Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономика и организация
машиностроительного производства»

В.И. Похабов
Н.Д. Попова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Пособие для студентов экономических специальностей

Часть 2

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономика и организация машиностроительного
производства»

В.И. Похабов
Н.Д. Попова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Пособие для студентов экономических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Минск 2009

УДК 330~~.115~~ (075.8)
~~ББК 4.в641.0я7~~
П 64

Рецензенты:
С.В. Глубокий, А.Л. Ивашутин

Похабов, В.И.

П 64 Экономико-математические методы и модели. Практикум: пособие для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / В.И. Похабов, Н.Д. Попова. – Минск: БНТУ, 2009. – Ч. 2. – 95 с.

ISBN 978-985-525-143-0 (Ч. 2).

В данном пособии рассматриваются методы решения экономических задач в соответствии с программой дисциплины «Экономико-математические методы и модели» для студентов экономических специальностей вузов.

Цель пособия – помочь студентам глубже овладеть теорией, методами количественного анализа, научить их использовать различные приемы и методы моделирования в сфере экономики и управления на предприятии.

В результате изучения данного курса студент должен овладеть математическим инструментарием при решении экономических задач, научиться формализовать ситуацию и описывать ее с помощью математической модели, проводить расчеты и получать количественные результаты, уметь анализировать их и делать выводы, адекватные поставленной цели.

Задачи, приведенные по каждой теме, могут быть решены с использованием компьютерных технологий.

Часть 1 настоящего пособия «Экономико-математические методы и модели. Практикум», авторы В.И. Похабов, Д.Г. Антипенко, М.Н. Гриневич, вышла в свет в БНТУ в 2003 году.

УДК 330.115 (075.8)
ББК 4.в641.0я7

ISBN 978-985-525-143-0 (Ч.2)
ISBN 978-985-525-222-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Удовлетворение растущих запросов общества сопровождается непрерывным обновлением продукции и производственных фондов, углублением процессов специализации и кооперирования производства, интенсификацией энергетических и материальных потоков, циркулирующих в машиностроительном производстве.

Составными частями производства и сбыта продукции являются комплексное исследование рынка, формирование спроса и стимулирование сбыта, программно-целевой подход к управлению научно-исследовательскими и опытно-конструкторскими работами. Успех в реализации продукции, устойчивое финансовое положение сопутствуют предприятиям, использующим принципы и методы современного маркетинга, которому в рыночной экономике отводится ведущая роль.

В результате усложняется управление производством и распределением материальных благ, растут потоки перерабатываемой информации, повышаются требования к качеству принимаемых решений. Все это стимулирует разработку и использование на всех уровнях управления народным хозяйством методов принятия решений на основе использования математических методов и моделей.

В этих условиях от инженеров-экономистов и организаторов производства требуется уже не только владение экономическим анализом производственных ситуаций, но и умение использовать и интерпретировать математическую модель, выбрать метод и инструментальные средства моделирования, дать экономическую оценку результатам оптимизации.

Цель данного пособия – изложить в доступной форме задачи, методологические принципы и рабочие приемы дисциплины «Экономико-математические методы и модели» в соответствии с программой курса для оптимизации задач планирования, организации и управления производством. Подробно раскрыты сетевое планирование и управление, теория массового обслуживания, управления запасами и теория игр. Даны методики и конкретные примеры решения задач как вручную, так и с использованием ЭВМ.

1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПРЕДМЕТ, ЗАДАЧИ

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Процесс моделирования включает три элемента:

1) субъект (исследователь);
2) объект исследования;
3) модель, описывающую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Сложность системы определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, а также взаимоотношениями между системой и средой. Экономика страны обладает всеми признаками очень сложной системы. Она объединяет огромное число элементов, отличается многообразием внутренних связей и связей с другими системами (природная среда, экономика других стран и т.д.). В народном хозяйстве взаимодействуют природные, технологические, социальные процессы, объективные и субъективные факторы.

Сложность экономики иногда рассматривалась как обоснование невозможности ее моделирования, изучения средствами математики. Однако моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования. Именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Потенциальная возможность математического моделирования любых экономических объектов и процессов не означает, разумеется, ее успешной осуществимости при данном уровне экономических и математических знаний, имеющейся конкретной информации и вычислительной технике. И хотя нельзя указать абсолютные границы математической формализуемости экономических проблем, всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование недостаточно эффективно.

Математические модели экономических процессов и явлений более кратко можно назвать экономико-математическими моделями. Для классификации этих моделей используются разные основания.

1. Целевое назначение:

Теоретико-аналитические модели используются при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов, применяются для доказательства экономических гипотез, имеют высокий уровень абстракции и используют обобщенную экономическую информацию, зачастую отсутствующую в отчетности.

Прикладные модели позволяют дать количественное решение определённых экономических задач, поэтому ориентированы на изучение конкретного экономического объекта, его динамики и взаимосвязей. Основное назначение прикладных моделей при принятии управленческих решений состоит в создании инструментального средства принятия решений.

2. Период прогнозирования:

Краткосрочные модели с период прогнозирования до 1 года.

Среднесрочные модели с период прогнозирования до 5 лет.

Долгосрочные модели с период прогнозирования свыше 5 лет.

3. Возможность учета фактора неопределенности экономического процесса:

Детерминированные модели — входные и выходные параметры задаются однозначно.

В *стохастической модели* параметры модели, условия функционирования и характеристики объекта выражены случайными величинами и связаны стохастическими зависимостями, либо исходная информация также представлена случайными величинами.

4. Возможность учета временных изменений:

Динамические модели — это модель, описывающая экономику в развитии. Как правило, в ней имеется переменная, обеспечивающая связь последующего и предыдущего периодов, например инвестиции в основной капитал рассматриваются как функция прироста производства за период [t-1,t].

Статические модели — экономико-математическая модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени. Статические модели разрабатываются лишь для отдельно взятых периодов, в данном случае для t-1 или t, а развитие экономического процесса отображается рассчитанными показателями для периодов t-1 и t.

5. Степень агрегирования объектов моделирования:

Макроэкономические модели отражают функционирование экономики как единого целого.

Микроэкономические модели связаны с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы.

6. Тип подхода к изучаемым социально-экономическим системам:

Дескриптивные модели (балансовые, имитационные, эконометрические) предназначены для описания и объяснения фактически наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений.

Нормативные модели (все оптимизационные модели) устанавливают не то, каким образом устроена и развивается экономическая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать при определенных критериях.

7. Тип информации, используемой в модели:

Аналитические – модели, построенные на априорной информации.

Идентифицируемые – модели, построенные на апостериорной информации.

Априорная информация [aprior information] и апостериорная информация [aposterior information] – соответственно данные, имевшиеся до проведения какого-либо опыта или другого действия, и сведения, полученные после его выполнения.

8. Цель создания и применения:

Балансовые модели выражают требование соответствия наличия ресурсов и их использования.

Трендовые модели — это модели, в которых развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей.

Оптимизационные модели предназначены для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления;

Имитационные модели предназначены для использования в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов.

9. Характеристика математических объектов, включенных в модель: матричные модели, модели линейного программирования, мо-

дели нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные модели, модели теории массового обслуживания, модели сетевого планирования и управления, модели теории игр и т.д.

На практике часто используются комбинации этих моделей: имитационные эконометрические, имитационные оптимизационные, имитационные балансовые и т.д.

Построение модели представляет собой итеративную процедуру, включающую следующие этапы:

1. Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ.

2 Построение математической модели.

3. Математический анализ модели.

4. Подготовка исходной информации.

5. Математическое решение.

6. Анализ математических результатов и их применение. В первую очередь, должна быть проведена проверка адекватности модели по тем свойствам, которые выбраны в качестве существенных (другими словами, должны быть произведены верификация и валидация модели).

Верификация модели – подтверждение того, что модель с достаточной точностью преобразуется из одной формы в другую в соответствии с намерениями разработчика (от формулировки проблемы до получения программного приложения). *Валидация* предполагает проверку соответствия между поведением имитационной модели и исследуемой системы.

Вопросы для самопроверки

1) В чем заключается смысл системного подхода к анализу социально-экономических систем и процессов?
2) Сформулируйте понятия «модель» и «метод моделирования».
3) Каковы важнейшие особенности социально-экономических систем как объектов моделирования?
4) Дайте характеристику этапов экономико-математического моделирования.
5) Назовите основные классификационные признаки экономико-математических моделей и приведите примеры моделей, входящих в ту или иную классификационную рубрику.
6) Какие требования предъявляются к математической модели?

2. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВОМ

2.1 Основные понятия сетевого планирования и управления

Метод сетевого планирования и управления (СПУ) – это метод решения задач исследования операций, в которых необходимо оптимально распределить сложные комплексы работ.

СПУ состоит из трех основных этапов.

1. Структурное планирование.
2. Календарное планирование.
3. Оперативное управление.

Основные понятия сетевых моделей:

Работа (дуги на сетевом графике) – это действие, трудовой процесс, сопровождающийся затратами времени или/и ресурсов и приводящий к определенным результатам. Работы подразделяются на: действительные работы, ожидание и фиктивные работы.

*Событие (*вершины на сетевом графике) – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Любая работа сетевой модели соединяет два события: начальное и конечное. Обычно на сетевых графиках события упорядочены, т.е. $i < j$.

На сетевом графике можно выделить *исходное событие*, *промежуточное событие* и *завершающее событие*.

Продолжительность работы (t_{ij}) – это время, необходимое для выполнения работы (i,j).

Путь (L) – любая последовательность работ, в которой конечное событие предыдущей работы является начальным событием последующей.

Полный путь – последовательность работ, соединяющих исходное и завершающее события.

Длина пути – продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь.

Критический путь – наиболее протяженный по времени полный путь. Его продолжительность определяет максимальное время выполнения всего проекта (*критический срок* $t_{кр}$). На сетевом графике критических путей может быть несколько. Работы и события, лежащие на критическом пути, называются *критическими*, а остальные работы и события – *некритическими.* Если выполнение любой работы критического пути будет задержано, то это замедлит время реализации всего проекта. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока.

При анализе сетевых графиков, прежде всего, вычисляют их основные временные параметры:

– продолжительность критического пути (критический срок);
– сроки свершения и резервы событий;
– сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Свершение события – это момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы, и может быть начата любая выходящая работа. Событие может иметь некоторый интервал свободы свершения (резерв времени).

Ранний срок t_j^p – самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию: $t_1^p = 0$, $t_j^p = \max(t_i^p + t_{i,j})$. Для завершающего события *S*: $t_s^p = t_{кр}$.

Поздний срок t_i^n *свершения события i* – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием без нарушения сроков реализации проекта в целом: $t_i^n = \min(t_j^n - t_{i,j})$. Для завершающего события *S*: $t_s^n = t_s^p = t_{кр}$.

Резерв времени R_i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события *i* без нарушения срока наступления завершающего события: $R_i = t_i^n - t_i^p$

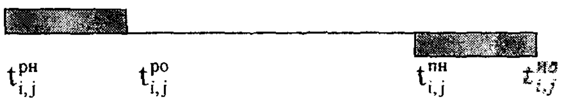
Ранние и поздние сроки критических событий совпадают, т.е. резерв времени у них равны нулю.

После определения критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций. Очевидно, что резерв времени для критической операции должен быть равен нулю. Поэтому она и называется критической. Рассмотрим произвольную операцию (i; j).

Наиболее ранний возможный срок начала операции (i; j) – $t_{i,j}^{рн}$ – определяется при допущении, $t_{i,j}^{рн} = t_i^{рн}$, поскольку работа не может начаться раньше наступления предшествующего события i. Отсюда следует, что наиболее ранний возможный срок окончания операции (i; j) $t_{i,j}^{ро}$: $t_{i,j}^{ро} = t_{i,j}^{рн} + t_{i,j}$.

