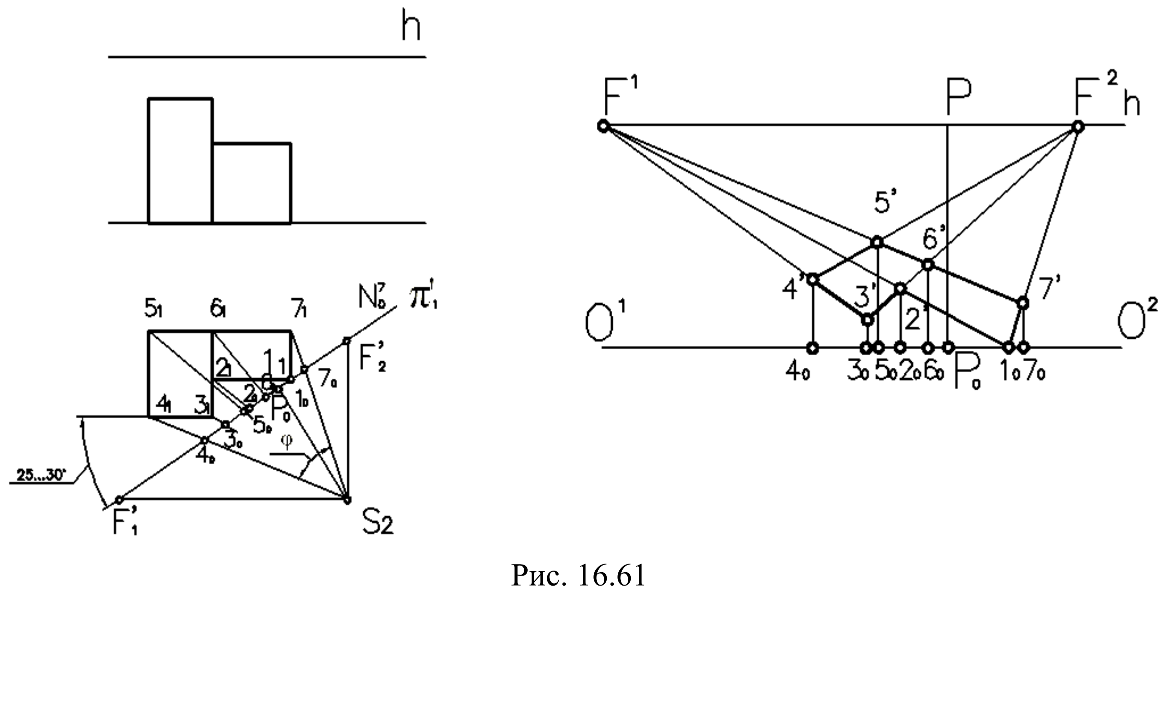


Рис. 16.61

4. *Высоту горизонта* обычно принимают:

а) на уровне глаз человека, стоящего на земле, т. е. 1,5–1,7 м;

б) на уровне 1/3 здания;

в) 100 м и выше при изображении района застройки (перспектива «с птичьего полета»).

Построение перспективы методом архитекторов

Метод получил наибольшее распространение благодаря простоте и удобству. Его отличительные особенности:

– используется одна или две точки схода параллельных прямых;

– положение вертикалей определяется пересечением с основанием картины проецирующих лучей, проходящих через основание точки зрения $\boldsymbol{S_1}$;

– вертикальные отрезки строятся (с использованием точек схода) путем перемещения их в плане до совмещения с картиной и обратным действием на изображение.

Порядок построения перспективы

1. Вся подготовительная работа проводится с использованием ортогональных проекций.

а) Проводим на эпюре горизонтальный след картинной плоскости (основание картины) и выбираем положение точки, главного луча и линии горизонта.

б) Находим точки схода F^1 и F^2, проводя из точки зрения S прямые, параллельные доминирующему направлению линий на плане здания (направления I и II).

в) На месте построения перспективы проводим две горизонтальные прямые – основание картины O^1O^2 и линию горизонта h. Обычно построение перспективы проводится с увеличением всех линейных размеров на картине в n раз. Так, расстояние H на перспективе равно nH, отрезки PF^1 и PF^2 в n раз больше тех же отрезков на эпюре.

