МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

М. А. Гундина
Н. А. Кондратьева

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные
и лазерные приборы и системы»,
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения*

Минск
БНТУ
2019

УДК 517.91(076.2)(075.8)
ББК 22.161.6я7
Г94

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, доцент, зав. центром
«Лаборатория теоретической физики» *Ю. А. Курочкин*;
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической
и прикладной механики БГУ *Д. Е. Мармыш*

Гундина, М. А.

Г94 Математика. Дифференциальные уравнения = Mathematics. Differential equations : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника» / М. А. Гундина, Н. А. Кондратьева. – Минск: БНТУ, 2019. – 43 с.

ISBN 978-985-583-362-9.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерных специальностей приборостроительного факультета БНТУ, изучающих дисциплину «Математика». В пособии приведены материалы для организации системы непрерывного освоения знаний по дисциплине «Математика» по разделу «Дифференциальные уравнения». Теоретический материал, практические задания и упражнения для проверки качества знаний разработаны с учетом рекомендации кафедры «Инженерная математика» приборостроительного факультета Белорусского национального технического университета и согласуются с требованиями к уровню подготовки, определенному базовым стандартом по математике.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей и студентов технических специальностей.

УДК 517.91(076.2)(075.8)
ББК 22.161.6я7

ISBN 978-985-583-362-9

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий со студентами инженерных специальностей приборостроительного, а также спортивно-технического и механико-технологического факультетов Белорусского национального технического университета по дисциплине «Математика». Данное учебно-методическое пособие включает основные темы из раздела «Дифференциальные уравнения», которыми необходимо овладеть обучающимся в течение учебного семестра для дальнейшего успешного усвоения материала по смежным дисциплинам, а также написания курсовых проектов с привлечением компьютерных возможностей и математических расчетов. Темы, которые охватывает данное пособие, соответствуют действующей учебной программе для инженерных специальностей приборостроительного факультета Белорусского национального технического университета.

Авторами методического пособия преследовалась цель повышения уровня усвоения учебного материала, повышения самостоятельности студента при подготовке к экзаменам по данной дисциплине, обеспечения реализации основных принципов дидактики: доступности и системности учебного процесса. Тщательный подбор материала позволяет осуществлять первичное закрепление материала, а также систематизировать знания учащихся и формировать навыки решения дифференциальных уравнений и систем. В пособии содержится обобщающий проверочный тест и задания, рекомендованные для подготовки к олимпиадам по математике среди студентов.

Издание является дополнительным материалом для подготовки преподавателей к контрольным работам по дисциплине «Математика» в рамках действующего Болонского процесса.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

1. Удовлетворяют ли функции соответствующим дифференциальным уравнениям:

а) $y = \sin x - 1 + c \cdot e^{-\sin x}$, $\dfrac{dy}{dx} + y \cdot \cos x = 0,5 \cdot \sin 2x$;

б) $y = c \cdot x + c - c^2$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - \dfrac{dy}{dx} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$;

в) $y = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^{-1} + c_3$, $\left(\dfrac{d^3 y}{dx^3}\right) + \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

Дифференциальные уравнения определяют гравитационные поля материальной среды.	!

2. Удовлетворяют ли функции соответствующим дифференциальным уравнениям:

а) $y = c_1 \cdot x^{-1} + c_2$, $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) + \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$;

б) $y = \ 25 \cdot c \cdot \ln(\cos x)$, $y' = \mathrm{ctg} x$;

в) $y = c \cdot e^{-2x}$ $+ \dfrac{1}{3} \cdot x \cdot y' + 2 \cdot y = e^x$.

Дифференциальные уравнения широко используются в моделях экономической динамики, в которых исследуются не только в зависимости переменных от времени, но и от взаимосвязи во времени.	!

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0.$$

Алгоритм решения базовых задач:

Выразить $\dfrac{dy}{dx}$.	$\Rightarrow$	Разделить переменные.	$\Rightarrow$	Интегрировать.

Пример 1. Решить уравнение $1+(1+y')\cdot e^{y}=0.$

Решение. Запишем y' в другой форме: $y'=\dfrac{dy}{dx}.$

Тогда уравнение примет вид: $1+(1+\dfrac{dy}{dx})\cdot e^{y}=0.$

Выразим из этого уравнения производную: $(1+\dfrac{dy}{dx})\cdot e^{y}=-1;$

$$1+\frac{dy}{dx}e^{y}=-e^{-y};\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1+e^{y}}{e^{y}}.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{e^{y}}{1+e^{y}}dy=-dx.$

Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{e^{y}}{1+e^{y}}dy=-\int dx;\ \ln(1+e^{y})=-x+c.$

Решение представлено в виде общего интеграла.

3. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y\cdot dx - x\cdot dy = 0;$

б) $(1+y)\cdot dx-(1-x)\cdot dy=0;$

в) $(y-5)\cdot dx + x^{2}\cdot dy = 0;$

е) $(1+y^{2})\cdot dx + x\cdot y\cdot dy = 0;$

ж) $e^{y}\cdot(1+x^{2})\cdot dy =$
$= 2\cdot x\cdot(1+y^{2})\cdot dx;$

г) $(1+y^2)\cdot dx-\sqrt{x}\cdot dy=0$;

д) $(1+x^2)\cdot dy-\sqrt{1-y^2}\cdot dx=0$;

з) $(1-x)\cdot dy=y\cdot dx$.

В астрономии дифференциальные уравнения используются для создания модели звездной системы в рамках звездной динамики при анализе взаимодействия частиц.

4. Решить дифференциальные уравнения:

а) $dx=\sqrt{1-x^2}\cdot dy$;

б) $y'=-y^2$;

в) $x\cdot y\cdot dx+(x+1)\cdot dy=0$;

г) $x\cdot x'+t=1$;

д) $y'=y^2/x^2$.

Дифференциальные уравнения используются при определении зависимости интенсивности радиоактивного распада от времени и от количества радиоактивных атомов в образце.

5. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x\cdot y'=2\cdot y$;

б) $z'=10^{x+z}$;

в) $y'=y^2+2\cdot y+1$;

г) $(\cos x)\cdot y'=(y+1)\cdot\sin x$;

д) $x\cdot\sqrt{1+y^2}+y\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot y'=0$;

е) $y'=2\cdot\sqrt{y}$.

В медицинских приложениях дифференциальные уравнения используются для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца, определения вязкости крови.

1.3. Уравнения с однородными функциями

Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$P(x,\ y)\cdot dx + Q(x,\ y)\cdot dy = 0,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового порядка.

Алгоритм решения базовых задач:

Осуществить замену $y = u \cdot x$, $dy = u \cdot dx + x \cdot du$.	⇒	Найти функцию u.	⇒	Найти функцию y.

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 + y^2)\cdot y' = 2x\cdot y$.

Решение. Обратим внимание, что одночлены, присутствующие в уравнении, имеют одинаковую общую степень. Запишем y' в другой форме: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Тогда уравнение примет вид: $(x^2 + y^2)\cdot\dfrac{dy}{dx} = 2x\cdot y$.

