Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет

Кафедра инженерной математики

Е.А. Глинская
М.А. Князев
И.В. Прусова
Н.К. Прихач

МАТЕМАТИКА

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов общетехнических специальностей
заочного отделения ПСФ

В 2 частях

Часть 1

М и н с к
БНТУ
2013

УДК

Рецензенты:

В.А. Еровенко, зав. каф. «Общая математика и информатика» БГУ, доктор физ.-мат. наук, проф.;

Г.Е. Малашкевич, зав. лаб. «Фотофизика активированных материалов» Института физики НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук.

Диск содержит данные об основных сведениях по курсу математики (теория матриц, аналитическая геометрия, производная функции одной переменной и ее приложения), вопросы к экзаменам, список рекомендуемой и дополнительной литературы здания для контрольных работ и пример решения типового варианта контрольной работы. Комплекс предназначен для студентов общетехнических специальностей заочного отделения приборостроительного факультета БНТУ.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел (017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ЭУМК-ПСФ85-32

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая включает: изучение материала по учебникам, в том числе изданных в электронном виде; решение задач; ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы; создаются учебно-методические комплексы по изучаемым дисциплинам. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Изучение теоретического материала

1. Изучая теоретический материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике графики и чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых − оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель − обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется уровень усвоения всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

2.1. Вопросы к экзамену

1. Матрицы. Операции над матрицами.
2. Определитель матрицы третьего порядка, его свойства. Определитель n-го порядка.
3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы.
4. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы.
5. Решение невырожденных систем линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
6. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера − Капелли.
7. Определение линейного пространства, его базис и размерность. Примеры линейных пространств.
8. Линейная зависимость и независимость векторов. Теорема о разложении вектора по базису.
9. Скалярное произведение векторов и его свойства.
10. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения через координаты векторов.
11. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.
12. Различные уравнения плоскости.
13. Различные уравнения прямой на плоскости.
14. Различные уравнения прямой в пространстве.
15. Угол между плоскостями и прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых.
16. Угол между прямыми в R_3.

17. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

18. Расстояние от точки до плоскости и до прямой.

19. Вывод уравнения эллипса. Построение эллипса по его уравнению.

20. Вывод уравнения гиперболы. Построение гиперболы по её уравнению. Асимптоты гиперболы.

21. Канонические уравнения параболы. Построение параболы по её уравнению.

22. Эллипсоид. Исследование его формы методом сечений.

23. Параболоиды. Исследование их формы методом сечений.

24. Гиперболоиды. Исследование их форм методом сечений.

25. Цилиндры и конус второго порядка. Исследование их формы методом сечений.

26. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел.

27. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых функций.

28. Первый замечательный предел.

29. Второй замечательный предел.

30. Непрерывность функции в точке, свойства функций, непрерывных в точке.

31. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация.

32. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

33. Дифференцирование сложной функции, дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

34. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

35. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции. Дифференциал функции.

36. Теорема Ролля.

37. Теорема Лагранжа.

38. Теорема Коши.

39. Теорема Лопиталя.

40. Необходимый и достаточный признаки возрастания и убывания функции.

41. Необходимые условия существования экстремума функции.

42. Достаточные условия существования экстремума функции.

43. Достаточные условия выпуклости графика функции.

44. Асимптоты графика функции. Необходимые и достаточные условия существования наклонных асимптот.

45. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

46. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

2.2. Рекомендуемая литература

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. 1, 2, 3, 4, 5. Мн., 1998.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., 1980.

3. Элементы линейной алгебры. Под общ. ред. Р.Ф.Апатенок. Мн., 1977.

4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1980.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1980, 1984.

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.,1981,1985.

7. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление; в 2т. М, 1985.

8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2003.

9. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Мн.,2000.

10. Балашевич В.А. Основы математического программирования. Мн.,1985.

11. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.М.,1993.

12. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М., 1986.

13. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М., 1981.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1, 2, 3. Под общей ред. А.П.Рябушко. Мн., "Вышэйшая школа", 1991.

15. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики – М: Высшая школа, 2003.

2.3. Дополнительная литература

1. Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей. В 4-х частях. ЭИ БНТУ/ПСФ85-1.2005, ЭИ БНТУ/ПСФ85-2.2006, ЭИ БНТУ/ПСФ85-3.2007, ЭИ БНТУ/ПСФ85-4.2007.

2. Руководство к решению задач по математике для студентов МТФ. Ч. 1 – 7.

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1. Матрицы и операции над ними

1. **Понятие о матрице.** Таблица чисел a_{ik} вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$. Числа a_{ik} называются ее *элементами*. Если $m = 1$, $n > 1$, мы имеем однострочечную матрицу, которую называют *матрицей-строкой*: $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу $(a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1})^T$, которую называют *матрицей-столбцом*.

Если в матрице число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы.

Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они одинакового размера (т. е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны.

2. **Сложение матриц.** Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \left(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей*.

3. **Вычитание матриц.** *Разностью* двух матриц A и B одинакового размера называется матрицы C, такая, что $C+B=A$.

4. **Умножение матрицы на число.** *Произведением* матрицы A на число λ называется матрица B, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A: $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$.

5. **Умножение матриц.** Произведением AB $(m\times n)$ − матрицы A на $(n\times k)$ – матрицу B называется $(m\times k)$-матрица C, элемент которой d_{ij}, стоящий в i -й строке и j - м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i - й строки матрицы A и j - го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{\gamma=1}^{n}a_{i\nu}\cdot b_{\nu j}\quad i=1,\overline{m},\ \overline{j=1,k}\ .$$

Единичной матрицей называется такая матрица

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix},$$

при умножении которой слева или справа на матрицу A получается матрица A:

$$E\cdot A=A\cdot E=A\,.$$

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется *транспонированной по отношению к* A. Если для матриц A и B определено произведение AB, то

$$\left(AB\right)^T=B^T\cdot A^T\,.$$

6. **Основные свойства действий над матрицами.**

1) $A+B=B+A$.

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

5) $A(BC)=(AB)C$.

6) $A(B+C)=AB+AC$.

3.2. Определители

Определители второго порядка

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Определитель обозначают символом $|A|$. Т. о.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12}, a_{21} – *побочную*.

Определители третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} .$$

Чтобы запомнить какие числа в правой части равенства (1.5) следует брать со знаком “плюс”, какие – со знаком “минус”, полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника*.

Минором (M_{ij}) какого-либо определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Алгебраическим дополнением (A_{ij}) элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Понятие определителя n-го порядка

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Свойства определителей n-го порядка

1) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот;
2) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;
3) определитель с двумя параллельными рядами равен нулю;
4) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель умножится на это же число λ;
5) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;
6) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;
7) сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj} = 0 \qquad (j \neq i);$$

8) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;

9) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и тоже произвольное число λ.

Основные методы вычисления определителей

1. *Метод эффективного понижения порядка*. В соответствии со свойством 3 вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$- порядка.

2. *Приведение определителя к треугольному виду*. Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. В этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали.

3. *Разложение определителя по элементам ряда*. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения этих элементов.

4. *Теорема Лапласа*. Определитель матрицы порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка $(k < n)$, которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, на алгебраические дополнения этих миноров.

3.3. Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Если определитель $|A|$ матрицы равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*, в противном случае матрица A называется *невырожденной*

Матрица

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|};\ A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является *обратной* для A.

Матрица A^* называется *присоединенной.*

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Обозначается r или r_A.

Если ранг квадратной матрицы A порядка n равен r, то $n-r$ называют *дефектом матрицы* A.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующее:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;
3) перестановку местами двух параллельных рядов матрицы.

Ранг матрицы, полученный из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

При вычислении ранга матрицы могут быть использованы элементарные преобразования, метод приведения матрицы к трапециевидной форме, метод окаймляющих миноров и др.

Метод приведения к трапециевидной форме заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матриц данная матрица приводится к виду:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, ..., b_{rr}$ отличны от нуля. Ранг матрицы *B*, а, следовательно, и ранг данной матрицы равен *r*, где *r* – число строк матрицы *B*, в каждой из которых хотя бы один элемент отличен от нуля.

Минор порядка $k+1$, содержащий в себе минор *M* порядка k, называется окаймляющим минор *M*.

Метод окаймляющих миноров основан на том, что ранг данной матрицы равен порядку такого минора этой матрицы, который отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю.

3.4. Системы линейных уравнений

1. **Правило Крамера.** Пусть задана система *n* линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если в системе определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение. Решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1,\overline{n},$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой его *i*-го столбца столбцом свободных членов.

2. **Матричный метод.** Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если $|A| \neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то система имеет единственное решение:

$$x = A^{-1}B.$$

3. **Решение произвольных систем. Метод Гаусса.** Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или, в матричной форме

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = 0$, то система называется *однородной*, иначе – она называется *неоднородной*.

Решением системы называется всякий *n*-компонентный вектор-столбец *x*, который обращает матричное уравнение в равенство. Система называется *совместной*, если у нее существует хотя бы одно решение, иначе она называется *несовместной*.

Матрица

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right),$$

которая получается из матрицы *A* приписываем столбца из свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

Теорема Кронекера – Капелли

Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Решение системы линейных уравнений производится следующим образом:

1. Находим r_A – ранг матрицы системы и $r_{\widetilde{A}}$ – ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\widetilde{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\widetilde{A}} = r$, то выделяем базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяем равносильной, состоящих из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то из системы, полученной в пункте, находим выражение базисных неизвестных через свободные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечно много решений исходной системы.

Элементарными преобразованиями системы называются следующие преобразования:

1) умножение обеих частей одного из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;

2) перемена местами двух любых уравнений;

3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

Метод Гаусса

1. Выбираем одно из уравнений системы, в котором коэффициент при одном из неизвестных отличен от нуля. Производя над уравнениями системы преобразования, которые приводят к равносильной системе, исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме выбранных ранее.

Если в результате в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это уравнение не удовлетворяется никаким значениям неизвестных, следовательно, полученная система несовместна.

Если в системе появится уравнение все коэффициенты которого и свободный член равны нулю, то оно может быть отброшено.

2. В системе, полученной после первого шага, выбираем одно из уравнений, в котором коэффициент при другом неизвестном, отличен от нуля. Исключаем неизвестные из всех уравнений, кроме двух выбранных.

Аналогично производим последующие шаги. После нескольких шагов будет иметь место один из случаев:

а) получится несовместная система;

б) получится треугольная система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{nn}x_n &= b_n^{(n-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{nn} \neq 0$.

Система (3.1), а следовательно и исходная система имеет единственное решение.

в) получится трапециевидная система:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n = b_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где $p < n,\ a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp} \neq 0$.

В системе (3.2) число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp} \neq 0$, то из последнего уравнения системы x_p выражается через $x_{p+1},\ x_n$. Осуществляя обратный ход, выразим $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получим бесконечно много решений системы (3.2), а следовательно, и исходной системы.

4. **Однородные линейные системы. Фундаментальная система решений.**

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

называется однородной. Она всегда совместна: совокупность нулей (0,0,...,0) является решением, которое называется *нулевым* (тривиальным).

Если однородная система имеет 2 решения $(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1})$ и $(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n2})$, то любая их линейная комбинация $(\alpha c_{11} + \beta c_{12}, \alpha c_{21} + \beta c_{22}, \ldots, \alpha c_{n1} + \beta c_{n2})$ также является решением исходной системы.

Любой базис пространства решений системы называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Базисные решения могут быть получены, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равные нулю.

3.5. Определение вектора. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора в данном базисе

Направленным отрезком называется отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая за конец.

Два ненулевых направленных отрезка называются *эквивалентными*, если их длины равны и они сонаправлены. Нулевые направленные отрезки считаются эквивалентными.

Вектором называется множество всех направленных отрезков, эквивалентных между собой. Каждый направленный отрезок этого множества называется представителем вектора.

Длиной направленного отрезка AB называется расстояние между точками A и B.

Длиной вектора a называется длина любого из направленных отрезков, образующих вектор a. Длина вектора $a = \vec{AB}$ обозначается $|a|$ или $\left|\vec{AB}\right|$.

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\pi/2$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны, т. е. если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой: $a \parallel b$.

Векторы называются *компланарными*, если представляющие их направленные отрезки лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение векторов на число.

Суммой векторов a_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ называется вектор, обозначаемый $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$, начало которого находится в начале первого вектора a_1, а конец – в конце последнего вектора a_n ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов. В случае суммы двух векторов применяют правило параллелограмма.

Произведением вектора a *и числа* λ называется вектор, обозначаемый λa (или $a\lambda$), модуль которого равен $|\lambda|\cdot|a|$, а направление совпадает с направлением вектора a, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

Проекцией вектора a *на ось* l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\, a$ и равное $|a|\cos\varphi$, где $\varphi(0\le\varphi\le\pi)$ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора a, т. е. $\text{пр}_l\, a=|a|\cos\varphi$.

Координатами вектора a называются его проекции на оси координат OX, OY, OZ. Запись $a=(x,y,z)$ означает, что вектор a имеет координаты x,y,z.

Линейной комбинацией векторов $a_1,a_2,\cdots,a_n$ называется вектор $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n$, где $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ – числа.

Векторы $a_1,a_2,\cdots,a_n$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n=0.$$

Векторы $a_1,a_2,\cdots,a_n$ называются *линейно-независимыми*, если равенство $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i=0$ верно только в случае, когда $\lambda_i=0$. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов этой плоскости.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов e_1, e_2, e_3.

Любой вектор a в пространстве можно разложить по базису e_1, e_2, e_3, т. е. представить a в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = x e_1 + y e_2 + e\, l_3,$$

где x, y, z – координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и каждый базисный вектор является единичным.

Совокупность точки O (начало координат) и ортонормированного базиса i, j, k (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси) называется *декартовой прямоугольной системой координат в пространстве.*

Свободный вектор a, заданный в координатном пространстве $OXYZ$, может быть представлен в виде

$$a = a_x i + a_y\, j + a_z k\ .$$

Такое разложение вектора a называется его *разложением по осям координат*, или разложением по ортам i, j, k (здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора a на соответствующие оси координат, т. е., координаты вектора a). Векторы $a_x i,\ a_y\, j,\ a_z k$ называются составляющими вектора a по осям координат.

Длина или модуль вектора $a = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ определяется по формуле

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Если векторы a и b заданы своими прямоугольными координатами: $a=(a_x;a_y;a_z)$, $b=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$a+b=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z);$$

$$a-b=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z).$$

Произведение вектора $a\,(a_x;a_y;a_z)$ на число λ имеет координаты $(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)$.

Радиусом-вектором точки M относительно декартовой прямоугольной системы координат $(O;i,\ j,\ k)$ называется вектор $\vec{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке $M(x,y,z)$. Его обозначают $r(M)$ или r.