2. Построение перспективы плана, т. е. фигуры, лежащей в предметной плоскости.

а) В качестве вторых точек для построения перспективы каждой из прямых контура рекомендуется использовать характерные точки, в которых эти прямые пересекают плоскость картины – начальные точки прямых (N_0). Переносим эти точки эпюра на картину.

б) Строим перспективы прямых, пересечение которых определит вершины заданного контура. Так, точка пересечения перспектив прямых $N_0^3F^1$ и $N_0^2\,F^2$ – точка перспективы 3. Аналогично найдены и остальные точки (см. рис. 16.51).

В качестве второй точки для построения перспективы не обязательно брать их начала.

На основании картины O^1O^2 определяют положение перспективы точки 1, через которую проходит картинная плоскость. Для этого от основания главной точки картины P_0 отложен отрезок P_01_0, соответствующий отрезку P_01_0 на эпюре.

Так как через точку 1 проходят две линии различных направлений (I, II), то ее перспективу соединяют с точками F^1 и F^2.

Следующая точка 2 расположена на прямой 1–F^1 направления I, перспектива которой уже построена; для определения перспективы точки 2 в нее на эпюре проводят луч из точки зрения и отмечают точку пересечения его с картиной – точку 2_0, этой точке будет соответствовать также обозначенная точка на основании картины в перспективе.

Через точку 2_0 проводим вертикальную прямую до пересечения с ранее построенной прямой 1'–F', определяем положение перспективы точки 2 – точку 2'.

Также получают перспективы остальных точек (рис. 16.61).

Этим путем целесообразно строить перспективу в случае, когда точки пересечения некоторых прямых с картиной оказываются за пределами чертежа.

3. Закончив построение вторичной проекции, переходим к построению перспективы предмета.

а) Через все вершины вторичной проекции (точки $1'_1$, $2'_1$, и т. д.) проводим вертикальные прямые.

б) От точки $1'_1$ на вертикали отложим отрезок $1'_1A'_1$ длиной nH_1, так как отрезок находится в плоскости картины, а масштаб увеличения принят n:1.

в) Через точку A'_1 проводим прямую в точку схода F^1 и с помощью вертикальной линии связи 2'–M' находим точку M'.

г) Для того, чтобы получить перспективы вертикального ребра, проходящего через точку 4, перемещаем его до совмещения с картиной для определения высоты nH_2. Обратным действием определяем перспективу точки (E'). Используя попеременно то одну, то другую точку схода, строим остальные точки изображения. Обводим изображение с учетом видимости (рис. 16.63).

Построение перспективы с использованием только одной из точек схода (например, F^2) применяется в тех случаях, когда размеры чертежа не позволяют показать вторую точку (рис. 16.62).