Раннее начало работ, выходящих из исходного события 1, равно 0: $t_{h-j}^{рн} = 0$. Раннее начало данной работы является ранним окончанием предшествующей работы: $t_{i-j}^{рн} = t_{h-i}^{ро}$.

Наиболее поздний допустимый срок окончания работы (i; j) определяется как самое позднее время завершения работы без задержки срока окончания всего проекта. Поскольку операция должна быть закончена не позднее наибольшего допустимого срока наступления последующего события j, то имеем $t_{i,j}^{по} = t_{j}^{по}$. Отсюда следует, что наиболее поздний допустимый срок начала работы (i; j) вычисляется следующим образом: $t_{i,j}^{пн} = t_{i,j}^{по} - t_{i,j}$.



В отличие от событий для работ существуют резервы времени разного вида:

Полный резерв времени $R_{i,j}^{п}$ — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок:

$$R_{i,j}^{п} = t_j^{п} - t_i^{р} - t_{i,j} = t_{i,j}^{пн} - t_{i,j}^{рн} = t_{i,j}^{по} - t_{i,j}^{ро}$$

Свободный (частный) резерв времени $R_{i,j}^{c}$ — показатель максимальной задержки работы (i,j), не влияющей на начало последующих работ: $R_{i,j}^{c} = t_j^{р} - t_i^{р} - t_{i,j} = t_{j,k}^{рн} - t_{i,j}^{ро}$.

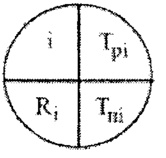
Необходимо учитывать тот факт, что при вычислении полного резерва времени принимается неявное допущение, согласно которому все предшествующие работы (во всяком случае, те, которые имеют какое-либо отношение к рассматриваемой работе) должны выполняться как можно раньше, чтобы обеспечить полный резерв времени для данной работы. Следовательно, в общем случае практически невозможно для каждой работы реализовать собственный полный резерв времени.

Свободный резерв времени для определенной работы не может превышать полный резерв.

Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют.

Существует множество способов и методов расчета временных параметров сети. Для небольших сетевых графиков расчеты можно производить вручную. Для сложных расчетов применяется соответствующее программное обеспечение.

Для упрощения расчетов используется *четырехсекторная схема:*



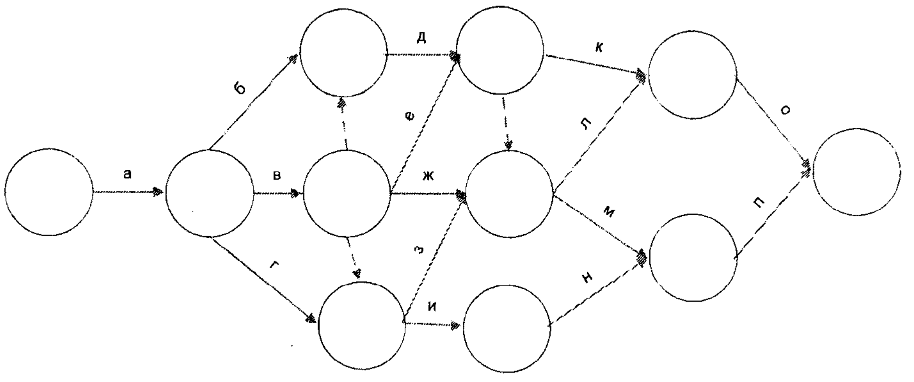
Пример

В таблице 2.1 представлены исходные данные.

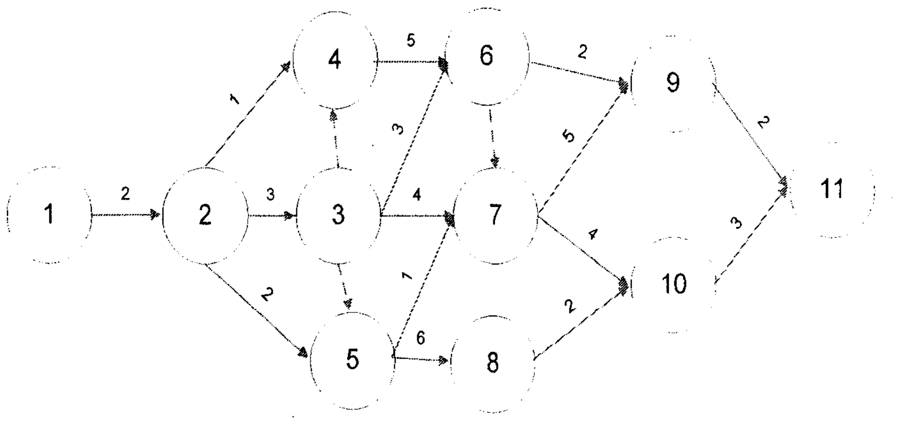
Таблица 2.1 — Исходные данные к сетевому планированию

Шифр работы	Шифр предшествующей работы	Продолжительность работы
а	-	2
б	а	1
в	а	3
г	а	2
д	б, в	5
е	в	3
ж	в	4
з	в, г	1
и	в, г	6
к	д, е	2
л	д, е, ж, з	5
м	д, е, ж, з	4
н	и	2
о	к, л	2
п	м, н	3

Используя правила построения сети, получаем график.



Далее производится кодирование событий на графике, а вместо шифра работ проставляется их продолжительность.



Произведем расчет наиболее ранних сроков совершения событий, ранних начал и ранних окончаний событий в таблице 2.2, расчет наиболее поздних сроков совершения событий, поздних начал и поздних окончаний событий в таблице 2.3, расчет резервов времени событий, общих резервов, частных резервов работ в таблице 2.4.

Таблица 2.2 – Расчет наиболее ранних сроков совершения событий, ранних начал и ранних окончаний событий

$t_i^р$	$t_{i,j}^{рн}$	$t_{i,j}^{ро}$
$t_1^р=0$	$t_{1-2}^{рн}=0$	$t_{1-2}^{ро}=0+2=2$
$t_2^р=0+2=2$	$t_{2-3}^{рн}=2$	$t_{2-3}^{ро}=2+3=5$
	$t_{2-4}^{рн}=2$	$t_{2-4}^{ро}=2+1=3$
	$t_{2-5}^{рн}=2$	$t_{2-5}^{ро}=2+2=4$
$t_3^р=2+3=5$	$t_{3-4}^{рн}=5$	$t_{3-4}^{ро}=5+0=5$
	$t_{3-5}^{рн}=5$	$t_{3-5}^{ро}=5+0=5$
	$t_{3-6}^{рн}=5$	$t_{3-6}^{ро}=5+3=8$
	$t_{3-7}^{рн}=5$	$t_{3-7}^{ро}=5+4=9$
$t_4^р=\max(2+1;5+0)=5$	$t_{4-6}^{рн}=5$	$t_{4-6}^{ро}=5+5=10$
$t_5^р=\max(2+2;5+0)=5$	$t_{5-7}^{рн}=5$	$t_{5-7}^{ро}=5+1=6$
	$t_{5-8}^{рн}=5$	$t_{5-8}^{ро}=5+6=11$
$t_6^р=\max(5+5;5+3)=10$	$t_{6-7}^{рн}=10$	$t_{6-7}^{ро}=10+0=10$
	$t_{6-9}^{рн}=10$	$t_{6-9}^{ро}=10+2=12$
$t_7^р=\max(10+0;5+4;5+1)=10$	$t_{7-9}^{рн}=10$	$t_{7-9}^{ро}=10+5=15$
	$t_{7-10}^{рн}=10$	$t_{7-10}^{ро}=10+4=14$
$t_8^р=5+6=11$	$t_{8-10}^{рн}=11$	$t_{8-10}^{ро}=11+2=13$
$t_9^р=\max(10+2;10+5)=15$	$t_{9-11}^{рн}=15$	$t_{9-11}^{ро}=15+2=17$
$t_{10}^р=\max(10+4;11+2)=14$	$t_{10-11}^{рн}=14$	$t_{10-11}^{ро}=14+3=17$
$t_{11}^р=\max(15+2;14+3)=17$	$t_{11-12}^{рн}=17$	

Таблица 2.3 – Расчет наиболее поздних сроков совершения событий, поздних начал и поздних окончаний событий

$t_i^п$	$t_{i,j}^{пн}$	$t_{i,j}^{по}$
1	2	3
$t_2^п=\min(5-1;5-3;6-2)=2$	$t_{1-2}^{пн}=2-2=0$	$t_{1-2}^{по}=2$
$t_3^п=\min(10-3;10-4;6-0;5-0)=5$	$t_{2-3}^{пн}=5-3=2$	$t_{2-3}^{по}=5$
$t_4^п=10-5=5$	$t_{2-4}^{пн}=5-1=4$	$t_{2-4}^{по}=5$
$t_5^п=\min(12-6;10-1)=6$	$t_{2-5}^{пн}=6-2=4$	$t_{2-5}^{по}=6$
	$t_{3-4}^{пн}=5-0=5$	$t_{3-4}^{по}=5$
	$t_{3-5}^{пн}=6-0=6$	$t_{3-5}^{по}=6$
$t_6^п=\min(15-2;10-0)=10$	$t_{3-6}^{пн}=10-3=7$	$t_{3-6}^{по}=10$
$t_7^п=\min(15-2;14-4)=10$	$t_{3-7}^{пн}=10-4=6$	$t_{3-7}^{по}=10$
	$t_{4-6}^{пн}=10-5=5$	$t_{4-6}^{по}=10$
	$t_{5-7}^{пн}=10-1=9$	$t_{5-7}^{по}=10$

Продолжение таблицы 2.3

1	2	3
$t_8^{п}=14-2=12$	$t_{5-8}^{пн}=12-6=6$	$t_{5-8}^{по}=12$
	$t_{6-7}^{пн}=10-0=10$	$t_{6-7}^{по}=10$
$t_9^{п}=17-2=15$	$t_{6-9}^{пн}=15-2=13$	$t_{6-9}^{по}=15$
	$t_{7-9}^{пн}=15-5=10$	$t_{7-9}^{по}=15$
$t_{10}^{п}=17-3=14$	$t_{7-10}^{пн}=14-4=10$	$t_{7-10}^{по}=14$
	$t_{8-10}^{пн}=14-2=12$	$t_{8-10}^{по}=14$
$t_{11}^{п}=17$	$t_{9-11}^{пн}=17-2=15$	$t_{9-11}^{по}=17$
	$t_{10-11}^{пн}=17-3=14$	$t_{10-11}^{по}=17$

Таблица 2.4 – Расчет резервов времени событий, общих резервов, частных в таблице 2.2 резервов работ

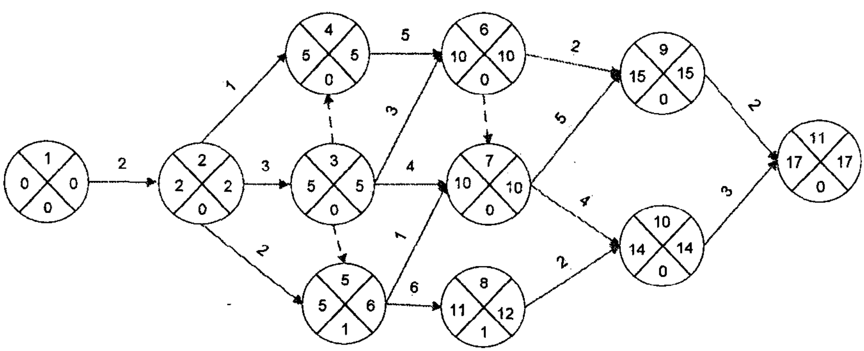
R_i	$R^{н}_{i,j}$	$R^{c}_{i,j}$
$R_1=0-0=0$	$R_{1-2}=2-2=0$	$r_{1-2}=2-2=0$
$R_2=2-2=0$	$R_{2-3}=5-5=0$	$r_{2-3}=5-5=0$
$R_3=5-5=0$	$R_{2-4}=5-3=2$	$r_{2-4}=5-3=2$
$R_4=5-5=0$	$R_{2-5}=6-4=2$	$r_{2-5}=5-4=1$
$R_5=6-5=1$	$R_{3-4}=5-5=0$	$r_{3-4}=5-5=0$
$R_6=10-10=0$	$R_{3-5}=6-5=1$	$r_{3-5}=5-5=0$
$R_7=10-10=0$	$R_{3-6}=10-8=2$	$r_{3-6}=10-8=2$
$R_8=12-11=1$	$R_{3-7}=10-9=1$	$R_{3-7}=10-9=1$
$R_9=15-15=0$	$R_{4-6}=10-10=0$	$R_{4-6}=10-10=0$
$R_{10}=14-14=0$	$R_{5-7}=10-6=4$	$r_{5-7}=10-6=4$
$R_{11}=17-17=0$	$R_{5-8}=12-11=1$	$r_{5-8}=11-11=0$
	$R_{6-7}=10-10=0$	$r_{6-7}=10-10=0$
	$R_{6-9}=15-12=3$	$r_{6-9}=15-12=3$
	$R_{7-9}=15-15=0$	$r_{7-9}=15-15=0$
	$R_{7-10}=14-14=0$	$r_{7-10}=14-14=0$
	$R_{8-10}=14-13=1$	$r_{8-10}=14-13=1$
	$R_{9-11}=17-17=0$	$r_{9-11}=17-17=0$
	$R_{10-11}=17-17=0$	$r_{10-11}=17-17=0$

Сведем расчеты в таблицу 2.5.