Радиус-вектор r имеет следующее разложение по ортам:

$$r=xi+yj+zk.$$

Вектор $\vec{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1,y_1,z_1)$ и конец в точке $B(x_2,y_2,z_2)$, может быть записан в виде $\vec{AB}=r_2-r_1$, где r_1, r_2 – радиусы-векторы точек A и B соответственно. Следовательно, разложение вектора $\vec{AB}$ по ортам имеет вид:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1)\,i+(y_2-y_1)\,j+(z_2-z_1)\,k.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\left|\vec{AB}\right|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Направление вектора a задается углами α, β, γ, образованными им с осями координат OX, OY, OZ. Косинусы этих углов (*направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. В силу приведенных выше формул направление вектора $\vec{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d};\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d};\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Единичным вектором (ортом) вектора a называют вектор $a_0 = \frac{a}{|a|}$, который имеет длину, равную единице и направление, совпадающее с направлением вектора a. Координаты единичного вектора a_0 равны его направляющим косинусам:

$$a_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

3.6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними

$$(a,b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi,$$

где φ обозначает меньший угол между направлениями векторов a и b. Отметим, что всегда $0 \le \varphi \le \pi$.

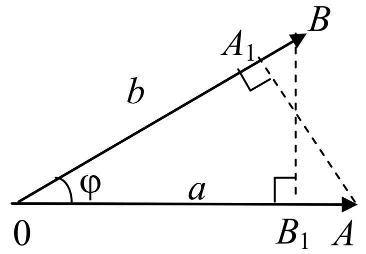


Рис. 3.1

Так как $|b|\cos\varphi = \text{пр}_a b$ и $|a|\cos\varphi = \text{пр}_b a$ (рис. 3.1), то выражение скалярного произведения можно представить в виде:

$$(a,b) = |a| \cdot \text{пр}_a b = |b| \cdot \text{пр}_b a .$$

Следовательно, $\text{пр}_b a = \dfrac{(a,b)}{|b|}$ и $\text{пр}_a b = \dfrac{(a,b)}{|a|}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $(a,a) = |a|^2 = a^2$, отсюда $|a| = \sqrt{(a,a)}$;

2) $(a,b) = 0$, если a=0, либо $b = 0$, либо $a \perp b$;

3) $(a,b) = (b,a)$;

4) $(\lambda a,b) = (a,\lambda b) = \lambda(a,b), \quad \lambda \in R$

5) $(a,b+c) = (a,b) + (a,c)$.

Если в прямоугольной системе координат векторы a и b заданы своими координатами:

$$a = (X_1, Y_1, Z_1), \quad b = (X_2, Y_2, Z_2),$$

то

$$(a,b) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 ,$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат. Если $b = a$, то

$$(a,a) = X_1^{\,2} + Y_1^{\,2} + Z_1^{\,2} .$$

Поскольку $aa = a^2 = |a|^2$, то $|a| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} .$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Если ось l образует с координатными осями углы α, β, γ соответственно, то проекция вектора $S = (X, Y, Z)$ на эту ось определяется равенством

$$\text{пр}_l S = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

Понятие скалярного произведения возникло в механике. Если вектор F изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора S, то работа A указанной силы определяется равенством

$$A = (F, S) = |F|\cdot|S|\cos(F\hat{,}S).$$

3.7. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов a, b, c с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора a к вектору b наблюдается из конца вектора c происходящим против движения часовой стрелки (рис. 3.2, а). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке (рис. 3.2, б), то данная тройка векторов называется *левой*.

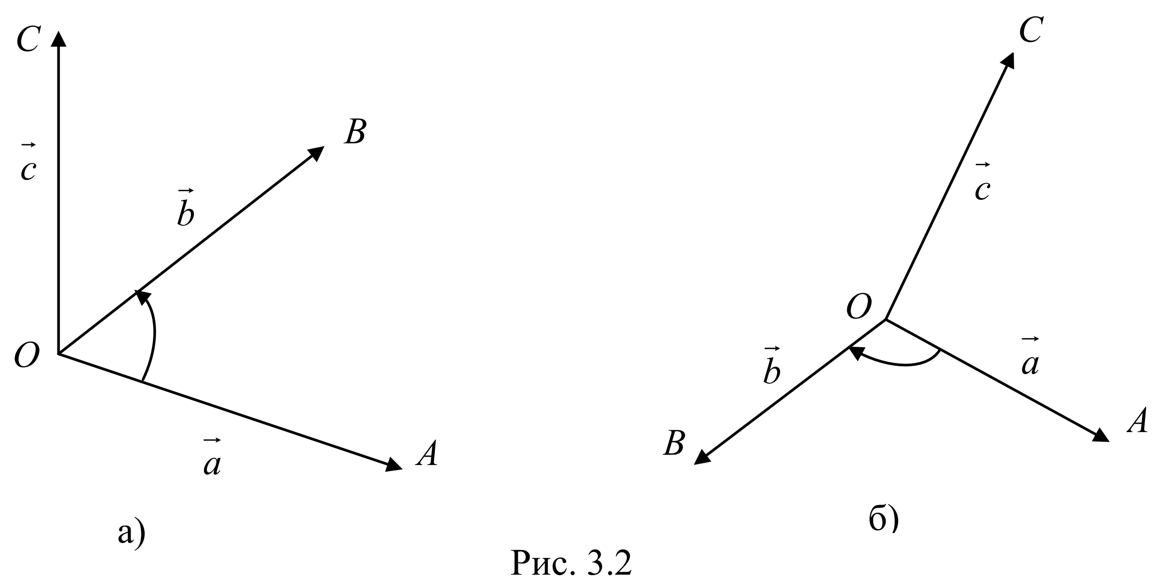


Рис. 3.2

Векторным произведением векторов *a* и *b* называется вектор, обозначаемый $c=[a,b]$ или $c=a\times b$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора *c* равна площади параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b*, т. е.

$$\|[a,b]\|=|a|\cdot|b|\cdot\sin(a\hat{,}b).$$

2) вектор $[a,b]$ перпендикулярен к плоскости векторов *a* и *b*, т. е. $c\perp a$, $c\perp b$.

3) упорядоченная тройка векторов *a*, *b*, *c* – правая.

Основные свойства векторного произведения векторов:

1) $a\times b=-(b\times a)$;

2) $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$;

3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

4) $(a\times b=0 \Leftrightarrow a\parallel b)$ – есть необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов *a* и *b*;

5) $|a\times b|=S$, где *S* – площадь параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b*, имеющих общее начало в точке *O* (см. рис. 3.3).

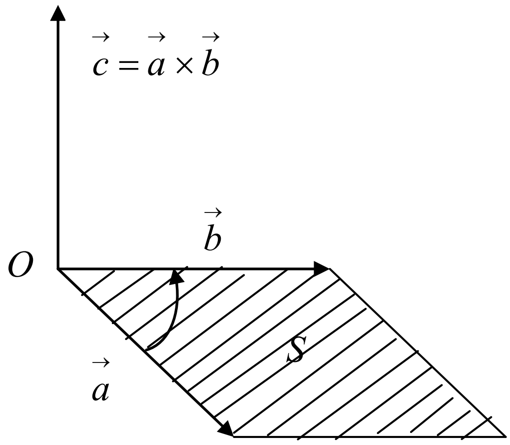


Рис. 3.3

Если $a=(x_1,y_1,z_1)$, $b=(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение $a\times b$ в координатной форме выражается следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах *a* и *b*, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} | \, [a,b] \, |,$$

а *синус угла* между ними равен

$$\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = \frac{|[a,b]|}{|a| \cdot |b|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент M* силы *F*, приложенной к точке *B* тела, закрепленного в точке *A*:

$$M = \vec{AB} \times F.$$

3.8. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов *a*, *b*, *c* называется число, обозначаемое (a,b,c) и определяемое как скалярное произведение вектора $[a,b]$ и вектора *c*:

$$(a,b,c) = ([a,b],c).$$

Алгебраические свойства смешанного произведения векторов:

1) $(a,b,c) = (b,c,a) = (c,a,b)$;

2) $(b,a,c) = -(a,b,c), \quad (c,b,a) = -(a,b,c), \quad (a,c,b) = -(a,b,c)$;

3) $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b, c) = \alpha_1 (a_1, b, c) + \alpha_2 (a_2, b, c)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$;

4) $(i, j, k) = 0$;

5) $(a,b,c) = ([a,b],c) = (a,[b,c])$.

Если векторы a, b, c заданы своими координатами $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле $(a,b,c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Смешанное произведение (a,b,c) равно объему параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах a, b, c, взятому со знаком плюс, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком минус – в противном случае:

$$(a,b,c) = \begin{cases} V, & \text{если тройка векторов } a,b,c - \text{правая}, \\ -V, & \text{если тройка векторов } a,b,c - \text{левая}. \end{cases}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов a, b, c является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(a,b,c) = 0.$$

3.9. Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой

Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y:

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.3}$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, и обратно, всякое уравнение вида (3.3) определяет прямую.

Всякий ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный к прямой (3.3), называется *нормальным вектором прямой*. Уравнение (3.3) называется *общим уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A, B)$.

Возможны частные случаи.

1) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$. Прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат.

2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$. Прямая $Bx + C = 0$ (или $y = -C/B$) параллельна оси Ox.

3) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$. Прямая $Ax + C = 0$ (или $y = -C/A$) параллельна оси Oy.

4) $A = C = 0, B \neq 0$. Прямая $By = 0$ (или $y = 0$) совпадает с осью Ox.

5) $B = C = 0, A \neq 0$. Прямая $Ax = 0$ (или $x = 0$) совпадает с осью Oy.

Если прямая *l* проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(A, B)$, то уравнение прямой будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

и называется *уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A, B)$ *и проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то его можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b,$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Полученное уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом k*, где $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Угол α $(0 \le \alpha < \pi)$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то имеем уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

называемое *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k*, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, подставив их координаты в уравнение с угловым коэффициентом и выразив $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$x_1 \ne x_2$; $y_1 \ne y_2$.

4. Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $C \ne 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (3.4)$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$. Уравнение (3.4) называется *уравнением прямой в отрезках*, где a и b – длины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy, взятые с соответствующими знаками (в зависимости от того, положительные или отрицательные полуоси координат пересекает прямая).

5. Каноническое уравнение прямой

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(m,n)$, называемому *направляющим вектором прямой*, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

и называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

6. Параметрические уравнения прямой

В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ и $\vec{a}(m,n)$ существует число $t \in R$, такое что $\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{a}$ или $(x-x_0, y-y_0)=t(m,n)$. Отсюда $x-x_0=t\,m$, $y-y_0=t\,n$, т. е.

$$x = x_0 + t\,m,$$
$$y = y_0 + t\,n.$$

Полученные уравнения (1.8) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}(m,n)$.

7. Нормальное уравнение прямой

Если обе части общего уравнения прямой $A\,x+B\,y+C=0$ умножить на число $\mu=1\big/\left(\pm\sqrt{A^2+B^2}\right)$ (которое называется *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu\,C<0$, то получается уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,.$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

8. Угол между двумя прямыми

Под углом φ между двумя прямыми будем понимать наименьший угол, на который надо повернуть одну прямую, чтобы она стала параллельна или совпала с другой прямой $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то косинус угла между ними находится как косинус угла между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

а *условие* их *параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \ne \frac{C_1}{C_2}.$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Для того чтобы прямые были *параллельны*, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1 k_2 = -1$.

3. Если прямые заданы каноническим уравнением, то в этом случае $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}\right)$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|} = \frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

9. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых

Если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то координаты точки пересечения прямых $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ находятся путем совместного решения уравнений этих прямых.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{\left|A x_0 + B y_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то уравнение

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right) = 0,$$

где λ – числовой множитель, определяет прямую, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Придавая различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие *пучку прямых*, центр которого есть точка пересечения заданных прямых.

3.10. Плоскость и прямая в пространстве

1. Общее уравнение плоскости

Теорема. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.

Полученное уравнение называется *общим уравнением плоскости*. Здесь A, B, C – координаты ненулевого вектора $\overline{n}(A, B, C)$, перпендикулярного плоскости, называемого *нормальным вектором плоскости.*

Положение плоскости в пространстве вполне определено, если известны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая ей, и нормальный вектор $\overline{n}(A, B, C)$.

Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

и называется *уравнением плоскости с нормальным вектором* $\overline{n}(A, B, C)$. *и проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением:

1) $A = 0$; параллельна оси Ox;

2) $B = 0$; параллельна оси Oy;

3) $C = 0$; параллельна оси Oz;

4) $D = 0$; проходит через начало координат;

5) $A = B = 0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);

6) $A = C = 0$; перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);

7) $B = C = 0$; перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);

8) $A = D = 0$; проходит через ось Ox;

9) $B = D = 0$; проходит через ось Oy;

10) $C = D = 0$; проходит через ось Oz;

11) $A = B = D = 0$; совпадает с плоскостью xOy $(z = 0)$;

12) $A = C = D = 0$; совпадает с плоскостью xOz $(y = 0)$;

12) $B = C = D = 0$; совпадает с плоскостью yOz $(x = 0)$.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

2. Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*: в нем a, b и c – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ однозначно определяют положение плоскости P в пространстве.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P. Тогда векторы $\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, и $\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарны и, значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство и является *уравнением плоскости, проходящей через три точки.* Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придем к уравнению плоскости по точке и нормальному вектору.

4. Нормальное уравнение плоскости

Пусть $\overline{n^\circ}$ – единичный вектор нормали к плоскости *P*, проведенный к ней из начала координат. Тогда его координатами будут направляющие косинусы: $\overline{n^\circ}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz. Пусть *p* – длина этого перпендикуляра, а $\bar{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$. Тогда *уравнение плоскости в векторной форме* имеет вид

$$\left(\bar{r}, \overline{n^\circ}\right) - p = 0, \;\; p \geq 0.$$

В координатной форме уравнение принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

и называется *нормальным уравнением плоскости*.

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду, следует все члены уравнения умножить на *нормирующий множитель* $\mu = \pm 1 \big/ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, где знак выбирается противоположным знаку свободного члена *D*.

5. Уравнение плоскости, параллельной двум данным векторам

Положение плоскости в пространстве также определено единственным образом, если известны два неколлинеарных вектора $\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$, параллельных плоскости, и точка, через которую эта плоскость проходит. В качестве нормального вектора плоскости *P* можно взять вектор векторного произведения $\bar{n} = \left[\bar{a}_1, \bar{a}_2\right]$, перпендикулярный к векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, а значит и к плоскости P. Зная точку, через которую проходит плоскость *P*, можно записать уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Также получить уравнение плоскости можно, выбрав произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости P и учитывая, что векторы $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – компланарны. Значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $(\overline{M_0M}, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = 0$ или в координатной форме получим равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое является *уравнением плоскости, параллельной двум векторам и проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

6. Уравнение пучка плоскостей

Уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

при произвольном λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую. Такое уравнение называют *уравнением пучка плоскостей*.

7. Угол между двумя плоскостями

Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos\left(n_1 \hat{,} n_2\right) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей.

8. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \text{ или } A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 .$$

Если две плоскости параллельны, то параллельны и их нормальные векторы. Учитывая условие параллельности векторов, получаем *условие параллельности двух плоскостей*:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \neq D_1/D_2 .$$

9. Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости P*: $Ax + By + Cz + D = 0$ называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость *P*.

Искомое расстояние находится по формуле

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right| = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости. Знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: “плюс”, если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и “минус”, если они расположены по одну сторону от плоскости.

3.11. Прямая

1. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно однозначно определить пересечением двух плоскостей

$$\left. \begin{aligned} P_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ P_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{aligned} \right\}$$

нормальные векторы $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ которых непараллельны. Уравнения называются *общими уравнениями прямой* в пространстве.

2. Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{a}(m;n,p)$ – вектор, параллельный прямой L, называемый *направляющим вектором* этой прямой, и $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x,y,z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{a}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ и вектора $\bar{a}(m;n,p)$ пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Полученные уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве и определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельную вектору $\bar{a}(m,n,p)$.

3. Параметрические уравнения прямой

От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к *параметрическим уравнениям*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

или в *векторной* форме

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_0+\bar{a}t,$$

где $\bar{r}$ и $\bar{r}_0$ – радиус-векторы точек M и M_0, $\bar{a}$ – направляющий вектор прямой, t – параметр.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая L проходит через две заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то в качестве направляющего вектора $\bar{a}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. Т. к. прямая проходит через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, то уравнения L имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

и уравнения называются уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.

5. Угол между прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Под *углом между прямыми* понимают угол между направляющими векторами $\overline{a_1}(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{a_2}(m_2;n_2;p_2)$. Величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=\cos\left(a_1\hat{,}a_2\right)=\frac{\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2}{\left|\overline{a}_1\right|\left|\overline{a}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы следует взять по модулю.

6. Условие перпендикулярности двух прямых.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то скалярное произведение их направляющих векторов $\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0$, т. е.

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

7. Условие параллельности двух прямых.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то параллельны их направляющие векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

8. Условие компланарности двух прямых.

Пусть прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, прямая L_2 – через точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Следовательно, необходимым и достаточным условием нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости является

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 либо пересекаются, если $\overline{a_2}=\lambda\overline{a_1}$, либо параллельны, если $\overline{a_1}\parallel\overline{a_2}$. Если условие не выполняется, то прямые L_1 и L_2 являются *скрещивающимися.*

9. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\overline{a}(m;n,p)$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{\left|\overline{a}\times\overline{M_0M_1}\right|}{\left|\overline{a}\right|}.$$

10. Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой L *и плоскостью* P называют угол φ, образованный прямой L и ее проекцией на плоскость P.

Если прямая L задана каноническими уравнениями, а плоскость P – общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, тогда косинус угла между нормальным вектором $\overline{n}(A,B,C)$ к плоскости и направляющим вектором $\overline{a}$ прямой определяется

$$\cos\left(\overline{n},\hat{}\,\overline{a}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\overline{n}\cdot\overline{a}}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{a}\right|},$$

и т. к. $\sin\varphi\geq 0$ для $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Если прямая L параллельна плоскости P, то векторы $\overline{n}$ и $\overline{a}$ перпендикулярны, а потому $\overline{a}\cdot\overline{n}=0$, т. е.

$$Am+Bn+Cp=0$$

является *условием параллельности прямой и плоскости*.

Если прямая L перпендикулярна плоскости P, то векторы $\overline{n}$ и $\overline{a}$ параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

являются *условиями перпендикулярности* прямой и плоскости.

11. Пересечение прямой с плоскостью.

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой. Подставляя x, y, z из этих уравнений в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$\left(Am+Bn+Cp\right)t+\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)=0. \qquad (*)$$

Возможны следующие случаи:

1) При $Am + Bn + Cp \neq 0$ уравнение относительно t имеет единственное решение

$$t = -\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right)/\left(Am + Bn + Cp\right).$$

Подставив это значение t в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения M.

2) При

$$Am + Bn + Cp = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

уравнение (*) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Условия 2) являются *условиями параллельности* прямой и плоскости.

3) При

$$Am + Bn + Cp = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

любое значение t является решением уравнения (*), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Последние равенства называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

3.12. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Это уравнение называется *общим уравнением поверхности второго порядка* и может определять сферу, эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид, цилиндрическую или коническую поверхность второго порядка. Оно может также определять совокупность двух плоскостей, точку, прямую или не иметь геометрического смысла (определять мнимую поверхность).

При $D=0$, $E=0$, $F=0$ общее уравнение принимает вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Gx+2Hy+2Kz+L=0$$

и легко упрощается с помощью параллельного переноса осей координат, что позволяет сразу установить его геометрический смысл.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

1. Эллипсоид: $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

2. Гиперболоид

   а) однополостный: $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$;

   б) двуполостный: $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=-1$.

3. Конус второго порядка: $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$.

4. Параболоид

   а) эллиптический: $x^2/a^2+y^2/b^2=z$;

   б) гиперболический: $x^2/a^2-y^2/b^2=z$.

5. Цилиндр второго порядка

   а) эллиптический: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$;

   б) гиперболический: $x^2/a^2-y^2/b^2=1$;

   в) параболический: $y^2=2px,\ p>0$.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений*.

Пример 1. Методом сечений исследовать форму поверхности, заданную уравнением $z=2-x^2/16-y^2/25$.

Решение. Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z=h$. Из системы уравнений $\begin{cases} h=2-x^2/16-y^2/25, \\ z=h \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2/16+y^2/25=2-h, \\ z=h \end{cases}$

видно, что при $h > 2$ уравнение не имеет решений относительно (x, y), т. е. рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z = 2$. При $h \leq 2$ в любом сечении получается эллипс с полуосями $a = 4\sqrt{2 - h}$, $b = 5\sqrt{2 - h}$, вырождающийся в точку $x = y = 0$ при $h = 2$.

3.13. Пределы числовой последовательности и предел функции

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве N. Она записывается в виде $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ или сокращённо (a_n), где $a_n = f(x)$ – общий член последовательности, n – номер числа последовательности. Последовательность (a_n) называется ограниченной (неограниченной), если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| \leq M$ (если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| \leq M$).

Число a называется пределом последовательности (a_n), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, при этом пишется $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

С помощью логических символов это определение можно записать:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то (a_n) называется бесконечно малой последовательностью (б. м. п.).

Такие последовательности обладают следующими свойствами:

1. Алгебраическая сумма конечного числа б. м. п. есть б. м. п.

2. Произведение конечного числа б. м. п. есть б. м. п.

3. Произведение б.м.п. на ограниченную последовательность есть б. м. п.

Последовательность (a_n) называется бесконечно большой последовательностью (б. б. п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\,(-\infty)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0$ $(a_n \neq 0)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \infty$ $(a_n \neq 0)$. Если (a_n) и (b_n) сходятся, то справедливы следующие теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $c - const$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_b b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условно $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ и записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$. При помощи логических символов это определение можно записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon): \forall x,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если в этом выражении рассматривать только $x < x_0$ $(x > x_0)$, то понятия левого (правого) предела функции в точке x_0, который обозначается $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0 + 0)$. С помощью логических символов определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ записывается так:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \ \forall x > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение и обозначение предела при $x \to -\infty$ аналогичны. Функция называется бесконечно малой функцией (б. м. ф.), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (б. б. ф.) в точке x_0, если $\forall M \in R$, $\exists \delta(M)$: $\forall x$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$ и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, при этом, если $f(x) > 0 \; (f(x) < 0), \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$,то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Связь между б. м. ф. и б. б. ф. следующая:

если $f(x)$ – б. м. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. б. ф., где A – действительное число;

если $f(x)$ – б. б. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. м. ф., где $0 < A < \infty$.

Свойства функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$ выражаются следующей теоремой.

Теорема. Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Свойства б. м. ф. аналогичны свойствам бесконечно малых последовательностей.

Произведение $f(x) \cdot g(x)$ при $x \to x_0$ есть б. б. ф., если $f(x)$ – б. б. ф. при $x \to x_0$, а $g(x)$ – или б. б. ф., или $|g(x)| < c$ в некоторой окрестности точки x_0.

По определению выполняются соотношения:

1. $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\forall x \in R$;
2. $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty$, $\forall x > 0$;
3. $x(+\infty) = -\infty$, $x(-\infty) = +\infty$, $\forall x < 0$;

4. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty;$

5. $(+\infty)(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)(-\infty)=+\infty, \quad (+\infty)(-\infty)=-\infty.$

Операции $(+\infty)+(-\infty)=\infty-\infty$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ – не определены и называются *неопределенностями*. К неопределенностям относятся так же отношения вида $\dfrac{0}{0}; \quad 0\cdot\infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad \infty^{0}.$

В простейших случаях эти неопределенности раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения.

Кроме того, для всех элементарных функций в области их определения имеет место равенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)=f(x_0).$$

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{a}{x}=-\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{a}{x}=+\infty; \quad \lim\limits_{x\pm\infty}\dfrac{a}{x}=0,$ где $a>0,\ a\in R.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}0 & \text{при} \quad 0<a<1,\\ +\infty & \text{при} \quad a>1.\end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad 0<a<1,\\ 0 & \text{при} \quad a>1.\end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad a>1,\\ -\infty & \text{при} \quad 0<a<1.\end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=\begin{cases}-\infty & \text{при} \quad a>1,\\ +\infty & \text{при} \quad 0<a<1.\end{cases}$

В дальнейшем будут использоваться первый и второй замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}=2{,}71828...$$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$ необходимо иметь в виду, что если $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(v(x))=b$, то

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=a^b.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

а) Пусть $f(x)$ – рациональная дробь. В этом случае числитель и знаменатель разлагают на множители.

б) Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения. В этом случае иррациональность переводится из числителя в знаменатель или наоборот, а также используется замена переменной.

Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

а) Если вычисляется предел рациональной дроби вида $\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ при $x\to\infty$, то нужно разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени и перейти к вычислению предела.

б) Если $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональность, то и в этом случае ее числитель и знаменатель делят на x в старшей степени.

Раскрытие неопределенности вида $\infty-\infty$

Эта неопределенность преобразуется к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Чтобы сравнить две бесконечно малые функции (в дальнейшем б. м. ф.) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$, находят предел их отношения при $x\to x_0$. При этом:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется *б. м. ф. более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывается это так: $\alpha(x) = 0(\beta(x))$;

2) если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *б.м.ф. одного порядка малости*; в частности, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными б.м.ф. при* $x \to x_0$ и обозначается это так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$;

3) если существует число $k \in R_+$ такое, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c$ и $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ *называется б. м. ф. порядка k* по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Классификация б. б. ф. проводится аналогично. При раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ используют теорему о замене б. м. ф. (б. б. ф.) эквивалентными им, пользуясь таблицей эквивалентных б.м.ф. при $x \to x_0$.

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 3. $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

4. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 5. $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x)$. 6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

7. $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln b}$. 8. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$. 9. $\mathrm{e}^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Здесь $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

Непрерывность и точки разрыва функции

I. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

На практике применяются и другие определения непрерывности функции в точке x_0, а именно:

II. $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

а) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$;

в) и выполняются равенства $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

III. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$.

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она непрерывна на этом множестве.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ – не определена в этой точке;

2) $f(x)$ определена в точке x_0, но не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ (то есть $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$).

Различают следующие случаи точек разрыва функции:

1) если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и при этом $x_0\notin D(f)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва*;

2) если не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но существуют конечные односторонние пределы, причем $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то точка x_0 называется *разрывом первого рода*, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$ или не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

3.14. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная функции. Дифференцирование сложных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой δ – окрестности точки x_0 и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$, где $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Предел отношения $\dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ при условии, что последнее произвольным образом стремится к нулю называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначается $f'(x_0)$; $y'(x_0)$; $f'(x)\big|_{x=x_0}$.Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной в точке x: $\left(f(x)\right)'$; $\dfrac{df(x)}{dx}$; $\dfrac{d}{dx} f(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x; $\dot{y}$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox, поэтому уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ *в этой точке*. Если $f'(x_0) = 0$, нормаль имеет уравнение $x = x_0$. Если функция $x = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки (координата x такой точки есть известная функция времени t), то производная $\dfrac{dx}{dt} = f'(t)$ есть ее скорость в момент времени t. В этом заключается механический смысл производной:

$$v(t)=s'(t).$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют производные в некоторой точке x, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$(cu)'=cu';$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}, \text{ (где } c-\text{const)};$$

$$(u-v)'=u'-v';$$

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Формулы обобщаются на случай алгебраической суммы (произведения) любого конечного числа функций $u_k=u_k(x)$ $\left(k=\overline{1.n}\right)$, имеющих производную в точке x:

$$(u_1+u_2+\ldots+u_n)'=u_1'+u_2'+\ldots+u_n',$$

$$(u_1u_2\ldots u_n)'=u_1'u_2\ldots u_n+u_1u_2'\ldots u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_n'.$$

Приведем таблицу основных производных:

1. $(c)'=0$;
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha\in R$;
3. $(a^x)'=a^x\ln a \quad (a\in R_+)$;
4. $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;

8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

13. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

14. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

17. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

18. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции

Пусть на множестве T задана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, причем функция $x = \varphi(t)$, (x – промежуточный аргумент) имеет в некоторой точке $t \in T$ производную $x' = \varphi'(t)$, а функция $y = f(x)$ – в соответствующей точке $x \in X$ (X – множество значений функции $x = \varphi(t)$) производную $y' = f'(x)$, тогда

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(t),$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Аналогично находится и производная сложной функции с большим числом промежуточных аргументов. Например, если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$ (два промежуточных аргумента), т. е. если $y = f(\varphi\{\psi(t)\})$, то

$$y'(t) = f'(u)\varphi'(x)\psi'(t).$$

Производная обратной функции

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем в рассматриваемой точке x производная функции $y = f(x)$ не равна нулю, то для производной обратной функции в соответствующей точке y справедлива формула

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Из этой формулы следует, что

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически

Логарифмическое дифференцирование заключается в том, что сначала логарифмируют данную функцию, а затем уже приступают к дифференцированию. Производную от логарифма функции $y=f(x)$, которая положительна и имеет производную в рассматриваемой точке $x\in X$, называют ее *логарифмической производной в точке* x и находят по формуле

$$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

Логарифмическое дифференцирование используют при нахождении производной степенно-показательной функции $y=u(x)^{v(x)}$. Его также целесообразно применять, когда заданная функция содержит операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Если уравнение $F(x,y)=0$ задает y как неявную функцию аргумента x, т. е. $y=y(x)$, то при нахождении производной этой функции предполагают, что в данное уравнение вместо y подставлено соответствующее выражение $y(x)$ и получено тождество $F(x,y(x))=0$. Затем дифференцируют по x это тождество (не забывая, что y есть функция аргумента x) и решают полученное уравнение относительно искомой производной. Как правило, она зависит от x и y.

Пусть y как функция аргумента x задана параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \text{где } t\in T.$$

Тогда производную этой функции можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} y'(x)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x=\varphi(t), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \\ x=\varphi(t). \end{cases}$$

Дифференциал функции.

Применение дифференциала к приближенным вычислением

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x \in X$, если ее приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \qquad (*)$$

где $A - \text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ может быть представлено в виде (*), то главная часть этого приращения, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в точке* x.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом dy, $df(x)$ или df.

Таким образом,

$$dy = A\Delta x.$$

Обычно дифференциал функции находят, пользуясь его аналитическим выражением:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т.е.

$$dx = \Delta x.$$

Поэтому

$$dy = f'(x)dx.$$

Из последней формулы следует, что задача нахождения дифференциала функции $f(x)$ равносильна нахождению ее производной. Поэтому большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциала. Так, например, если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента, то

$$d(cu) = cdu,$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = udv + vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Формула для дифференциала сохраняет свою силу в том случае, если аргумент x сам является дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $(x = \varphi(t))$, т.е. форма дифференциала не зависит от того, является аргумент данной функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это важное свойство дифференциала функции принято называть *инвариантностью его формы*.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на использовании приближенного равенства

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Это приближенное равенство позволяет по известному значению функции $y = f(x)$ и ее производной в точке x_0 вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке, достаточно близкой к x_0.