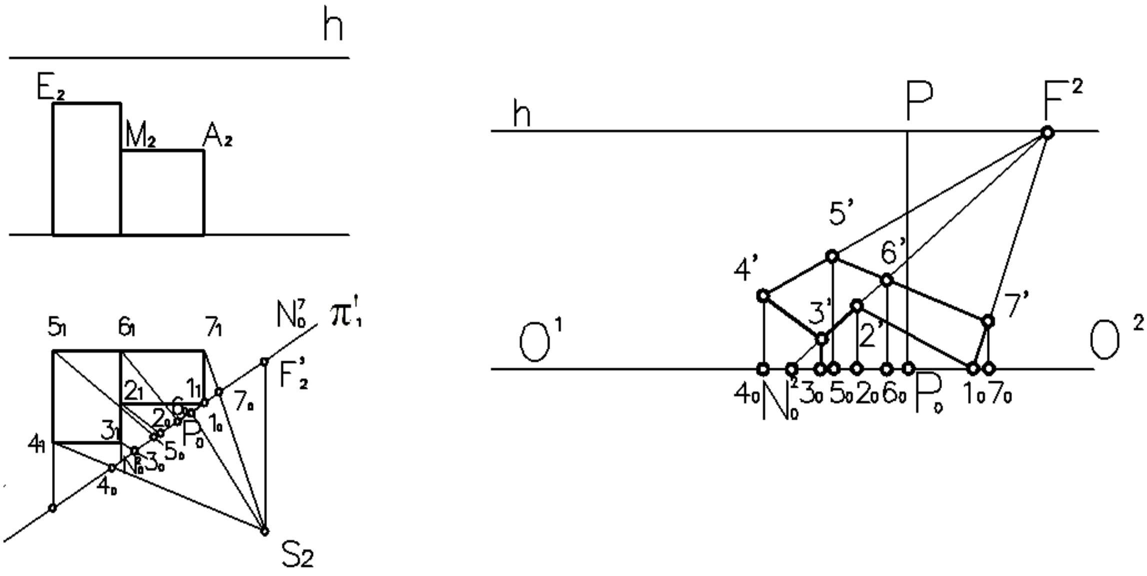


Рис. 16.62

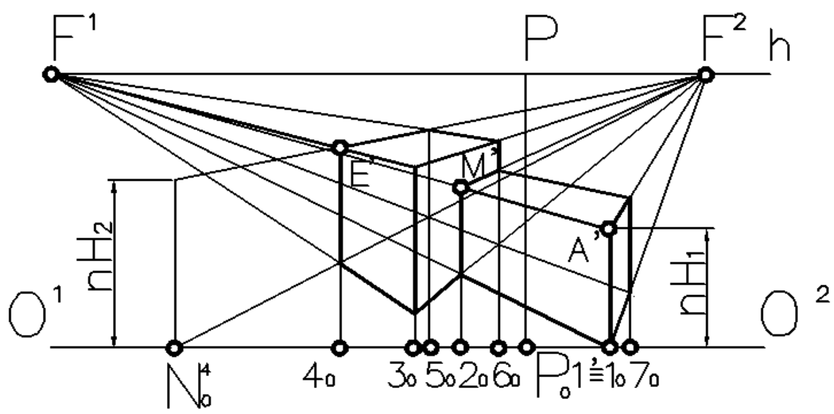


Рис. 16.63

17. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК

Разверткой поверхности называется плоская фигура, получаемая при совмещении поверхностей с плоскостью.

К группе развертывающихся относятся только линейчатые поверхности (гранные, цилиндрические, конические, торсы).

Поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью, относятся к неразвертываемым. Для построения разверток таких поверхностей их разбивают на части, которые можно приближенно заменить развертывающимися поверхностями. Построив развертки этих частей, получают приближенную развертку неразвертываемой поверхности.

17.1. Основные свойства разверток

Перечень основных свойств разверток:

– каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке;

– длины линий поверхности, величины плоских углов и площадей, ограниченных замкнутыми линиями, остаются неизменны;

– прямой линии на поверхности соответствует прямая на развертке (обратное утверждение неверно).

Эта прямая линия называется *геодезической*, она соединяет кратчайшим путем две точки на поверхности.

Применение простых способов разверток имеет большое практическое значение, так как приводит к экономии материалов и уменьшению затрат.

17.2. Развертка многогранников

Развертка многогранной поверхности – плоская фигура, получаемая последовательным совмещением всех граней поверхности с одной плоскостью.

Существует три способа построения развертки многогранников:

1) способ нормального сечения;

2) способ раскатки;

3) способ треугольников (триангуляции).

Первые два способа применяют для построения разверток призматических поверхностей, третий – для пирамидальных.

Способ нормального сечения

В общем случае развертку призмы выполняют следующим образом (рис. 17.1):

– преобразуют эпюру так, чтобы боковые ребра призмы были параллельны какой-либо плоскости проекций, тогда на эту плоскость ребра спроецируются в натуральную величину;

– пересекают призму плоскостью γ, перпендикулярной ее боковым ребрам и строят сечение призмы этой плоскостью $\Delta 123$;

– определяют натуральную величину сечения $\Delta 1_o 2_o 3_o$;

– строят отрезок 1_o–1_o, равный периметру нормального сечения;

– через точки 1_o, 2_o, 3_o, 1_o проводят прямые, перпендикулярные этому отрезку, на которых откладывают соответствующие отрезки боковых ребер призмы;

– соединив концы отложенных отрезков, последовательно получают развертку боковой поверхности призмы.