Избавимся от дроби: $(x^2 + y^2)\cdot dy = 2x\cdot y\cdot dx$.

Перенесем в одну сторону уравнения:

$$2x\cdot y\cdot dx - (x^2 + y^2)\cdot dy = 0.$$

Обозначим функции при dx, dy функциями P и Q:

$$P\left(x,\ y\right) = 2x\cdot y,\ Q\left(x,\ y\right) = -\left(x^2 + y^2\right).$$

Проверим, являются ли функции однородными:

$$P(k\cdot x,\ k\cdot y) = 2(k\cdot x)\cdot(k\cdot y) = 2k^2\cdot x\cdot y,$$

$$Q(k\cdot x,\ k\cdot y) = -((k\cdot x)^2 + (k\cdot y)^2) = -k^2\cdot\ (x^2 + y^2).$$

Значит, функции P и Q однородные одинакового порядка.
Делаем замену: $y = u \cdot x,\ dy = u \cdot dx + x \cdot du.$
Подставляем замену в уравнение:

$$2x \cdot y \cdot dx - (x^2 + y^2) \cdot dy = 0;$$

$$2x \cdot u \cdot x \cdot dx - (x^2 + \left(u \cdot x\right)^2) \cdot (u \cdot dx + x \cdot du) = 0.$$

Раскрываем скобки:

$$2x^2 \cdot u \cdot dx - (x^2 + u^2 \cdot x^2) \cdot (u \cdot dx + x \cdot du) = 0;$$

$$2x^2 \cdot u \cdot dx - x^2 u \cdot dx - u^3 \cdot x^2 \cdot dx - x^3 \cdot du - x^3 \cdot u^2 \cdot du = 0;$$

$$x^2 \cdot (2u \cdot dx - u \cdot dx - u^3 \cdot dx - x \cdot du - x \cdot u^2 \cdot du) = 0;$$

$$(u - u^3) \cdot dx - x(1 + u^2) \cdot du = 0.$$

Разделяем переменные:

$$(u - u^3) \cdot dx = x(1 + u^2) \cdot du;\ \frac{(1+u^2)}{(u-u^3)} du = \frac{1}{x} \cdot dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(1+u^2)}{(u-u^3)} du = \int \frac{1}{x} dx;\ \int \frac{(1+u^2)}{(u^3 - u\ \ )} du = -\int \frac{1}{x} dx.$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{(3+3u^2)}{(u^3-u)} du = -\int \frac{1}{x} dx;$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{3u^2 - 1}{(u^3 - u)} du + \frac{4}{3} \int \frac{1}{(u^3-u)} du = -\ln x + c,$$

где $\frac{1}{3} \int \frac{(3u^2-1)}{(u^3-u)} du = \frac{1}{3} \ln |u^3 - u| + c.$

Интеграл $\int \frac{1}{(u^3-u)}du$ найдем с помощью разложения подынтегральной функции в сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(u^3-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1}.$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(u^3-u)} = \frac{A(u^2-1)}{u} + \frac{B(u^2+u)}{u-1} + \frac{C(u^2-u)}{u+1}.$$

Приравниваем у равных дробей числители:

$$1 = A(u^2-1) + B(u^2+u) + C(u^2-u);$$

$$4 = Au^2 - A + Bu^2 + Bu + Cu^2 - Cu.$$

Собираем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$u^2:\ 0 = A + B + C,\ \ u:\ 0 = B - C,\ \ u^0:\ 1\ = -A.$$

Решаем полученную систему: $A = -1;\ \ B = 0{,}5;\ \ C = 0{,}5.$

Подставляем полученные коэффициенты в разложение:

$$\frac{1}{(u^3-u)} = \frac{-1}{u} + \frac{0{,}5}{u-1} + \frac{0{,}5}{u+1}.$$

Тогда интеграл может быть найден:

$$\int \frac{1}{(u^3-u)}du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{0{,}5}{u-1} + \frac{0{,}5}{u+1}\right)du = -\ln|u| + 0{,}5 \cdot ln|u-1| +$$
$$+ 0{,}5 \cdot ln|u+1| + c.$$

Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{3}\ln|u^3-u| + \frac{4}{3}\,(-\ln|u| + 0{,}5\cdot\ln|u-1| + 0{,}5\cdot\ln|u+1|) = -\ln x + c.$$

6. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(y-x)\cdot dx+(y+x)\cdot dy=0;$

б) $(x+y)\cdot dx+x\cdot dy=0;$

в) $x\cdot dy-y\cdot dx=\sqrt{x^2+y^2}\cdot dx.$

Дифференциальные уравнения используются при анализе электромагнитных волн (радар, телевидение, современные средства связи).

7. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(8y+10x)\cdot dx+(5y+7x)\cdot dy=0;$

б) $x\cdot y^2\cdot dy=(x^3+y^3)\cdot dx;$

в) $(x+y)\cdot dx-(x-y)\cdot dy=0.$

Дифференциальные уравнения описывают зависимость ускорения тела от равнодействующей всех приложенных к телу сил и массы тела.

8. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(x+2y)\cdot dx-x\cdot dy=0;$

б) $x\cdot y'=y-x\cdot e^{y/x};$

в) $x-y=(x+3y)\cdot y'.$

В биологии дифференциальные уравнения используются для изучения звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животного, а также для определения функции изменения численности популяции микроорганизмов в зависимости от времени.

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Теоретические сведения

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x).$$

Алгоритм решения базовых задач:

Осуществить замену $y = u\cdot v$, $y' = u\cdot v' + v\cdot u'$. → Собрать коэффициент при u и приравнять его к нулю. → Подобрать функцию v. → Подставить ее в исходное уравнение, найти u. → Найти функцию y.

Общий вид уравнения Бернулли:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^m,$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Алгоритм решения базовых задач:

Разделить все члены уравнения на y^m. → Осуществить замену $z = y^{-m+1}$, $z' = (-m+1)\cdot y^{-m}\cdot y'$. → Решить уравнение относительно z. → Найти функцию y.

Пример 3. Решить уравнение $y' - \frac{2}{x} \cdot y = 2x^3$.

Решение. Реализуем замену: $y = u \cdot v,\ y' = u \cdot v' + v \cdot u'$.

Подставляем в уравнение: $u \cdot v' + v \cdot u' - \frac{2}{x} \cdot u \cdot v = 2x^3$.

Собираем коэффициенты при u: $v \cdot u' + u \cdot (v' - \frac{2}{x} \cdot v) = 2x^3$.

Приравниваем этот коэффициент к нулю:

$$v' - \frac{2}{x} \cdot v = 0;\ v' = \frac{2}{x} \cdot v;\ \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} \cdot v;\ \frac{dv}{v} = \frac{2}{x} \cdot dx.$$

Подбираем функцию v: $\ln|v| = 2 \cdot \ln|x|;\ v = x^2$. Подставляем в исходное уравнение: $v \cdot u' + u \cdot 0 = 2x^3;\ x^2 \cdot u' = 2x^3;\ u' = 2x;\ u = x^2 + c$.

