



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 534.1

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, член-корр. НАН Беларуси, д-р техн. наук, профессор
Советник НАН Беларуси

E-mail: pleskym@mail.ru

Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого, г. Гомель, Республика Беларусь

А.О. ШИМАНОВСКИЙ, д-р техн. наук, доцент

заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика»

E-mail: tm.belsut@gmail.com

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 23.10.2015.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ В НАГРУЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Рассматриваются подходы к решению задач о деформировании конструкций из композитных материалов методом конечных элементов. Приведены примеры моделирования композитов с использованием элементарных ячеек материала и на основе реальных микроструктур. Представлены результаты расчетов бетонных и железобетонных элементов конструкций с учетом внутренних контактных взаимодействий между матрицей композита и армирующей фазой.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, композитные материалы, элементарная ячейка материала, микроструктура, контактное взаимодействие

Введение. Разработка новых материалов с улучшенными эксплуатационными характеристиками (высокими прочностью, сопротивлением усталости, износостойкостью и т. д.) становится важным фактором промышленного прогресса. С другой стороны, деформация и разрушение реальных материалов представляют собой чрезвычайно сложные процессы, которые являются результатом взаимодействия фаз материалов, микро- и макротрещин и т. д. Развитие средств вычислительной техники и прикладного программного обеспечения привело к созданию нового направления исследования свойств композитов, которое связано с компьютерным моделированием их деформирования под действием приложенных эксплуатационных нагрузок.

Уровни описания поведения материала можно разделить на нано- (атомистический), микро- (дислокаций и единичных пустот и включений), мезо- (определяемый микроструктурой материала, т. е. комбинацией ряда включений, слоев) и макро- (конкретная деталь). Мезоуровень представляет диапазон шкалы уровней, который на 2–3 порядка

больше, чем дефектов структуры (которые варьируются в диапазоне масштабов $10^{-9} \dots 10^{-5}$ м) и на 1–3 порядка меньше, чем размер конкретного элемента конструкции. Если усовершенствование элемента на макроуровне выполняется только путем изменения конструкции деталей, то улучшение материала на микро- и мезоуровне может быть осуществлено с помощью термической обработки, методов порошковой металлургии и т. д.

Методы расчета композитных материалов основаны на решении уравнений механики сплошной среды. Оно может быть осуществлено как с использованием аналитических подходов, так и с помощью методов конечных элементов (МКЭ), граничных элементов (МГЭ), конечных разностей, конечных объемов, и иных численных методов, применимых для конкретных задач. В книге [1] показано, что все названные вычислительные методы можно рассматривать как вариации метода взвешенных невязок. Это открывает возможности для совместного использования названных подходов при решении задач механики сплошных сред. Однако основным численным методом решения

проблем механики композитов в настоящее время остается метод конечных элементов.

В представленной работе обсуждаются особенности различных подходов к компьютерному моделированию деформирования многофазных материалов под действием механических нагрузок.

Методы моделирования деформирования композитов. Большинство работ в области механики композитных материалов связано с применением одной из двух основных стратегий моделирования. Первая предполагает анализ усредненного поля напряжений и деформаций в каждом компоненте конструкции. Вторая состоит в изучении моделей, представляющих собой представительный объем некоторой детали.

В рамках первой стратегии выполнено достаточно большое число исследований, посвященных методам расчета усредненных констант, определяющих деформирование материала с учетом особенностей физических свойств и расположения армирующей фазы в матрице композита [2]. В современных системах конечноэлементного инженерного анализа имеются специальные конечные элементы, описывающие деформирование композитов. Например, в программном комплексе ANSYS восьмиузловой элемент SOLID65 позволяет учесть армирование материала путем его распределения по объему детали [3]. Метод усреднения характеристик дает возможность с достаточной степенью точности оценить деформацию деталей конструкции, однако не позволяет установить особенности напряженно-деформированного состояния, связанные с неоднородностью материала.

Вторая стратегия связана чаще всего с изучением распределения напряжений и деформаций в моделях композитов, представляющих периодически повторяющиеся ячейки. Сюда же можно отнести и моделирование на основе реальных структур материалов.

Начало исследований представительных объемов деталей связано с использованием двумерных моделей. В своей простейшей первоначальной версии элементарная ячейка материала представляла собой волокно круглого, прямоугольного либо треугольного сечения, окруженное матрицей. Такая модель позволяла моделировать механическое поведение только армированных волокнами композитных материалов с периодическим распределением волокон одинакового размера [4–6]. Основным недостатком названной модели являлось пренебрежение влиянием других включений и матрицы на механическое поведение выбранной ячейки. Дальнейшее развитие подхода связано со встраиванием элементарной двумерной ячейки в некоторый эквивалентный материал [7, 8]. Наиболее значимым результатом таких расчетов было определение формы включений, которые обеспечивают максимальные и минимальные модули Юнга композитов.

В Институте механики металлополимерных систем им. В. А. Белого структурное моделирование использовано для расчета эквивалентного коэффициента Пуассона ν при сжатии пористого материала (рисунок 1) [9]. Для твердой фазы пористого материала использованы следующие исходные данные — $E = 1$ ГПа, $\nu = 0,1$; размеры ячейки периодичности — 34×34 мкм, всего фрагмента материала — 240×280 мкм, коэффициент трения на поверхности контакта фрагмента с жесткой пластиной принят равным $f = 0,5$. Вычислительный эксперимент показал, что в результате резкого увеличения сил адгезии в наноразмерных ячейках пористого материала с мультимодульной твердой фазой происходит самоорганизация пористого материала в энергетически предпочтительную структуру (рисунок 1 б) с вогнутыми ячейками, обладающую отрицательным коэффициентом Пуассона.

Увеличение быстродействия и объема памяти вычислительной техники позволило перейти от двумерных моделей к трехмерным, что в свою очередь дало возможность наряду с волокно-армированными композитами рассчитывать и материалы с включениями эллипсоидной, кубической и иных форм [10–12]. В работе Юнга и др. [13] было выполнено сравнение результатов расчетов для случаев плоской и объемной деформаций. Было показано, двумерное приближение дает результаты, существенно отличающиеся от трехмерного случая.

Работа [14] посвящена оценке макроскопического деформационного поведения композита на основе резиноподобной сшитой полимерной матрицы с порошковым аминокислотным минеральным наполнителем методом конечных элементов. Разработаны численные модели на основе элементарных ячеек. Для более точной оценки деформационного поведения композита учтено существование потенциальной энергии матрицы при высоких уровнях нагружения. Получено хорошее согласование численных результатов с экспериментальными.

В статье [15] проведено компьютерное исследование напряженно-деформированного состояния гетерогенной среды, состоящей из жестких дисперсных включений, расположенных в высокоэластичной матрице с сильно выраженными нелинейно-упругими характеристиками. Показано, что

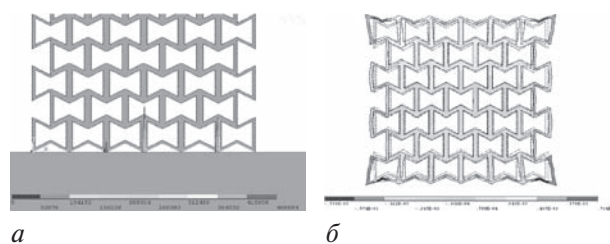


Рисунок 1 — Деформирование пористого материала с первоначально вогнутой формой ячеек: а — распределение контактного давления при сжатии (вертикальное смещение верхней границы $u_y = 0,1$ мкм); б — изменение формы ячеек при действии сил адгезии

в случае если размер включений соизмерим с толщиной нанослоев связующего, то такое связующее при определенных условиях может способствовать существенному выравниванию градиентов напряжений вблизи частиц наполнителя.