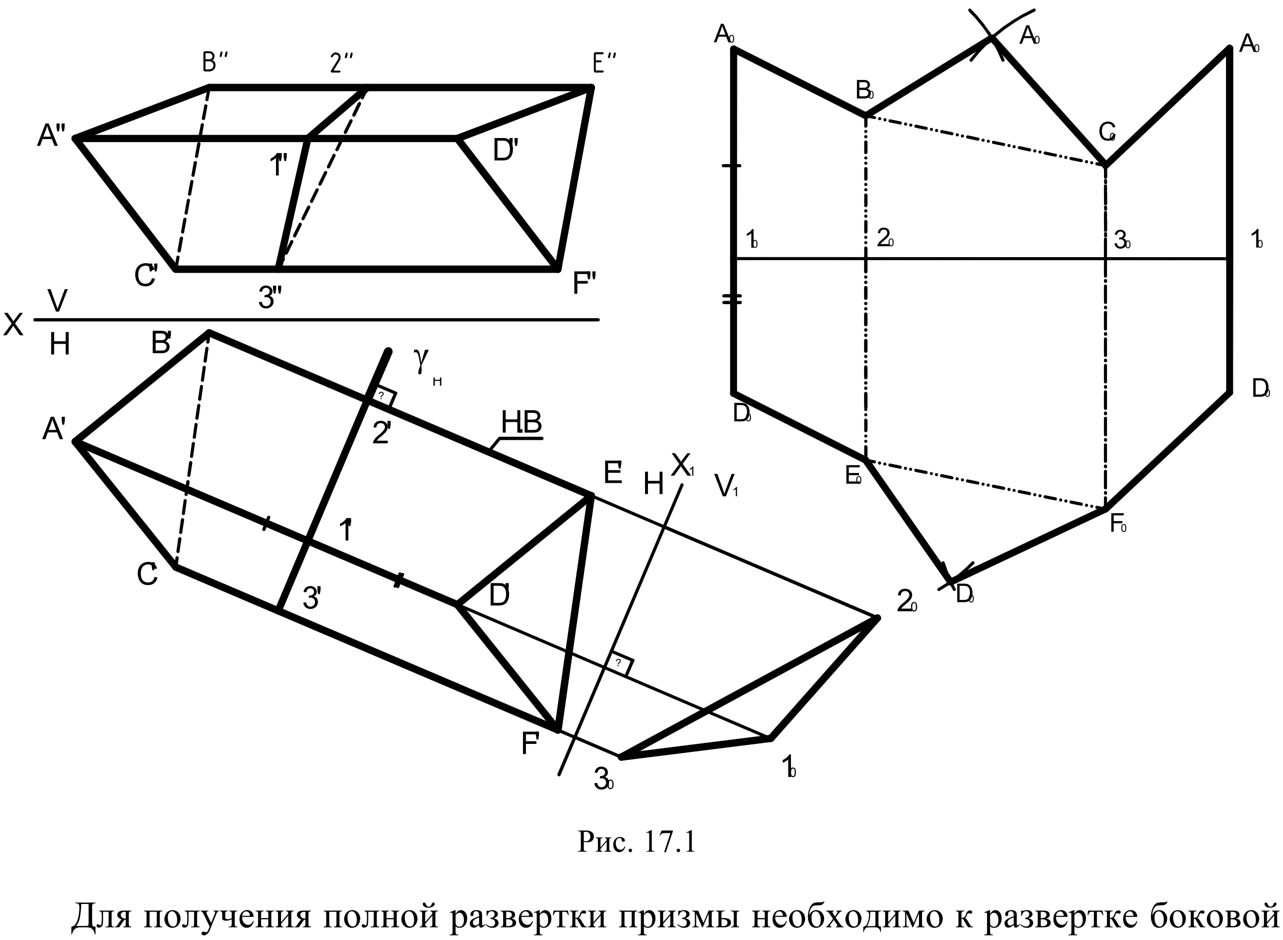


Рис. 17.1

Для получения полной развертки призмы необходимо к развертке боковой поверхности достроить основания призмы, предварительно определив их истинную величину.

Способ раскатки

В частном случае, когда основание призмы параллельно какой-либо плоскости проекций, а ее ребра параллельны другой плоскости проекций, для построения развертки целесообразно применять метод раскатки.