Тогда функция y примет вид: $y = u \cdot v = (x^2 + c) \cdot x^2 = x^4 + c \cdot x$.

Пример 4. Решить уравнение $y' + y - x \cdot y^3 = 0$.

Решение. Перенесем последний одночлен вправо: $y' + y = x \cdot y^3$.

Значит, это уравнение Бернулли с показателем $m = 3$.

Разделим все члены этого уравнения на y^3: $y^{-3} \cdot y' + y^{-2} = x$.

Делаем соответствующую замену: $z = y^{-2}, z' = -2y^{-3} \cdot y$.

Тогда из последнего равенства получим: $y^{-3} \cdot y = -0,5 \cdot z'$.

Исходное уравнение примет вид: $-0,5 \cdot z' + z = x$;

$z' - 2z = -2x$ – это линейное уравнение первого порядка.

Реализуем замену: $z = u \cdot v,\ z' = u \cdot v' + v \cdot u'$.

Подставляем в уравнение: $u \cdot v' + v \cdot u' - 2u \cdot v = -2x$.

Собираем коэффициенты при u: $v \cdot u' + u \cdot (v' - 2 \cdot v) = -2x$.

Приравниваем этот коэффициент к нулю: $v' - 2 \cdot v = 0$;

$$v' = 2v;\ \frac{dv}{dx} = 2v;\ \frac{dv}{v} = 2dx.$$

Подбираем v: $\ln|v| = 2x;\ v = e^{2x}$.

Подставляем в исходное уравнение: $v \cdot u' + u \cdot 0 = -2x$;

$e^{2x} \cdot u' = -2x$; $u' = -2x \cdot e^{-2x}$;

$u = -2\int x \cdot e^{-2x} dx.$

Применим интегрирование по частям для нахождения этого интеграла:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x} dx & v = -0,5e^{-2x} \end{pmatrix} =$$

$$= -0,5x \cdot e^{2x} + \int 0,5 \cdot e^{-2x} dx = -0,5x \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-2x} + c.$$

$$u = -2(-0,5x \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-2x} + c) = x \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-2x} + C.$$

Тогда функция y примет вид:

$$z = u \cdot v = (x \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-2x} + C) \cdot e^{2x} = x + 0,5 + C \cdot e^{2x}.$$

Возвращаемся к исходной функции: $z = y^{-2}$,

$$y^{-2} = x + 0,5 + C \cdot e^{2x}.$$

9. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x \cdot y' - 2 \cdot y = 2 \cdot x^4$;

б) $y' + y \cdot \mathrm{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$;

в) $(2x+1) \cdot y' = 4x + 2y$;

г) $(x \cdot y + e^x) \cdot dx - x \cdot dy = 0$;

д) $x^2 \cdot y' + x \cdot y = -1$;

е) $y = x \cdot (y' - x \cdot \cos x)$;

ж) $x \cdot (x-1) \cdot y' + y = x^2 \cdot (2x-1)$;

з) $x \cdot y' + x^2 + x \cdot y - y = 0$;

и) $(1+x^2) \cdot y' - 2 \cdot x \cdot y = (1+x^2)^2$;

к) $3 \cdot y' + y = y^{-2}$;

л) $x \cdot y' - 2 \cdot x \cdot y = 3 \cdot y^2$;

м) $x \cdot y' + 3 \cdot y = 4 \cdot x^2 \cdot y^2$;

н) $x \cdot y' + 2 \cdot y + x^5 \cdot y^3 \cdot e^x = 0$.

Необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах

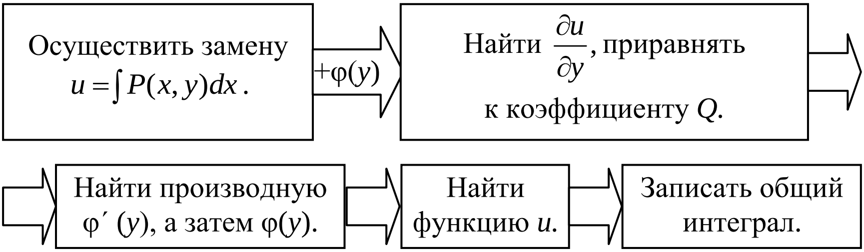
Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$P(x,\ y)\cdot dx + Q(x,\ y)\cdot dy = 0,$$

где для функций P, Q выполняется условие: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Алгоритм решения базовых задач:



Пример 5. Решить уравнение $y^2 \cdot dx + \left(2x\cdot y - 1\right)dy = 0$.

Решение. Введем обозначения: $P(x,\ y) = y^2$; $Q(x,\ y)\ =\ 2x\cdot y - 1$.

Проверим выполнение условия: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$

Значит, исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

$u = \int P(x,\ y)dx = y^2\cdot x + \varphi(y).$

Находим $\dfrac{\partial u}{\partial y}$: $\dfrac{\partial u}{\partial y} =\ 2x\cdot y + \varphi'(y).$

Приравниваем к функции Q: $2x\cdot y + \varphi'(y) = 2x\cdot y - 1;$

$\varphi'(y) = -1;\ \varphi(y) = -y + c.$

Тогда $u = y^2\cdot x - y + c.$

Общий интеграл примет вид: $y^2\cdot x - y = C.$

10. Решить дифференциальные уравнения:

а) $e^{-y} \cdot dx - (2 \cdot y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0;$

б) $(2 - 9 \cdot x \cdot y^2) \cdot x \cdot dx +$
$+(4y^2 - 6x^3) \cdot y \cdot dy = 0;$

в) $x \cdot dx + y \cdot dy = 0;$

г) $(1 + y^2 \cdot \sin 2x) \cdot dx -$
$-2 \cdot y \cdot \cos^2 x \cdot dy = 0;$

д) $2 \cdot x \cdot y \cdot dx + (x^2 + 1) \cdot dy = 0;$

е) $2 \cdot x \cdot y \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy = 0.$

1.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y = 0,$$

где a_k – действительные числа.

Алгоритм решения базовых задач:

Составить характеристическое уравнение. → Найти корни уравнения. → Найти решение, соответствующее каждому корню. → Записать общее решение.

Пример 6. Решить уравнение $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

Решение. Составим соответствующее характеристическое уравнение: $k^5 - 6k^4 + 9k^3 = 0;$ $k^3(k^2 - 6k + 9) = 0;$ $k^3(k-3)^2 = 0.$

$k = 0$ – корень кратности 3, $k = 3$ – корень кратности 2.

Решение примет вид:

$$y = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot x \cdot e^{0x} + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{0x} + c_4 \cdot e^{3x} + c_5 \cdot x \cdot e^{3x} =$$
$$= c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{3x} + c_5 \cdot x \cdot e^{3x}.$$

11. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0;$

в) $y^{(4)} - 3y'' + 3y' - y = 0;$

б) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$; г) $y^{(5)} - 4y''' = 0$.