Особенностью армированных композитов в большинстве случаев является то, что их структура случайна во всех трех измерениях. Для ее определения выполняют анализ изображений микрофотографий участков материалов [16–18]. Принимая во внимание сложность геометрии и химического состава таких структур, следует отметить, что моделирование невозможно осуществить без некоторых упрощений.

Ряд исследований напряженно-деформированного состояния композитов на основе анализа их реальной микроструктуры выполнен в Институте механики металлополимерных систем НАН Беларуси.

В работе [19] выполнено моделирование работы асфальтобетона под действием эксплуатационных нагрузок. На рисунке 2 представлена схема построения конечноэлементной модели, основанной на анализе реальной структуры материала. Здесь видно, как изображение структуры, полученное из фотографии шлифа образца, схематизируется с исключением мелких деталей и полутонов с последующей дискретизацией конечными элементами.

На рисунке 3 показано распределение эквивалентного напряжения по Мизесу $\sigma_{\text{экр}}$ в мезофрагменте асфальтобетона. Установлено, что локализация и размер зон стесненного сжатия связующего в значительной степени зависят от формы щебня. При использовании кубовидного щебня протяженность зоны стесненного сжатия существенно больше в сравнении с округлыми (сферическими и эллипсоидальными) частицами, что повышает формостабильность дорожного покрытия.

В статье [20] изучался механизм развития процессов контактного взаимодействия компонентов наноструктурированных гибридных композитов

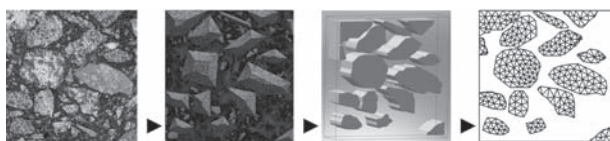


Рисунок 2 — Схематизация структуры фрагмента асфальтобетона

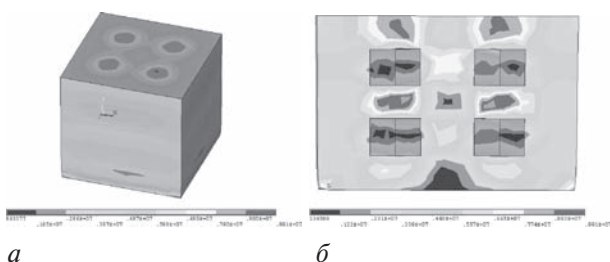


Рисунок 3 — Распределение эквивалентных напряжений в проекции на грани (а) и на глубине 2 мм в подповерхностном слое (б) мезофрагмента асфальтобетона

при электромеханотермическом воздействии. Разработанные компьютерные модели базировались на результатах микроструктурных исследований, проведенных с помощью сканирующей электронной микроскопии (рисунок 4).

В результате проведенных исследований получены данные о характере распределения напряжений, возникающих в области контактного взаимодействия между компонентами порошкового материала, включающего микроразмерные частицы меди, частицы плакированного полимера и наноструктуры углерода (рисунок 5). Полученные результаты планируется учитывать при осуществлении реальных технологических процессов создания новых композитов, обладающих высокими физико-механическими и триботехническими характеристиками.

Картером и др. разработан специальный код, автоматически создающий конечноэлементную сетку на основе микроструктуры изображения, а затем позволяющий вычислить напряжения и распределение термоупругих деформаций в материале [21].

В ряде исследований при создании конечноэлементной модели на основе реальной микро-

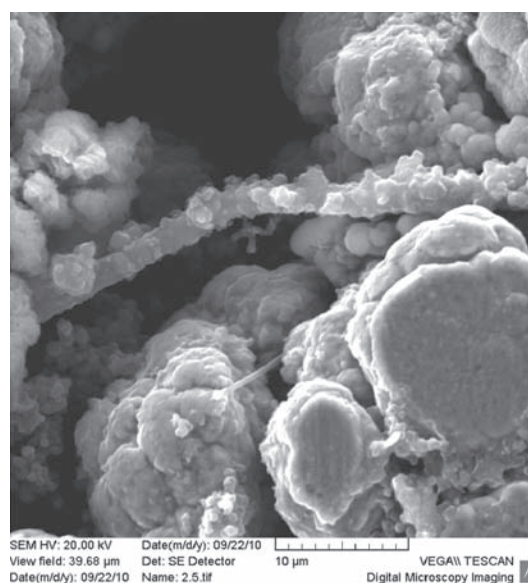


Рисунок 4 — Микроструктура композиционного материала на основе порошковой системы «дисперсная медь — плакированный медью политетрафторэтилен — наноструктуры углерода»

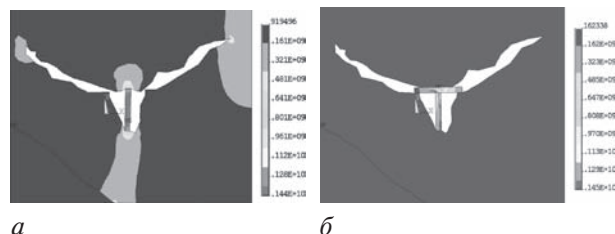


Рисунок 5 — Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу (Па) в области контактного взаимодействия компонентов порошковой системы, содержащей две частицы меди, одну частицу плакированного полимера и одну (а), две (б) углеродные нанотрубки

структуры материала использован метод ячеек Вороного. Суть его состоит в том, что некоторая область разбивается на конечные элементы, каждый из которых содержит не более одного включения. Затем строятся матрицы жесткости каждого элемента (они определяются с учетом наличия или отсутствия включения в данном конечном элементе), которые являются основой для математической модели объекта в целом [22–24]. Такой подход позволяет с достаточно высокой степенью точности осуществлять анализ деформаций изделий из композиционных материалов.

Иной подход к анализу деформирования композитов связан с применением метода многофазных конечных элементов [25]. Его смысл состоит в создании специальных конечных элементов, учитывающих фазовый состав выделенной области. Это позволяет избежать трудностей, связанных с применением традиционных однофазных элементов, для которых сетка должна быть создана так, чтобы края элементов соответствовали границам фаз, что может быть трудноосуществимо для случаев сложных или мелких микроструктур, или даже для относительно простых микроструктур в трехмерном случае.

Анализ повреждения и разрушения материалов выполняют на основе использования как моделей периодически повторяющихся ячеек, так и моделирования реальных структур материала. При этом существуют два основных подхода к численному моделированию разрушения: трещины могут быть распределены по ряду элементов либо промоделированы как разрыв между соседними элементами [26, 27]. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки: модель распределенной трещины в некоторых случаях не исключает передачу нагрузки через широко открытую трещину, а рассмотрение трещины в виде разрыва приводит к сингулярности в вершине трещины, что требует весьма мелкой сетки. В свою очередь разрыв между элементами может быть реализован либо путем использования специальных контактных элементов, либо с помощью опции рождения/смерти, которая позволяет при необходимости временно исключить из модели ряд элементов.

В статье [28] содержится обширный обзор исследований, связанных с моделированием трещин в композитных материалах. В нем приведена информация о трудностях, с которыми приходится сталкиваться при численном анализе деформирования материала в таких случаях, и существующих подходов к решению указанной задачи.