Построения выполняются в следующем порядке (рис. 17.2):

– за плоскость развертки принимают плоскость γ, проведенную через ребро призмы *AD* и параллельную фронтальной плоскости проекций;

– совмещают с этой плоскостью грань *ABED*, вращая ее вокруг фронтали *AD*; при вращении точки *B* и *E* будут перемещаться в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, – ребру *AD*;

– после совмещения с плоскостью γ все стороны грани *ABED* спроецируются на плоскость *V* без искажений, а вершины *BE* окажутся удаленными от неподвижных точек *A* и *D* на оси вращения на расстояние, равное истинной длине *AB* и *DE* (отрезки *AB* и *DE* проецируются в истинную величину на плоскость *H*);

– засекая перпендикуляры, по которым перемещаются точки *AE* дугами радиусов L_{AB} и L_{DE}, получаем искомые точки развертки B_oE_o;

– аналогично вращают следующую грань *BCFE* вокруг ребра *BE* и грань *CADF* вокруг ребра *CF*.

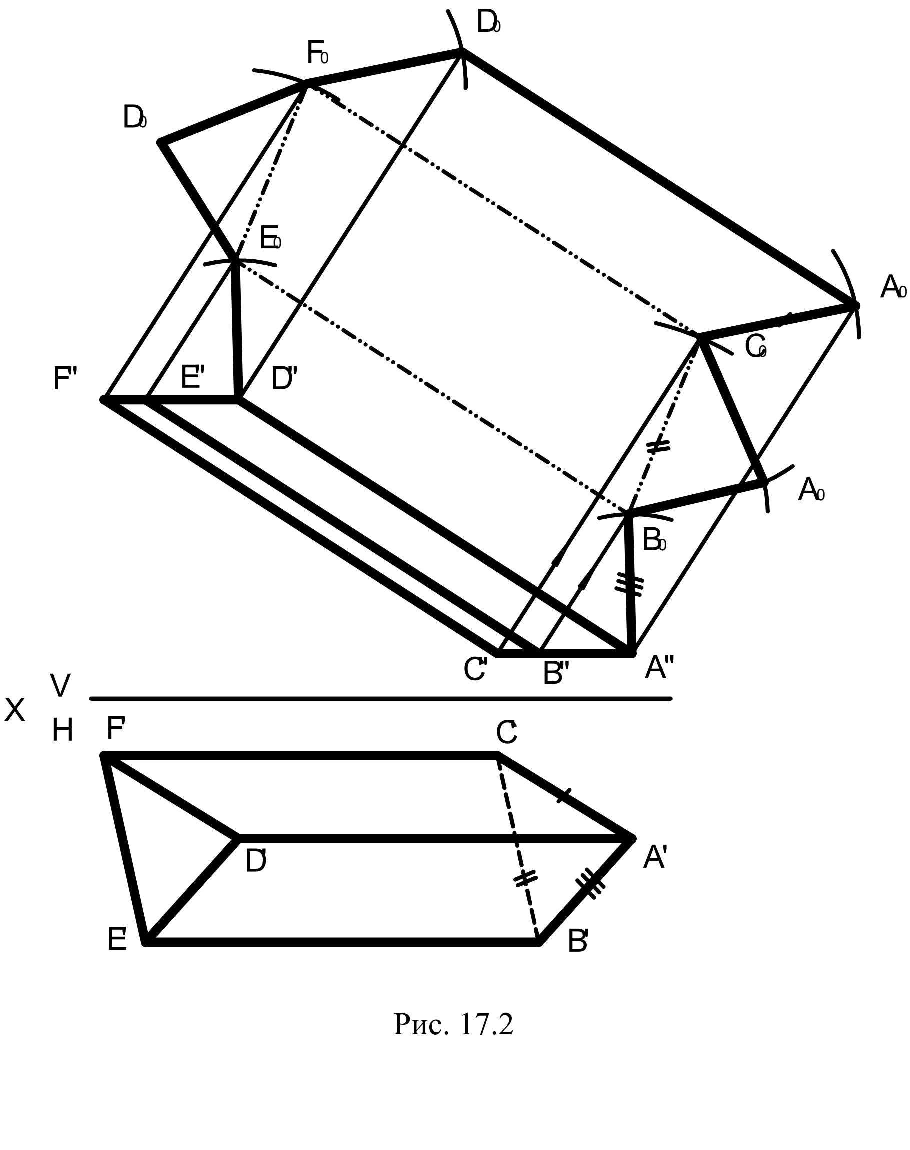


Рис. 17.2

Соединив точки $A''B_oC_oA_o$ и $D_oF_oE_oD''$, получим развертки боковой поверхности призмы. Для получения полной развертки призмы достаточно к какому-либо звену ломаной линии пристроить треугольники оснований ABC и DEF.