Таблица 2.5 – Расчет параметров сетевого графика

h-i	i-j	$t^{рн}_{i,j}$	$t_{i,j}$	$t^{ро}_{i,j}$	$t^{пн}_{i,j}$	$t_{i,j}$	$t^{по}_{i,j}$	$R^{п}_{i,j}$	$R^{с}_{i,j}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1-2	0	2	2	0	2	2	0	0
1	2-3	2	3	5	2	3	5	0	0
1	2-4	2	1	3	4	1	5	2	2
1	2-5	2	2	4	4	2	6	2	1
1	3-4	5	0	5	5	0	5	0	0
1	3-5	5	0	5	6	0	6	1	0
1	3-6	5	3	8	7	3	10	2	2
1	3-7	5	4	9	6	4	10	1	1
2	4-6	5	5	10	5	5	10	0	0
2	5-7	5	1	6	9	1	10	4	4
2	5-8	5	6	11	6	6	12	1	0
2	6-7	10	0	10	10	0	10	0	0
2	6-9	10	2	12	13	2	15	3	3
4	7-9	10	5	15	10	5	15	0	0
4	7-10	10	4	14	10	4	14	0	0
1	8-10	11	2	13	12	2	14	1	1
2	9-11	15	2	17	15	2	17	0	0
2	10-11	14	3	17	14	3	17	0	0
	11-12	17							

Четырехсекторная диаграмма:



Задания для самостоятельного выполнения 2.1

1. Выбрать исходный вариант (таблица А1)
2. Рассчитать характеристики сети.
3. Построить четырехсекторную схему выполнения комплекса операций.
4. Определить критический путь.
5. Построить график Ганта.
6. Сделать выводы.

2.2 Оптимизация проекта во времени

Задачи оптимизации комплекса операций по времени решаются с привлечением дополнительных средств и с использованием внутренних резервов.

1 Оптимизация с использованием дополнительных средств.

Задан сетевой график $G(E,\vec{e})$ выполнения комплекса операций, где E — множество событий графика, $\vec{e}$ — множество операций. Время выполнения каждой операции (i,j) = t_{ij}. Известно, что вложение x_{ij} дополнительных средств в операцию (i,j) сокращает время выполнения с t_{ij} до $t_{ij}`=f_{ij}(x_{ij})< t_{ij}$. Но насыщение критических операций ресурсами не беспредельно. Для каждой операции существует минимально возможное время ее выполнения (d_{ij}).

Условие задачи: определить время начала $T_{ij}^{н}$ и окончания T_{ij}^{o} выполнения операций, размер дополнительно вложенных средств x_{ij} в каждую из операций (i; j), чтобы:

1. Общее время выполнения комплекса операций было минимальным: $t_{кр} = T_{n-1,n}^{o} \to \min$.

2. Сумма вложенных дополнительных средств не превышала заданной величины B: $\sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B$.

3. Время выполнения каждой операции было не меньше минимально возможного времени d_{ij}: $T_{ij}^{o} - T_{ij}^{н} \ge d_{ij}, (i,j)\in\vec{e}$.

4. Время начала выполнения каждой операции было не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции: $T_{jr}^{н} \ge T_{ij}^{o}, i,r,j \in E$.

5. $t_{ij}(x_{ij}) = T^{o}_{ij} - T^{н}_{ij}, (i, j) \in \vec{e}$

6. $T^{o}_{ij} \geq 0, T^{н}_{ij} \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}$

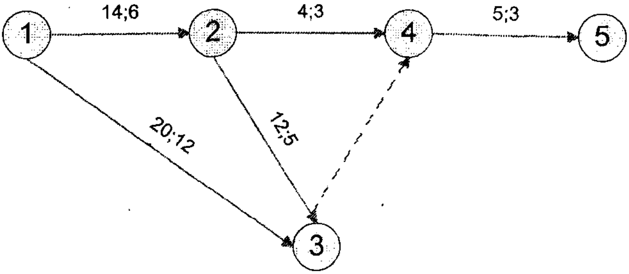
При необходимости следует добавить фиктивную операцию, выходящую из последнего события.

Критический путь в данной задаче является функцией от объемов дополнительно вкладываемых средств x_{ij}.

Сформулированная задача относится к классу оптимизационных задач и может быть решена методами линейной или нелинейной оптимизации в зависимости от вида функций $f_{ij}(x_{ij})$.

Пример

Комплекс операций представлен сетевым графиком.



Цифры, приписанные дугам графика, означают соответственно продолжительность t_{ij} и минимально возможное время d_{ij} выполнения операций. Продолжительность выполнения работ зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t`_{i,j}=t_{i,j}*(1-k_{i,j}*x_{i,j})$, где $k_{1\text{-}2}=0{,}2$; $k_{1\text{-}3}=0{,}1$; $k_{1\text{-}4}=0{,}3$; $k_{2\text{-}3}=0{,}2$; $k_{2\text{-}4}=0{,}5$; $k_{4\text{-}5}=0{,}3$.

Требуется построить развернутую математическую модель для определения времени начала и окончания выполнения операций и количества средств, вкладываемых в каждую операцию, чтобы время выполнения комплекса операций было минимальным, а сумма вложенных средств не превышала 10 единиц.

В силу особенностей сетевого графика целевая функция имеет вид: $t_{кр} = T^{o}_{4-5} \to \min$.

Запишем ограничения задачи:

– сумма вложенных дополнительных средств не должна превышать их наличного количества: $x_{1-2}+x_{1-3}+x_{1-4}+x_{2-3}+x_{2-4}+x_{4-5}\le 10$

– время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени: $T^{o}_{1-2}-T^{н}_{1-2}\ge 6$; $T^{o}_{1-3}-T^{н}_{1-3}\ge 12$; $T^{в}_{1-4}-T^{н}_{1-4}\ge 6$; $T^{o}_{2-3}-T^{н}_{2-3}\ge 5$; $T^{o}_{24}-T^{н}_{24}\ge 3$; $T^{o}_{3-4}-T^{н}_{3-4}\ge 0$; $T^{o}_{4-5}-T^{н}_{4-5}\ge 3$

– время начала выполнения каждой операции было не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции: $T^{н}_{1-2}=T^{н}_{1-3}=T^{н}_{1-4}=0$, $T^{н}_{2-3}\ge T^{o}_{1-2}$, $T^{н}_{2-4}\ge T^{o}_{1-2}$, $T^{н}_{3-4}\ge T^{o}_{2-3}$, $T^{н}_{4-5}\ge T^{o}_{1-4}$, $T^{н}_{4-5}\ge T^{o}_{3-4}$, $T^{н}_{4-5}\ge T^{o}_{2-4}$.

– зависимость продолжительности операции от вложенных средств: $T^{o}_{1-2}-T^{н}_{1-2}=14*(1-0{,}2x_{1-2})$; $T^{o}_{13}-T^{н}_{13}=20*(1-0{,}1x_{13})$; $T^{o}_{1-4}-T^{н}_{1-4}=10*(1-0{,}3x_{1-4})$; $T^{o}_{2-3}-T^{н}_{2-3}=12*(1-0{,}2x_{2-3})$; $T^{o}_{2-4}-T^{н}_{2-4}=4*(1-0{,}5x_{2-4})$; $T^{o}_{4-5}-T^{н}_{4-5}=5*(1-0{,}3x_{4-5})$.

– условие неотрицательности неизвестных: $T^{o}_{i-j}\ge 0, T^{н}_{i-j}\ge 0, x_{i-j}\ge 0, (i,j)\in\vec{e}$.

Сформулированная математическая модель содержит 17 неизвестных и 21 ограничение, может быть реализована симплекс-методом или решена при помощи функции «Поиск решения» Microsoft Excel.

Таким образом, чтобы время выполнения операции было минимальным (17 дней), необходимо вложить в операцию (1;2) 2,86 единицы дополнительных средств, в операцию (1;3) 1,06 единицы дополнительных средств, в операцию (1;4) 1,33 единицы дополнительных средств, в операцию (2;3) 2,92 единицы дополнительных средств, в операцию (2;4) 0,50 единицы дополнительных средств, в операцию (4;5) 1,33 единицы дополнительных средств.

2 Оптимизация с использованием внутренних резервов.

Постановка этой задачи отличается от предыдущей тем, что в ней наложено ограничение на общее время выполнения комплекса операций, которое не должно превышать величину T_0 (*директивное время*).

Ставится задача определить значения неизвестных величин x_{ij} (объемы дополнительно вкладываемых средств в операции (i; j) таким образом, чтобы:

1. Суммарное количество дополнительно привлекаемых средств было минимальным: $f(x) = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \to \min$.

2. Время завершения комплекса операций было не выше заданного срока T_0, а время выполнения каждой операции $(i; j) \in \vec{e}$ – не меньше минимально возможного времени d_{ij}: $T^o_{n-1,n} \le T_0$

3. Зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств: $T^o_{ij} - T^н_{ij} \ge d_{ij}, (i,j) \in \vec{e}$.

4. Время окончания любой операции (i; j) сетевого графика было не больше времени начала непосредственно следующей за ней операции (j; r), т.е. для любых смежных операций сети (i; j) и (j; r) должно выполняться условие $T^н_{jr} \ge T^o_{ij}, i, r, j \in E$.

5. $T^o_{ij} \ge 0, T^н_{ij} \ge 0, x_{ij} \ge 0, (i,j) \in \vec{e}$

Задание для самостоятельного выполнения 2.2
Оптимизация сетевого графика по времени

Продолжительность выполнения операций зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t`_{ij}=t_{ij}*(1-k_{ij}*x_{ij})$.

1. Построить сетевой график в соответствии с вариантом (таблица А2).
2. Осуществить оптимизацию сетевого графика по времени.
3. Найти критический путь на сетевом графике до и после его оптимизации и сравнить результаты.
4. Сделать вывод.

2.3 Оптимизация проекта по ресурсам

Комплекс операций представлен сетевым графиком $G(E, \overset{\vee}{e})$. Оперирующая сторона для выполнения комплекса операций располагает m видами ресурсов в количествах $R_s(s=\overline{1,m})$. Каждая операция комплекса характеризуется продолжительностью выполнения t_{ij} и *интенсивностью* r_{ij} (требуемое количество ресурсов для ее выполнения в течение времени t_{ij}, например, требуемое количество рабочих или механизмов).