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение. *Производной второго порядка* функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$. Вторая производная обозначается одним из символов: $f''(x)$; y'' или $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка: третья производная $f'''(x) = (f''(x))'$ (другие обозначения y''' или $\frac{d^3 y}{dx^3}$); четвертая производная $f^{(4)}(x)=(f'''(x))'$ (другие обозначения y^{IY}, $y^{(4)}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$); производная *n* – го порядка $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$ (другие обозначения $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$).

Механический смысл второй производной. Если функция $x=f(t)$ описывает закон прямолинейного движения точки, то $x''=f''(t)$ – ускорение этого движения в момент времени *t*.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка последовательно находят все ее производные низших порядков. В §2 был указан способ нахождения неявной функции $y=y(x)$, заданной уравнением $F(x,y)=0$. При этом было замечено, что полученное выражение для y', как правило, содержит x и y. Для отыскания второй производной y'' неявной функции надо уже найденную первую производную продифференцировать по переменной x, считая y функцией x. Вторая производная, как правило, будет выражаться через x, y, y'. Поскольку y' уже найдена, то ее подставляют в полученное выражение для y'' и тем самым находят y'', выраженную окончательно через x и y. Аналогично находят y''', y^{IV} и т. д.

Для функции $y=y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \text{ где } t\in T,$$

ее первая производная в §2 была записана как функция, заданная параметрически. Аналогично записываются производные высших порядков:

$$\begin{cases} y''(x)=\dfrac{(y'(x))'\, t}{\varphi'(t)}, \\ x=\varphi(t) \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(x) = \dfrac{\left(y''(x)\right)' t}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}. \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Определение 4. Дифференциал от дифференциала от функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ее *вторым дифференциалом* (или *дифференциалом второго порядка*) в точке x. Обозначается второй дифференциал символом d^2y или $d^2 f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяются и обозначаются дифференциалы любого порядка:

третий дифференциал $d^3y = d(d^2y)$;

дифференциал n – го порядка $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

В случае, когда аргумент x является независимой переменной, для дифференциалов второго, третьего и n - го порядка справедливы соответственно представления:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2;$$

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3;$$

$$d^n y = f^n(x)(dx)^n.$$

Для сложной функции $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\, d^2 x\,.$$

Правило Лопиталя

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие. Тогда их отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено в точке $x = a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$. Однако это отношение может иметь предел в точке $x = a$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Нахождение этого предела называется раскрытием неопределенности. Одним из способов раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя, основанное на следующей теореме:

Теорема Лопиталя. Пусть в некоторой окрестности точки $x = a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x = a$ и пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности и существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ этих производных при $x \to a$, тогда существует также и предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ самих функций, и этот предел равен пределу отношения производных

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,.$$

Замечание. Правило применимо и в случае $a = \infty$.

Замечание. Правило Лопиталя называют также правилом Лопиталя-Бернулли.

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ – бесконечно малая, а $\varphi(x)$ – бесконечно большая при $x\to a$ следует преобразовать произведение к виду $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$) или к виду $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$) и далее использовать правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие при $x\to a$, следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1-\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$, а затем раскрыть неопределенность $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\infty$.Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то получаем неопределенность типа $0\cdot\infty$, рассмотренную выше.

Раскрытие неопределенностей вида 0^0*,* ∞^0*,* 1^∞. Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая, во втором случае – бесконечно большая, в третьем случае – функция, имеющая предел, равный единице. Функция $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, в третьем случае – бесконечно большой.

Логарифмируем предварительно равенство $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, получаем

$$\ln y=\varphi(x)\ln(f(x)),$$

и находим предел $\ln y$, после чего находим и предел величины y. Во всех трех случаях величина $\ln y$ является неопределенностью типа $0\cdot\infty$, метод раскрытия которой приведен выше.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$.

Представление функции $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x-a$ называется *формулой Тейлора* в окрестности точки $x = a$ и записывается в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора. Остаточный член можно записать в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1$$

или в форме Пеано

$$R_n(x) = o((x-a)^n),$$

где $o((x-a)^n)$ – бесконечно малая порядка выше n по сравнению с $x-a$.

Если $a = 0$, то формула (3.6) принимает вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$ и называется *формулой Маклорена*.

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$$

3.15. Приложения дифференциального исчисления

Монотонность, точки экстремума функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на конечном или бесконечном промежутке (a,b).

Определение . Функция $f(x)$, $x \in (a,b)$ называется *возрастающей* на промежутке (a,b), если для любых x_1, $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2)$$

(рис. 3.4, 3.5) и *убывающей*, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует

$$f(x_1) > f(x_2)$$

(рис. 3.6, 3.7).

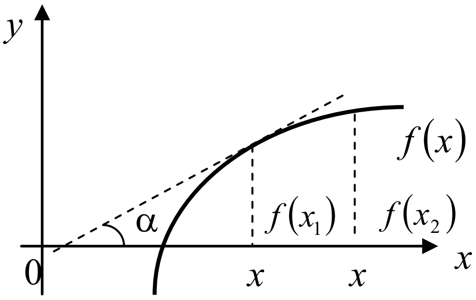


Рис. 3.4

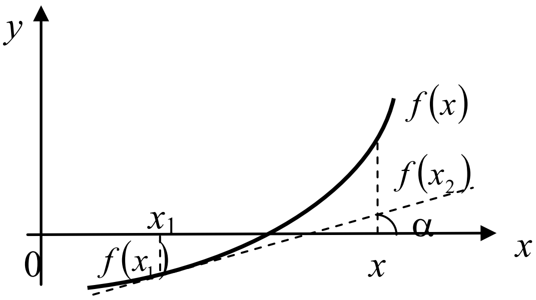


Рис. 3.5

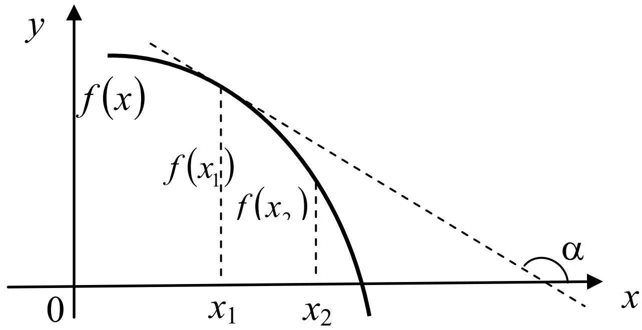


Рис. 3.6

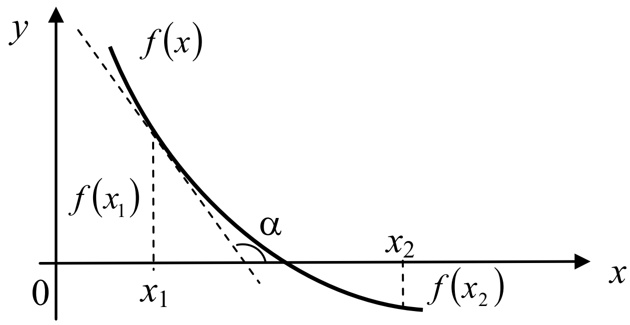


Рис. 3.7

Если в определении неравенства заменяются нестрогими неравенствами $f(x_1) \le f(x_2)$ и $f(x_1) \ge f(x_2)$, соответственно употребляются термины: неубывающая и невозрастающая функция. Возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая функции объединяются понятием монотонной функции.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке (a,b) и внутри его имеет конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ не убывала (не возрастала) на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы было

$$f'(x) \ge 0, \quad (f'(x) \le 0)$$

для всех $x \in (a,b)$.

Если же для любого $x \in (a,b)$

$$f'(x) > 0, \quad (f'(x) < 0),$$

то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Условия теоремы для возрастающей и убывающей функции достаточны, но не необходимы. Например, функция $y = x^3$ возрастает на $(-1, 1)$, но $y'(0) = 0$.

Установленная связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически объясняется просто, так как производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Если касательная образует с осью Ox острый угол α ($\operatorname{tg}\alpha > 0$), то функция возрастает в данном промежутке (рис. 3.4, 3.5), если же угол α – тупой $(\operatorname{tg}\alpha < 0)$, то функция убывает (рис. 3.6, 3.7).

Особую роль в исследовании поведения функции на промежутке играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует δ – окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, такая, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$
$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значение $f(x_0)$ называют *локальным максимумом* (*минимумом*) функции и обозначают

$$\max_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \quad \left(\min_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0)\right)$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимума называют *экстремумами* функции.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями. Если функция $f(x)$ на (a,b) имеет несколько максимумов и минимумов, то может оказаться, что локальный максимум функции меньше ее локального минимума. Например, на рис. 3.8 точки x_1, x_3, x_5 есть точки локальных максимумов, а точки x_2, x_4 – точки локальных минимумов функции $f(x)$.

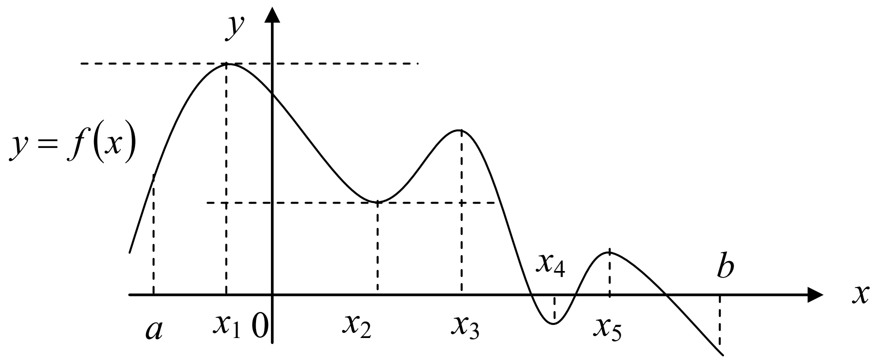


Рис. 3.8

Наибольшее или наименьшее значения функции $f(x)$ в области ее определения или на отрезке $[a,b]$ в отличие от локальных ее экстремумов называют соответственно *абсолютными* (или *глобальными*) *максимумом* и *минимумом* $f(x)$ и обозначают

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \quad \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшие значение.

Эти значения функция принимает в одной из точек экстремума в интервале (a,b) или в одной из граничных точек a,b.

Например, для функции $f(x)$ на рис. 3.8 на отрезке $[a,b]$ абсолютный максимум $f(x_1)$ достигается в точке x_1, абсолютный минимум равен $f(b)$.

Необходимое условие экстремума функции выражается теоремой Ферма.

Теорема. Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то ее производная

$$f'(x)=0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума параллельна оси Ox (рис. 3.8).

Точки, в которых $f^{/}(x)=0$, называются *стационарными*.

Функция может достигать экстремума также и в точке, в которой конечная производная не существует. Например, функция $y=|x+3|$ не имеет производной в точке $x=-3$ $\left(y'(-3-0)=-1,\quad y'(-3+0)=-1\right)$, но достигает в ней минимума $y=0$ (рис. 3.9).

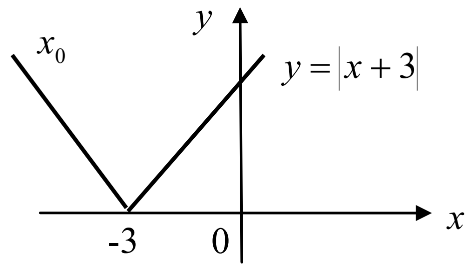


Рис. 3.9

Точки, в которых функция непрерывна, а ее производная равна нулю или обращается в бесконечность, или не существует, называются *критическими точками* или *точками возможного экстремума функции*. Критическая точка x_0 называется *угловой точкой функции* $f(x)$, если существуют $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$ (рис. 3.10) и точкой возврата функции, если ее левая $f'(x_0-0)$ и правая $f'(x_0+0)$ производные бесконечны (касательная к графику $f(x)$ в точке x_0 параллельна оси Oy) (рис. 3.11).

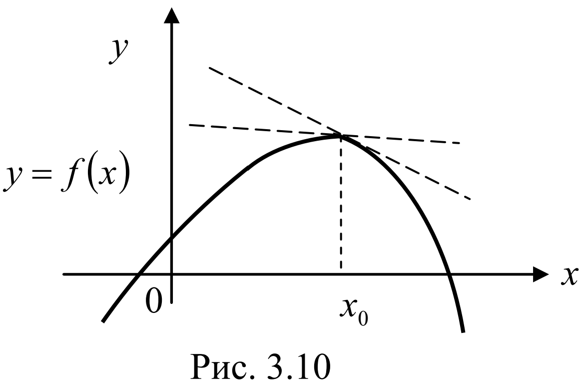


Рис. 3.10

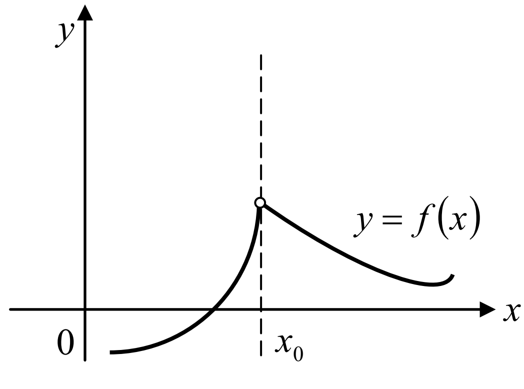


Рис. 3.11

Вместе с тем не всякая критическая точка функции является точкой ее экстремума. Например, для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ – стационарная, но в этой точке нет экстремума. Для того, чтобы выяснить, является ли критическая точка функции точкой ее локального экстремума требуются дополнительные исследования. Эти исследования состоят в проверке достаточных условий для существования экстремума.

Теорема (*первый достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с “+” на “–”, то x_0 – точка локального максимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с “–“ на “+”, то x_0 – точка локального минимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального минимума.

Так, в примере 1 для функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, являются стационарными, так как $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Согласно вышеупомянутой теореме точка $x_1 = 1$ есть точка максимума, а точка $x_2 = 3$ – точка минимума данной функции.

Теорема (*второй достаточный признак существования экстремума*). Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в ее δ – окрестности $O_\delta(x_0)$, является точкой локального максимума функции, если $f''(x_0) < 0$, и точкой локального минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Для функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ в примере 1 $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$, $f''(1) < 0$, $f''(3) > 0$. По теореме 4.4 стационарные точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются соответственно ее точками максимума и минимума.

Теорема (*третий достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть функция $f(x)$ *n* раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума, если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума, если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Чтобы найти абсолютные (глобальные) экстремумы, т. е. наименьшее $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и наибольшее ее значение $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ на отрезке $[a,b]$, следует вычислить ее значения в точках локального экстремума, принадлежащих отрезку, а также на концах отрезка, и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них. На концах отрезка в силу характера своего поведения функция может принимать значения большие или меньшие, чем значения в точках экстремума (рис. 3.8), поэтому концы отрезка включаются при отыскании абсолютных экстремумов.

Выпуклость и вогнутость графика функции и точки перегиба

Важной характеристикой функции, а тем самым и ее графика, является понятие выпуклости.