Моделирование композитов с учетом внутренних контактных взаимодействий. Одним из видов композитных материалов, которые находят широкое распространение в строительстве и машиностроении, является железобетон. Его структура может быть представлена в виде материала, организованного по типу «композит в композите». На нижней ступени иерархии кристаллы силиката кальция, которые можно разделить на две фазы с различными

механическими свойствами [29], на верхней — железобетон и бетон (в зависимости от наличия в конструкции упрочняющей арматуры). Если рассмотренные выше исследования предполагали жесткое соединение фаз материала в композите, то при анализе деформирования бетона следует принимать во внимание возможность растрескивания.

В Белорусском государственном университете транспорта выполнен ряд расчетов напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из таких композитов с помощью программного комплекса ANSYS [30, 31]. Рассматривалось деформирование материала с зернами заполнителя двух видов: кубическими и шаровидными, размером от 5 до 20 мм. Учитывалось, что модули упругости заполнителя и материала матрицы 50 и 30 ГПа, коэффициенты Пуассона 0,15 и 0,27 соответственно.

Выполненный в ходе исследований анализ показал, что наиболее неблагоприятный случай с точки зрения прочности рассматриваемого материала имеет место, если зерна заполнителя лежат вдоль линии действия внешней нагрузки. Поэтому в качестве расчетной модели может быть принята одна ячейка, представленная на рисунках 6 и 7. Она вклю-

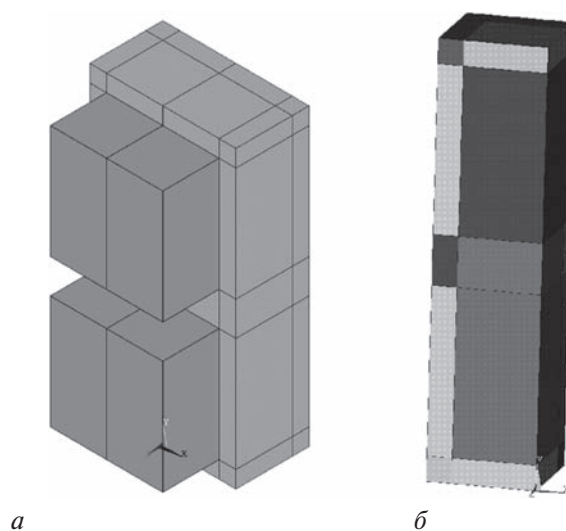


Рисунок 6 — Часть матрицы с кубическими гранулами: а — схема; б — ячейка периодичности

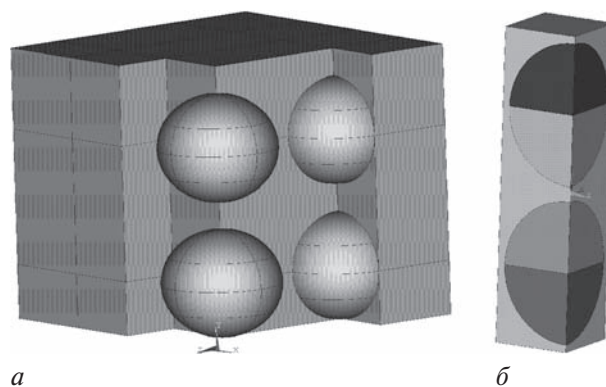


Рисунок 7 — Часть матрицы с шаровидными гранулами: а — схема; б — ячейка периодичности

часть части двух гранул и окружающую их матрицу. Заполнитель и матрица композита моделировались восьмиузловыми призматическими конечными элементами. Общее число элементов моделей составляло около 100 000. Граничные условия включали условия симметрии для боковых и нижней граней выбранной ячейки периодичности. К верхней ее грани прикладывалось равномерно распределенное давление 30 МПа. При расчетах рассматривались случаи, при которых коэффициент трения изменялся от 0,1 до 1, и принималась во внимание адгезия.

Распределение первых главных напряжений для ячейки с кубическими гранулами представлено на рисунке 8. Выполненные расчеты показали, что напряжения в области верхней гранулы несимметричны относительно ее горизонтальной плоскости симметрии. В то же время такая симметрия имеет место для нижней гранулы. Это свидетельствует о проявлении краевых эффектов в верхней части модели ячейки. Следовательно, анализ напряженно-деформированного состояния материала должен выполняться на основе изучения деформирования нижней половины ячейки.

Наибольшие напряжения наблюдаются в угловых ребрах, в гранулах они на 30–40 % больше, чем в материале матрицы. Первые главные напряжения во всех точках матрицы отрицательны, т. е. материал работает в условиях сжатия.

При увеличении коэффициента трения от 0 до 0,5 максимальные эквивалентные напряжения в материале уменьшаются на 15–20 % (рисунок 9). Деформации элемента изменяются менее чем на 1 %.

Расчеты, выполненные при разных значениях адгезии, показали, что картина распределения напряжений существенно не изменяется. Однако, при небольших значениях адгезии, не превышающих 56 кПа, после приложения нагрузки и до того, как система придет в состояние равновесия, может происходить относительное смещение поверхностей гранулы и матрицы. В то время как при напряжениях, больших 56 кПа, относительное смещение отсутствует. Наличие относительного смещения свидетельствует о расслоении материала и, таким образом, позволяет сделать вывод о недостаточной его прочности при действии сжимающих давлений 30 МПа.

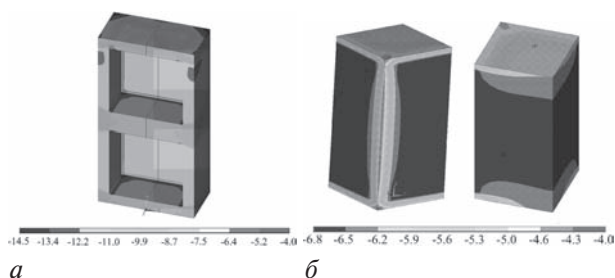


Рисунок 8 — Распределение первых главных напряжений для ячейки с кубическими гранулами, МПа: а — матрица композита; б — нижняя гранула

Рисунок 10 демонстрирует зависимость максимальной адгезии с возможным скольжением от коэффициента трения. Из приведенного графика видно, что при коэффициентах трения, больших 0,136, скольжение отсутствует даже при нулевой адгезии. Если значение коэффициента трения меньше 0,136, то для целостности материала адгезия должна соответствовать точкам, расположенным выше представленной кривой.

Подобный анализ был выполнен для матрицы со сферическими гранулами. Расчеты показали, что первые главные напряжения в некоторых местах матрицы положительны (рисунок 11 а) и материал растянут. Это может приводить к его растрескиванию. Распределение третьих главных напряжений показывает, что наибольшее сжимающие напряжения достигают 40 МПа в области сближения гранул по вертикали. В этом же месте наблюдаются наибольшие эквивалентные по Мизесу напряжения (рисунок 11 б).

Рисунок 12 демонстрирует полученную зависимость максимальной когезии с возможным скольжением от коэффициента трения. В отличие от случая кубических гранул здесь скольжение отсутствует при коэффициентах трения, больших 0,73.