Топологически сетевой график удовлетворяет технологическим ограничениям (ресурсные ограничения при составлении сетевого графика не принимались во внимание). Поэтому, прежде чем приступить к выполнению операций сетевого графика, необходимо определить потребное количество ресурсов по календарным срокам и сравнить его с наличными ресурсами. Если окажется, что в отдельные промежутки времени наличного количества ресурсов недостаточно для удовлетворения потребности в них, то ставится задача: найти такие календарные сроки начала и окончания операций сетевого трафика, при которых в любой момент планируемого периода было бы достаточно ресурсов для выполнения операций и время завершения комплекса было бы минимальным.

Для простоты изложения алгоритма решения задачи рассмотрим случай, когда интенсивности постоянные и используется один вид ресурсов.

Приведенный ниже алгоритм не всегда позволяет найти оптимальное решение задачи, однако часто дает хорошее приближение к нему.

Алгоритм решения задачи

Предварительный шаг.

Составляем линейную диаграмму (график Ганта) выполнения комплекса операций. На диаграмме каждая операция (i; j) изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой операции совпадает с ожидаемым сроком свершения ее начального события. Определяем по диаграмме критическое время выполнения комплекса операций t_{ij} и критический путь.

Первый шаг.

1.Проецируем на ось времени начало и конец каждой операции и обозначаем проекцию, выходящую из начала координат, через τ_0, а следующую за ней τ_1.

2.Определяем полные резервы времени R^n_{ij} операций, расположенных над промежутком (τ_0, τ_1). Нумеруем эти операции в порядке возрастания R^n_{ij}. Операции с одинаковыми полными резервами времени нумеруем в порядке убывания r_{ij}.

3. Суммируем последовательно значения интенсивностей операций, расположенных над промежутком $(\tau_0; \tau_1)$ в порядке возрастания их номеров, и сравниваем полученные суммы с заданной величиной ресурсов R. Все операции, сумма интенсивностей которых не превосходит R, оставляем в первоначальном положении. Если после прибавления величины интенсивности какой-нибудь операции окажется, что суммарное потребление ресурсов больше R, то эту операцию сдвигаем вправо на величину рассматриваемого промежутка, переходим к добавлению величины интенсивности следующей операции и так продолжаем до тех пор, пока не будут просмотрены все операции, расположенные над промежутком $(\tau_0; \tau_1)$.

Результатом выполнения этого действия является новая линейная диаграмма, момент τ_1 которой считаем началом оставшейся части комплекса операций. Операции (I; j), расположенные над промежутком $(\tau_1; \tau_{кр})$, изображаем так, чтобы их начала совпали с новыми ожидаемыми сроками свершения событий.

Общий шаг.

Предположим, что выполнено k шагов алгоритма и получена линейная диаграмма, момент τ_k которой является началом оставшейся части комплекса операций.

1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой операции, расположенной над промежутком $(\tau_k; \tau_{кр})$, и обозначаем

проекцию, ближайшую к τ_k, через τ_{k+1}. Таким образом, выделен новый промежуток (τ_k 4 τ_{k+1}).

2. Определяем R_{ij}^n операций, расположенных над промежутком (τ_k ; τ_{k+1}), и нумеруем их. При этом в зависимости от постановки задачи возможны 2 случая:

1) <u>операции не допускают перерыва в выполнении</u>. В этом случае сначала нумеруем операции (i; j), начатые левее момента τ_k, согласно возрастанию R_{ij}^n - l_{ij} (длительностями от начала момента до момента τ_{k+1}). Операции с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания r_{ij}. Все остальные операции нумеруем в порядке возрастания R_{ij}^n, а с одинаковыми резервами – в порядке убывания r_{ij}.

2) <u>операции допускают перерывы в их выполнении.</u> Все операции нумеруются согласно предписаниям п. 2 первого шага.

3. Выполняем то же, что и в п.3 первого шага. Однако следует иметь в виду, что если сдвигу подлежит операция (i; j), начатая левее τ_k, то в первом случае сдвигаем всю операцию, т.е. начало этой операции устанавливаем в момент τ_{k+1}, а во втором случае операцию делим на части и первую часть операции – отрезок продолжительностью от начала до τ_k – оставляем на месте, а вторую часть – от τ_k до конца – сдвигаем вправо на величину промежутка (τ_k ; τ_{k+1}). Части разделенной операции в дальнейшем рассматриваем, как самостоятельные операции и присваиваем им соответствующие номера событий.

4. Проверяем, все ли операции комплекса просмотрены. Если все, решение закончено, если нет, то переходим к п.1 общего повторяющегося шага.

Пример

Для выполнения комплекса операций по ремонту оборудования машиностроительного предприятия, представленного сетевым графиком (рис. 2.1), в первые три дня выделено 7 единиц ресурсов, в четвертый и пятый день – 6 единиц, а в последующее время – 8 единиц. Каждой дуге графика приписаны два числа: первое – временная оценка в днях; второе – интенсивность выполнения операции.

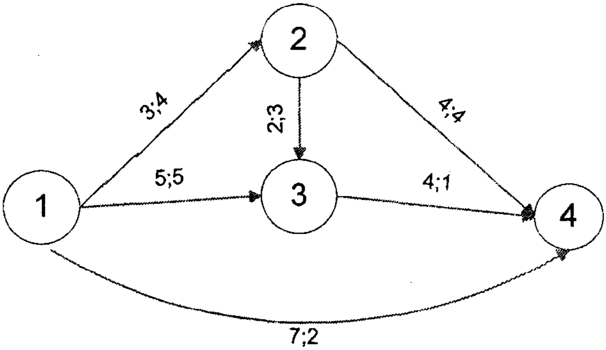


Рисунок 2.1 – Сетевой график

Необходимо определить сроки выполнения операций таким образом, чтобы завершить весь комплекс за минимальное время. Операции не допускают перерыва в выполнении.

Предварительный шаг.

Составляем линейную диаграмму комплекса операций (рис. 2.2а). Построим эпюру потребления ресурса без учета его ограниченности (рис. 2.2). Из эпюры видно, что в первые три дня потребность в ресурсах превышает наличное количество на 4 единицы, в четвертый и пятый день – на 8 единиц, а в последующее время ресурсы имеются в избытке.

Покажем, как на диаграмме найти критический путь. Операция (3; 4) заканчивается позже всех, спустя 9 дней от начала выполнения комплекса. Следовательно, она критическая $t_{кр}$=9. Операция (3; 4) начинает выполняться в момент времени t_3=5. Находим операции с третьим конечным событием, которые заканчиваются в это же время. Таких операций две: (1; 3) и (2; 3). Следовательно, они также критические. Операции (2; 3) непосредственно предшествует критическая операция (1; 2). Таким образом, $\mu^1_{кр}$=(1-2-3-4) и $\mu^2_{кр}$=(1-3-4).

Первый шаг.

1. Проецируем на ось времени начала и концы операций комплекса. Определяем, что τ_0=0 и τ_1=3.

2. Над промежутком (τ_0;τ_1) расположены операции (1;2), (1;3) и (1;4). Полные резервы операций (1;2) и (1;3) равны нулю ($R^п_{12}$= 0 и $R^п_{13}$=0), а $R^п_{14}$=2, так как разность между ожидаемым сроком свершения события (4) t_4=9 и сроком окончания операции (1;4) равна двум дням. Операции (1;2) и (1;3) имеют одинаковые полные резервы, но так как r_{13}=5>r_{12}=4, то операции (1;3) присваиваем номер 1, операции (1;2) – номер 2 и операции (1;4) с наибольшим полным резервом – номер 3.

Так как интенсивность r_{13}=5<R=7, то операцию (1;3) оставляем в первоначальном положении. Сумма интенсивностей операций (1;3) и (1;2) r_{13} + r_{12}=5+4=9>R=7. Следовательно, операцию (1;2) сдвигаем вправо на величину промежутка (τ_0;τ_1). Сдвиг операции (1;2) влечет за собой сдвиг операций (2;3), (2;4) и (3;4). Результаты сдвига отражены на новой линейной диаграмме: (рис. 2.2в). Операцию (1;4) оставляем в первоначальном положении, так r_{13} + r_{14}=T=R.

Второй шаг.

1. Начало нового промежутка совпадает с τ_1=3, а конец τ_2=5 – с моментом окончания операции (1;3).

2. Операции (1;3) и (1;4) начинаются левее момента τ_1, поэтому нумеруем их в первую очередь согласно возрастанию разностей $R^п_{13}$-l_{13}=3-5=-2 и $R^п_{14}$-l_{14}=5-5=0. Таким образом, операция (1;3) имеет номер 1, операция (1;) – номер 2 и операция (1;2) – номер 3.

3. На промежутке (τ_1;τ_2) R=6, поэтому, суммируя интенсивности операций и сравнивая с R, получаем, что сдвигу подлежат операции (1;2) и (1;4). В результате сдвига получаем новую линейную диаграмму (рис. 2.2г). Время выполнения операции по сравнению с исходным вариантом увеличилось на 5 дней: τ_4=14.

4. Решение не закончено, переходим к третьему шагу.

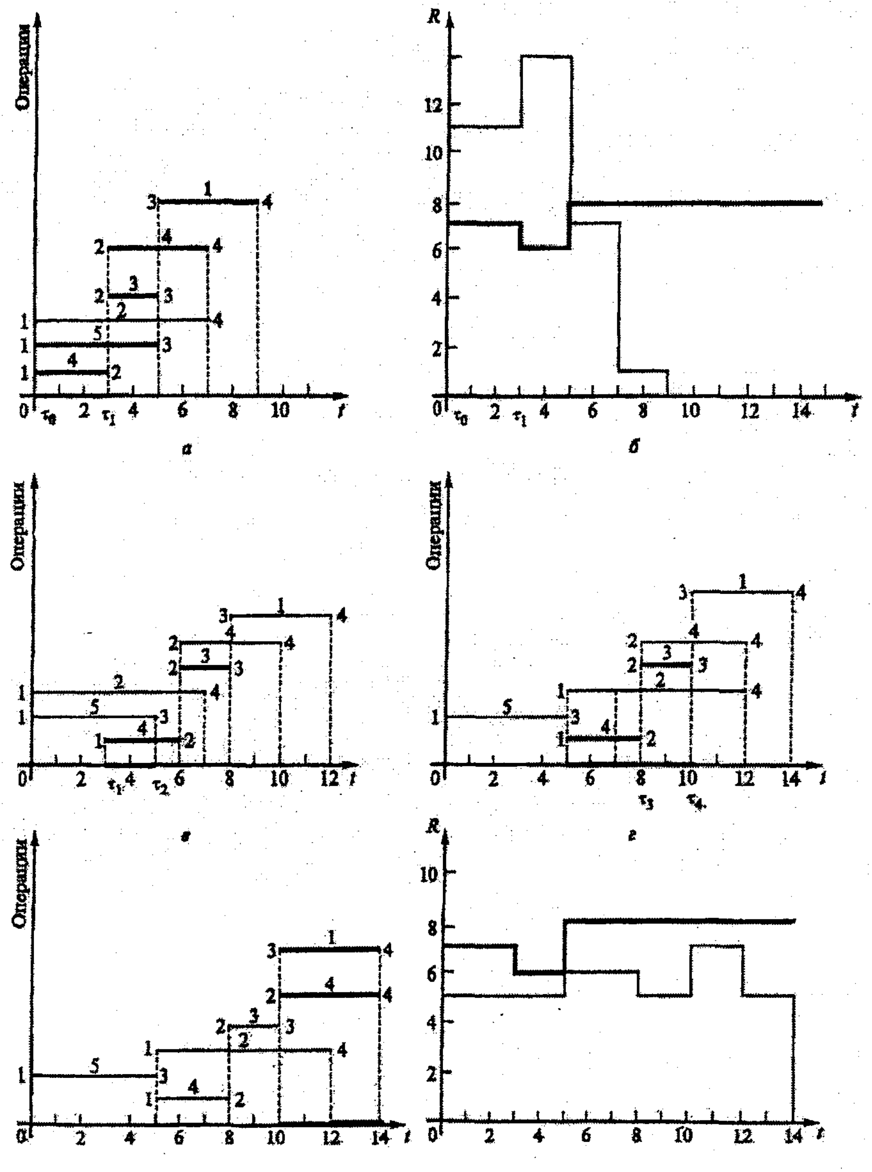


Рисунок 2.2 – Линейные диаграммы

Третий шаг.