Дифференциальные уравнения используются при описании волновых свойств материи (в полупроводниках, транзисторах).	!

12. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;

б) $y^{(4)} + y = 0$;

в) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$;

г) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$;

д) $y''' - y' = 0$;

ж) $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0$.

Системы дифференциальных уравнений позволяют описать кинетику химических реакций.	!

1.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y = f(x) \cdot e^{wx},$$

где a_k – действительные числа.

Алгоритм решения базовых задач:

Записать характеристическое уравнение.

Найти корни и общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения.

Частное решение y^* неоднородного уравнения в зависимости от w.

Найти общее решение $y = \overline{y} + y^*$.

Пример 6. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Решение. Составим соответствующее характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $(k-2)^2 = 0$. $k = 2$ – корень кратности 2.

Решение однородного дифференциального уравнения примет вид: $\overline{y} = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$.

Правая часть уравнения e^x. Тогда $w = 1$. w не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение неоднородного дифференциального уравнения может быть найдено по формуле: $y^* = A \cdot e^x$.

Подставим его в уравнение:

$A \cdot e^x - 4A \cdot e^x + 4A \cdot e^x = e^x$. $A = 1$. $y^* = e^x$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$y = \overline{y} + y^* = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + e^x$.

13. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 7y' + 12y = x$;

б) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

в) $y'' - y = 5x + 2$;

г) $y'' + 6y' + 5y = e^2 \cdot x$;

д) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

Дифференциальные уравнения используются для анализа финансового рынка и определения динамики цен.

14. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 3y' = 1 + 7x$;

б) $y'' + 4y = 2\sin 2x$;

в) $y''' + y' = e^{2x}$;

г) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) \cdot e^{3x}$;

д) $y''' - y'' = 6x + 5$;

е) $y'' - 2y = x^3 + 2x + 1$.

В медицине дифференциальные уравнения используются для описания модели процесса распространения инфекционных заболеваний в изолированной популяции.

1.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольной постоянной

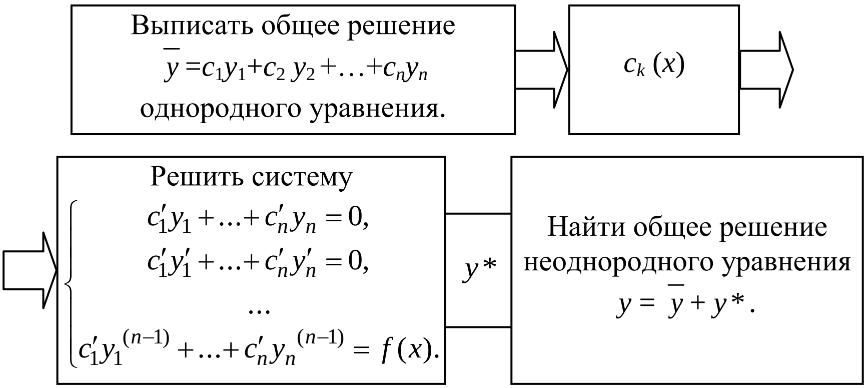
Теоретические сведения

Общий вид уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y = f(x),$$

где a_k – действительные числа.

Алгоритм решения базовых задач:



Пример 7. Решить уравнение $y'' + y = \mathrm{ctg}x$.

Решение. Решим однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0$;

$$k^2 = -1; \; k = \pm i.$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения принимает вид:

$$\overline{y} = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x.$$

Используем метод вариации:

$y^* = c_1(x)\cdot \sin x + c_2(x)\cdot \cos x.$

Составим систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot \sin x + c_2'(x)\cdot \cos x = 0, \\ c_1'(x)\cdot \cos x - c_2'(x)\cdot \sin x = \operatorname{ctg} x. \end{cases}$$

Решение системы: $c_2{}' = -\cos x.$ $c_2 = -\sin x + C_2.$

Тогда $c_1{}' = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x};$

$$c_1 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x\cdot \sin x}{\sin^2 x}dx = \begin{pmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \end{pmatrix} = -\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= t - \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C_1 = \cos x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C_1.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \bar{y} + y^* = c_1\cdot \sin x + c_2\cdot \cos x + (\cos x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x})\cdot \sin x +$$

$+(-\sin x)\cdot \cos x.$

15. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}};$

б) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}.$

Дифференциальные уравнения широко используются в моделях, отображающих динамику развития социальных процессов.	!

1.9. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка

Теоретические сведения

I) Общий вид уравнения:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Алгоритм решения базовых задач:

Интегрируем n раз уравнение.

II) Общий вид уравнения:

$$f(x,\ y',\ y'') = 0.$$

Уравнение не содержит в явном виде $y(x)$.
Алгоритм решения базовых задач:

Осуществить замену $z = y', z' = y''$.	$\Rightarrow$	Найти z.	$\Rightarrow$	Найти y.

III) Общий вид уравнения:

$$f(y,\ y',\ y'') = 0.$$

Уравнение не содержит в явном виде x.
Алгоритм решения базовых задач:

Заменить $y' = p$, $y'' = p' \cdot y'$.	$\Rightarrow$	Найти p.	$\Rightarrow$	Найти y.

Пример 8. Решить уравнение $y''' = x - \cos 2x$.

Решение. Интегрируем данное уравнение три раза:

$y'' = 0{,}5x^2 - 0{,}5\ \sin 2x + c_1;$

$y' = \ y' = \dfrac{1}{6}x^3 + 0{,}25\ \cos 2x + c_1 \cdot x + c_2;$

$y = \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{8}\sin 2x + \ 0{,}5c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3.$

16. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x \cdot y''' = 7$;

б) $y'' = 25 \cdot y$;

в) $y'' = \dfrac{7}{y^3}$;

г) $y'' = -6 \cdot x$;

д) $y''' = e^{-x}$;

е) $y''' = e^x \cdot x$.

17. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x \cdot y'' + y' + x + 5 = 0$;

б) $4y' + (y'')^2 = 4x \cdot y''$.

Дифференциальные уравнения используются для анализа теплообмена в корпусах насосов (уравнения теплопроводности).

1.10. Обобщающий тест по разделу «Дифференциальные уравнения»

Теоретическая часть

1. Вставить пропущенное слово в определении.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, их функцию и ее … или дифференциалы.

а) интеграл; б) производные; в) значения функции.

2. ДУ первого порядка называется уравнение вида

а) $F(x,\ y,\ y') = 0$; б) $F(x,\ y',\ y'') = 0$; в) $a \cdot x + b = 0$.

3. Решить задачу Коши – это найти:

а) начальные условия; б) произвольную постоянную C;

в) частное решение дифференциального уравнения.

4. Для того чтобы уравнение

$$P(x,\ y) \cdot dx + Q(x,\ y) \cdot dy = 0$$

было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

а) $P(x,y) \neq Q(x,y)$; б) $P(x,y) \cdot dx = Q(x,y) \cdot dy$; в) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

5. Уравнение вида $y'' + p \cdot y'' + q \cdot y = 0$ называется:

а) линейным уравнением; б) уравнением с разделяющими переменными; в) дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

6. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

а) $a^2 \cdot x + c = 0$;

б) $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$;

в) $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = c(x)$.