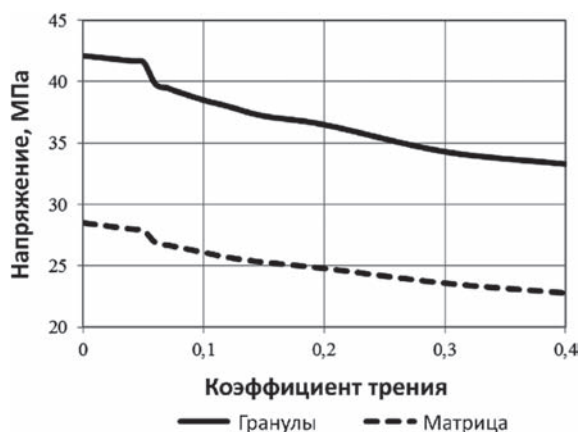


Рисунок 9 — Зависимость максимальных эквивалентных напряжений от коэффициента трения для матрицы с кубическими гранулами

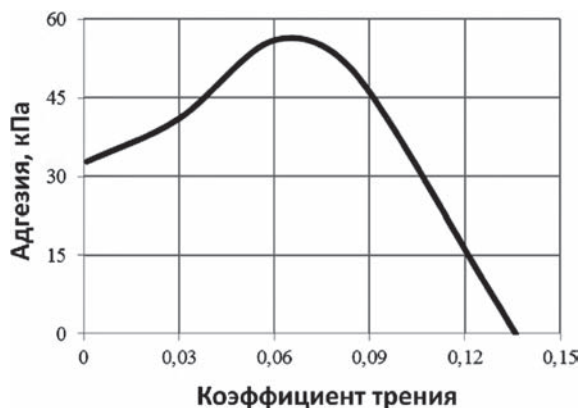


Рисунок 10 — Зависимость максимальной адгезии с возможным скольжением от коэффициента трения между матрицей и гранулами для ячейки с кубическими гранулами

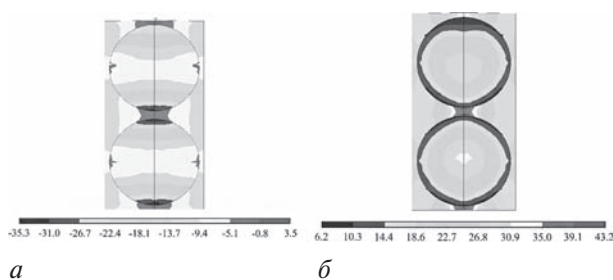


Рисунок 11 — Напряжения в цементной матрице и упрочняющих сферических гранулах, МПа: *a* — первое главное; *б* — эквивалентное по Мизесу

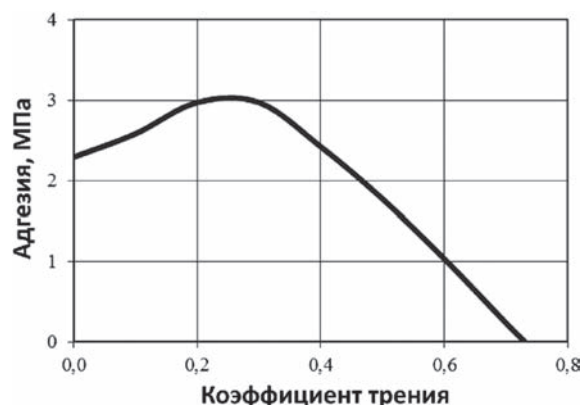


Рисунок 12 — Зависимость максимальной адгезии с возможным скольжением от коэффициента трения между матрицей и гранулами для ячейки с шаровидными гранулами

Сравнение между кубическими и шарообразными гранулами показывает, что кубические гранулы обеспечивают целостность материала при меньших когезиях и коэффициентах трения, в то же время в угловых точках возникают большие напряжения, которые могут стать причиной появления трещин. Распределение напряжений в матрице со сферическими гранулами более равномерное, поэтому их целесообразно использовать для высокопрочных бетонов.

Моделирование взаимодействия бетона и арматуры. Авторы многочисленных исследований моделируют арматуру тонкими стержнями, воспринимающими только продольные нагрузки [32, 33]. Это, во-первых, не позволяет достоверно оценить напряжения в областях взаимодействия арматуры и матрицы композита, поскольку не учитывает неравномерность распределения напряжений по сечению арматуры, во-вторых, не дает возможность установить, как влияет трение между контактирующими фазами композита на его напряженно-деформированное состояние. Нами разработаны модели, в которых арматура представляет собой трехмерные деформируемые твердые тела [34–36]. Аналогичный подход позднее был использован также китайскими исследователями [37].

Выполнен ряд расчетов деформирования консольной балки с длиной 1 м и прямоугольным поперечным сечением 200×300 мм, которая имеет продольное несимметричное армирование, обес-

печиваемое пятью стержнями диаметром 20 мм (см. рисунок 1). Принималось, что модули упругости материалов матрицы и арматуры составляли 27 и 200 ГПа соответственно. Арматура и матрица композита моделировались двадцатиузловыми призматическими конечными элементами. Расчеты выполнены с учетом сухого трения, определяемого законом Кулона. Необходимость нахождения положения площадок внутреннего скольжения потребовала использования контактных элементов с размером по длине арматуры, не превышающим 20 мм. Общее число конечных элементов модели оказалось равным 144 000. Нагружение балки осуществлялось силами тяжести ее элементов и равномерно распределенным давлением 170 кПа, приложенным к верхней грани.

Анализ состояния контакта между соприкасающимися поверхностями арматуры и матрицы показал, что проскальзывание отсутствует только на небольших участках соприкосновения между арматурой и матрицей композита. Эти участки расположены в верхних частях арматурных стержней на расстояниях, не превышающих пяти диаметров арматуры от места защемления.

При отсутствии трения максимальные эквивалентные напряжения наблюдаются в заделанном поперечном сечении. При увеличении коэффициента трения место с максимальными эквивалентными напряжениями смещается от заделанного конца балки. На рисунке 13 приведены графики распределения контактных напряжений по верхней образующей арматурного стержня в зависимости от расстояния до заделанного конца балки при отсутствии внутреннего трения и для коэффициента трения $f = 1$. Из приведенных графиков видно, что максимальные контактные напряжения возникают на расстоянии, соответствующем двум диаметрам арматурного стержня от места заделки. При отсутствии трения контактные напряжения постепенно понижаются по направлению к свободному концу балки. Учет трения приводит к тому, что на свободном конце арматурного стержня наблюдается скачок контактного давления.

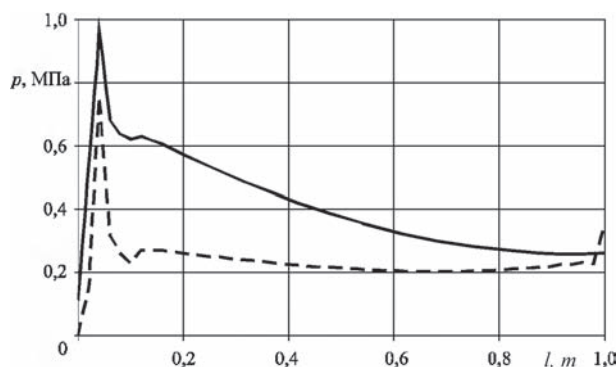


Рисунок 13 — Схемы распределения контактных напряжений по верхней образующей арматурного стержня в зависимости от расстояния между сечением и местом заделки балки: верхняя кривая — без учета трения; нижняя — для коэффициента трения $f = 1$

Анализ значений максимальных эквивалентных по Мизесу напряжений в материале арматуры показал, что они монотонно возрастают по мере увеличения коэффициента трения. Аналогичная зависимость обнаружена и для первого главного напряжения (рисунок 14). Жесткость конструкции постепенно увеличивается при увеличении сцепления между материалами композита. Причем градиент убывания деформации постепенно понижается при увеличении коэффициента трения. Значения деформаций при наличии трения между фазами композита снижаются на 15 % и более. Постановка арматуры в матрицу с натягом может еще больше увеличить этот эффект.