1. Новый промежуток ($\tau_2;\tau_3$). Момент $\tau_3=8$.

2. Критическая операция (1;2) получает номер 1, операция (1; 4) с $R^{п}_{14}=2$ – номер 2.

3. Сумма $r_{12}+r_{14}=6<R=8$, следовательно, операции не сдвигаются.

4. Так как не все операции просмотрены, то переходим к следующему шагу.

Четвертый шаг.

1. На той же диаграмме (рис. 2.2) выделяем новый промежуток ($\tau_3;\tau_4$).

2. Операция (1;4), начатая левее момента τ_3, получает номер 1, критическая операция (2;3) – номер 2 и операция (2;4) – номер 3, так как $R^{п}_{24}=2$

3. Сдвигу подлежит операция (2;4), начало которой устанавливаем в момент τ_4 (рис. 2.2д).

4. Переходим к выполнению пятого шага.

Пятый шаг

1. Проекции нового промежутка приходятся на моменты $\tau_4=10$ и $\tau_5=$

2. Операция(1;4) имеет номер 1, (2;4) – номер 2, (3;4) – номер 3.

3. Сумма интенсивностей операций $r_{14}+r_{24}+r_{34}=7<R=8$, следовательно, оставляем их в первоначальном положении. Выполнив еще один шаг алгоритма, убедимся, что на оставшемся промежутке ($\tau_5;\tau_6$) достаточно ресурса для выполнения расположенных над ним операций.

Таким образом, линейная диаграмма (рис. 2.2д) является решением задачи, время окончания комплекса операции равно 14. Из эпюры потребления ресурса (рис. 2.2е) видно, что на всем протяжении выполнения комплекса операций количество используемых ресурсов не превосходит имеющихся в распоряжении.

Задание для самостоятельного выполнения 2.3
Оптимизация сетевого графика по ресурсам

Комплекс операций по сборке кузова автомобиля, представлен таблицей А3. Найти сроки начала и окончания операции таким образом, чтобы в любой момент планируемого периода было достаточно рабочих для выполнения операции.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания (ТМО) – это область прикладной математики, занимающаяся анализом проблемы обслуживания массового потока требований случайного характера (случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание).

Система массового обслуживания (СМО) – это совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем. Каждая СМО состоит из одного или нескольких обслуживающих устройств, которые называются *каналами обслуживания* (рабочие точки, кассиры, продавцы, телефонные линии связи). Обслуживание требований происходит за неизвестное, обычно также случайное время и зависит от множества самых разнообразных факторов. После обслуживания заявки канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока требований и времени их обслуживания приводит к неравномерности загрузки СМО, перегрузке с образованием очередей заявок или недогрузке с простаиванием каналов. Таким образом, к *элементам СМО* относятся:

1) *входящий поток заявок*. Заявка (требование, клиент) – это каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы. Если обслуживаемую систему можно подразделить на отдельные элементы, каждый из которых в любой отдельный момент может дослать только 1 требование, то такой элемент называют *источником требований*. Так, каждый станок в цехе является источником требований для обслуживающей бригады наладчиков. Входящий поток характеризуется *интенсивностью* λ, т.е. средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

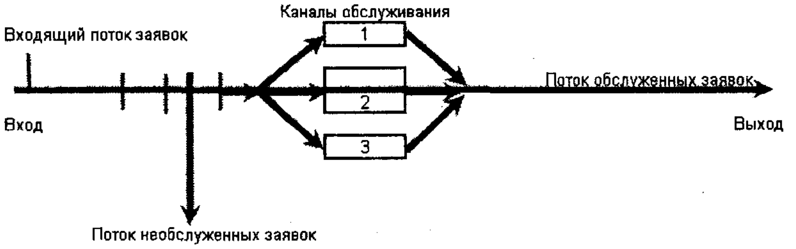
2) *очередь*,

3) *поток необслуженных (покинувших очередь) заявок*,

4) *каналы обслуживания*,

5) *выходящий поток обслуженных заявок*, который характеризуется интенсивностью обслуживания требований одним каналом

при непрерывной его работе (μ) или средней продолжительностью обслуживания ($t_{обсл}$).



Время обслуживания – период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание, т.е. период от начала обслуживания и до его завершения.

Время ожидания обслуживания – период от момента поступления требования в систему до начала обслуживания.

Время пребывания требования в системе – время ожидания обслуживания + время обслуживания.

Существуют различные потоки, отличающиеся своими характеристиками. Рассмотрим СМО, в которых все потоки, переводящие ее из одного состояния в другое, являются простейшими. Такие СМО называются *марковскими.*

Простейший (или пуассоновский) поток – поток, который обладает 3 основными свойствами:

1) Ординарность. Поток требований называется ординарным, если вероятность попадания на очень малый отрезок времени сразу 2 или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только 1 события.
2) Стационарность. Стационарный поток требований – поток, вероятностные характеристики которого не изменяются со временем.
3) Отсутствие последействий. Поток без последействия – поток, в котором число событий, попадающих на произвольно выбранный промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, также произвольно выбранный промежуток, при условии, что эти промежутки не пересекаются.

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления k требований за время t задается формулой: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.

Длительность обслуживания заявок также является случайной величиной и подчиняется экспоненциальному (показательному) закону распределения. Вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t, определяется формулой: $F(t) = 1 - e^{\mu t}$,

где μ – интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения: $\mu = \frac{1}{t_{обсл}}$.

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является *время обслуживания* одного требования ($t_{обсл}$) – случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров требований, поступающих в систему. Случайная величина $t_{обсл}$ полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний. На практике чаще всего принимают гипотезу о *показательном законе распределения* времени обслуживания.

Важным параметром СМО является *коэффициент загрузки* ρ, который определяется как отношение интенсивности поступления требований λ к интенсивности обслуживания μ: $\rho = \lambda / \mu$. Для СМО с ожиданием количество обслуживаемых устройств n должно быть строго больше коэффициента загрузки (требование *установившегося* или *стационарного режима работы* СМО) : $n > \rho$. В противном случае число поступающих требований будет больше суммарной производительности всех обслуживающих устройств, и очередь будет неограниченно расти.

Для СМО с отказами и смешанного типа это условие может быть ослаблено, для эффективной работы этих типов СМО достаточно потребовать, чтобы минимальное количество обслуживаемых устройств n было не меньше коэффициента загрузки ρ: $n \geq \rho$

Классификация СМО:

1. По числу каналов обслуживания: одноканальные и многоканальные.
2. В зависимости от взаимного расположения каналов (для многоканальных СМО): с параллельными каналами и с последовательными каналами.
3. По характеру случайного процесса: марковские и немарковские.
4. В зависимости от возможности образования очереди: с отказами обслуживания и с ожиданием обслуживания
5. По месту нахождения источника требований: разомкнутые и замкнутые.
6. По дисциплине очереди: СМО с приоритетами и СМО без приоритетов.
7. По количеству этапов обслуживания: однородные и неоднородные.
8. По количеству источников требований: однофазные и многофазные.

Расчет основных показателей функционирования СМО

Характеристики многоканальных СМО можно рассчитать, используя таблицу 3.1.

Условные обозначения:

n – количество каналов;

λ – интенсивность входящего потока требований;

μ – интенсивность обслуживания требований: $\mu = 1/T$

$t_{обсл}$ – среднее время обслуживания 1 заявки;

$\rho = \lambda/\mu$ – интенсивность нагрузки на систему, т.е. среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки;

q – относительная пропускная способность системы (вероятность обслуживания требования, доля обслуженных заявок);

А – абсолютная пропускная способность системы (среднее число обслуживаемых заявок в единицу времени);

P_o – вероятность отсутствия требований в системе;

P_k – вероятность нахождения в системе k требований;

$P_{отк}$ – вероятность отказа;

$\overline{N_з}$ – среднее число занятых каналов;

$\overline{L_{ож}}$ – средняя длина очереди;

$\overline{L_{сист}}$ – среднее число требований, находящихся в системе;

$\overline{t_{ож}}$ – среднее время пребывания в очереди;

$\overline{t_{сист}}$ – среднее время пребывания требования в системе;

$\overline{N_{пр}}$ – среднее число простаивающих каналов;

$k_з$ – коэффициент загрузки каналов;

$k_п$ – коэффициент простоя каналов.

Многоканальная СМО с отказами (без очереди)

В n-канальную СМО поступает простейший поток требований с интенсивностью λ. Время обслуживания требований (для 1 канала) экспоненциальное. Если требование поступает в систему в момент, когда все n каналов заняты, то оно получает отказ (покидает систему необслуженным). Если же в момент поступления требования имеется хотя бы 1 свободный канал, то требование принимается к обслуживанию и обслуживается до конца.

При расчетах должны выполняться равенства: $N_з+N_п=n$, $k_з+k_п=1$.

Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

В n-канальную СМО поступает простейший поток требований с интенсивностью λ; число мест в очереди ограничено и равно m.

Время обслуживания требований (для 1 канала) экспоненциальное со средним значением $t_{обсл}$.

Многоканальная СМО с ожиданием без ограничений на длину очереди

– вероятность того, что все каналы заняты: $\pi = \dfrac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0$

– вероятность наличия очередей: $P_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0$

– среднее число свободных каналов: $N_{св} = P_0 \sum\limits_{k=1}^{n} k \dfrac{\rho^k}{(n-k)!}$

Определение оптимальных параметров СМО

В качестве экономического критерия для решения задач массового обслуживания, как правило, применяется минимум потерь от ожидания требования и простоев каналов. Математическое выражение критерия при этом принимает следующий вид: $C = (C_1 M_1 + C_2 N_n) T_{пл}$,

где С – суммарные потери;

C_1 – потери от простоев требования в единицу времени;

C_2 – потери от простоев канала в единицу времени;

$T_{пл}$ – планируемый период (в работе – 1 год).

В данной работе задано отношение C_2/C_1. Поэтому экономический критерий приводится к следующему виду:

$$C = (M_1 + C_2/C_1 \cdot N_n) T_{пл}.$$

Для систем с отказами представленные выше формулы критерия оптимальности примут вид:

$$C = (C_y p_{отк} \lambda + C_2 N_n) T_{пл};$$

$$C = (p_{отк} \lambda + C_2/C_y \cdot N_n) T_{пл},$$

где C_y – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования.

