

## КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТОВ

Гундина М.А., Абдыев А.Д.

Белорусский национальный технический университет

**Аннотация.** Рассмотрена методика построения разложения сигнала по базовым вейвлетам. Приведены особенности базового вейвлета. Проанализирован подход к оптимальному выбору базового вейвлета для разложения соответствующего сигнала.

**Ключевые слова:** вейвлет, разложение сигнала, восстановление.

## COMPUTER IMPLEMENTATION OF THE SIGNAL DECOMPOSITION USING WAVELETS

M.A. Hundzina, A.D. Abdyev

Belarusian National Technical University

**Abstract:** The method of constructing the decomposition of the signal on basic wavelets is considered. The features of the basic wavelet are given. The approach to the optimal choice of the basic wavelet for the decomposition of the corresponding signal is analyzed.

**Keywords:** wavelet, signal decomposition, reduction.

Сейчас вейвлеты широко применяются в классической и прикладной математике. С их помощью раскладывают сигналы, сжимают изображения, анализируют сигналы медицинского назначения и др. На сегодняшний день применение вейвлет-анализа позволяет раскладывать сигнал, учитывая пространственную и временную координаты. Такой подход был успешно применен для анализа сигнала (звук, изображение) и в численном анализе (быстрые алгоритмы для интегральных преобразований).

Вейвлет-преобразование позволяет представить исходный сигнал с помощью составляющих с разными частотами, каждая из которых может быть проанализирована в подходящем масштабе.

Достоинство вейвлет-преобразования заключается в локализации и получении большего количества информации о сигнале, по сравнению, например, с преобразованием Фурье.

Одно из первых упоминание о вейвлетах появилось в литературе по цифровой обработке и анализу сейсмических сигналов в работах А. Гроссмана [1–2] и Ж. Морле, хотя впервые термин «вейвлет» был предложен Риккертом (1972).

Над развитием теории вейвлетов работали известные ученые Ж. Фурье, А. Хаар, А. Кальдерон, Н.Н. Лузин, А.Н. Колмогоров [3], И. Добеши [4], И.Я. Новиков [5], С.А. Терехов [6], К. Чуи [7–8].

Вейвлеты нашли широкое применение в работах, посвященных анализу астрономических и геофизических данных [9–12].

В отличие от традиционно применяемого для анализа сигналов преобразования Фурье вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата рассматриваются как неизвестные независимые переменные. В результате этого появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно, как в физическом (время, координата), так и в частотном пространствах.

Роль базовых вейвлетов могут выполнять разнообразные функции, в частности, внешне отдаленно напоминающие функции со скачками уровня, синусоиды. Это обеспечивает разнообразную реализацию сигналов (с разрывами и локальными скачками) вейвлетами разных типов и открывает простор в поиске и подборе наиболее подходящих вейвлетов исходя из постановки решаемой задачи.

Рассмотрим базовый вейвлет типа «мексиканская шляпа». Его временной образ характеризуется аналитическим выражением:

$$mhat(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1)$$

С помощью вейвлетов сигнал представляется как совокупность членов разложения, созданных на основе некоторого прототипа – базовой функции. Под масштабированием вейвлета подразумевается его растяжение (сжатие). Вводится в рассмотрение масштабирующий коэффициент. Чем больше частота, тем сильнее сжатие «синусоиды».

Масштабный коэффициент действует и на график вейвлета. Чем меньше рассматриваемый масштаб, тем более «сжатым» оказывается соответствующий вейвлет (рисунок 1).