7. Решение вида $y = c_1 \cdot e^{kx} + c_2 \cdot x \cdot e^{kx}$ имеет дифференциальное уравнение, если корни характеристического уравнения:

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; б) $\lambda_1 < \lambda_2$; в) $\lambda_1 = \lambda_2$.

8. Дифференциальное уравнение вида: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$ решается путем:

а) непосредственного интегрирования; б) разделения переменных;

в) введения новой переменной $y = u \cdot v$.

Практическая часть

1. Вид дифференциального уравнения $y' = x + 1$:

а) линейное 1-го порядка; б) однородное; в) с разделяющимися переменными.

2. Разделение переменных в дифференциальном уравнении $e^x \cdot \ln y \cdot dx + x \cdot y \cdot dy = 0$ приведет его к виду:

а) $\dfrac{e^x dx}{x} = -\dfrac{\ln y\, dy}{y}$; б) $\dfrac{e^x dx}{x} = -\dfrac{y dy}{\ln y}$; в) $\dfrac{e^x dx}{x} = \dfrac{y dy}{\ln y}$.

3. Частным решением однородного дифференциального уравнения первого порядка $y' = y^2 / x^2 - y / x$, удовлетворяющего условию $y(-1) = 1$, является функция:

а) $y=2/\left(1-x^2\right)$; б) $y=2\cdot x/\left(1-3\cdot x^2\right)$; в) $y=2\cdot x/\left(1+x^2\right)$.

4. Общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах $\left(e^x+y+\sin y\right)\cdot dx+\left(e^y+x+x\cdot\cos y\right)\cdot dy=0$:

а) $e^x+x\cdot y+x\cdot\sin y+e^y=C$; б) $e^x+x+\sin y+e^y=C$;

в) $e^y+x\cdot y+y\cdot\sin x+e^x=C$.

5. Общее решение линейного уравнения первого порядка $y'-3y/x=x$:

а) $y=C\cdot x-x^2$; б) $y=C\cdot x^2-x^3$; в) $y=C\cdot x^3-x^2$.

6. Общим решением дифференциального уравнения $y''-8y'+$ $+16y=0$ является функция:

а) $y=C_1\cdot e^{4x}+C_2\cdot x\cdot e^{4x}$; б) $y=C_1\cdot e^{4x}+C_2\cdot e^{-4x}$;

в) $y=e^{4x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)$.

7. Частным решением уравнения $y''+4\cdot y'+29y=0$, удовлетворяющего начальным условиям $y\left(0\right)=0$ и $y'\left(0\right)=15$, является функция:

а) $y=5e^{-5x}\sin 5x$; б) $y=3e^{-2x}\sin 5x$; в) $y=3e^{-3x}\sin 3x$.

8. Определить вид частного решения $y''-4y'+4y=3e^{2x}$, не решая его:

а) $y=A\cdot e^{2x}$; б) $y=A\cdot x\cdot e^{2x}$; в) $y=A\cdot x^2\cdot e^{2x}$.

9. Частным решением уравнения $y''''=\cos^2 x$, удовлетворяющего начальным условиям $y\left(0\right)=1/3$, $y'\left(0\right)=0$, $y''\left(0\right)=1/8$, $y'''(0)=0$, является функция:

а) $y=\left(1/48\right)x^4+\left(1/8\right)x^2+\left(1/32\right)\cos 2x$;

б) $y=\left(1/32\right)x^4+\left(1/48\right)x^2+\left(1/2\right)\cos x$;

в) $y=\left(1/12\right)x^4+\left(1/4\right)x^2+\left(1/32\right)\cos 4x$.

10. Решение задачи Коши $y''=2y^3$, $y\left(2\right)=y'\left(2\right)=1$ для уравнения второго порядка, не содержащего явно аргумента x:

а) $y=3-x$; б) $y=x/\left(3-x\right)$; в) $y=1/\left(3-x\right)$.

ОТВЕТЫ

Теоретическая часть

1) б; 2) а; 3) в; 4) в; 5) в; 6) б; 7) в; 8) а.

Практическая часть

1) в; 2) б; 3) б; 4) а; 5) в; 6) а; 7) б; 8) в; 9) а; 10) в.

1.11. Задачи для подготовки студентов к олимпиаде по математике

1. У какой кривой отрезок любой касательной к графику функции, заключенный между точкой касания и осью O_x, делится осью ординат пополам?

2. Найти такую форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из заданной точки, параллельно данному направлению.

3. Сосуд емкостью 100 л наполнен раствором, содержащим 10 кг соли. В одну минуту в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости. В другом сосуде первоначально находится вода. Из него избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково?

4. Найти такую кривую, у которой радиус кривизны равен кубу нормали к графику функции; искомая кривая проходит через точку $M(0;1)$ и имеет в этой точке касательную, составляющую с осью O_x угол 45 градусов.

5. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Под действием одного груза пружина удлиняется на a см. Определить движение первого грузка в случае обрыва второго груза. Определить период колебаний первого груза.

2. ADDITIONAL MATERIAL FOR FOREIGN STUDENTS

The educational and methodical manual is intended for conducting practical exercises with students of the second year of study of the specialties of the instrument-making faculty, sports-technical faculty and faculty of mechanics and technology of Belarusian national technical university of the discipline «Mathematics». This educational and methodical manual includes basic equations, which need to be learned by the students from the section «Differential equations» during the third academic semester of the second year of study for further successful assimilation of the material for others disciplines and writing of course projects with the involvements of mathematical calculations. The topics covered by this manual, correspond to the current curriculum for engineering specialties of the instrument-making and sports-technical faculties of Belarusian national technical university.

The authors of the methodical manual aimed to increase the level of mastering the educational material, increase of independence of the students in preparation for the exams in this discipline, ensuring the implementation of the basic principles of didactics: accessibility and the systemic nature of the educational process. Careful selection of the material allows for the primary fixing of the material, systematize the knowledge of the students and form skills in solving differential equations and systems.

This paper is an additional material for the preparation of the tests by teachers in discipline «Mathematics» of the current Bologna process.

2.1. Basic concepts and definitions

18. Does the function y satisfy the corresponding differential equation?

a) $y = \sin x - 1 + c \cdot e^{-\sin x}, \dfrac{dy}{dx} + y \cdot \cos x = 0,5 \cdot \sin 2x;$

b) $y = c \cdot x + c - c^2, \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - \dfrac{dy}{dx} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0;$

c) $y = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^{-1} + c_3,\ \left(\dfrac{d^3 y}{dx^3}\right) + \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$

The differential equations determine the gravitational fields of the material environment.

19. Does the function y satisfy the corresponding differential equation?

a) $y = c_1 \cdot x^{-1} + c_2,\ \left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) + \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0;$

b) $y = 25 \cdot c \cdot \ln(\cos x),\ y' = \mathrm{ctg}x;$

c) $y = c \cdot e^{-2x} + \dfrac{1}{3} \cdot x \cdot y' + 2 \cdot y = e^x.$

The differential equations are used in the models of economic dynamics, in which are investigated not only in the dependence of the variables on time, but also on the relationship in time.