Таблица 3.1 – Характеристики многоканальных СМО

Хар-ки	СМО с отказами	СМО с ограничением на длину очереди	СМО без ограничений на длину очереди
P_o	$P_o=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1}$	$P_o=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\frac{\rho}{n}-(\frac{\rho}{n})^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$	$P_o=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$
P_k	$P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0,\ k=\overline{1,n}$	$P_{0\le k\le n}=\frac{\rho^k}{k!}P_0$ $P_{n<k\le m+n}=\frac{\rho^k}{n^{k-n}n!}P_0$	$P_{1\le k<n}=\frac{\rho^k}{k!}P_0$ $P_{k\ge n}=\frac{\rho^k}{n^{k-n}n!}P_0$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}}=P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0$	$P_{\text{отк}}=P_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!}P_0,$	$P_{\text{отк}}=0$
q	$q=1-P_{\text{отк}}.$	$q=1-P_{\text{отк}}$	$q=1$
A	A=λq	A=λq	A=λ
$\overline{N_з}$	$\overline{N_з}=\frac{A}{\mu}=\rho q=\sum_{k=1}^{n}kP_k$	$\overline{N_з}=\frac{A}{\mu}=\rho(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0)$	$\overline{N_з}=\rho$

$\overline{L_{ож}}$	0	$\overline{L_{ож}} = P_0 \frac{\rho^{n+1}}{nn!}\frac{1-(\frac{\rho}{n})^m(m+1-m\frac{\rho}{n})}{(1-\frac{\rho}{n})^2} = \sum_{k=n+1}^{n+m}(k-n)P_k$	$\overline{L_{ож}} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}P_0$
$\overline{L_{сист}}$	-	$\overline{L_{сист}} = \overline{N_з} + L_{ож} = \sum_{k=1}^{n+m} kP_k$	$\overline{L_{сист}} = \overline{N_з} + L_{ож} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k$
$\overline{t_{ож}}$	-	$\overline{t_{ож}} = P_0 \frac{1-(\frac{\rho}{n})^m(m+1-m\frac{\rho}{n})\rho^n}{nn!\mu(1-\frac{\rho}{n})^2} = \frac{\overline{L_{ож}}}{\lambda}$	$\overline{t_{ож}} = \frac{\overline{L_{ож}}}{\lambda} = \frac{\rho^n}{\mu(n-1)!(n-\rho)^2}P_0$
$\overline{t_{сист}}$	-	$\overline{t_{сист}} = \overline{t_{ож}} + qt_{обсл}$	$\overline{t_{сист}} = \overline{t_{ож}} + t_{обсл} = \frac{\overline{L_{сист}}}{A}$
$\overline{N_{пр}}$	$\overline{N_{пр}} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k$		
$k_з$	$k_з = \frac{\overline{N_з}}{n}$		
k_n	$k_n = \frac{\overline{N_n}}{n}$		

Задание для самостоятельного выполнения 3.1

Задача 1. Предприятие осуществляет часть переговоров по 3 телефонным линиям. В среднем поступает 75 звонков в час. Среднее время предварительных переговоров составляет 2 мин. Требуется определить характеристики системы и оценить ее работу.

Задача 2. В цехе работает 6 станков. Простейший поток деталей, поступающих в цех, имеет интенсивность 10 деталей в час. Среднее время обработки детали 12 минут. Заявка получает отказ, если все станки заняты. На основе расчета функциональных характеристик СМО определить: вероятность того, что все станки простаивают, вероятность того, что поступающая деталь будет обработана, вероятность того, что загружено 2 станка, вероятность того, что загружено не менее 2 станков, вероятность того, что загружено не более 2 станков

Задача 3. На вход телефонной станции, имеющей 9 каналов обслуживания, поступает в среднем 120 заявок в час. Заявка получает отказ, если все каналы заняты. Среднее время обслуживания в 1 канале равно 4 минуты. Все потоки в системе простейшие. На основе расчета функциональных характеристик СМО определить: вероятность того, что клиент получит отказ в обслуживании, вероятность того, что будет занято не более 3 каналов обслуживания, средний интервал времени между последовательными поступлениями заявок в систему, вероятность того, что будет занято не менее 2 каналов обслуживания, вероятность того, что все линии свободны

Задача 4. В таксопарке 3 диспетчера по телефону принимают заказы на вызов машин и обеспечивают своевременное обслуживание клиентов. В среднем за каждый час поступает 120 заявок, длительность регистрации заявки равна 1 мин. Определить важнейшие параметры данной системы.

Задача 5. В магазин заходят в среднем 7 покупателей в минуту, их обслуживают 2 контролера-кассира с интенсивностью 3 покупателя в минуту. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Определить характеристики СМО и дать оценку ее работы.

Задача 6. Пациенты прибывают в клинику в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 15 пациентов в час. В комнате ожидания могут разместиться не более 10 человек. Время осмотра клиентов является экспоненциально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 6 минут.

Задача 7. Газозаправочная станция для автомобилей располагает двумя газовыми насосами. В очереди, ведущей к насосам, могут расположиться не более пяти автомашин, включая те, которые обслуживаются. Если уже нет места, прибывающие автомобили уезжают искать другую заправку. Распределение прибывающих автомобилей является пуассоновским с математическим ожиданием 20 автомобилей в час. Время обслуживания клиентов имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием 6 минут. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: процент автомобилей, которые будут искать другую заправку; процент времени, когда используется только один из насосов; процент времени использования двух насосов; вероятность того, что прибывающий автомобиль найдет свободное место в очереди; среднее время пребывания автомобиля на газозаправочной станции.

Задача 8. На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности 4 машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: долю автомобилей, которые будут искать другой пункт техосмотра; вероятность того, что автомобиль поступит на техосмотр без очереди; потери времени водителем на прохождение техосмотра; вероятность того, что прибывающий автомобиль сможет пройти техосмотр; среднее количество автомобилей, ожидающих техосмотра.

Задача 9. Небольшая ремонтная мастерская имеет трех механиков. В начале марта каждого года клиенты приносят в мастерскую свои культиваторы и газонокосилки для ремонта и технического обслуживания. Мастерская стремится принять все, что приносят клиенты. Однако когда очередной клиент видит на полу мастерской массу механизмов, ожидающих обслуживания, он уходит в другое место в поисках более быстрого обслуживания. На полу мастерской размещается не более 15 культиваторов и газонокосилок, не учитывая тех, которые уже ремонтируются. Клиенты прибывают в мастерскую в среднем каждые 10 минут, а на выполнение механиком одного ремонта уходит в среднем 30 минут. Как время между последовательными приходами клиентов, так и время выполнения работы подчиняются экспоненциальному распределению. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: долю потенциальных клиентов, потерянных по причине ограниченной емкости мастерской; вероятность того, что следующий клиент будет обслужен в мастерской; вероятность того, что, по крайней мере, один механик будет свободен; среднее количество культиваторов и газонокосилок, которые ожидают обслуживания; средние потери времени клиента на ремонт механизма.

Задача 10. В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (кроме обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: среднее число «нетерпеливых» покупателей; вероятность того, что прибывающий покупатель будет обслужен без ожидания; вероятность того, что очереди нет; вероятность того, что длина очереди не превышает 3 человек; среднее время, потраченное покупателем на посещение магазина.

Задача 11. В кассе метрополитена, где продаются жетоны на проезд, имеется 2 окна. Время, которое тратит кассир на обслуживание 1 пассажира, в среднем равно 0,5 мин. Пассажиры подходят к кассе в среднем по 3 чел./мин. Определить: вероятность того, что оба кассира свободны; среднее число занятых кассиров; среднее число пассажиров в очереди; среднее число пассажиров у касс; среднее время, которое пассажир проводит в очереди; среднее время, которое пассажир тратит на приобретение жетона

Задача 12. На автозаправочной станции имеется 3 заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 2 мин. Каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензина. Число мест в очереди не ограничено. Все потоки в системе простейшие. Определить: вероятность того, что в системе нет требований; среднее число требований в очереди; среднее время ожидания; среднее время, которое требование проводит в системе; вероятность того, что прибывающему требованию придется ждать обслуживания. Выполняется ли следующее условие: пусть цель обслуживания состоит в том, чтобы обеспечить состояние, при котором в среднем не более 10 % требований вынуждено находиться в очереди?

Задача 13. Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания – 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно 20 пассажиров в час. Все потоки в системе простейшие. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: среднюю длину очереди; вероятность простоя кассира; среднее время нахождения пассажира в билетной кассе; вероятность того, что пассажир уйдет в другую билетную кассу; вероятность того, что в очереди будет не более 2 человек.

Задача 14. В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: долю клиентов, которые будут вынуждены обратиться в другую аудиторскую фирму; среднюю продолжительность прохождения компанией аудиторской проверки; вероятность того, что аудиторская проверка поступившей заявки начнется без ожидания; вероятность того, что обслуживанием заняты не более двух бухгалтеров; среднее количество заявок, ожидающих проверки.

Задача 15. Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью 2 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания 0,7 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 6 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.

Задача 16. В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, – простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения.

Рассчитать основные функциональные характеристики СМО и на основе их определить: относительную пропускную способность системы; вероятность того, что обслуживанием занят только один кассир; вероятность того, что сотрудник получит заработную плату без очереди; среднее время, потраченное сотрудником на получение заработной платы; вероятность того, что оба кассира заняты выдачей заработной платы.

Задача 17. Предприятие планирует принимать заказы клиентов на приобретение товаров по телефону, для чего необходимо установить соответствующую мини-АТС с несколькими телефонными аппаратами. Если заказ поступает, когда все линии заняты, то клиент получает отказ. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составляет 2,5 заказа/мин. Длительность же оформления заказа в среднем будет равна 0,8 мин. Определить, какое минимальное количество каналов обслуживания необходимо, чтобы обслуживать не менее 90% поступающих заказов.

Задача 18. Торговая фирма планирует принимать заказы клиентов по телефону. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составляет 2,5 заказа/мин. Длительность же оформления заказа в среднем — 0,8 мин. Определить необходимое минимальное количество каналов обслуживания для обслуживания не менее 90 % поступающих заказов. Рассчитать основные показатели работы СМО.

Задача 19. На предприятии планируется открытие мастерской по ремонту малой механизации. Поток неисправных механизмов, поступающих в мастерскую, предположительно составит 4 механизма в сутки. Среднее время ремонта одного механизма равно 0,5 суток. Другой мастерской по ремонту нет, поэтому очередь на ремонт механизмов перед мастерской может расти неограниченно. Требуется определить оптимальное количество узлов обслуживания, если издержки, связанные с эксплуатацией одного обслуживающего узла, составляют 12,5 ден.ед. в сутки, издержки, связанные с простоем, — 8 ден.ед. в сутки, а издержки ожидания механизма в очереди— 30 ден.ед. в сутки. Для найденного количества узлов обслуживания провести анализ работы мастерской.

Задача 20. На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. Пусть предприятие имеет 10 машин, требующих ремонта с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой 10 отк/час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем 3 мин. Распределение моментов возникновения отказов является пуассоновским, а продолжительность выполнения ремонтных работ распределена экспоненциально. Возможно организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Задача 21. В инструментальном отделении сборочного цеха работают три кладовщика. В среднем за 1 мин. за инструментом приходят 0,8 рабочего. Обслуживание одного рабочего занимает у кладовщика 1 минуту. Очередь не имеет ограничения. Известно, что поток рабочих за инструментом – пуассоновский, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Стоимость 1 мин. работы рабочего равна 30 ден.ед., а кладовщика - 15 ден.ед. Найдите средние потери цеха при данной организации обслуживания в инструментальном отделении (стоимость простоя) при стационарном режиме работы.

Задача 22. Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику – 0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики 1,2 часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Задача 23. Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность 0,7 автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Задача 24. На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью 2 состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно 0,4 час. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь. Все потоки событий простейшие. При установившемся режиме найдите: среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его); среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях; среднее время ожидания состава в системе обслуживания; вероятность того, что прибывший состав займет место на внешних путях.

Задача 25. На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания одной машины – 2 часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

Задача 26. В вычислительном центре работает 9 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток неисправностей имеет интенсивность 0,3 отказа в день. Среднее время устранения одной неисправности одним инженером равно 1,5 час. Компьютеры обслуживают три инженера с одинаковой производительностью. Все потоки событий простейшие. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК: 1.три инженера обслуживают все 9 компьютеров, так, что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров; 2. каждый из трех инженеров обслуживает по три закрепленных за ним ПК. Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Задача 27. Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность 0,25 отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Все потоки событий простейшие. Возможны два варианта обслуживания: 1.все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью; 2.все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью. Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Задача 28. В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы: вероятность обслуживания покупателя; абсолютную пропускную способность магазина; среднюю длину очереди; среднее время ожидания в очереди; среднее время всего обслуживания; вероятность простоя продавца.