Выполнен ряд расчетов с целью установления влияния расположения арматурных стержней на напряженно-деформированное состояние балки. Напряжения в арматуре при смещении боковых арматурных стержней от продольной вертикальной плоскости симметрии балки к ее боковым стенкам незначительно увеличиваются (с 30,8 до 31,4 МПа). В то же самое время увеличение расстояния от арматурных стержней до горизонтальной плоскости симметрии матрицы приводит к увеличению жесткости конструкции на 12–15 %. Этот вывод очевиден и подтверждает результаты, получаемые с применением приближенных теорий деформирования армированных стержневых элементов конструкций.

Напряжения в арматурных стержнях увеличиваются на 25 % при смещении арматурных стержней на 3 см от середины балки к верхней и нижней граням. В то же самое время максимальные и первое главное напряжение и эквивалентное напряжение в бетоне при таком смещении арматуры уменьшаются на 10–12 %. Теория деформирования, предполагающая сохранение плоской формы поперечными сечениями балки, дает противоположный результат.

Выполненный анализ показал, что при адгезии между арматурой и матрицей, не превышающей 10 кПа, ее изменение практически не влияет на прочность и жесткость элемента. Точно также увеличение адгезии сверх 100 кПа не ведет к существенному изменению напряженно-деформирован-

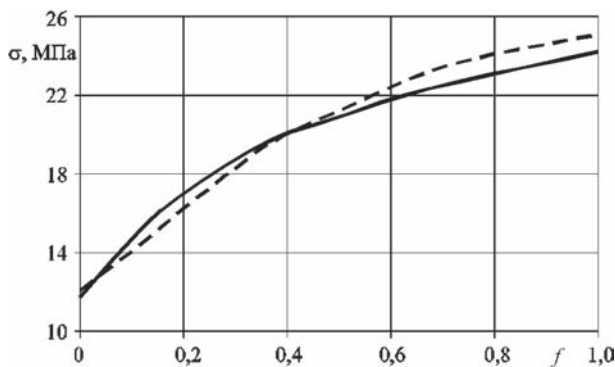


Рисунок 14 — Зависимость максимальных главных (сплошная линия) и эквивалентных (пунктир) напряжений в материале арматуры от коэффициента трения между компонентами

ного состояния (рисунок 15). В диапазоне от 10 до 100 кПа наблюдается существенное изменение напряженно-деформированного состояния композита: напряжения в арматуре увеличиваются до 30 %, напряжения в бетонной матрице уменьшаются на 12–20 %, максимальные деформации элемента увеличиваются на 20 %, контактное давление арматуры на матрицу увеличивается на 30 %.

В последние годы специалисты обратили внимание на потребность строительной отрасли в композитных неметаллических материалах, которые позволяют увеличить энергоэффективность, коррозионную стойкость и долговечность конструкций и зданий в целом [38, 39]. Современные технологии позволяют наряду со стеклопластиковой производить базальтопластиковую высокомодульную арматуру с начальным модулем упругости до 200 ГПа и пределом прочности на разрыв до 1850 МПа, что позволяет обеспечить все необходимые и эксплуатационные характеристики конструкций.

Выполнено моделирование балки, изображенной на рисунке 16, при замене металлической арматуры на стеклопластиковую. На рисунке 17 представлены зависимости параметров межфазного взаимодействия от модуля упругости стеклопластиковой арматуры. Линия 1 на этих графиках соответствует верхнему центральному арматурному стержню, 2 — верхнему боковому, 3 — нижнему (см. рисунок 16). Выполненные расчеты демонстрируют практически

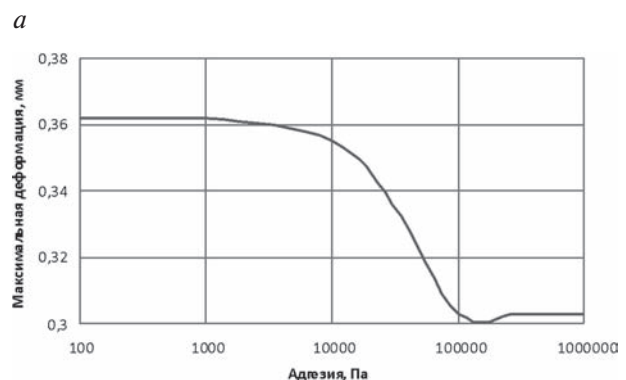
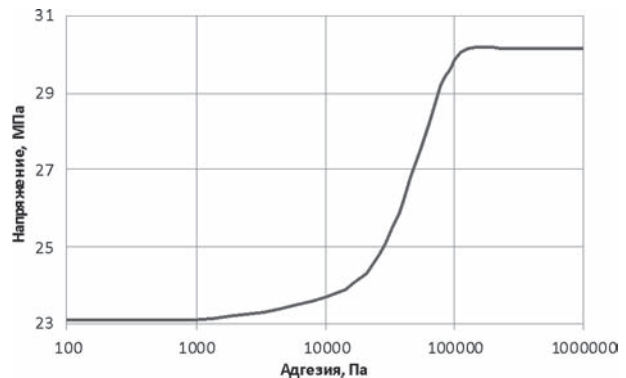


Рисунок 15 — Зависимость напряжений в арматуре (а) и максимальных смещений точек балки (б) от адгезии между арматурой и матрицей

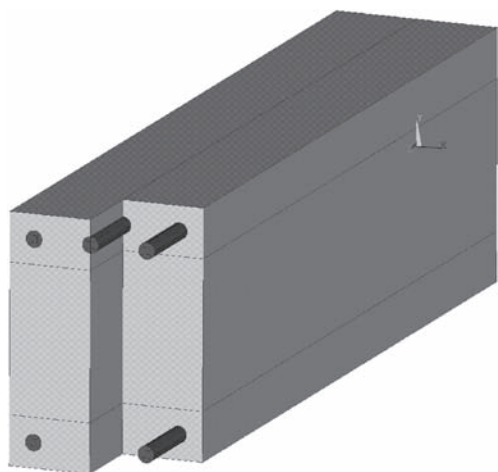


Рисунок 16 — Схема разбиения балки на объемы

монотонное изменение анализируемых параметров для верхних стержней. В то же время для нижних стержней при модуле упругости арматуры, составляющем 68,5 ГПа, наблюдается скачок показателей, обусловленный изменением характера относительного смещения арматуры и бетона. При значениях модуля упругости, меньших 68,5 ГПа, относительное смещение арматуры и бетона практически отсутствует. Оно определяется лишь деформациями областей контакта. В то же время при больших значениях модуля уп-

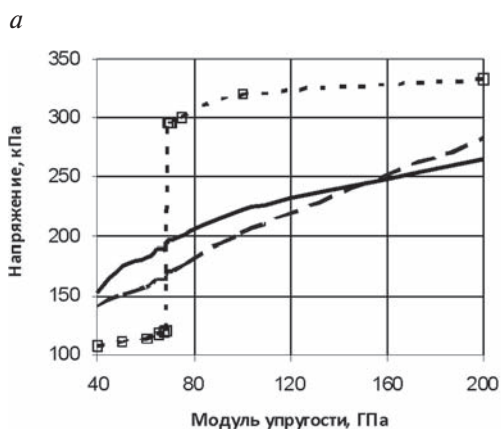
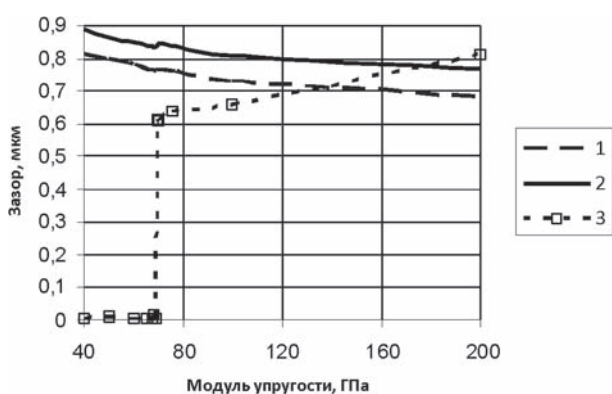


Рисунок 17 — Зависимость максимального зазора между арматурой и матрицей (а) и максимального касательного напряжения трения (б) от модуля упругости стеклопластиковой арматуры

ругости имеет место сдвиг арматуры относительно бетона, приводящий к значительному увеличению напряжений трения и появлению зазора между фазами композита. Таким образом выполненные расчеты показали необходимость оребрения поверхности высокомодульной арматуры.