2.2. The equations with separable variables

Theoretical information

The general form of the equation:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0.$$

The algorithm for solving basic problems:

To express $\dfrac{dy}{dx}$. ⇒ To separate of variables. ⇒ To integrate.

Example 1. To solve the equation $1 + (1 + y') \cdot e^y = 0.$

Solution. We write y' in another form: $y' = \frac{dy}{dx}$. Then the equation takes the form: $1+(1+\frac{dy}{dx})\cdot e^y = 0$.

We express the derivative from this equation:

$$(1+\frac{dy}{dx})\cdot e^y = -1;\ \ 1+\frac{dy}{dx}e^y = -e^{-y};\ \ \frac{dy}{dx} = -\frac{1+e^y}{e^y}.$$

We separate the variables: $\frac{e^y}{1+e^y}dy = -dx$.

We integrate: $\int\frac{e^y}{1+e^y}dy = -\int dx$; $\ln\left(1+e^y\right) = -x+c$.

The solution is represented as a general integral.

20. To solve the equations:

a) $y\cdot dx - x\cdot dy = 0$;

b) $\left(1+y\right)\cdot dx - \left(1-x\right)\cdot dy = 0$;

c) $\left(y-5\right)\cdot dx + x^2\cdot dy = 0$;

d) $(1\ +y^2)\cdot dx - \sqrt{x}\cdot dy = 0$;

e) $(1+x^2)\cdot dy - \sqrt{1-y^2}\cdot dx = 0$;

f) $(1+y^2)\cdot dx + x\cdot y\cdot dy = 0$;

g) $e^y\cdot(1+x^2)\cdot dy =$
$= 2\cdot x\cdot(1+y^2)\cdot dx$;

h) $(1-x)\cdot dy = y\cdot dx$.

In astronomy the differential equations are used to create a model of a stellar system in dynamics in the analysis of the interaction of particles.	!

21. To solve the equations:

a) $dx = \sqrt{1-x^2}\cdot dy$;

b) $y' = -y^2$;

c) $x\cdot y\cdot dx + (x+1)\cdot dy = 0$;

d) $x\cdot x' + t = 1$;

e) $y' = y^2 / x^2$.

The differential equations are used in determining the dependence of the intensity of radioactive decay on time and on the number of radioactive atoms in the sample.	!

22. To solve the equations:

a) $x \cdot y' = 2 \cdot y$;

b) $z' = 10^{x+z}$;

c) $y' = y^2 + 2 \cdot y + 1$;

d) $(\cos x) \cdot y' = (y+1) \cdot \sin x$;

e) $x \cdot \sqrt{1+y^2} + y \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$;

f) $y' = 2 \cdot \sqrt{y}$.

In medical application the differential equations are used to determine the speed of blood flow, the velocity of the valves and the walls of the blood vessels, the determination of the viscosity of the blood.	!

2.3. The equation with homogeneous functions

Theoretical information

The general form of the equation:

$$P(x,\ y) \cdot dx + Q(x,\ y) \cdot dy = 0,$$

where $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – homogeneous functions of the same order.

The algorithm for solving the basic problems:

The substitution $y = u \cdot x$, $dy = u \cdot dx + x \cdot du$. ⇒ To solve it with respect to u. ⇒ To find y.

23. To solve the equations:

a) $(y - x) \cdot dx + (y + x) \cdot dy = 0$;

b) $(x + y) \cdot dx + x \cdot dy = 0$;

c) $x \cdot dy - y \cdot dx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx.$

The differential equation is used in the analysis of electromagnetic waves (radar, television, modern means of communication.

24. To solve the equations:

a) $(8y+10x)\cdot dx+\ (5y+7x)\cdot dy=0;$

b) $x\cdot y^2\cdot dy=(x^3+y^3)\cdot dx;$

c) $(x+y)\cdot dx-(x-y)\cdot dy=0.$

The differential equations describe the dependence of the acceleration of the body on the resultant of all forces, applied to the body and body weight.

25. To solve the equations:

a) $(x+2y)\cdot dx-x\cdot dy=0;$

b) $x\cdot y'=y-x\cdot e^{y/x};$

c) $x-y=(x+3y)\cdot y'.$

In biology the differential equations are used to determine the function of changing the population size of microorganisms as a function of time.

2.4. The first-order linear differential equations. Bernoulli equation

Theoretical information

The general form of the equation:

$$y'+p(x)\cdot y=q(x).$$

The algorithm for solving the basic problems:

Substitution $y = u \cdot v$, $y' = u \cdot v' + v \cdot u'$. → We collect the coefficient of u and equate it to 0. → To select v. → We substitute v in the initial equation, we find u. → To find y.

The general form of Bernoulli equation:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m,$$

where $m \neq 0$, $m \neq 1$.

The algorithm for solving basic problems:

To divide all terms of the equation by y^m. → The substitution $z = y^{-m+1}$, $z' = (-m+1) \cdot y^{-m} \cdot y'$. → We solve as a linear equation with respect to z. → To find y.

Example 2. To solve the equation $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = 2x^3$.

Solution. To implement substitution: $y = u \cdot v$, $y' = u \cdot v' + v \cdot u'$.

We substitute it in the equation: $u \cdot v' + v \cdot u' - \dfrac{2}{x} \cdot u \cdot v = 2x^3$.

We collect the coefficients of u: $v \cdot u' + u \cdot (v' - \dfrac{2}{x} \cdot v) = 2x^3$.

We equate this coefficient to zero:

$$v' - \frac{2}{x} \cdot v = 0;\ v' = \frac{2}{x} \cdot v;\ \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} \cdot v;\ \frac{dv}{v} = \frac{2}{x} \cdot dx.$$

We select v: $\ln|v| = 2 \cdot \ln|x|$; $v = x^2$.

To substitute it in the initial equation: $v \cdot u' + u \cdot 0 = 2x^3$;

$x^2 \cdot u' = 2x^3$; $u' = 2x$; $u = x^2 + c$.

Then the function *y* takes the form: $y = u \cdot v = \left(x^2 + c\right)x^2 = x^4 + c \cdot x.$

Example 3. To solve the equation $y' + y - x \cdot y^3 = 0.$

Solution. We transfer the last monomial to the right part:

$y' + y = x \cdot y^3.$

Means this equation is Bernoulli equation with index *m* = 3.

To divide all terms of this equation by y^3: $y^{-3} \cdot y' + y^{-2} = x.$

To make the appropriate replacement: $z = y^{-2},\ z' = -2y^{-3} \cdot y.$

Then we obtain from the last equality: $y^{-3} \cdot y = -0,5 \cdot z'.$

The original equation takes the form: $-0,5 \cdot z' + z = x;$

$z' - 2z = -2x$ – this is the first-order linear differential equation.