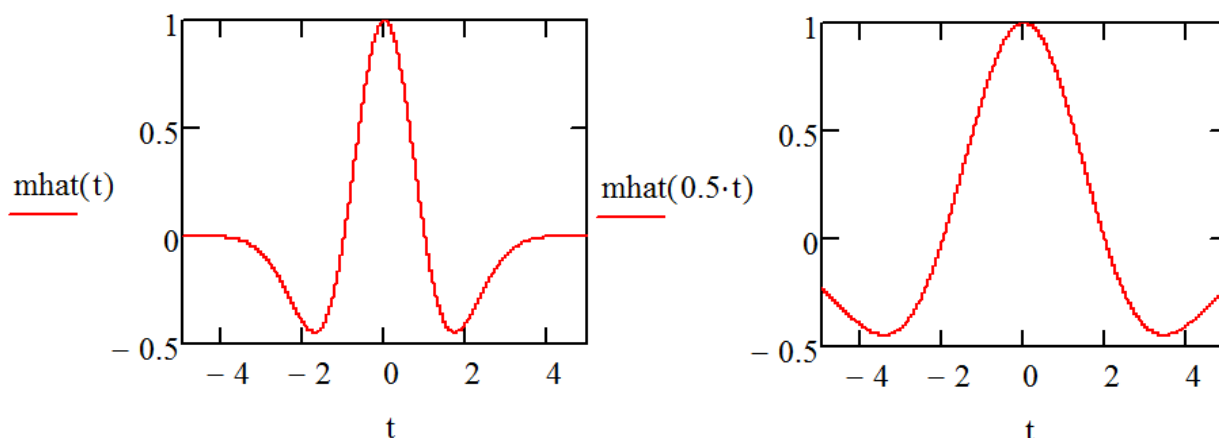


Рисунок 1 – График вейвлета при разных масштабирующих коэффициентах

Известно, что масштаб вейвлета обратно пропорционален частоте такого сигнала. Сдвиг вейвлета означает задержку или ускорение полученного фронта. Задержка функции на значение k изображена на рисунке 2.

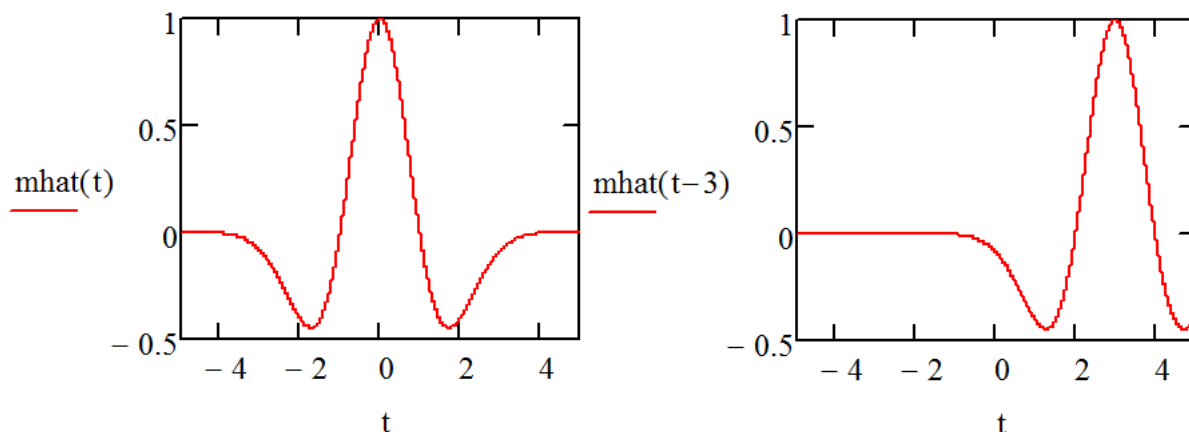


Рисунок 2 – Вейвлет с запаздыванием

Для того, чтобы наглядно рассмотреть пример вейвлет-преобразования, воспользуемся одним из самых простых вейвлетов – вейвлетом Хаара (рисунок 3).