Способ треугольников

Задача. Построить развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$.

Развертка боковой поверхности пирамиды – плоская фигура, состоящая из треугольников – граней пирамиды. На рис. 17.3 длины ребер пирамиды определены с помощью их вращения вокруг оси $i \in S$ и $i \perp H$. Стороны основания являются горизонталями и на плоскость проекций H проецируются без искажения.

Для построения развертки мысленно разрежем поверхность пирамиды по ребру SA и последовательно совместим с плоскостью развертки боковые грани. На рис. 17.3 через произвольную точку S_o проводим прямую a, на ней от точки S_o откладываем $|S_oA_o| = |S''A_1''|$. Из точки A проводим дугу радиусом $r_1 = |A'B'|$, а из точки S_o – дугу радиусом $R_1 = |S''B''_1|$. Пересечение дуг дает положение точки B_o.

Соединив точку B_o прямыми с точками S_o и A_o, получим натуральную величину грани SAB. Аналогично определяются точки C_o и A_o и строятся развертки граней SBC и SCA. Таким образом, получаем развертку боковой поверхности пирамиды.

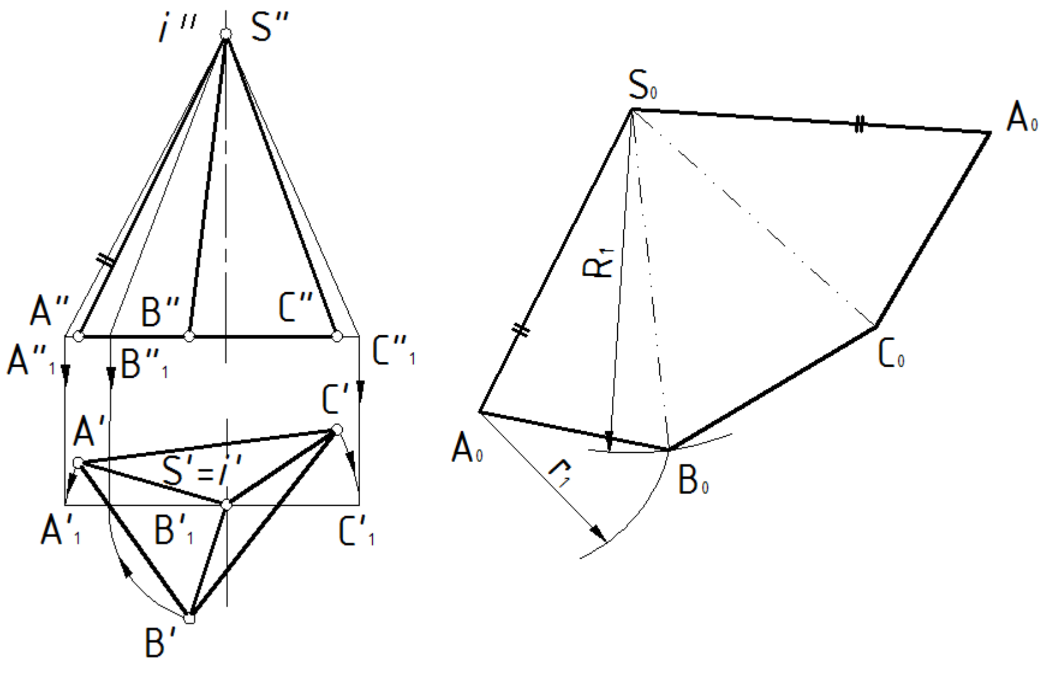


Рис. 17.3

17.3. Развертки цилиндрической и конической поверхностей

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Так как при развертке поверхность ее аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников.