Определение. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке (a,b), называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) в этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Рассмотрим геометрический смысл понятия выпуклости:

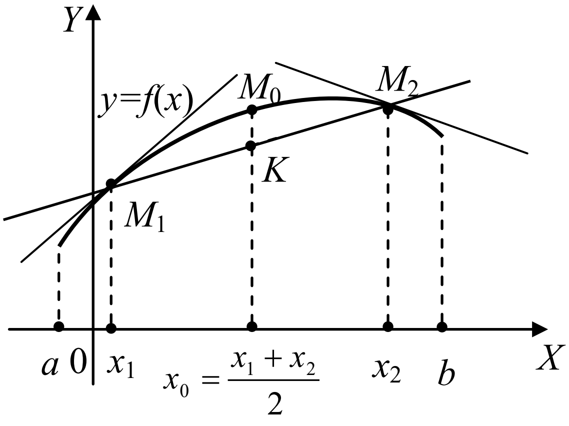


Рис. 3.12

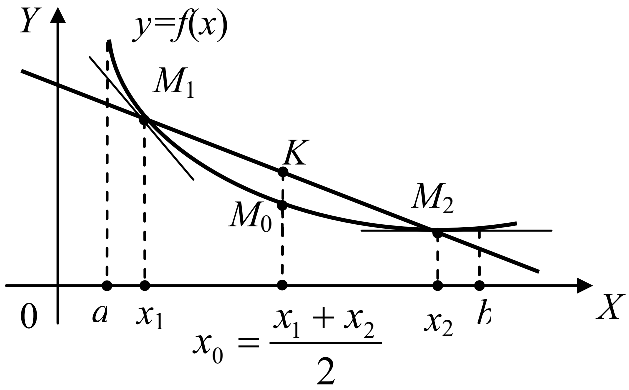


Рис. 3.13

Пусть M_1, M_2, M_0 – точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами соответственно x_1, x_2, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ есть ордината точки K – середины отрезка M_1M_2, а $f(x_0)$ есть ордината точки M_0 графика функции с абсциссой, равной абсциссе точки *K*. Условие выпуклости функции (вогнутости) означает, что для всех точек M_1 и M_2 графика функции $y = f(x)$ середина K хорды M_1M_2 лежит ниже (рис. 3.12), либо выше (рис. 3.13) соответствующей точки M_0 графика или совпадает с точкой M_0. Приведем еще одно определение выпуклости графика функции.

Определение. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым вверх (или выпуклым) на (a,b), если дуга кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$ расположена ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции (рис. 3.12).

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым вниз (или вогнутым) на (a,b), если дуга кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$ расположена выше любой касательной, проведенной к графику этой функции (рис. 3.13).Далее будем называть графики выпуклыми или вогнутыми соответственно.

Достаточным признаком выпуклости (вогнутости) функции (графика функции) является следующая

Теорема. Если функция $y = f(x)$ на (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ для любых $x \in (a,b)$, то график функции на (a,b) выпуклый. Если $f(x)$ на (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a,b)$, то график этой функции на (a,b) вогнутый.

Определение. Точка $M(x^*, f(x^*))$ называется *точкой перегиба* графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, если в этой точке направление выпуклости меняется на противоположное. При этом точка x^* называется точкой перегиба функции $f(x)$.

В точке перегиба кривая $y = f(x)$ переходит с одной стороны касательной в этой точке (если такая касательная существует) на другую сторону, т. е. кривая и касательная взаимно пересекаются (рис. 3.14).

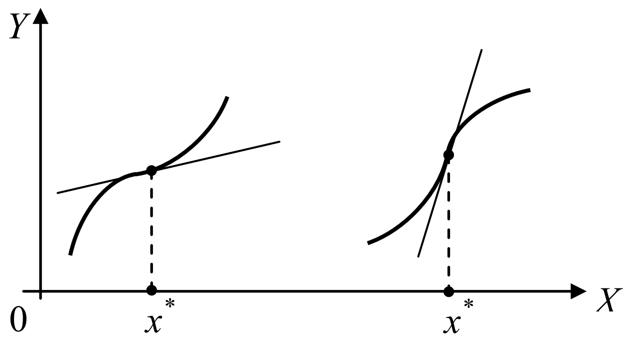


Рис. 3.14

Теорема (*необходимое условие существования точки перегиба*). Если x^* является точкой перегиба функции $f(x)$ и функция имеет в точке x^* непрерывную вторую производную $f''(x^*)$, то $f''(x) = 0$.

Теорема (*достаточное условие существования точки перегиба*). Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x^* и в этой точке $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, а при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ является точкой перегиба графика $f(x)$.

3.16. Исследование функций и построение графиков

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график.

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, определить точки разрыва, вертикальные асимптоты, если они существуют, нули, точки пересечения графика функции с осью OY, периодичность, симметрию (четность, нечетность).
2. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
3. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
4. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка области определения. Найти наклонные асимптоты графика функции, если они существуют.
5. По результатам исследований построить график функции.

Порядок исследования целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции. Например, если функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при неотрицательных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

При исследовании поведения функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такую прямую называют *асимптотой графика*. Различают вертикальные $x = x_0$ (в точках x_0 разрыва второго рода) и наклонные асимптоты. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная.

Наклонная асимптота определяется уравнением $y = kx + b$, при $k = 0$ имеем горизонтальную асимптоту. Здесь $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

В математике, физике и других науках встречаются задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых величин.

Общая схема решения таких задач состоит в следующем. Устанавливается зависимость рассматриваемой величины y от некоторой величины x. Из условия задачи определяется промежуток возможного изменения аргумента x. Построенная функция $y = f(x)$ исследуется на экстремум.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

4.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

4.2. Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

76-2*30=16.

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

4.3. Контрольная работа №1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задание 1.1

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) методом Гаусса;

б) по формулам Крамера;

в) матричным методом.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ x + 3y - z = 7, \\ 3x - y + 4z = 12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3, \\ 3x - 4y + 2z = -5, \\ 2x + 7y - 5z = 13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9, \\ x + 5y - 5z = -2, \\ 4x - 2y + 7z = 24. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 4z = 9, \\ y + z = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 17, \\ 2x - 3y + 5z = 16, \\ 3x + 4y - z = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6, \\ x + 3y - 5z = 6, \\ 3x - 2y + 6z = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22, \\ x - 3y - 6z = -9, \\ 2x + 4y - 4z = 10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y - z = 14, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y - z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y - z = 10. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 11, \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8, \\ -2x + y + z = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + z = 15, \\ x - y + 2z = -5, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + 6y - 2z = 17, \\ 4x - y + 5z = -21, \\ x + 3y - z = 8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x - y + z = -2, \\ 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y = 8. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -2, \\ 2x + y + 6z = 9, \\ 4x + 2z = 6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x + 3y + 5z = -9, \\ 2x - 3y - 7z = 12, \\ 2x - 3y - 5z = 10. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x+2y+4z=9, \\ -3x+2y+z=1, \\ 4x+5y+3z=16. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x-y+2z=0, \\ 4x+y+4z=6, \\ x+y+3z=4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x-y-3z=10, \\ 2x-y-2z=9, \\ -x+3y+2z=-5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+2y+4z=7. \end{cases}$

Задание 1.2

Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 5x_1+5x_2-x_3=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-3x_4=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3-8x_4=0, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1-4x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_3-5x_4=0, \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 5x_1+3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 5x_1+x_2-2x_3=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-x_2-3x_3-2x_4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-5x_2+8x_3+x_4=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 15x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 25x_3 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 25x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 18x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 8x_1 - 26x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_2 - 9x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 13x_4 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 13x_1 - 11x_2 - 24x_3 - 15x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 - 16x_3 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 9x_2 - 21x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 - 13x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0, \\ 8x_1 + 17x_2 + 9x_3 = 0, \\ 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 21x_2 - 22x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 - 16x_4 = 0, \\ 3x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 13x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

Задание 1.3.

Для указанных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти:

1) скалярное произведение векторов $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$;
2) проекцию вектора $\vec{c_1}$ на вектор $\vec{c_2}$;
3) проверить коллинеарны ли или ортогональны векторы $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$;
4) найти модуль векторного произведения векторов $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$.

1. $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{3, 0, -1\}$, $\vec{c_1} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{b} - \vec{a}$.

2. $\vec{a} = \{1, 0, 1\}$, $\vec{b} = \{-2, 3, 5\}$, $\vec{c_1} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

3. $\vec{a} = \{-2, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 7\}$, $\vec{c_1} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c_2} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

4. $\vec{a} = \{-1, 2, -3\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 1\}$, $\vec{c_1} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c_2} = 8\vec{a} - \vec{b}$.

5. $\vec{a} = \{3, 5, 4\}$, $\vec{b} = \{5, 9, 7\}$, $\vec{c_1} = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

6. $\vec{a} = \{1, 4, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{c_1} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c_2} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$.

7. $\vec{a} = \{1, -2, 5\}$, $\vec{b} = \{3, -1, 10\}$, $\vec{c_1} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c_2} = \vec{b} - 2\vec{a}$.

8. $\vec{a} = \{3, 4, -1\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 1\}$, $\vec{c_1} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c_2} = \vec{b} - 2\vec{a}$.

9. $\vec{a} = \{-2, -3, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 0, -5\}$, $\vec{c_1} = 3\vec{a} + 9\vec{b}$, $\vec{c_2} = -\vec{a} - 3\vec{b}$.

10. $\vec{a} = \{1, 4, 2\}$, $\vec{b} = \{3, -2, 6\}$, $\vec{c_1} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{b} - 6\vec{a}$.

11. $\vec{a} = \{5, 0, -1\}$, $\vec{b} = \{7, 2, 3\}$, $\vec{c_1} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{b} - 6\vec{a}$.

12. $\vec{a} = \{0, 3, -2\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 1\}$, $\vec{c_1} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

13. $\vec{a} = \{-2, 7, -1\}$, $\vec{b} = \{-3, 5, 2\}$, $\vec{c_1} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c_2} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

14. $\vec{a} = \{3, 7, 0\}$, $\vec{b} = \{1, -3, 4\}$, $\vec{c_1} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c_2} = \vec{b} - 2\vec{a}$.

15. $\vec{a}=\{-1,2,-1\}$, $\vec{b}=\{2,-7,1\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

16. $\vec{a}=\{7,9,-2\}$, $\vec{b}=\{5,4,3\}$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{b}-\vec{a}$.

17. $\vec{a}=\{5,0,-2\}$, $\vec{b}=\{6,4,3\}$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{b}-10\vec{a}$.

18. $\vec{a}=\{8,3,-1\}$, $\vec{b}=\{4,1,3\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{b}-4\vec{a}$.

19. $\vec{a}=\{3,-1,6\}$, $\vec{b}=\{5,7,10\}$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-2\vec{a}$.

20. $\vec{a}=\{1,-2,4\}$, $\vec{b}=\{7,3,5\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-2\vec{a}$.

21. $\vec{a}=\{3,7,0\}$, $\vec{b}=\{4,6,-1\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{a}-7\vec{b}$.

22. $\vec{a}=\{2,-1,4\}$, $\vec{b}=\{3,-7,-6\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

23. $\vec{a}=\{5,-1,-2\}$, $\vec{b}=\{6,0,7\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{b}-6\vec{a}$.

24. $\vec{a}=\{-9,5,3\}$, $\vec{b}=\{7,1,-2\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+5\vec{b}$.

25. $\vec{a}=\{4,2,9\}$, $\vec{b}=\{0,-1,3\}$, $\vec{c_1}=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c_2}=4\vec{a}-3\vec{b}$.

26. $\vec{a}=\{2,-1,6\}$, $\vec{b}=\{-1,3,8\}$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}-5\vec{b}$.

27. $\vec{a}=\{5,0,8\}$, $\vec{b}=\{-3,1,7\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c_2}=12\vec{b}-9\vec{a}$.

28. $\vec{a}=\{-1,3,4\}$, $\vec{b}=\{2,-1,0\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

29. $\vec{a}=\{4,2,-7\}$, $\vec{b}=\{5,0,-3\}$, $\vec{c_1}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{b}-2\vec{a}$.

30. $\vec{a}=\{2,0,-5\}$, $\vec{b}=\{1,-3,4\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

Задание 1.4

По координатам точек A_1, A_2, A_3, A_4 найти:

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

2) вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1, A_2, A_3.

3) компланарны ли векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ и $\overrightarrow{A_2A_4}$.

1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, 3)$.

2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(-5, 2, -4)$.

3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$.

4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(-7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$.

5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$.

6. $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(-1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$.

7. $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$.

8. $A_1(2, -1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, -6)$, $A_4(-10, 9, -7)$.

9. $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, -4)$, $A_4(-1, -4, 6)$.

10. $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(5, -3, 2)$, $A_3(-2, -6, -3)$, $A_4(-2, 2, -1)$.

11. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$.

12. $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$.

13. $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$.

14. $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$.

15. $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$.

16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$.

17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$.

18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$.

19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$.

20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.

21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$.

22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -1, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$.

23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$.

24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$.

25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$.

26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, -5)$, $A_4(3, 1, -4)$.

27. $A_1(1,\ 3,\ 0)$, $A_2(4,-1,\ 2)$, $A_3(3,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 3,\ 5)$.

28. $A_1(-2,-1,-1)$, $A_2(0,\ 3,\ 2)$, $A_3(3,\ 1,-4)$, $A_4(-4,\ 7,\ 3)$.

29. $A_1(-3,-5,\ 6)$, $A_2(2,1,-4)$, $A_3(0,-3,-1)$, $A_4(-5,\ 2,-8)$.

30. $A_1(2,\ -4,-3)$, $A_2(5,-6,\ 0)$, $A_3(-1,\ 3,-3)$, $A_4(-10,-8,\ 7)$.

Задание 1.5

Даны точки M_0, M_1, M_2, M_3. Написать уравнения:

1) плоскости $M_1M_2M_3$;

2) прямой M_2M_3;

3) прямой M_0M_1 перпендикулярный к плоскости $M_1M_2M_3$.

Найти:

4) координаты точки, симметричной точке M_0 относительно плоскости $M_1M_2M_3$;

5) синус угла между прямой M_0M_2 и плоскостью $M_1M_2M_3$;

6) расстояние от точки M_0 до плоскости $M_1M_2M_3$.

1. $M_1(-3,\ 4,-7)$, $M_2(1,\ 5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$, $M_0(-12,7,-1)$.

2. $M_1(-1,\ 2,-3)$, $M_2(4,-1,\ 0)$, $M_3(2,\ 1,-2)$, $M_0(1,-6,-5)$.

3. $M_1(-3,-1,\ 1)$, $M_2(-9,\ 1,-2)$, $M_3(3,-5,\ 4)$, $M_0(-7,\ 0,-1)$.

4. $M_1(-1,-1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 0,\ 3)$, $M_3(2,\ 1,-1)$, $M_0(-2,\ 4,\ 21)$.

5. $M_1(1,\ 2,0)$, $M_2(1,-1,\ 2)$, $M_3(0,\ 1,-1)$, $M_0(2,-1,\ 4)$.

6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,-1)$, $M_3(2,-2,\ 1)$, $M_0(-5,-9,\ 1)$.

7. $M_1(1,\ 2,-3)$, $M_2(1,\ 0,1)$, $M_3(-2,-1,\ 6)$, $M_0(3,-2,-9)$.