В целом, характеристики деформирования композитобетонных и железобетонных конструкций оказались весьма близкими, что подтверждает полученные ранее иными авторами экспериментальные результаты. Однако предлагаемый подход, основанный на моделировании конструкций методом конечных элементов, дает возможность с высокой степенью точности прогнозировать характеристики конструкции до ее изготовления.

Заключение. Выполненный анализ позволяет сформулировать некоторые выводы о применении рассмотренных численных методов и перспективах их развития.

Подход, связанный с выделением элементарной ячейки, позволяет с помощью относительно несложных вычислительных экспериментов исследовать достаточно сложные эффекты: влияние взаимного расположения фаз на механические свойства композита; установить механизмы повреждения; изучить начальные стадии образования пустот и роста трещин. Этот подход весьма эффективен для иерархических моделей материалов. Рассматривая поведение материала на отдельном уровне иерархии в дальнейшем можно экстраполировать полученные результаты на следующие уровни.

Моделирование реальной структуры целесообразно использовать для имитации поведения материалов без какого-либо заметного регулярности структуры, а также анализа образования и развития трещин в материалах. Существенным недостатком этого подхода является необходимость создания новой сложной модели для каждой рассматриваемой микроструктуры материала, что не позволяет эффективно использовать названный подход для совершенствования материала или изготовленных из него деталей.

Дальнейшее развитие метода выделения представительного объема будет связано с приближением к реальным свойствам материала, для чего будут использоваться суперэлементы, моделирующие несколько включений, в общем случае случайно распределенных по объему суперэлемента.

Работы по совершенствованию методов моделирования поведения конструкций из композитных материалов с учетом их структуры на различных уровнях организации позволят оптимизировать их сопротивление разрушению, прочность, текучесть, износостойкость и иные параметры.

Список литературы

1. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
2. Bohm, H.J. Some simple models for micromechanical investigations of fiber arrangement effects in MMCs / H.J. Bohm,

- F.G. Rammerstorfer, E. Weisenbek // *Computational Materials Science*. — 1993. — Vol. 1, № 3. — Pp. 177–194.
3. Басов, К. А. ANSYS: Справочник пользователя / К.А. Басов. — М.: ДМК Пресс, 2014. — 639 с.
 4. Brockenborough, J.R. Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape / J.R. Brockenborough, S. Suresh, H.A. Wienecke // *Acta Metallurgica et Materialia*. — 1991. — Vol. 39, № 5. — Pp. 735–752.
 5. Dong, M. FE modelling of continuous fiber and particle reinforced composites by self-consistent embedded cell models / M. Dong, S. Schmauder // *Computational Methods in Micromechanics*. — San Francisco: ASME, 1995. — Pp. 81–86.
 6. Effective elastic response of two-phase composites / Y.-L. Shen, M. Finot, A. Needleman, S. Suresh // *Acta Metallurgica et Materialia*. — 1994. — Vol. 42, № 1. — Pp. 77–97.
 7. Dong, M. Transverse mechanical behaviour of fiber reinforced composites — FE modelling with embedded cell models / M. Dong, S. Schmauder // *Computational Material Science*. — 1996. — Vol. 5, № 1–3. — Pp. 53–66.
 8. Черноус, Д.А. Упругопластическое деформирование пористых материалов (двумерная модель) / Д.А. Черноус, Д.А. Конек // *Материалы, технологии, инструменты*. — 2002. — Т. 7, № 1. — С. 21–24.
 9. Shilko, S.V. Prediction of auctetic phenomena in nanoporomaterials / S.V. Shilko, E. M. Petrokovets, Yu.M. Pleskachevsky // *Physica status solidi*. — 2008. — Vol. 245, № 11. — Pp. 2445–2453.
 10. Kuna, M. Three-dimensional cell model analyses of void growth in ductile materials / M. Kuna, D.-S. Zun // *International Journal of Fracture*. — 1996. — Vol. 81, № 3. — Pp. 235–258.
 11. Geni, M. Damage analysis of aluminum matrix composite considering non-uniform distribution of SiC particles / M. Geni, M. Kikuchi // *Acta Materialia*. — 1998. — Vol. 46, № 9. — Pp. 3125–3133.
 12. Яковенко, О.А. Применение ANSYS для анализа динамических характеристик композиционных материалов / О.А. Яковенко, И.В. Завальная, Ю.Н. Наливайко // *ANSYS Advantage*. Русская редакция. — 2011. — № 15. — С. 63–64.
 13. Mechanical behaviour of multiphase materials. Numerical simulations and experimental comparisons / I. Iung, H. Petitgand, M. Grange, E. Lemaire // *Proceedings of the IUTAM Symposium on Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. — Pp. 99–106.
 14. Оценка макроскопической кривой деформирования композита на основе сшитой полимерной матрицы с порошковым наполнителем / Л. Наглик [и др.] // *Механика композиционных материалов*. — 2011. — Т. 47, № 6. — С. 893–902.
 15. Гаришин, О.К. Исследование структурных напряжений в дисперсно наполненных эластомерных нанокompозитах / О.К. Гаришин, С.Н. Лебедев // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2006. — Т. 12, № 3. — С. 289–299.
 16. Wulf, J. Finite element modelling of crack propagation in ductile fracture / J. Wulf, S. Schmauder, H. F. Fischmeister // *Computational Materials Science*. — 1993. — Vol. 1, № 3. — Pp. 297–301.
 17. 3D-Finite-Element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements / N. Lippmann, Th. Steinkopff, S. Schmauder, P. Gumbsch // *Computational Materials Science*. — 1997. — Vol. 9, № 1–2. — Pp. 28–35.
 18. Multiscale Modeling of Highly Heterogeneous MMCs / T. Antretter, F. D. Fischer, A. F. Plankensteiner, F. G. Rammerstorfer // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — Vol. 79, № S1. — Pp. 127–130.
 19. Шилько, С.В. Мезомеханический анализ асфальтобетона для дорожных покрытий / С.В. Шилько, Т.В. Рябенко // *Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса*. — Гомель: БелГУТ, 2013. — С. 321–322.
 20. Оценка уровня напряжений, возникающих в зонах контактного взаимодействия дисперсных компонентов металлополимерных наноструктурированных систем при электро-механотермическом воздействии / В.Н. Пасовец [и др.] // *Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки*. — 2014. — Вып. 8. — С. 154–163.
 21. Carter, W.C. OOF: Finite Element Analysis of Microstructures [Electronic resource] / W.C. Carter, S.A. Langer, E.R. Fuller Jr. — Gaithersburg, 2003. — Access mode: <http://www.ctcms.nist.gov/oof/oof1/Manual/Manual.html>. — Date of access: 25.06.2015.
 22. Moorthy, S. A Voronoi cell finite element model for particle cracking in elastic-plastic composite materials / S. Moorthy, S. Ghosh // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1998. — Vol. 151, № 3–4. — Pp. 377–400.
 23. Ghosh, S. Multiple analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method / S. Ghosh, K. Lee, S. Moorthy // *International Journal of Solids and Structures*. — 1995. — Vol. 32, № 1. — Pp. 27–62.
 24. Применение метода конечных элементов при исследовании композиционных материалов. Подходы, методики, программные средства / Е.Н. Князева [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2013. — № 3(24). — С. 69–76.
 25. Steinkopff, Th. Simulating the elasto-plastic behavior of multiphase materials by advanced finite element techniques Part I: a rezoning technique and the multiphase element method / Th. Steinkopff, M. Sautter // *Computational Materials Science*. — 1995. — Vol. 4, № 1. — Pp. 10–14.
 26. Saouma, V. *Lecture Notes in Fracture Mechanics* / V. Saouma. — Boulder: University of Colorado, 1995. — 79 p.
 27. Jirasek, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities / M. Jirasek // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2000. — Vol. 188, № 1–3. — Pp. 307–330.
 28. Mishnaevsky, L. Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review / L. Mishnaevsky, S. Schmauder // *Applied Mechanics Reviews*. — 2001. — Vol. 54, № 1. — Pp. 49–67.
 29. Многоуровневое компьютерное моделирование строительных композитов с учетом внутренних контактных взаимодействий / А. О. Шимановский [и др.] // *Материалы. Технологии. Инструменты*. — 2013. — Т. 18, № 4. — С. 17–21.
 30. Shimanovsky, A. Finite element modeling of the cement matrix and filler grains interaction / A. Shimanovsky, H. Kuziomkina, Yu. Pleskachevskii, V. Yakubovich // *Technolog*. — 2013. — Vol. 5, № 4. — Pp. 171–174.
 31. Shimanovsky, A.O. Finite Element Modeling of the Composite Reinforced by Grains / A.O. Shimanovsky, V.I. Yakubovich, Y.M. Pleskachevskii // *Proceedings of 8th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Volos, 12 July–15 July 2015*. — Volos: University of Thessaly Press, 2015. — 8 p.
 32. Fanning, P. Nonlinear models of reinforced and post-tensioned concrete beams / P. Fanning // *Electronic Journal of Structural Engineering*. — 2001. — № 2. — Pp. 111–119.
 33. Limkatanyu, S. Reinforced concrete frame element with bond interfaces. Part 1: Displacement-Based, Force-Based and Mixed Formulations / S. Limkatanyu, E. Spacone // *Journal of Structural Engineering*. — 2002. — Vol. 128, № 3. — Pp. 346–355.
 34. Pleskachevskii, Yu.M. Finite-Element Modeling of the Interaction of Reinforcement with Concrete Matrix / Yu.M. Pleskachevskii, A.O. Shimanovskii, G.M. Kuzemkina // *Mechanics of Composite Materials*. — 2008. — Vol. 44, № 3. — Pp. 209–214.
 35. Моделирование механического взаимодействия арматуры с матрицей композита / Ю.М. Плескачевский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2009. — № 1. — С. 67–71.
 36. Kuziomkina, H.M. The Special Features of the Deformation for the Bearing Building Constructions with Composite Reinforcement / H.M. Kuziomkina, A.O. Shimanovsky, V.I. Yakubovich // *Procedia Engineering*. — 2012. — Vol. 48 — Pp. 346–351.
 37. Jin, L. Meso numerical simulation of reinforced concrete members / L. Jin, X.-L. Du // *Shuili Xuebao*. — 2012. — Vol. 43. — № 10. — Pp. 1230–1242.
 38. Использование бетонных балок, армированных стальной и стеклопластиковой арматурой / В.М. Власов [и др.] // *Изв. Всерос. НИИ гидротехники им. Б.Е. Веденеева*. — 2005. — Т. 244. — С. 33–38.
 39. Прогнозирование длительной прочности стеклопластиковой арматуры / А.Н. Блазнов [и др.] // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2003. — Т. 9, № 4. — С. 579–592.