Построение развертки цилиндрической поверхности

Для построения развертки используют способы нормального сечения и раскатки, которые применялись при развертывании боковой поверхности призмы. В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют вписанной (или описанной) призматической поверхностью.

На рис. 17.4 показано построение развертки поверхности цилиндра способом нормального сечения.

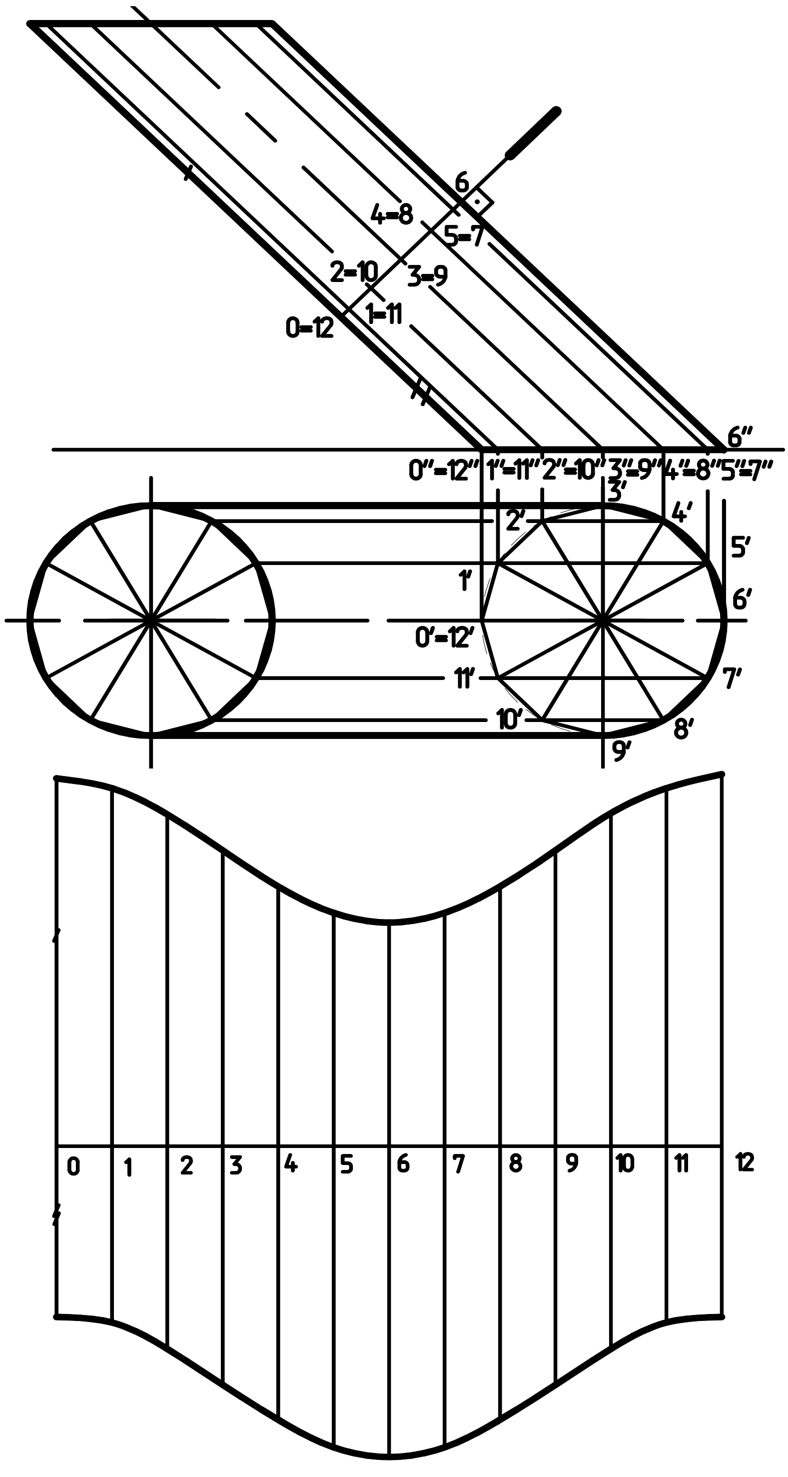


Рис. 17.4

При построении развертки поверхности цилиндра вращения предпочтительнее использовать способ нормального сечения, так как в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

Разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра будет прямоугольник, одна сторона которого равна длине образующих, а вторая – длине окружности основания – πd (рис. 17.5).