8. $M_1(3,\ 10,-1)$, $M_2(-2,\ 3,-5)$, $M_3(-6,\ 0,-3)$, $M_0(-6,\ 7,-10)$.

9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,\ 0,-1)$, $M_0(-2,\ 3,\ 5)$.

10. $M_1(0,-3,\ 1)$, $M_2(-4,\ 1,\ 2)$, $M_3(2,-1,\ 5)$, $M_0(-3,\ 4,-5)$.

11. $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,-1,\ 2)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$, $M_0(4,\ 3,\ 0)$.

12. $M_1(-2,-1,-1)$, $M_2(0,\ 3,\ 2)$, $M_3(3,\ 1,-4)$, $M_0(-21,\ 20,-16)$.

13. $M_1(-3,-5,6)$, $M_2(2,1,-4)$, $M_3(0,-3,-1)$, $M_0(3,6,68)$.

14. $M_1(2,-4,-3)$, $M_2(5,-6,0)$, $M_3(-1,3,-3)$, $M_0(2,-10,8)$.

15. $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,2)$, $M_3(1,1,4)$, $M_0(-3,2,7)$.

16. $M_1(1,3,6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$, $M_0(5,-4,5)$.

17. $M_1(-4,2,6)$, $M_2(2,-3,0)$, $M_3(-10,5,8)$, $M_0(-12,1,8)$.

18. $M_1(7,2,4)$, $M_2(7,-1,-2)$, $M_3(-5,-2,-1)$, $M_0(10,1,8)$.

19. $M_1(2,1,4)$, $M_2(3,5,-2)$, $M_3(-7,-3,2)$, $M_0(-3,1,8)$.

20. $M_1(-1,-5,2)$, $M_2(-6,0,-3)$, $M_3(3,6,-3)$, $M_0(10,-8,-7)$.

21. $M_1(0,-1,-1)$, $M_2(-2,3,5)$, $M_3(1,-5,-9)$, $M_0(-4,-13,6)$.

22. $M_1(5,2,0)$, $M_2(2,5,0)$, $M_3(1,2,4)$, $M_0(-3,-6,-8)$.

23. $M_1(2,-1,-2)$, $M_2(1,2,1)$, $M_3(5,0,-6)$, $M_0(14,-3,7)$.

24. $M_1(-2,0,-4)$, $M_2(-1,7,1)$, $M_3(4,-8,-4)$, $M_0(-6,5,5)$.

25. $M_1(14,4,5)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-2,-6,-3)$, $M_0(-1,-8,7)$.

26. $M_1(1,2,0)$, $M_2(3,0,-3)$, $M_3(5,2,6)$, $M_0(-13,-8,16)$.

27. $M_1(2,-1,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-5,3,7)$.

28. $M_1(1,1,2)$, $M_2(-1,1,3)$, $M_3(2,-2,4)$, $M_0(2,3,8)$.

29. $M_1(2,3,1)$, $M_2(4,1,-2)$, $M_3(6,3,7)$, $M_0(-5,-4,8)$.

30. $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,3,1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-3,-7,6)$.

Задание 1.6

Решить следующие задачи:

1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2,7,3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1,5,6)$, $M_2(-1,7,10)$.

3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0{,}5)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1), B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$.

10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oz – отрезок $c=2$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(4, 1, -1)$ и $\vec{b}=(2, -1, 2)$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 0)$, $B(2, -1, -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+2y+3z-7=0$.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-3y+z-1=0$ и $x-y+5z+3=0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $\vec{a}=(5, -2, -1)$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\vec{AB}$, если $A(5,-2,3)$, $B(1,-3,5)$.

16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2,-3,3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2,3,-4)$, $M_2(-1,2,-3)$.

18. Показать, что прямая $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,-4,1)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3,-5,2)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1,2,3)$ и $N(-3,4,-5)$ параллельно оси Oz.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,3,-1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$.

23. Найти проекцию точки $M(4,-3,1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$.

24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны.

25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,-3,-4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

26. При каких значениях n и A прямая $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-5}{n}=\dfrac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$?

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $a=(4, 4, 3)$.

30. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

Задание 1.7

Определить вид поверхности, заданной уравнением $f(z, y, z)=0$ и показать её расположение относительно системы координат.

1. $6x^2+5y^2-10z^2-30=0$;
2. $2x^2-2y^2+5z^2-10=0$;
3. $3y^2+5z^2-x+2=0$;
4. $5x^2+6y^2+15z^2-30=0$;
5. $3x^2+5y^2-4z+4=0$;
6. $8x^2+5y^2-40=0$;
7. $5x^2+4z^2-20=0$;
8. $9x^2+12y^2+4z^2-72=0$;
9. $10x^2-9y^2-15z^2-90=0$;
10. $6z^2-3y^2-2x^2-18=0$;
11. $27x^2-63y^2+21z^2=0$;
12. $3x^2-7y^2-2z^2=42$;
13. $z^2-2y=-4x^2$;
14. $2y^2+6z^2=3x$;
15. $2x^2+4y^2-5z=0$;
16. $4x^2+5y^2-10z^2=0$;
17. $7y^2+z^2=14x^2$;
18. $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$;
19. $3x^2+y^2-3z=0$;
20. $2y=x^2+4z^2$;
21. $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$;
22. $5x^2-y^2-15z^2+15=0$;
23. $9x^2-6y^2+6z^2+1=0$;
24. $4x^2+3y^2=4z$;
25. $8x^2-y^2-2z^2-32=0$;
26. $x^2-6y^2+z^2-12=0$;

27. $x-3z^2=9y^2$;

28. $2x^2+z-1=0$;

29. $2y=x^2+4z^2$;

30. $y-4z^2=3x^2$.

Задание 1.8

Вычислить пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+3)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^3)-(1+3x)}{x+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$;

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+5}\right)^{n}$;

13. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$;

14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n}$;

15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$;

16. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$;

17. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$;

19. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$;

20. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{3}}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$;

21. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{4}}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$;

22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$;

23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$;

24. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^n$;

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$;

26. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$;

27. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$;

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n+10}\right)^{n-3}$;

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2}-16}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

Задание 1.9

Вычислить пределы, в пунктах а), б), в) используя правило Лопиталя.

а) 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \mathrm{tg}x}{\ln\sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln \mathrm{tg}x}$; 3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{0.5-\sin^2 x}$;

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$; 6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{ctg}x-1}{\sin 4x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}-2}$; 9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$;

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$; 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\mathrm{tg}2x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{\log_2(x-2)}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \mathrm{tg}7x}{\ln \mathrm{tg}2x}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; 18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{x}}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^x}{1-3^x}$; 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-2^x}{\ln x}$; 21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\cos 3x}{e^{2x}-\cos x}$; 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; 24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$;

25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}$; 26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{4x}}$; 27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin 6x}{\cos 3x}$;

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{x-\frac{\pi}{3}-\sin 3x}{\cos\frac{3x}{2}}$; 29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{x-\frac{\pi}{6}-\cos 3x}{\cos 6x}$; 30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{\ln x}$.

б) 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$; 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; 8. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$; 12. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2\operatorname{tg}x}$; 14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; 15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x^2}\right)^{x^2}$;

19. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; 20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}x)^{5\operatorname{ctg}x}$; 23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^{x}$; 24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; 26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3x}}$; 27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$; 29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln \operatorname{ctg} x\right)^{\operatorname{tg} x}$; 30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin \alpha x\right)^{\frac{1}{\sin \rho x}}$.

в) 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10(x+\pi)}{e^{x^2}-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$; 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\left(\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$; 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x-1}}$; 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$; 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left(\pi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)}$; 24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(x-\pi)}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$; 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$; 27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$; 29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)}$; 30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$.

Задание 1.10

Вычислить производные функции.

1. а) $y = x^3 \ln 3x$; б) $y = \sqrt{x^3}\,\mathrm{ctg}(x^2)$; в) $y = \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{arctg}3x$.

2. а) $y = 2x^3\mathrm{ctg}x$; б) $y = \dfrac{\ln\cos 2x}{3x^2+1}$; в) $y = \mathrm{e}^{-x^2}\sin 5x^3$.

3. а) $y = (1+x^2)\mathrm{tg}3x$; б) $y = \dfrac{\arccos x^2}{1-x^4}$; в) $y = \mathrm{tg}^2(3x^3) - x$.

4. а) $y = x^3 \sin 5x$; б) $y = 5x^2\sqrt{1-2x^3}$; в) $y = \mathrm{arctg}(\ln 5x^2)$.

5. а) $y = \mathrm{e}^x(x^3 - 2x + 1)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x^2\right)$; в) $y = x^3 \cdot 2^{-\cos 5x}$.

6. а) $y = \dfrac{\mathrm{tg}x\ln x}{5^x}$; б) $y = 3^{2x}\mathrm{ctg}2x^3$; в) $y = \mathrm{e}^{-2x}\ln\mathrm{tg}3x$.

7. а) $y = 6^x \arccos x$; б) $y = \sqrt[3]{2\mathrm{tg}3x}$; в) $y = \sin^3 2x \cdot \mathrm{e}^{-\cos 5x}$.

8. а) $y = 2x^3\log_4 x$; б) $y = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{3x^2 - 4x + 5}$; в) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

9. а) $y = 6^x \cos 3x$; б) $y = \sqrt[3]{3\mathrm{tg}^2 5x}$; в) $y = \mathrm{arctg}(\ln 5x^2)$.

10. а) $y = 2x^3\lg x$; б) $y = \mathrm{e}^{-\sin 3x}\ln 5x^2$; в) $y = 2\mathrm{tg}^3(3x^2 - x - 1)$.

11. а) $y = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{2+\sin x}$; б) $y = 3\cos(2x^2 - x - 1)$; в) $y = \mathrm{e}^{-2x}\ln(\sin 3x)$.

12. а) $y = \dfrac{3\cos x}{2x^3+1}$; б) $y = 2^{-x^3}\sin^3 x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6\sqrt{x}}$.

13. а) $y = 3x^2 \sin 2x$; б) $y = \cos^2 8x \ln x$; в) $y = \cos 2^x + 4^{-x^3}$.

14. а) $y = (\sin x + \cos x)\cdot\sqrt[3]{x^{21}}$; б) $y = 2\sqrt[3]{\arcsin 2x}$; в) $y = 3^{2x^2}\mathrm{tg}(\ln 3x)$.

15. а) $y = (2x+1)^{11}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \cos(3x^2 - 2x + 1)$; в) $y = 2\mathrm{tg}^3(3x^2 - 1)$.

16. а) $y = \dfrac{-5\sin x}{2-\sqrt{x}}$; б) $y = 3x^2\cos^2(x^3 - 1)$; в) $y = 3\sqrt{x^3}\ln(2x^3 - 1)$.

17. а) $y = \dfrac{x^3 - \sin x}{\sqrt{x^3}}$; б) $y = \sqrt[4]{\arccos 3x^3}$; в) $y = \ln\left(\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{-x^3}\right)$.

18. а) $y=\cos(1-\pi x)+\sin 3x$; б) $y=\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=10^{5-3x^2}$.

19. а) $y=2x^3\log_4 x$; б) $y=2\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{tg}5x^2$; в) $y=\dfrac{\arcsin 2x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

20. а) $y=\dfrac{1+4\sin x}{2-3\cos x}$; б) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}2x^3}{2^{3-2x^2}}$; в) $y=3\ln\left(x^2+\sqrt{1+x}\right)$.

21. а) $y=-8\sqrt[4]{x^3}\arcsin x$; б) $y=x^3\mathrm{tg}^2 3x^4$; в) $y=\mathrm{e}^{-\cos 2x}\sqrt{\sin 3x}$.

22. а) $y=\dfrac{\log_2 x+1}{\sqrt[5]{x^2}}$; б) $y=\left(3-2x^3\right)\sin^2 3x$; в) $y=\arccos\left(1-x^2\right)$.

23. а) $y=-3\sqrt[5]{3x}\,\mathrm{arctg}x$; б) $y=2\sin^6\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)$; в) $y=\sin 2x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

24. а) $y=4^x\arccos x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-6x}}{x^{12}}$; в) $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 2x\mathrm{e}^{-\cos 2x}$.

25. а) $y=-3\arcsin x+4\sqrt{2x}$; б) $y=\dfrac{1}{6}x^6\left(\mathrm{e}^{6x}-x\mathrm{e}^{-6x}\right)$; в) $y=\dfrac{1}{6}x\ln\left(\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

26. а) $y=\dfrac{\ln x-1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; б) $y=\sqrt[5]{\arccos x^3}$; в) $y=\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)$.

27. а) $y=3^x\mathrm{arctg}x+\sqrt{1-x^2}$; б) $y=x^4\left(\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{-4x}\right)$; в) $y=\log_2\left(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\right)$.

28. а) $y=3\cos\sqrt{\pi x}+\sin^2 3x$; б) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+3x}}$; в) $y=x\cdot 7^{5-2x+3x^2}$.

29. а) $y=\arcsin x^2+\sqrt{x^2+3}$; б) $y=x^3\mathrm{tg}\dfrac{x^4}{3}$; в) $y=\sqrt{x}\mathrm{ctg}5x^3$.

30. а) $y=\mathrm{e}^x\ln\left(x^3-2\right)$; б) $y=\ln\left(x+\cos^2 8x\right)$; в) $y=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt[4]{3x^2+4}}$.