To implement a replacement: $z = u \cdot v,\ z' = u \cdot v' + v \cdot u'.$

We substitute it in the equation: $u \cdot v' + v \cdot u' - 2u \cdot v = -2x.$

We collect the coefficients of u: $v \cdot u' + u \cdot (v' - 2v) = -2x.$

We equate this coefficient to zero: $v' - 2v = 0;\ v' = 2v;$

$$\frac{dv}{dx} = 2v;\ \frac{dv}{v} = 2dx.$$

We select v: $\ln|v| = 2x;\ v = e^{2x}.$

We substitute it in the initial equation:

$v \cdot u' + u \cdot 0 = -2x;\ e^{2x} \cdot u' = -2x;\ u' = -2x \cdot e^{-2x};\ \ u = -2\int x \cdot e^{-2x} dx.$

We apply the integration by parts to find this integral:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x} dx & v = -0,5e^{-2x} \end{pmatrix} =$$

$$= -0,5x \cdot e^{2x} + \int 0,5 \cdot e^{-2x} dx = -0,5x \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-2x} + c.$$

$$u = -2(-0,5x \cdot e^{-2x} - 0,25 \cdot e^{-2x} + c) = x \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-2x} + C.$$

Then the function takes the form:

$$z = u \cdot v = (x \cdot e^{-2x} + 0,5 \cdot e^{-2x} + C) \cdot e^{2x} = x + 0,5 + C \cdot e^{2x}.$$

To return to the original function: $z = y^{-2},\ y^{-2} = x + 0,5 + C \cdot e^{2x}.$

26. To solve the equations:

a) $x \cdot y' - 2 \cdot y = 2 \cdot x^4$;

b) $y' + y \cdot \mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

c) $(2x+1) \cdot y' = 4x + 2y$;

d) $\left(x \cdot y + e^x\right) \cdot dx - x \cdot dy = 0$;

e) $x^2 \cdot y' + x \cdot y = -1$;

f) $y = x \cdot \left(y' - x \cdot \cos x\right)$;

g) $x \cdot (x-1) \cdot y' + y = x^2 \cdot (2x-1)$;

h) $x \cdot y' + x^2 + x \cdot y - y = 0$;

j) $\left(1 + x^2\right) \cdot y' - 2x \cdot y = \left(1 + x^2\right)^2$;

i) $3y' + y = y^{-2}$;

k) $x \cdot y' - 2x \cdot y = 3y^2$;

l) $x \cdot y' + 3y = 4x^2 \cdot y^2$;

m) $x \cdot y' + 2y + x^5 \cdot y^3 \cdot e^x = 0$.

2.5. The equations in total differentials

Theoretical information

The general form of the equation:

$$P(x,\, y) \cdot dx + Q(x,\, y) \cdot dy = 0,$$

where for functions P, Q the condition is satisfied: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

The algorithm for solving the basic problems:

The substitution $u = \int P(x, y)dx$. $\xrightarrow{+\varphi(y)}$ To find $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, equate it to Q. $\Rightarrow$ To find $\varphi'(y)$, and then $\varphi(y)$. $\Rightarrow$ To find u. $\Rightarrow$ We write the general integral.

Example 4. To solve the equation

$y^2 \cdot dx + (2x \cdot y - 1) \cdot dy = 0.$

Solution. We introduce the notation: $P(x, y) = y^2$; $Q(x, y) = 2x \cdot y - 1$.

We verify the implementation of the condition:

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$.

Then this equation is an equation in total differentials.

$u = y^2 \cdot x + \varphi(y)$.

We find $\frac{\partial u}{\partial y}$: $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \cdot y + \varphi'(y)$.

We equate to Q: $2x \cdot y + \varphi'(y) = 2x \cdot y - 1$; $\varphi'(y) = -1$;

$\varphi(y) = -y + c$.

Then $u = y^2 \cdot x - y + c$.

The general integral is $y^2 \cdot x - y = C$.

27. To solve the equations:

a) $e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0$;

b) $\left(2 - 9x \cdot y^2\right) \cdot x \cdot dx + {}$ $+\left(4y^2 - 6x^3\right) \cdot y \cdot dy = 0$;

c) $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$;

d) $(1 + y^2 \cdot \sin 2x) \cdot dx - {}$ $-2y \cdot \cos^2 x \cdot dy = 0$;

e) $2x \cdot y \cdot dx + \left(x^2 + 1\right) \cdot dy = 0$;

f) $2x \cdot y \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy = 0$.

2.6. The linear homogeneous differential equations with constant coefficients

Theoretical information

The general form of the equation:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y = 0,$$

where a_k – real numbers.

The algorithm for solving the basic problems:

We form the characteristic equation. → We find the root of equation. →

→ We find a solution, corresponding to each root. → We write the general solution.

Example 5. To solve the equation $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.

Solution. We form corresponding characteristic equation:

$$k^5 - 6k^4 + 9k^3 = 0;\ k^3\left(k^2 - 6k + 9\right) = 0;\ k^3(k-3)^2 = 0.$$

$k = 0$ – the root with multiplicity 3, $k = 3$ – the root with multiplicity 2. The solution takes the form:

$$y = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot x \cdot e^{0x} + c_3 \cdot x^2 \cdot e^{0x} + c_4 \cdot e^{3x} + c_5 \cdot x \cdot e^{3x} =$$
$$= c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{3x} + c_5 \cdot x \cdot e^{3x}.$$

28. To solve the equations:

a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;

b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;

c) $y^{(4)} - 3y'' + 3y' - y = 0$;

d) $y^{(5)} - 4y''' = 0$.

The differential equations are used in describing the wave properties of matter (in semiconductors, transistors).

29. To solve the equations:

a) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;

b) $y^{(4)} + y = 0$;

c) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$;

d) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$;

e) $y''' - y' = 0$;

f) $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0$.

2.7. The linear heterogeneous equations with constant coefficients with the special right part

Theoretical information

The general form of the equation:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y = f(x) \cdot e^{wx},$$

where a_k – real numbers.

Example 6. To solve the equation $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Solution. We form characteristic equation, corresponding the homogeneous equation:

$k^2 - 4k + 4 = 0$; $(k-2)^2 = 0$. $k = 2$ – the root with multiplicity 2.

The solution of homogeneous differential equation takes the form:

$\overline{y} = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$.

The right part of the equation is e^x. Then $w = 1$. w is not a root of characteristic equation. Then the particular solution of heterogeneous differential equation can be found by formula: $y^* = A \cdot e^x$.

We substitute it into the equation:

$A \cdot e^x - 4A \cdot e^x + 4A \cdot e^x = e^x$. $A = 1$. $y^* = e^x$.

The fundamental solution of heterogeneous differential equation:

$y = \overline{y} + y^* = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + e^x$.

30. To solve the equations:

a) $y'' - 7y' + 12y = x$;

b) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

c) $y'' - y = 5x + 2$;

d) $y'' + 6y' + 5y = e^2 \cdot x$;

e) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

2.8. Test on the section «Differential equations»

Theoretical questions

1. To insert the missed word to the definition.

The differential equation is called the equation, connecting the independent variables, their function with its … or differentials.

a) integral; b) derivatives; c) values of the function.