PLESKACHEVSKII Yuri M., Corresponding Member of the NAS of Belarus,
Dr. Techn. Sc., Professor

Advisor of the NAS of Belarus

E-mail pleskym@mail.ru

V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute, Gomel, The Republic of Belarus

SHIMANOVSKY Alexandr O., Dr. Techn. Sc., Associate Professor

Head of Department of Technical Physics and Engineering Mechanics

E-mail: tm.belsut@gmail.com

Belarusian State University of Transport, Gomel, The Republic of Belarus

Received 23 October 2015.

COMPUTER SIMULATION OF THE COMPOSITES STRUCTURE AND PROPERTIES IN LOADED CONSTRUCTIONS

The article considers approaches to solutions to the problem concerning composite structure deformations using finite element method. The examples of composite simulations based on the material unit cells and real microstructures are shown. The results of simulations have been obtained for the concrete and reinforced concrete structural elements considering internal contact interactions between the composite matrix and the reinforcing phase.

Keywords: computer simulation, composite materials, material unit cell, microstructure, contact interaction

References

- Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984, 464 p. [Russ. ed.: Brebbia C., Telles J., Wrobel L. *Metody granichnyh jelementov*. Moscow, Mir Publ., 1987. 524 p.]
- Bohm H.J., Rammerstorfer F.G., Weisenbek E. Some simple models for micromechanical investigations of fiber arrangement effects in MMCs. *Computational Materials Science*, 1993, vol. 1, no. 3, pp. 177–194.
- Basov K.A. *ANSYS: Spravochnik pol'zovatelja* [ANSYS: User's Handbook]. Moscow, DMK Press, 2014. 639 p.
- Brockenborough J. R., Suresh S., Wienecke H. A. Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1991, vol. 39, no. 5, pp. 735–752.
- Dong M., Schmauder S. FE modelling of continuous fiber and particle reinforced composites by self-consistent embedded cell models. *Computational Methods in Micromechanics*. San Francisco, ASME, 1995, pp. 81–86.
- Shen Y.-L., Finot M., Needleman A., Suresh S. Effective elastic response of two-phase composites. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, vol. 42, no. 1, pp. 77–97.
- Dong M., Schmauder S. Transverse mechanical behaviour of fiber reinforced composites – FE modelling with embedded cell models. *Computational Material Science*, 1996, vol. 5, no. 1–3, pp. 53–66.
- Chernous D.A., Konyok D.A. Uprugoplasticheskoe deformirovanie poristykh materialov (dvumernaja model') [Elasto-plastic deformation of cellular solid (2D model)]. *Materialy, tehnologii, instrumenty* [Materials, Technologies, Instruments], 2002, vol. 7, no. 1, pp. 21–24.
- Shilko S.V., Petrokovets E.M., Pleskachevsky Yu.M. Prediction of auxetic phenomena in nanoporomaterials. *Physica Status Solidi*, 2008, vol. 245, no. 11, pp. 2445–2453.
- Kuna M., Zun D.-S. Three-dimensional cell model analyses of void growth in ductile materials. *International Journal of Fracture*, 1996, vol. 81, no. 3, pp. 235–258.
- Geni M., Kikuchi M. Damage analysis of aluminum matrix composite considering non-uniform distribution of SiC particles. *Acta Materialia*, 1998, vol. 46, no. 9, pp. 3125–3133.
- Jakovenko O.A., Zaval'naja I.V., Nalivajko Ju.N. Primenenie ANSYS dlja analiza dinamicheskikh harakteristik kompozicionnykh materialov [Application of ANSYS to analyze the dynamic characteristics of composite materials]. *ANSYS Advantage, Russkaja redakcija* [ANSYS Advantage, Russian Edition], 2011, no. 15, pp. 63–64.
- Iung I., Petitgand H., Grange M., Lemaire E. Mechanical behaviour of multiphase materials: Numerical simulations and experimental comparisons. *Proceedings of the IUTAM Symposium on Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996, pp. 99–106.
- Nahlík L., Hutár P., Duskova M., Dusek K., Masa B. Estimation of the macroscopic stress-strain curve of a particulate composite with a crosslinked polymer matrix. *Mechanics of Composite Materials*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 627–634. [Russ. ed.: Naglik L., Gutarzh P., Dushkova M., Dushek K., Masha B. Ocenka makroskopicheskoj krivoj deformirovanija kompozita na osnove sshitoj polimernoj matricy s poroshkovym napolnitelem. *Mehanika kompozitnykh materialov*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 893–902].
- Garishin O.K., Lebedev S.N. Issledovanie strukturnykh naprjazhenij v dispersno napolnennykh jelastomernykh nanokompozitah [Study of structural stress in the dispersion-filled elastomeric nanocomposites]. *Mehanika kompozicionnykh materialov i konstrukcij* [Mechanics of composite materials and structures], 2006, vol. 12, no. 3, pp. 289–299.
- Wulf J., Schmauder S., Fischmeister H. F. Finite element modeling of crack propagation in ductile fracture. *Computational Materials Science*, 1993, vol. 1, no. 3, pp. 297–301.
- Lippmann N., Steinkopff Th., Schmauder S., Gumbsch P. 3D-Finite-Element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*, 1997, vol. 9, no. 1–2, pp. 28–35.
- Antretter T., Fischer F.D., Planckensteiner A.F., Rammerstorfer F.G. Multiscale Modeling of Highly Heterogeneous MMCs. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 79, no. S1, pp. 127–130.
- Shilko S.V., Riabchenko T.V. Mezomechanicheskij analiz asfal'tobetona dlja dorozhnykh pokrytij [Meso-mechanical analysis of bituminous concrete for paving]. *Problemy i perspektivy razvitiija transportnykh sistem i stroitel'nogo kompleksa* [Problems and development prospects of transport systems and the construction industry]. Gomel, BelSUT, 2013, pp. 321–322.
- Pasovets V.N., Kovtun V.A., Mihovski M., Pleskachevskii Yu.M., Aleksiev A. Ocenka urovnja naprjazhenij, vznikajushchih v zonah kontaktnogo vzaimodejstviya dispersnykh komponentov metallopolimernykh nanostrukturirovannykh sistem pri jelektromehanotermicheskom vozdejstvii [Evaluation of stress levels appearing in contact interaction zones of nanostructured metal-polymer systems dispersed components under electromechanical loading]. *Mehanika. Nauchnye issledovanija i uchebno-metodicheskie razrabotki* [Mechanics: Scientific Researches and Methodical Development], 2014, vol. 8, pp. 154–163.