Задание 1.11

Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $y=x^2(1+\ln x)$; $y+x=\mathrm{e}^{y+x}$; $\begin{cases} y=\mathrm{arctg}(t+1); \\ x=1+t^2. \end{cases}$

2. $y=\mathrm{arctg}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$; $\quad x+y+1=\ln(1+x-y)$; $\quad \begin{cases} y=\cos t; \\ x=\sin\left(1+t^2\right). \end{cases}$

3. $y=\cos^2 x\mathrm{e}^{2x}$; $\quad y=x^2+\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $\quad \begin{cases} y=\ln t; \\ x=\mathrm{e}^{1-t^2}. \end{cases}$

4. $y=x\mathrm{e}^{3x}$; $\quad \mathrm{e}^{x-y}=\cos(x+2y+1)$; $\quad \begin{cases} y=\cos t; \\ x=\sin 2t. \end{cases}$

5. $y=x^2\cos 3x$; $\quad y+x=\sin\dfrac{y}{x}$; $\quad \begin{cases} y=\mathrm{e}^t; \\ x=\sin t. \end{cases}$

6. $y=\cos\left(4x^2+x\right)$; $\quad y=\mathrm{e}^{y+x}$; $\quad \begin{cases} y=t\cos t; \\ x=\sin t. \end{cases}$

7. $y=\mathrm{ctg}x+x^2\mathrm{e}^x$; $\quad y=\ln(x-y)+y^2-x^2$; $\quad \begin{cases} y=\mathrm{e}^{2t}; \\ x=\mathrm{sh}t. \end{cases}$

8. $y=(x+1)\cos 2x$; $\quad x-y=\mathrm{arctg}\left(x^2+y^2\right)$; $\quad \begin{cases} y=\ln t; \\ x=\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$

9. $y=x^x$; $\quad \mathrm{e}^{xy}=\ln(1+x-y)$; $\quad \begin{cases} y=\cos^2 t+\arccos t; \\ x=2t+\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$

10. $y=x^2\ln\left(1+x^2\right)$; $\quad y=x^3+\mathrm{e}^{xy}$; $\quad \begin{cases} y=\sin t; \\ x=\dfrac{t^2}{1+t}. \end{cases}$

11. $y=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-3x}$; $\quad \mathrm{e}^{x+y}=x^2-y^2$; $\quad \begin{cases} y=\cos 2t; \\ x=\mathrm{e}^{-2t^2}. \end{cases}$

12. $y=\left(x^3+1\right)\ln\left(1+x^2\right)$; $\quad (y+x)^2+(y-x)^2=\mathrm{e}^{x+y}$; $\quad \begin{cases} y=\cos^2 t; \\ x=\mathrm{e}^{-t^2}. \end{cases}$

13. $y=\left(\sin^2 x+1\right)\mathrm{e}^{-3\cos x}$; $\quad \mathrm{e}^{x+y^2}=\cos\left(x^2-y^2\right)$; $\quad \begin{cases} y=\cos t^2; \\ x=\ln\cos t. \end{cases}$

14. $y=\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\ln x$; $\quad x^2+4y^2=y\mathrm{e}^x$; $\quad \begin{cases} y=\cos\left(1+t^2\right); \\ x=2\operatorname{arctg} t^2. \end{cases}$

15. $y=x^{\ln x}$; $\quad \operatorname{arctg}(x+y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\quad \begin{cases} y=2\sin t; \\ x=\dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

16. $y=x^2\cos\left(x^2+1\right)$; $\quad y^3-x^3=2xy+1$; $\quad \begin{cases} y=\sqrt{1-t^2}; \\ x=\ln\left(1+\sqrt{1-t^2}\right). \end{cases}$

17. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}$; $\quad y=x^2+\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $\quad \begin{cases} y=2t^2+3t; \\ x=\sin^2\left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

18. $y=\sin(n\arcsin x)$; $\quad y=x+\ln\left(x^2+y^2\right)$; $\quad \begin{cases} y=2t^2+1; \\ x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{at}. \end{cases}$

19. $y=\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}$; $\quad y+x=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $\quad \begin{cases} y=a\cos^2 t; \\ x=b\sin t. \end{cases}$

20. $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $\quad xy^3+2y-x^3=a$; $\quad \begin{cases} y=2t\cos t; \\ x=2t\sin t. \end{cases}$

21. $y=\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$; $\quad \dfrac{x+y}{x-y}=\mathrm{e}^{2x+y}$; $\quad \begin{cases} y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{1+t^2}}; \\ x=\cos\left(1+t^2\right). \end{cases}$

22. $y=\dfrac{a}{b+\sqrt{1-x^2}}$; $\quad x^2-y^2=\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$; $\quad \begin{cases} y=2a\cos\left(1+t^2\right); \\ x=2b\sin\left(1+t^2\right). \end{cases}$

23. $y=\sin(1+\arcsin x)$; $\qquad x^2\mathrm{arctg}y=y^2-x^2$; $\qquad \begin{cases} y=2at\cos t; \\ x=at\sin t. \end{cases}$

24. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $\qquad \cos^3 x+\cos^3 y=3\cos x\cos y$; $\qquad \begin{cases} y=\dfrac{2m}{1+4\mathrm{tg}^2 t}; \\ x=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t^2}. \end{cases}$

25. $y=x^2+\sqrt{x^2+1}+\ln x$; $\quad x^2=\arcsin(x+y)+y^2$; $\qquad \begin{cases} y=\mathrm{arctg}(t^2+1); \\ x=2\sin(t+1). \end{cases}$

26. $y=(1+x^2)\arccos(\alpha\cos x)$; $\qquad y=\cos\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)+x$; $\qquad \begin{cases} y=2t^2+\mathrm{e}^{-\frac{a}{t^2}}; \\ x=\mathrm{e}^{2\alpha t+1}. \end{cases}$

27. $y=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x^2+1}$; $\qquad y=x^2+\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $\qquad \begin{cases} y=2t^2+3t; \\ x=\sin^2\left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right). \end{cases}$

28. $y=\sin(n\arcsin x)$; $\qquad y=x+\ln(x^2+y^2)$; $\qquad \begin{cases} y=2t^2+1; \\ x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{at}. \end{cases}$

29. $y=\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}$; $\qquad y+x=\sin\dfrac{y}{x}$; $\qquad \begin{cases} y=a\cos^2 t; \\ x=b\sin t. \end{cases}$

30. $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $\qquad xy^3+2y-x^3=a$; $\qquad \begin{cases} y=2t\cos t; \\ x=2t\sin t. \end{cases}$

Задание 1.12

Найти d^2y функций:

1. $y=x-\ln\left(2+\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}\right)$; $\qquad$ 2. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)}{8}$;

3. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}$;

4. $y=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$;

5. $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$;

6. $y=\frac{2}{3}\sqrt{\left(\operatorname{arctg}e^x\right)^3}$;

7. $y=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\operatorname{arctg}e^x$;

8. $y=\ln\left(e^x+1\right)+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6\left(e^x+1\right)^3}$;

9. $y=\frac{2\left(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2x^x-1}\right)}{\ln 2}$;

10. $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$;

11. $y=\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$;

12. $y=\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x-\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$.

13. $e^{\alpha x}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2\left(a^2+4b^2\right)}\right]$;

14. $y=x+\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$;

15. $y=x-3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{6}}$;

16. $y=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$;

17. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^{-x}$;

18. $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$;

19. $y=x-\ln\left(1+e^x\right)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}$;

20. $y=\frac{e^{x^3}}{1+x^3}$;

21. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$;

22. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$;

23. $y=\ln\frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$;

24. $y=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)$;

25. $y=\frac{e^x}{2}\left[\left(x^2-1\right)\cos x+(x-1)^2\sin x\right]$;

26. $y=\operatorname{arctg}\left(e^x-e^{-x}\right)$;

27. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left[\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\right]$;

28. $y=-\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3x}$;

29. $y=\arcsin e^{-x}-\sqrt{1-e^{2x}}$.

30. $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^4+2x^2+2\right)$.

Задание 1.13

Выполнить полное исследование функции и построить её график:

1. $y = 3\left(\dfrac{x^4}{2} - x^2\right)$;

2. $y = 1 + \dfrac{4x+1}{x^2}$;

3. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$;

4. $y = \dfrac{x}{\ln\sqrt{x}}$;

5. $y = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3$;

6. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$;

8. $y = \dfrac{x^2 + 16}{4x}$;

9. $y = (x-3)^2(x-2)$;

10. $y = (x+1)e^{-2x}$;

11. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$;

12. $y = \ln\dfrac{x}{x-1}$;

13. $y = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$;

14. $y = xe^{-x^2}$;

15. $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$;

16. $y = (x+4)e^{2x}$;

17. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$;

18. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$;

19. $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}$;

20. $y = xe^{2x-1}$;

21. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$;

22. $y = \ln\dfrac{x-1}{x-2}$;

23. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$;

24. $y = e^{\frac{1}{2-x}}$;

25. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$;

26. $y = x + \ln(x^2 - 4)$;

27. $y = \dfrac{3x^2 - 7x - 16}{x^2 - x - 6}$;

28. $y = \ln(1 + x^2)$;

29. $y = \dfrac{x^3 - 8}{2x^2}$;

30. $y = x^2e^{-x}$.

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1.1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее.

1) методом Гаусса;
2) по формулам Крамера;
3) матричным способом.

Дана система: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

Решение. С помощью элементарных преобразований матрицы найдем ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 12 \\ 3 & -2 & -5 & 5 \end{array}\right) \sim\sim- \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 14 & -20 & 28 \\ 0 & -14 & 48 & -28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 14 & 20 & 28 \\ 0 & 0 & 28 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A = 3$ (числу неизвестных) Из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система совместна и имеет единственное решение.

При нахождении рангов матриц осуществлен прямой ход метода Гаусса. Имеем систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ \quad 14x_2 + 20x_3 = 28, \\ \qquad 28x_3 = 0, \end{cases}$$

поэтому $x_3 = 0$; $14x_2 = 28$, т.е. $x_2 = 2$, $x_1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = -1$, $x_1 = 3$.

Найдем решение по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 3 + (-2)(-4)\cdot 1 + 2(-2)(-5) -$$

$$-\left(1\cdot 3\cdot(-5) + (-2)(-4)\cdot 3 + 2\cdot(-2)\cdot 3\right) = 58.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 12 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 174; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & 12 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 116; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 12 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $x_1 = \dfrac{174}{58} = 3$, $x_2 = \dfrac{116}{58} = 2$, $x_3 = \dfrac{0}{58} = 0$.

В матричном виде исходную систему можно записать $AX = H$, поэтому $X = A^{-1}H$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице системы, H – матрица-столбец свободных членов.

Найдем $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 23; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

Имеем $A^{-1} = \dfrac{1}{58}\begin{pmatrix} 1 & 16 & 23 \\ -10 & 4 & 2 \\ -7 & 4 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение системы:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{58}\begin{pmatrix}1&16&23\\-10&14&2\\-7&4&13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\12\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{58}\begin{pmatrix}174\\116\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$, т.е. $x_1=3$; $x_2=2$; $x_3=0$.

Задание 1.2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

Дана система: $$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+3x_4=0,\\ x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ 4x_1+x_2+7x_3+5x_4=0,\\ 5x_1-x_2+5x_3+7x_4=0.\end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы, используя элементарные преобразования матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&3\\1&1&3&1\\4&1&7&5\\5&-1&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&-1&1&3\\4&1&7&5\\5&-1&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-3&-5&1\\0&-3&-5&1\\0&-6&-10&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-3&-5&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rang} A=2$, т.е. исходная система эквивалентна система:

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ -3x_2-5x_3+x_4=0.\end{cases}$$

Так как $\operatorname{rang} A=2<4$ (числа неизвестных), то система имеет бесчисленное множество решений, зависящее от $4-2=2$ произвольных постоянных.

Пусть $\begin{vmatrix}1&1\\0&-3\end{vmatrix}=-3$ – базисный минор, тогда x_1 и x_2 – базисные неизвестные, x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4 из системы.

$$\begin{cases}x_1+x_2=-3x_3-x_4,\\ -3x_2=5x_3-x_4,\end{cases}$$

$$x_2=-\frac{5}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4,$$

$$x_1=-\frac{4}{3}x_3-\frac{4}{3}x_4.$$

Пусть $x_3 = C_1$; $x_4 = C_2$, тогда решение имеет вид:

$$\left(-\frac{4}{3}C_1 - \frac{4}{3}C_2 \quad -\frac{5}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \quad C_1 \quad C_2 \right)^T \quad \forall C_1 C_2 \in R.$$

Задание 1.3. Для указанных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти:

1) скалярное произведение векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$;

2) проекцию вектора $\vec{c}_1$ на вектор $\vec{c}_2$;

3) выяснить коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$?

4) найти модуль векторного произведения векторов.

Дано: $\vec{a}(3; -4; 1)$, $\vec{b}(-1; 2; 5)$, $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$.

$$\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b} = (3; -4; 1) + (-2; 4; 10) = (1; 0; 11);$$
$$\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (6; -8; 2) - (-3; 6; 15) = (9; -14; -13).$$

Вычислим скалярное произведение

$$(\vec{c}_1, \vec{c}_2) = 1 \cdot 9 + 0 \cdot (-14) + 11 \cdot (-13) = 9 - 143 = -134.$$

Проекцию вектора $\vec{c}_1$ на вектор $\vec{c}_2$ найдем по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{c}_2} \vec{c}_1 = \frac{(\vec{c}_1, \vec{c}_2)}{|\vec{c}_2|} = \frac{-134}{\sqrt{9^2 + (-14)^2 + (-13)^2}} = \frac{-145}{\sqrt{446}}.$$

Скалярное произведение векторов не равно нулю, значит векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ не ортогональны. Так как $\frac{1}{9} \neq \frac{0}{-14} \neq \frac{11}{-13}$, то векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ не коллинеарны.

Вычислим модуль векторного произведения векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$.

$$\left| [\vec{c}_1, \vec{c}_2] \right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 11 \\ 9 & -14 & -13 \end{matrix} \right\| = \left| 154\vec{i} + 112\vec{j} - 14\vec{k} \right| = \sqrt{154^2 + 112^2 + (-14)^2} = \sqrt{36456}.$$

Задание 1.4. По координатам точек A_1, A_2, A_3, A_4 найти:

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$;

2) вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1\ A_2\ A_3$.

3) выяснить компланарны ли векторы $\overline{A_2A_1}$, $\overline{A_2A_3}$ и $\overline{A_2A_4}$.

Даны точки $A_1(0;\,3;\,2)$, $A_2(-1;\,4;\,-3)$, $A_3(5;\,0;\,7)$, $A_4(-2;\,5;\,1)$.

Решение.

1) Найдем координаты векторов $\overline{A_1A_2}(-1;\,1;-5)$ и $\overline{A_1A_3}(5;\,-3;\,5)$.

$$S=\left|\left[\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 5\end{matrix}\right\|=\left|-10\vec{i}-20\vec{j}-2\vec{k}\right|=$$

$$=\sqrt{(-10)^2+(-20)^2+(-2)^2}=\sqrt{504}.$$

2) Объем тетраэдра численно равен модулю смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$. $\overline{A_1A_4}$, деленному на шесть, так как $\overline{A_1A_4}(-2;\,2;\,-1)$, то

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 5\\ -2 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-3-10-50+30+10+5\right|=3.$$

Высоту тетраэдра из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ найдем по формуле $H=\dfrac{\left|\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|}{\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|}$. Из предыдущих вычислений имеем: $\left|\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|=|-18|=18$, $\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|=\sqrt{504}=4\sqrt{26}$, поэтому $H=\dfrac{18}{4\sqrt{26}}=\dfrac{9}{2\sqrt{26}}$.

3) Векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$. $\overline{A_1A_4}$ образуют пирамиду, объем которой не равен нулю, следовательно эти векторы некомпланарны.

Задание 1.5. Даны точки M_0, M_1, M_2, M_3. Написать уравнение

1) плоскости $M_1M_2\ M_3$;

2) прямой $M_1\ M_2$;

3) прямой M_0M, перпендикулярной к плоскости $M_1M_2\,M_3$.

Найти:

4) координаты точки, симметричной точке M_0 относительно плоскости $M_1 M_2 M_3$;

5) синус угла между прямой $M_0 M_2$ и плоскостью $M_1\ M_2\ M_3$;

6) расстояние от точки M_0 до плоскости $M_1\ M_2\ M_3$.

Даны точки $M_1(1;\ 5;\ 7)$, $M_2(-3;\ 6;\ 3)$, $M_3(-2;\ 7;\ 3)$, $M_0(1;\ -1;\ 2)$.

Решение.

1) Уравнение плоскости M_1, M_2, M_3, проходящей через три точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \text{ откуда } \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -3-1 & 6-5 & 3-7 \\ -2-1 & 7-5 & 3-7 \end{vmatrix}=0,$$

$$\text{или } 4x-4y-5z+51=0.$$

2) Уравнение прямой $M_1 M_2$, проходящей через две точки имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, откуда $\dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y-5}{6-5}=\dfrac{z-7}{3-7}$ или $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-7}{-4}$.