2. The differential equation of the first order is called the equation of the form:

a) $F(x, y, y')=0$; b) $F(x, y', y'')=0$; c) $a\cdot x+b=0$.

3. To solve the Cauchy problem is to find:

a) initial conditions; b) an arbitrary constant C; c) the particular solution of the differential equation.

4. In order for the equation

$$P(x, y)\cdot dx+Q(x, y)\cdot dy=0$$

to be an equation in complete differentials, it is necessary and sufficient that condition:

a) $P(x, y)\neq Q(x, y)$; b) $P(x, y)\cdot dx=Q(x, y)\cdot dy$; c) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

5. The equation of the form $y''+p\cdot y''+q\cdot y=0$ is called:

a) linear equation; b) the equation with separating variables; c) the equation of the second order with constant coefficients.

6. The form of the characteristic equation of the second order is:

a) $a^2\cdot x+c=0$; b) $\lambda^2+p\cdot\lambda+q=0$; c) $\lambda^2+p\cdot\lambda+q=c(x)$.

7. The solution of the form: $y=c_1\cdot e^{kx}+c_2\cdot x\cdot e^{kx}$ refers to the equation, if the roots of the characteristic equation are:

a) $\lambda_1\neq\lambda_2$; b) $\lambda_1<\lambda_2$; c) $\lambda_1=\lambda_2$.

8. The differential equation of the form: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ can be solved by:

a) the direct integration; b) the separation of variables; c) the introduction of a new variable $y=u\cdot v$.

PROBLEMS

1. The view of the differential equation $y'=x+1$ is:

a) linear equation of the first order; b) the uniform equation; c) the equation with separating variables.

2. The separation of the variables in the differential equation $e^x \cdot \ln y \cdot dx + x \cdot y \cdot dy = 0$ can be reduced to the form:

a) $\frac{e^x dx}{x} = -\frac{\ln y dy}{y}$; b) $\frac{e^x dx}{x} = -\frac{y dy}{\ln y}$; c) $\frac{e^x dx}{x} = \frac{y dy}{\ln y}$.

3. The particular solution of the homogeneous first-order equation $y' = y^2 / x^2 - y / x$, that satisfies the condition $y(-1) = 1$, is the function:

a) $y = 2/(1-x^2)$; b) $y = 2x/(1-3\cdot x^2)$; c) $y = 2x/(1+x^2)$.

4. The general integral of the differential equation in the complete differentials $\left(e^x + y + \sin y\right)\cdot dx + \left(e^y + x + x\cdot\cos y\right)\cdot dy = 0$ is:

a) $e^x + x\cdot y + x\cdot\sin y + e^y = C$;

b) $e^x + x + \sin y + e^y = C$;

c) $e^y + x\cdot y + y\cdot\sin x + e^x = C$.

5. The general solution of the linear equation of the first order $y' - 3y/x = x$ is:

a) $y = C\cdot x - x^2$; b) $y = C\cdot x^2 - x^3$; c) $y = C\cdot x^3 - x^2$.

6. The general solution of the differential equation $y'' - 8y' + {}$ $+16y = 0$ is the function…

a) $y = C_1\cdot e^{4x} + C_2\cdot x\cdot e^{4x}$;

b) $y = C_1\cdot e^{4x} + C_2\cdot e^{-4x}$;

c) $y = e^{4x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right)$.

7. The particular solution of $y'' + 4\cdot y' + 29\cdot y = 0$, satisfying the initial conditions $y(0) = 0$ and $y'(0) = 15$, is the function:

a) $y = 5e^{-5x}\sin 5x$; b) $y = 3e^{-2x}\sin 5x$; c) $y = 3e^{-3x}\sin 3x$.

8. To define the view of the particular solution of $y''-4y'+4y=$ $=3e^{2x}$, not to solve it:

a) $y=A\cdot e^{2x}$; b) $y=A\cdot x\cdot e^{2x}$; c) $y=A\cdot x^2\cdot e^{2x}$.

9. The particular solution of the equation $y''''=\cos^2 x$, satisfying the initial conditions $y(0)=1/3$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$ is the function:

a) $y=(1/48)x^4+(1/8)x^2+(1/32)\cos 2x$;

b) $y=(1/32)x^4+(1/48)x^2+(1/2)\cos x$;

c) $y=(1/12)x^4+(1/4)x^2+(1/32)\cos 4x$.

10. The solution of the Cauchy problem $y''=2y^3$, $y(2)=y'(2)=1$ for the equation of the second order, which does not contain the argument explicitly:

a) $y=3-x$; b) $y=x/(3-x)$; c) $y=1/(3-x)$.

ANSWERS

Theoretical questions

1) b; 2) a; 3) c; 4) c; 5) c; 6) b; 7) c; 8) a.

Problems

1) c; 2) b; 3) b; 4) a; 5) c; 6) a; 7) b; 8) c; 9) a; 10) c.

2.9. Problems for preparing students for the Mathematics Olympiad

1. Which curve has the interval of the any tangent, enclosed between the point of tangency and the axis of abscissa, is divided by the axis of ordinates in a half?

2. To find the shape of a mirror, reflecting all the rays, emanating from a given point, parallel to a given direction.

3. A 100-liter container is filled with a brine, containing 10 kg of dissolved salt. At one minute 3 liters of water flows into it and as much as it is mixed is pumped into another vessel of the same capacity, originally filled with water, from which excess fluid pours out. At what point in time will the amount of salt in both vessels be the same?

4. To find the curve, for with the radius of curvature is equal to the cube of the normal; the required curve must pass through the point $M(0;1)$ and has the tangent at this point, that makes an angle of 45 degrees with the Ox axis.

ПРИЛОЖЕНИЕ (ANNEX)

1. $\int 0dx = c;$

2. $\int 1dx = x + c;$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1;$

4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c;$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c;$

6. $\int e^x dx = e^x + c;$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + c;$

8. $\int \cos x dx = \sin x + c;$

9. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + c;$

10. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c;$

11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + c;$

12. $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + c;$

13. $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + c;$

14. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Дрофа, 2004. – 288 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва, 2004. – 512 с.

3. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

4. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Москва: Дрофа, 2003. – 704 с.

5. Пискунов, И. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / И. С. Пискунов. – Москва, 1996. – 416 с.

6. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричкова. – Минск: БГУ, 1999. – 640 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС Мир и образование, 2003. – 416 с.

8. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецова. – Москва: Высшая школа, 2005.

9. Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей: в 4 ч. Ч. 3 / И. Г. Латышева [и др.]. – Электрон. дан.: БНТУ, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ГУНДИНА Мария Анатольевна
КОНДРАТЬЕВА Наталья Анатольевна

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные
и лазерные приборы и системы»,
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»

Редактор *Ю. В. Ходочинская*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 15.04.2019. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,00. Тираж 100. Заказ 25.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.