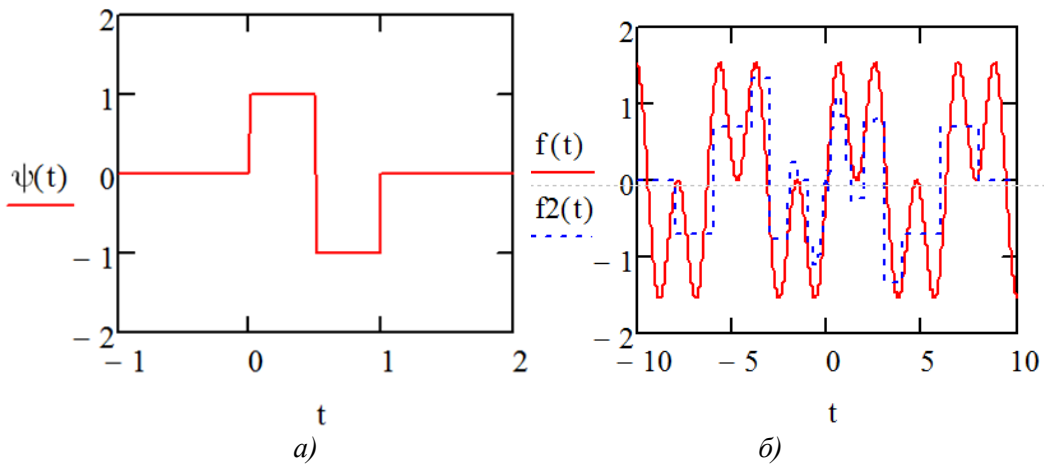


Рисунок 3 – График вейвлета Хаара (а), график исходного сигнала и его разложения (б)

Рассмотрим в качестве примера методику разложение исходного сигнала:

$$f(t) = \sin(t) + \sin(3t). \quad (2)$$

$$c(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(j, k, t)} dt \quad (3)$$

$$f(x) = \sum_{j, k=-2}^2 c_{j, k} \Psi_{j, k}(x). \quad (4)$$

Теперь заменим базовый вейвлет на следующую функцию (график представлен на рисунке 4):

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/3, \\ -0.5 & 1/3 < t \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

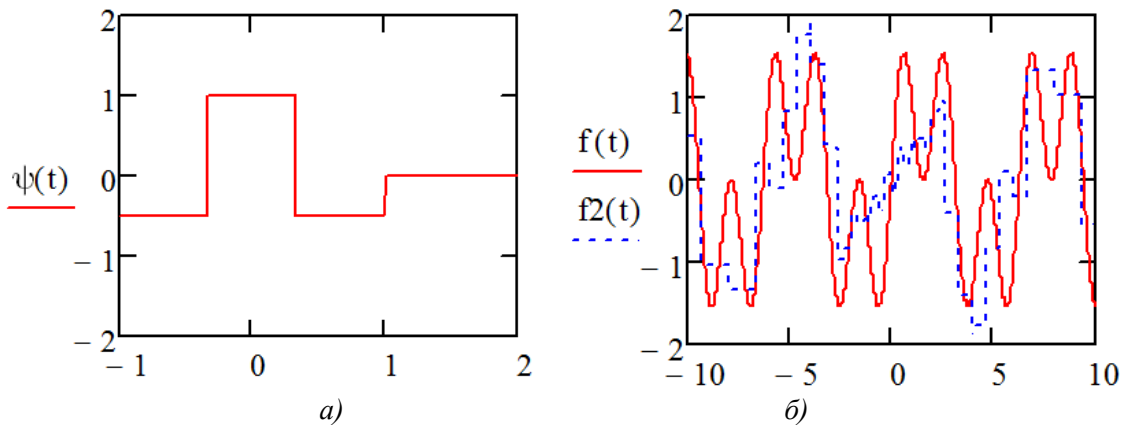


Рисунок 4 – График вейвлета  $f_2(x)$  (а), график исходного сигнала и его разложения (б)