3) Уравнение плоскости $M_1\ M_2\ M_3$ найдено в 1-м пункте: $4x-4y-5z+51=0$. Нормальный вектор плоскости $\overline{n}(4;\ -4;\ -5)$ является направляющим вектором искомой прямой $M_0 M$, уравнение которой найдем по формуле $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Имеем $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{-5}$.

4) Найдем координаты точки N пересечения прямой $M_0 M$ и плоскости $M_1\ M_2\ M_3$, решив систему

$$\begin{cases} 4x-4y-5z+51=0, \\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{-5}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x-4y-5z+51=0, \\ \begin{cases} x=1+4t, \\ y=-1-4t, \\ z=2-5t. \end{cases} \end{cases}$$

Имеем, $4(1+4t)-4(-1-4t)-5(2-5t)+51=0$, $t=\frac{49}{57}$, откуда $N\left(\frac{153}{57}; -\frac{153}{57}; -\frac{131}{57}\right)$. Если P – точка, симметричная точке M_0 относительно плоскости $M_1M_2M_3$, то точка N – середина отрезка M_0P, поэтому

$$x_N=\frac{x_{M_0}+x_p}{2},\ \ y_N=\frac{y_{M_0}+y_p}{2},\ \ z_N=\frac{z_{M_0}+z_p}{2},$$

откуда найдем $x_P=2x_N-x_{M_0}=\frac{305}{57}$. Аналогично $y_p=-\frac{249}{57}=-\frac{83}{19}$; $z_p=-\frac{376}{57}$.

5) Уравнение прямой M_0M_2 напишем по двум точкам:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\ \text{имеем}\ \frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z-2}{-1}.$$

Угол между прямой M_0M_2 и плоскостью $M_1\,M_2\,M_3$ найдем по формуле

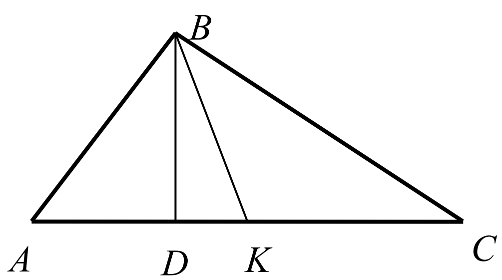
$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}\cdot\vec{s})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{4\cdot(-4)+(-4)\cdot(-7)+(-5)\cdot(-1)}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}\sqrt{4^2+7^2+1^2}}=\frac{17}{\sqrt{57}\sqrt{66}}.$$

6) Расстояние от точки M_0 до плоскости $M_1\,M_2\,M_3$ найдем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|4\cdot1-4(-1)-5\cdot2+51|}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}}=\frac{49}{\sqrt{57}}.$$

Задание 1.6. Решить задачу. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $A(-6;3)$, уравнения высоты $7x+3y-5=0$ и медианы $9x-y-15=0$, проведенных из одной вершины.

Решение. Нарисуем схематично треугольник ABC и пусть BD – высота, BK – медиана.



Проверка показывает, что медиана и высота не проходит через вершину A. Найдем координаты точки B, решив систему:

$$\begin{cases}7x+3y-5=0\\9x+y-15=0\end{cases}\Rightarrow x=2;\ y=-3.$$

Итак, $B(2;-3)$. Уравнение стороны AB. Найдем по двум точкам $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ или $\frac{x+6}{2+6}=\frac{y-3}{-3-3}$ или $3x+4y+6=0$.

Из уравнения высоты $7x+3y-5=0$ имеем вектор $\vec{n}(7;\,3)$, который является направляющим вектором для прямой AC, поэтому ее уравнение имеет вид $\frac{x+6}{7}=\frac{y-3}{3}$ или $3x-7y+39=0$.

Найдем точку пересечения K стороны AC с медианой.

$$\begin{cases}3x-7y+39=0\\9x+y-15=0\end{cases}\Rightarrow K(1;\,6).$$

Точка K – середина отрезка AC, поэтому $x_K=\frac{x_A+x_C}{2}$, $y_K=\frac{y_A+y_C}{2}$. Откуда $x_C=8;\ y_C=9$. По точкам B и C найдем уравнение стороны BC $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{12}$, или $2x-y-7=0$.

Задание 1.7. Решить задачу. Найти расстояние между параллельными прямыми, если $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{2-4}{5}\ (l_1)$ и $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{3}=\frac{2+2}{5}\ (l_2)$.

Решение. Расстояние можно найти как высоту параллелограмма, построенного на векторах на векторах $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 5.1).

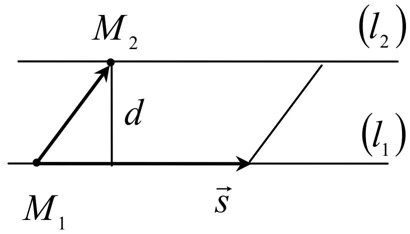


Рис. 5.1

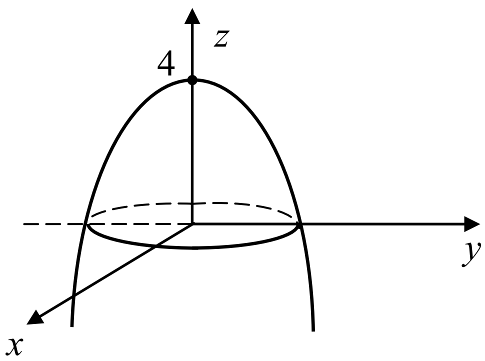
Здесь $\vec{s}(2;\,3;\,5)$, $M_1(1;\,-1;\,4)$, $M_2(5;\,0;-2)$, $M_1M_2(4;\,1;\,-6)$.

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2};\vec{s}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&1&-6\\2&3&5\end{vmatrix}=23\vec{i}-32\vec{j}+10\vec{k},$$

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{23^2+32^2+10^2}}{\sqrt{4+9+25}}=\frac{\sqrt{1653}}{\sqrt{38}}.$$

Задание 1.8. Определить вид поверхности и показать ее расположение относительно осей координат, если $z=4-x^2-y^2$.

Решение. Преобразуем уравнение $z-4=-\left(x^2+y^2\right)$, получим



эллиптический параболоид, вершина которого в точке $(0;0;4)$.

Задание 1.9. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x+x^4}{2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-1}{n^2+3n-2}\right)^{n^2}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3+5x+x^4}{2+x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{5}{x^3}+1}{\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

$$\text{б) } \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2+3n-2}\right)^{n^2}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+3n-2}\right)^{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+3n-2}\right)^{\left(n^2+3n-2\right)\frac{n^2}{n^2+3n-2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n-2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\mathrm{e}^1.$$

Задание 1.9. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}-1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\sin x-\cos x)'}{(1-\mathrm{tg}x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{-\dfrac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}-1}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x^2}-1\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}(-6x)}{2x}=-3$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\ln\dfrac{x+3}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x+1}=$

$\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot(2x+1)}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{6x+3}{x}}=\ln\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+3}{x}}=6$.

Задание. 1.10. Вычислить производные функций.

а) $y=\cos(1-\pi x)\cdot 10^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\sqrt[3]{8-4\sin^2 x}$; в) $y=\arcsin^2(\ln(ax+b))$.

Решение.

а) $y=\cos(1-\pi x)\cdot 10^{\frac{1}{x}}$, $y'=(\cos(1-\pi x))'\cdot 10^{\frac{1}{x}}+\cos(1-\pi x)\left(10^{\frac{1}{x}}\right)'=$

$=-\sin(1-\pi x)\cdot(1-\pi x)'\cdot 10^{\frac{1}{x}}+\cos(1-\pi x)\cdot 10^{\frac{1}{x}}\ln 10\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\sin(1-\pi x)(-\pi)\cdot 10^{\frac{1}{x}}+$

$+\cos(1-\pi x)\cdot 10^{\frac{1}{x}}\ln 10\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=10^{\frac{1}{x}}\left(\pi\sin(1-\pi x)-\dfrac{1}{x^2}\ln 10\cos(1-\pi x)\right)$.

б) $y=\sqrt[3]{8-4\sin^2 x}=\left(8-4\sin^2 x\right)^{\frac{1}{3}}$; $y'=\dfrac{1}{3}\left(8-4\sin^2 x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(8-4\sin^2 x\right)'=$

$=\dfrac{1}{3}\left(8-4\sin^2 x\right)^{-\frac{2}{3}}(-8\sin x\cos x)=-\dfrac{4}{3}\sin 2x\left(8-4\sin^2 x\right)^{-\frac{2}{3}}$.

в) $y=\arcsin^2(\ln(ax+b))$; $y'=2\arcsin(\ln(ax+b))\cdot(\arcsin(\ln(ax+b)))'=$

$2\arcsin(\ln(ax+b))\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2(ax+b)}}(\ln(ax+b))'=$

$=2\arcsin(\ln(ax+b))\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2(ax+b)}}\dfrac{a}{ax+b}$.

Задание. 1.11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если

а) $y = x^{x^2}$; б) $y^2 + x = \mathrm{e}^{x-y}$; в) $\begin{cases} y = \arccos\left(1 + t^2\right), \\ x = \mathrm{e}^{-t^2}. \end{cases}$

Решение.

а) $y = x^{x^2}$, $\ln y = x^2 \ln x$; $\dfrac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}$;

$y' = y\left(2x \ln x + x\right) = x^{x^2} \cdot x\left(2\ln x + 1\right)$.

б) $y^2 + x = \mathrm{e}^{x-y}$. Функция $y(x)$ задана неявно, поэтому $2y \cdot y' + 1 = \mathrm{e}^{x-y}\left(1 - y'\right)$ или $2y \cdot y' + \mathrm{e}^{x-y} \cdot y' = \mathrm{e}^{x-y} - 1$, $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{x-y} - 1}{2y + \mathrm{e}^{x-y}}$.

в) $\begin{cases} y = \arccos\left(1 + t^2\right), \\ x = \mathrm{e}^{-t^2}. \end{cases}$ Воспользуемся формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, где

$$y'_t = \left(\arccos\left(1 - t^2\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - t^2\right)^2}}\left(2t\right) = \frac{-2t}{\sqrt{-2t^2 - t^4}} = \frac{-2}{\sqrt{-2 - t^2}} \approx \frac{-2}{\sqrt{-2 - t^2}};$$

$$x'_t = \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^1 = \mathrm{e}^{-t^2}\left(-2t\right),\ y'_x = \frac{1}{\sqrt{-2 - t^2} \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot t}.$$

Задача 1.12. Найти d^2y, если $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

Решение.

$$d^2 y = y'' \cdot dx^2.\ y' = \left(\left(\ln^2 x - 4\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln^2 x - 4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln^2 x - 4\right)^1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln^2 x - 4}} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{\ln^2 x - 4}};$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot x\sqrt{\ln^2 x - 4} - \ln x\left(\sqrt{\ln^2 x - 4} + \dfrac{x 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 4}}\right)}{\left(x \cdot \sqrt{\ln^2 x - 4}\right)^2} =$$

$$=\frac{\sqrt{\ln^2 x-4}-\ln x\left(\sqrt{\ln^2 x-4}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x+4}}\right)}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)}=$$

$$=\frac{\ln^2 x-4-\ln x\left(\ln^2 x-4+\ln x\right)}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\ln^3 x}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$d^2y=-\frac{\ln^3 x}{x^2\left(\ln^2 x-4\right)^{\frac{3}{2}}}dx^2.$$

Задание 1.13. Выполнить полное исследование функции и построить ее график, если $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по указанной схеме.

а) Находим $D(f)$. Функция определена для $x\neq\pm\sqrt{3}$.

$$D(f)=\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[U\left]-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right[U\left]\sqrt{3},\infty\right[.$$

Функция непрерывна на $D(f)$.

$x=\pm\sqrt{3}$ – точки разрыва второго рода,

$x=\pm\sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты графика функции.

Нули функции $y=0$ при $x=0$. График функции пересекает координатные оси в начале координат. Функция непериодична. Функция нечетная, т.к. $D(f)$ симметрична и $f(-x)=-f(x)$, т.е. $\dfrac{(-x)^3}{3-x^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}$. График функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию для $x\geq 0$.

б) Для нахождения вертикальных асимптот вычисляем пределы

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(3-x^2\right)x}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = -x$.

в) Находим первую производную

$$y' = \frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x^4}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

Производная функция определена на $D(f)$. В промежутке $\left[0,+\infty\right[$ производная обращается в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y' > 0$ и $y' < 0$ $\forall x \geq 0$.

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} > 0 \Rightarrow 9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow 0 < x < 3.$$

Функция возрастает на $\left]0, \sqrt{3}\right[U \left]\sqrt{3}, 3\right[$.

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} < 0 \Rightarrow 9 - x^2 < 0 \Rightarrow x > 3.$$

Функция убывает на $\left]3, \infty\right[$.

г) Находим $f''(x)$:

$$y'' = \frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2 - \left(9x^2-x^4\right)\cdot 2\left(3-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4} = \frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Вторая производная функции определена на $D(f)$. Определяем интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств

$$y'' > 0, \quad y'' < 0. \quad \forall x \geq 0.$$

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{3},$$

Кривая вогнутая на $\left]\sqrt{3}, \infty\right[$. $\dfrac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3} < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\sqrt{3},\ x > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{3}.$$

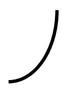
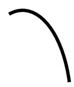
Кривая выпуклая на $\left]\sqrt{3},\infty\right[$. В точке $x=0$, $y''=0$ и в $O_\delta(0-0)$ $f''(x)<0$, а в $O_\delta(0+0)$ $f''(x)>0$, т. е. точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости кривой.

д) Определяем с помощью $f''(x)$ локальные экстремумы. Так как $f''(3)<0$, точка $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии точка $x=-3$ является точкой локального минимума.

Итак, $\max\limits_{x\in O_\delta(3)} f(x)=-4{,}5$; $\min\limits_{x\in O_\delta(-3)} f(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции $f(x)$ на $[0;\infty[$ заносим в таблицу

Таблица 1

x	0	$\left]0;\sqrt{3}\right[$	$\sqrt{3}$	$\left]\sqrt{3};3\right[$	3	$]3;\infty[$
y'	0	+	не сущ.	+	0	–
y''	0	+	не сущ.	–	–	–
y	0 точка перегиба	+	не сущ.	–	– 4,5 max	–
						

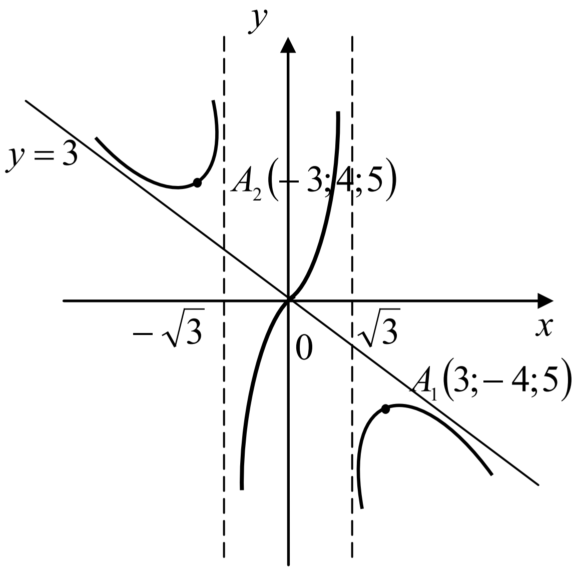


Рис. 4.1

ОГЛАВЛЕНИЕ