Задача 29. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью 3 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,6 час. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 ден.ед. Содержание канала обходится 3 ден.ед./час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

Задача 30. Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью 1,6 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания 0,5 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 5 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.

Задание для самостоятельного выполнения 3.2
Теория массового обслуживания

1. Выбрать заданный вариант (табл. 3.2).
2. Определить минимальное значение n.
3. Рассчитать показатели функционирования системы и экономический критерий.
4. Увеличить n на 1 и повторить расчеты.
5. Расчет проводится до нахождения оптимальной загрузки системы по экономическому критерию.
6. Представить графически изменение экономического критерия оптимальности с увеличением n.
7. Сделать выводы.

Таблица 3.2 – **Исходные данные**

№ варианта	λ	T	m	C2/C1
1	6	0,1	8	2
2	4	0,2	7	2
2	4	0,1	8	3
3	1	0,3	7	4
4	2	0,4	14	5
5	2	0,2	10	6
6	1	0,1	5	1
7	4	0,1	8	2
8	1	0,5	10	3
9	6	0,1	8	4
10	4	0,1	6	5
11	3	0,1	10	3
12	4	0,2	6	4
13	1	0,2	8	2
14	2	0,3	7	1
15	1	0,4	9	3
16	4	0,1	9	5
17	3	0,3	6	4
18	2	0,3	5	1
19	4	0,2	8	1
20	3	0,1	10	2
21	3	0,2	11	5
22	4	0,2	8	5
23	6	0,1	9	3
24	4	0,2	5	5
25	8	0,1	8	6
26	2	0,3	10	1
27	2	0,4	8	2
28	1	0,2	6	3
29	4	0,1	10	4
30	2	0,4	6	5

4. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

4.1 Основные понятия управления запасами

Товарные запасы являются необходимым фактором, обеспечивающим непрерывность работы любого торгового предприятия. Поэтому эффективное управление ими является важнейшей задачей любого предприятия. Под управлением запасами понимается совокупность мероприятий по обеспечению их оптимального уровня на предприятии. При этом разрабатываются прогрессивные нормы запасов; устанавливается наиболее рациональная их структура; создается эффективная система оперативного контроля за состоянием запасов с широким использованием математических методов и вычислительной техники и т.д.

Содержание запасов на предприятии всегда связано с издержками.

Организационные издержки – расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров, необходимых для каждого цикла складирования.

Издержки содержания запасов – затраты, связанные с хранением. Эти расходы возникают из-за таких факторов, как рента складирования и амортизация в процессе хранения (товары могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.п.).

Издержки, связанные с дефицитом, – это потери прибыли в расчете на единицу дефицитных материалов. Они могут быть связаны с заменой дефицитных товаров более дорогими материалами, штрафами за нарушение сроков поставки, переналадкой оборудования.

Управление запасами заключается в установлении моментов размещения заказов и объемов поставок. Каждый вариант стратегии управления запасами связан с определенными затратами. Стратегию, при которой эти затраты минимальны, называют оптимальной, а ее определение является предметом теории управления запасами.

Многообразие реальных ситуаций является причиной большого количества различных систем управления запасами. В основу их классификации может быть принят характер системы снабжения, интенсивность потребления, возможности пополнения запасов, издержки функционирования системы.

По характеру системы снабжения выделяют однопродуктовые и многопродуктовые модели.

По интенсивности потребления – модели с постоянным и стохастическим спросом.

По характеру пополнения запасов различают модели с задержками (фиксированными или случайными) и с мгновенными поставками.

По функциям затрат модели могут быть линейными и нелинейными.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения управления запасами, должна учитывать только те издержки, которые зависят от выбора стратегии.

Цель разработки математической модели складской системы состоит в выборе с ее помощью приемлемой стратегии функционирования. Необходимо определить такую стратегию функционирования, которая обеспечит наибольшую возможную прибыль или минимизирует издержки. Другими словами, критерием выбора является максимум прибыли или минимум издержек.

Уравнение издержек, связанных с запасами, сделанными в течение одного цикла (период времени между повторениями заказов), может быть записано следующим образом:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

где C_1 – организационные издержки, руб.;

C_2 – стоимость товаров, руб.;

C_3 – общие издержки содержания запасов, руб.;

C_4 – потери из-за отсутствия продукции (дефицита), руб.

4.2 Статические детерминированные модели без дефицита

Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель

Данная модель оптимальной партии поставки строится при следующих предположениях:

1) *Интенсивность спроса* (v) в единицу времени величина постоянная.

2) Заказанная партия доставляется одновременно.

3) Дефицит недопустим.

4) *Организационные издержки на* поставку (K) постоянны и не зависят от величины партии q.

Удельные затраты на хранение единицы продукции за единицу времени составляют s. Уровень запаса снижается равномерно от q до 0, после чего подается заказ на доставку новой партии величины q. Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины q. Интервал времени между поставками τ — *цикл.*

Общие затраты в единицу времени: $C_{\text{ц}} = K\dfrac{v}{q} + s\dfrac{q}{2}$.

Оптимальный размер партии заказа: $q^* = \sqrt{\dfrac{2Kv}{s}}$ — *формула размера партии* (экономичная величина заказа, формула квадратного корня, формула Уилсона).

Оптимальный интервал между поставками: $\tau^* = \dfrac{q^*}{v}$

Минимальные затраты по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени: $C_{ц} = sq^*$

Модель с определением точки заказа

В реальных ситуациях целесообразно учитывать время выполнения заказа. При планировании поставок следует знать время размещения очередного заказа или уровень запаса, при котором необходимо заказывать новую партию. Этот уровень называется *точкой возобновления* заказа (r).

В момент подачи заказа уровень запаса должен обеспечивать бесперебойное снабжение на время выполнения заказа.

Если время выполнения заказа меньше длины цикла $\theta<\tau^*$, то $r=\theta v$.

θ – время выполнения заказа.

Если $\theta>=\tau^*$, то уровень запаса $r = \theta v - \left[\dfrac{\theta}{\tau^*}\right]q^*$

где $\left[\dfrac{\theta}{\tau^*}\right]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{\theta}{\tau^*}$, т.е.

целая часть числа $\frac{\theta}{\tau^*}$.

Сумма наличного запаса и заказанной партии — *фиктивный уровень текущего запаса.* На графике он изображается пунктирной линией (рис. 4.1).

Для того чтобы первая заказанная партия была доставлена не позже полного расхода начального запаса, ее необходимо разместить в момент $t_0 = \frac{I_0}{v} - \theta$.

В общем случае заказы следует размещать в моменты $t_k = (\frac{I_0}{v} - \theta) + k\tau^*$, k = 0,1,2,...

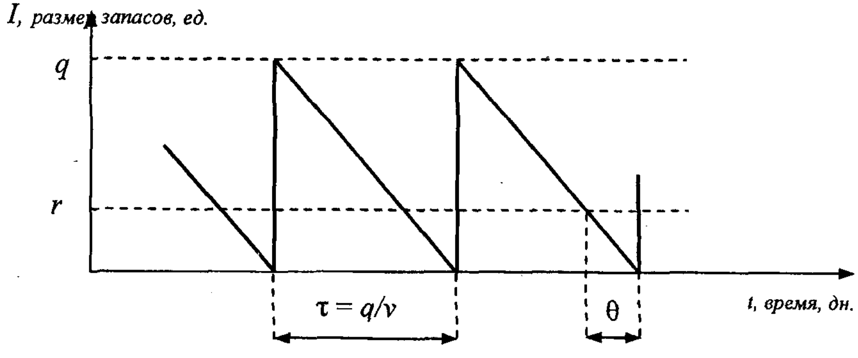


Рисунок 4.1 – Динамика изменения уровня запаса *I* для бездефицитной простейшей однономенклатурной модели

Модель определения величины партии в условиях оптовой скидки

Для увеличения объема продаж компании часто предлагают количественные скидки, которые могут быть оптовыми и дифференциальными.

Рассмотрим случай оптовой скидки, которая назначается за каждую единицу закупаемого товара, если партия превышает некоторую величину. При двухуровневой системе скидок для партии $q \in [Q_1; Q_2)$ цена составляет c_1, для $q \in [Q_2; Q_3)$— c_2, $c_1 > c_2$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = \infty$.

Стоимость хранения определяется как доля p ($0 < p < 1$) стоимости продукции, т.е. $s_i = pc_i$ (i= 1,2).

Издержки в единицу времени: $C_i(q) = \frac{Kv}{q} + c_i v + pc_i \frac{q}{2}$, i=1,2

Решая уравнение $\frac{dC_i}{dq} = 0$, находим: $C_i^* = c_i(v + pq_i)$, i=1,2

Алгоритм определения оптимальной величины партии для двухуровневой системы скидок:

1) вычисляется q^*_2. Если $q^*_2 > Q_2$, то оптимальный размер заказа $q^* = q^*_2$;

2) если $q^*_2 < Q_2$, то определяется q^*_1;

3) вычисляется $C^*(q_1^*) = c_1(v + pq_1)$ и

$$C_i(Q_2) = \frac{Kv}{Q_2} + c_2 v + pc_2 \frac{Q_2}{2}$$

Минимальному значению затрат соответствует оптимальная партия заказа.

Правило выбора оптимальной партии при n-уровневой системе скидок.

Если значение q_n^* попадает в интервал предоставления скидки $[Q_n; Q_{n+1})$, то q_n^* является оптимальной величиной партии.

Если q_n^* не попадает в интервал предоставления скидки, то интервалы рассматриваются в порядке убывания их номеров и определяется наибольшее q^*, попадающее в свой интервал.

Пусть $q_k^* \in [Q_k; Q_{k+1})$. Для определения оптимальной партии сравниваются затраты $C(q_k^*), C(Q_{k+1}), C(Q_{k+2}), \dots, C(Q_n)$ и по минимальной величине затрат определяется оптимальная партия.

Модель с конечной интенсивностью поступления запаса

В рассмотренных моделях пополнение запасов осуществлялось из внешних источников. В ряде случаев потребитель запасов является одновременно и производителем. Например, на заводе продукция, произведенная одним цехом, поступает на склад с определенной интенсивностью и используется в производстве другим цехом. Очевидно, система может работать без дефицита, если интенсивность поставок λ превосходит интенсивность спроса v. Изменение уровня запаса для рассматриваемого случая изображено на рисунке 4.2.

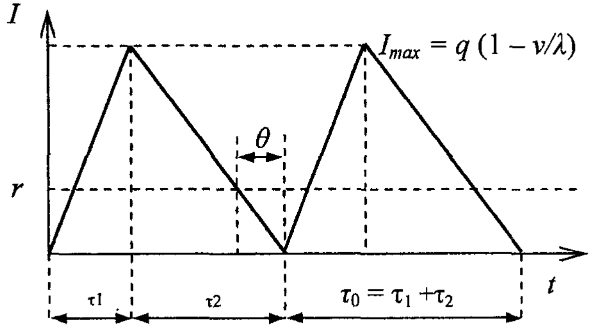


Рисунок 4.2 – Динамика изменения уровня запасов I для однономенклатурной модели с конечной интенсивностью поступления заказа

За время τ_1 запас поступает и расходуется одновременно. Это время накопления запаса. В течение τ_2 запас только расходуется.

Длина цикла: $\tau \;= \tau_1 + \tau_2$

Величина партии = q, но максимальный уровень запаса $I_{max} < q$, т.к. продукция используется по мере изготовления.

Скорость пополнения запасов равна λ-v. Если производственный цикл длится t единиц времени, то общий объем продукции, производимой в течение цикла, определяется по формуле $q = \lambda t$,

следовательно, $t = \dfrac{q}{\lambda}$.