Рассмотрим базовый вейвлет в следующем виде (график представлен на рисунке 5):

$$f_3(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (6)$$

$$f_4(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (7)$$

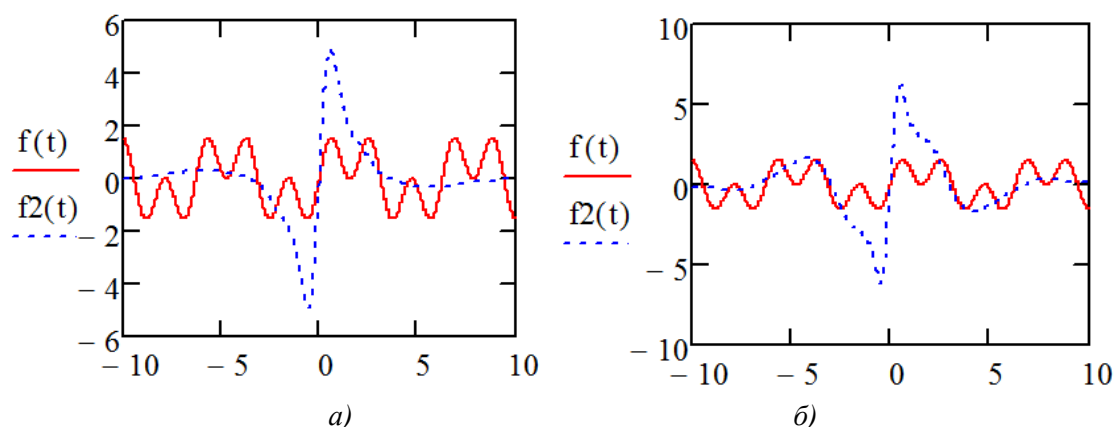


Рисунок 5 – Разложение с помощью вейвлета  $f_3(x)$  (а), разложение с помощью вейвлета  $f_4(x)$  (б)

Для данной функции были удержаны четыре члена разложения, в зависимости от формы графика может быть осуществлен оптимальный выбор базового вейвлета, который соответствует минимальному среднеквадратическому отклонению от заданного сигнала.

При решении практических задач коэффициенты вейвлет-представления могут принимать значения, близкие к нулю. Иногда они оказываются настолько малыми что их можно отбросить. Это означает возможность существенного сокращения объема информации о сигнале, его сжатие и очистку от шумов. На данный момент существует множество сложных вейвлетов, таких, например, как сферические вейвлеты. Они позволяют анализировать сигналы различной природы, такие как данные астрофизики, астрономии, геологии и др., что позволяет получить приближенное представление реального сигнала.

### Список использованной литературы

1. Grossman A. Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms / A. Grossman, J. Morlet // *Mathematics + Physics, Lectures on Recent Results*. – 1985. – V. 1.
2. Grossman A. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape / A. Grossman, J. Morlet // *SIAM J. Math. Anal.* – 1984. – V. 15. – P. 723.
3. Колмогоров, А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения / А.Н. Колмогоров // *ДАН СССР*. – 1957. – Т. 114, № 5. – С. 953–956.
4. Daubechies, I. Ten lectures on wavelets / I. Daubechies. – Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
5. Новиков И. Я. Основные конструкции всплесков / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 1997. – Т. 3, № 4. – С. 999–1028.
6. Терехов, С. А. Вейвлеты и нейронные сети. Лекция для школы-семинара "Современные проблемы нейроинформатики" / С.А. Терехов. – М.; МИФИ, 2001.
7. Chui C.K. Wavelets: a tutorial in theory and applications / C.K. Chui // Academic Press, 1992.
9. Чуи К. Введение в вейвлеты. / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
10. Schröder P. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere / P. Schröder, W. Sweldens // *Siggraph*. – 1995. – P. 161–172.
11. McEwen J. D. A high-significance detection of non-Gaussianity in the WMAP 1-year data using directional spherical wavelets / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* – V. 359. – 2005. – P. 1583–1596.
12. Wiaux, Y. Correspondence principle between spherical and Euclidean wavelets / Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vanderghelynst // *Astrophys. J.* – V. 632, no. 1. – 2005. – P. 15–28.
13. McEwen, J.D. Cosmological applications of a wavelet analysis on the sphere / J.D. McEwen, P. Vielva, Y. Wiaux, M.P. Hobson, R.B. Barreiro, L. Cayón, M.P. Hobson, A.N. Lasenby, E. Martínez-González, J. L. Sanz // *Journal of Fourier Analysis and Applications*. – V. 13, no. 4. – 2007. – P. 495–510.