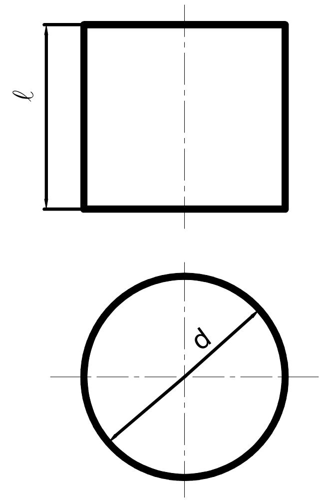


Рис. 17.5

Построение развертки конической поверхности

Развертку конической поверхности строят так же, как и развертку боковой поверхности пирамиды – способом треугольников. Для этого коническая поверхность заменяется вписанной в нее пирамидальной.

Если задана поверхность прямого кругового конуса, то развертка его боковой поверхности – круговой сектор, радиус которого равен длине образующей поверхности L, а центральный угол $\varphi° = 2\pi R/L$, где R – радиус окружности основания конуса, величина, полученная в радианах. На практике удобнее использовать его величину в градусах: $\varphi° = R/L \cdot 360°$ (рис. 17.6).

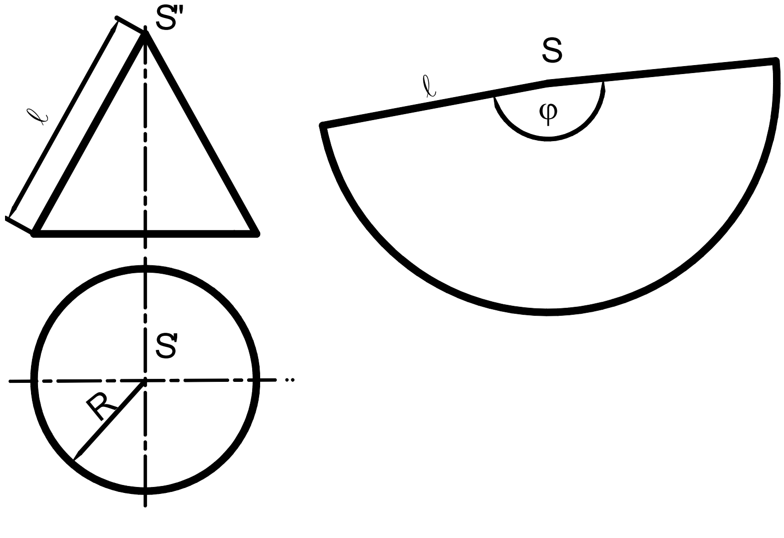


Рис. 17.6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия : учебник для втузов / А. В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1985. – 288 с.

2. Власов, М. П. Инженерная графика : учебное пособие / М. П. Власов. – Москва: Машиностроение, 1979.

3. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии : учебное пособие / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский; под ред. Ю. Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – Москва: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 272 с.

4. Кузнецов, Н. С. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Н. С. Кузнецов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1981. – 262 с.

5. Начертательная геометрия и черчение : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / сост.: С. А. Фролов [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1982. – 88 с.

6. Проекционное черчение с задачами : учебное пособие для технических специальностей вузов / И. В. Манцветова [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – 344 с.

7. Фролов, С. А. Начертательная геометрия : учебник втузов / С. А. Фролов. – Москва: Машиностроение, 1978. – 240 с.

8. Якубенко, В. С. Техническое черчение с задачами : учебник для вузов / С. В. Якубенко. – Минск: Вышэйшая школа, 1971. – 360 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

РАЗУМОВА Лариса Степановна
ЛЕШКЕВИЧ Александр Юрьевич
ГИЛЬ Светлана Валентиновна
ГРИЦКО Наталья Михайловна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ С ЭЛЕМЕНТАМИ СТРОИТЕЛЬНОГО ЧЕРЧЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин», 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (по направлениям)»

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 11,97. Уч.-изд. л. 4,68. Тираж 300. Заказ 530.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.