21. Carter W.C., Langer S.A., Fuller E.R. Jr. OOF: *Finite Element Analysis of Microstructures* (2003). Available at: <http://www.ctcms.nist.gov/oof/oof1/Manual/Manual.html> (accessed 26 June 2015).
22. Moorthy S., Ghosh S. Voronoi cell finite element model for particle cracking in elastic-plastic composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol. 151, no. 3–4, pp. 377–400.
23. Ghosh S., Lee K., Moorthy S. Multiple analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, vol. 32, no. 1, pp. 27–62.
24. Knyazeva E.N., Kukareko V.A., Alexandrov V.Y., Timoshenko N.P. Primenenie metoda konechnykh jelementov pri issledovanii kompozicionnykh materialov: Podhody, metodiki, programmye sredstva [Application of the finite element method to the investigation of composite materials. Approaches, methods, computer programs]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 3(24), pp. 69–76.
25. Steinkopff Th., Sautter M. Simulating the elasto-plastic behavior of multiphase materials by advanced finite element techniques Part I: a rezoning technique and the multiphase element method. *Computational Materials Science*, 1995, vol. 4, no. 1, pp. 10–14.
26. Saouma V. *Lecture Notes in Fracture Mechanics*. Boulder, University of Colorado, 1995. 79 p.
27. Jirasek M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol. 188, no. 1–3, pp. 307–330.
28. Mishnaevsky L., Schmauder S. Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, vol. 54, no. 1, pp. 49–67.
29. Shimanovskiy A.O., Kuziomkina H.M., Yakubovich V.I., Vasiliev A.A. Mnogourovnevoe komp'juternoe modelirovanie stroitel'nykh kompozitov s uchetom vnutrennih kontaktnykh vzaimodejstvij [Multiscale computer modeling of building composites considering the internal contact interactions]. *Materialy, tehnologii, instrumenty* [Materials, Technologies, Instruments], 2013, vol. 18, no. 4, pp. 17–21.
30. Shimanovskiy A., Kuziomkina H., Pleskachevskiy Yu., Yakubovich V. Finite element modeling of the cement matrix and filler grains interaction. *Technolog*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 171–174.
31. Shimanovskiy A.O., Yakubovich V.I., Pleskachevskiy Yu.M. Finite Element Modeling of the Composite Reinforced by Grains. *Proceedings of 8th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Volos, University of Thessaly Press, 2015. 8 p. Available at: <http://8gracm.mie.uth.gr/Papers/Session%20D1-A1/A.%20Shimanovsky.pdf>.
32. Fanning P. Nonlinear models of reinforced and post-tensioned concrete beams. *Electronic Journal of Structural Engineering*, 2015, no. 2, pp. 111–119. Available at: <http://www.ejse.org/Archives/Fulltext/200102/02/20010202.doc>.
33. Limkatanyu S., Spacone E. Reinforced concrete frame element with bond interfaces. Part 1: Displacement-Based, *Force-Based and Mixed Formulations*, 2002, vol. 128, no. 3, pp. 346–355.
34. Pleskachevskii Yu.M., Shimanovskii A.O., Kuzemkina G.M. Finite-Element Modeling of the Interaction of Reinforcement with Concrete Matrix. *Mechanics of Composite Materials*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 209–214.
35. Pleskachevskiy Yu.M., Shimanovsky A.O., Kuziomkina H.M., Yakubovich V.I. Modelirovanie mehanicheskogo vzaimodejstviya armatury s matricej kompozita [Modeling of Mechanical Interaction of Reinforcement with Matrix Composite]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1, pp. 67–71.
36. Kuziomkina H.M., Shimanovsky A.O., Yakubovich V.I. The Special Features of the Deformation of the Bearing Building Constructions with Composite Reinforcement. *Procedia Engineering*, 2012, vol. 48, pp. 346–351.
37. Jin L., Du X.-L. Meso numerical simulation of reinforced concrete members. *Shuili Xuebao*, 2012, vol. 43, no. 10, pp. 1230–1242.
38. Vlasov V.M., Bertov V.M., Dolgachev A.D., Donov A.V., Lugovoj A.N. Ispol'zovanie betonnykh balok, armirovannykh stal'noj i stekloplastikovej armaturoj [Using concrete beams reinforced with steel and fiberglass reinforcement]. *Izvestija Vserossijskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta gidrotehniki imeni B.E. Vedeneeva* [Proceedings of the All-Russian Research Institute of Hydraulic Engineering named B.E. Vedeneev], 2005, vol. 244, pp. 33–38.
39. Blaznov A.N., Volkov Yu.P., Lugovoy A.N., Savin V.F. Prognozirovaniye dlitel'noj prochnosti stekloplastikovej armatury [Prediction of fiberglass reinforcement long-term strength]. *Mehanika kompozicionnykh materialov i konstrukcij* [Mechanics of composite materials and structures], 2003, vol. 9, no. 4, pp. 579–592.