Максимальный уровень запасов:

$$I_{\max} = (\lambda - v)t = (\lambda - v)\frac{q}{\lambda} = (1 - \frac{v}{\lambda})q$$

Средний уровень запасов: $I_{cp} = (1 - \frac{v}{\lambda})\frac{q}{2}$

Издержки системы в единицу времени: $C = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}(1 - \frac{v}{\lambda})$

Для определения оптимальных параметров работы системы необходимо рассчитать:

1. величину оптимальной партии: $q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s * (1 - \frac{v}{\lambda})}}$

2. оптимальный период возобновления производства:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} * \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{\lambda}}}$$

3. составляющие периода возобновления: $\tau^* = \frac{q^*}{\lambda}$,

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K * (\lambda - v)}{sv\lambda}}$$

4. минимальные издержки в единицу времени:

$$C^* = \sqrt{2Ksv * (1 - \frac{v}{\lambda})}$$

Если интенсивность поставки значительно больше интенсивности потребления $\frac{v}{\lambda} > 0$, то речь идет об обычной модели Уилсона.

При определении оптимальной точки заказа рассматриваются 2 случая:

1) если $\theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$, то $r = \theta v - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]q^*$

2) если $\theta - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$, то $r = \theta(v - \lambda) + \left(\left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] + 1\right)\left(\frac{\lambda}{v} - 1\right)q^*$

4.3 Статические детерминированные модели с дефицитом

В отличие от статических детерминированных моделей без дефицита в данном классе дефицит допускается, и в отдельных случаях планирование дефицита позволяет снизить затраты.

Рассмотрим модель оптимальной партии поставки, когда неудовлетворенные требования ставятся на учет.

При поступлении очередной партии в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, затем пополняется запас. Изменение запаса в такой системе показано на рисунке 4.3.

На графике y — максимальная величина задолженного спроса;

$Y=q-y$ — максимальная величина наличного запаса;

τ_1 — время существования наличного запаса;

τ_2 — время дефицита.

d — убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени.

Издержки работы системы в единицу времени:

$$C = K\frac{v}{q} + s\frac{(q-y)^2}{2q} + d\frac{y^2}{2q}$$

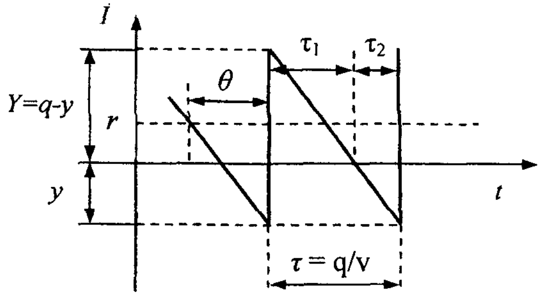


Рисунок 4.3 – Динамика изменения уровня I запасов для однономенклатурной модели с учетом неудовлетворенных требований

Оптимальное значение партии: $q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}(1+\frac{s}{d})}$

Максимальная величина задолженного спроса:

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2Kv}{s(1+s/d)}}$$

Минимальные затраты: $C^* = \sqrt{2Ksv} * \sqrt{\frac{1}{1+\frac{s}{d}}}$

$$Y^* = q^* - y^*$$

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{v},$$

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{v},$$

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{v}$$

Следует иметь в виду, что $\frac{Y^*}{y^*} = \frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} = \frac{d}{s}$.

Точка заказа: $r = \theta v - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] q^* - y^*$.

Если точка заказа равна отрицательной величине, то размещение заказа должно производиться при |r| поставленных на учет требованиях.

Модель с потерей неудовлетворенных требований

Пусть неудовлетворенные требования теряются. Из-за дефицита система несет убытки. В простейшем случае издержки дефицита считают пропорциональными средней величине потерянных требований и времени τ_2.

Издержки одного цикла τ: $C_ц = K + s\frac{q^2}{2v} + d\frac{v(\tau - \frac{q}{v})^2}{2}$

Издержки работы системы в единицу времени достигнут:

$$C = \frac{K}{\tau} + s\frac{q^2}{2v\tau} + d\frac{v(\tau - \frac{q}{v})^2}{2\tau}$$

Следовательно: $q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}\frac{1}{1+\frac{s}{d}}}$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{sv} * (1 + \frac{s}{d})}$$

$$C^* = \sqrt{2Ksv * (1 + \frac{s}{d})}$$

Отношение времени содержания запаса ко времени дефицита $\frac{\tau_1^*}{\tau_2^*} = \frac{d}{s}$, т.е. время существования наличного запаса так относится ко времени дефицита, как удельные издержки дефицита – к удельным издержкам содержания.

Однопериодная модель управления запасами при случайном спросе

Планирование осуществляется на конечном интервале времени, в начале которого пополняются запасы. На практике такие задачи возникают в торговле быстро выходящими из моды и сезонными товарами. Для промышленных предприятий интерес представляет задача закупки запасных частей для специального оборудования. Запчасти могут быть поставлены по низкой цене в комплекте с основным оборудованием, а в дальнейшем из-за необходимости повторного запуска производства – по более высокой.

Пусть спрос v – дискретная случайная величина, которая задается с помощью таблицы 4.1.

Таблица 4.1

V	0	1	…	k	…
p(v)	p(0)	p(1)	…	p(k)	…

$\sum_{v=0}^{\infty} p(v) = 1$, а вероятность того, что спрос за рассматриваемый

интервал времени не превысит уровня q, равна $p(v \le q) = \sum_{v=0}^{\infty} p(v)$

Введем обозначения:

α — покупная цена единицы продукции;

d — потери, связанные с нехваткой единицы продукции;

s — затраты на содержание единицы продукции;

$\beta(\beta < a)$ — цена реализации неиспользованной продукции.

Условие нахождения оптимальной партии сезонного спроса можно записать следующим образом:

$$p(v \le q^* - 1) \le \frac{d - \alpha}{d + s - \beta} \le p(v \le q^*)$$

Задание для самостоятельного решения 4.1

Решить задачу в соответствии со своим вариантом. Решение представить в графическом виде.

Задача 1. Автомобильный завод заказывает 1 раз в месяц шины. Спрос в течение месяца составляет 5тыс. шин. Стоимость 1 шины – 96ден.ед. Издержки на хранение составляют 15% стоимости запасов в месяц. Время доставки заказа – 12 дней. Стоимость организации доставки партии – 71ден.ед. Определить оптимальный размер партии, периодичность поставок, точку заказа, моменты подачи заказа, издержки при оптимальной и действующей системе управления запасами.

Задача 2. Продукция используется с интенсивностью 30 ед./день. Стоимость хранения единицы продукции равна 0,05 ден.ед./день, стоимость размещения заказа составляет 100 ден.ед. Предположим, что дефицит продукции не допускается, стоимость закупки равна 10 ден.ед. за единицу продукции, если объем закупки не превышает 500 единиц, и 8 ден.ед. в противном случае. Срок выполнения заказа равен 21 день. Предложить режим функционирования системы управления запасами и определить оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 3. Фирма специализируется на продаже запасных частей для автомобилей. Одним из основных видов продукции являются стартеры. Среднегодовой спрос 1200 шт. Стоимость подачи и оформления заказа равна 50 ден.ед. Годовая стоимость хранения стартера в соответствии с проведенными оценками составляет 20% общей стоимости запасов данного товара и рассчитывается на основе общей стоимости складских помещений и темпов роста капитала, фирмы. Цена, которую устанавливает компания-производитель за один стартер, равна 25ден.ед. Требуется определить оптимальный размер заказа и время между двумя последовательными его подачами. Производитель предоставляет скидку на 2,5 %, если фирма подает заказ не менее чем на 800 стартеров. Необходимо показать, что такая оптовая скидка не является выгодной для фирмы, и определить, при каком проценте скидки фирме выгодно закупить партию в 200 стартеров.

Задача 4. Годовая потребность машиностроительного завода в стали (пруток диаметром 12мм) составляет 300 т. В соответствии с техническими требованиями в случае необходимости пруток диаметром 12 может быть заменен прутком диаметром 14мм, цена которого за 1т на 20 ден.ед. больше. Условно-постоянные транспортно-заготовительные расходы на один заказ равны 21 ден.ед., годовые издержки по содержанию 1т – 14ден.ед. Определить оптимальный размер партии.

Задача 5. Стоимость 1 запчасти при закупке оборудования 40 ден.ед. В случае нехватки предприятие несет потери 50 ден.ед. Неиспользованные запчасти в конце срока эксплуатации реализуются по 10 ден.ед. Издержки содержания пропорциональны остатку и составляют 14 % первоначальной стоимости. Данные о потребности в запчастях представлены в таблице.

v	p(v)
0 - 8	0,2
8 - 16	0,3
16 -24	0,3
24 - 32	0,1
32 - 40	0,1

Определить количество запчастей к оборудованию, средний дефицит, величину издержек, связанных с дефицитом, общие издержки.

Задача 6. Завод заказывает солярку в начале каждой недели для удовлетворения недельного спроса в 300 литров. Стоимость размещения заказа равна 20 ден.ед. Стоимость хранения 1л солярки обходится заводу примерно в 0,03 ден.ед./день. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 7. Система управления запасами предприятия описывается простейшей однономенклатурной бездефицитной моделью с конечной интенсивностью поступления заказа. Исходные данные: спрос – 450 шт./месяц; затраты на организацию поставки – 100 ден.ед.; стоимость хранения единицы товара в течение месяца – 2 ден.ед.; интенсивность поступления заказа – 200 шт./декаду; время выполнения заказа – 5 дней.

Предложите режим функционирования системы управления запасами и определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 8. Автомобильная компания разрабатывает стратегию сбыта новой модели автомобиля. Годовой спрос оценивается в 4000 единиц. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. ден.ед., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля. Анализ показал, что средние издержки заказа составляют 25 тыс. ден.ед. на заказ. Время выполнения заказа – 8 дней. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 9. Детали нескольких видов расфасовываются в коробки на одной линии упаковки. Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют 700 ден.ед., потребность в деталях составляет 140000 л/месяц, стоимость хранения 1 детали в течение месяца – 4 ден.ед. Определить оптимальные параметры работы системы, полагая, что в месяце 30 дней. Сравнить минимальные затраты с затратами при действующей системе фасовки одной детали в течение трех дней.

Задача 10. Электрические лампы крупной корпорации заменяются с интенсивностью 100 шт./день. Подразделение материального обеспечения корпорации заказывает эти лампы с определенной периодичностью. Стоимость размещения заказа на покупку ламп составляет 200 ден.ед. Стоимость хранения лампы на складе оценивается в 0,02 ден.ед. в день. Срок выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равен 12 дней. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 11. Автомобильная мастерская специализируется на быстрой замене масла в автомобилях. Мастерская покупает автомобильное масло по цене 3 ден.ед./л. Цена может быть снижена до 2,5 ден.ед./л. при условии, что мастерская покупает более 1000 л. За день в мастерской обслуживается около 150 автомобилей, и на каждый из них для замены требуется 1,25 л масла. Мастерская хранит на складе большие объемы масла, что обходится в 0,02 ден.ед. в день за литр. Стоимость размещения заказа масла 20 ден.ед. Срок выполнения заказа – 2 дня. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 12. Предприятие закупает продукцию одного из машиностроительных заводов. Годовой спрос на эту продукцию составляет 600 шт. Издержки заказа равны 850 ден.ед., издержки хранения – 25,5 ден.ед. за одно транспортное средство в год. Количество рабочих дней в году для предприятия равно 300, а время поставки товара 6 дней. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 13. Предприятие закупает продукцию одного из машиностроительных заводов. Годовой спрос на эту продукцию составляет 600 шт. Издержки заказа равны 850 ден.ед., издержки хранения – 510 ден.ед. за одну партию автомобилей (20 шт.) в год. Количество рабочих дней в году для предприятия равно 300, а время поставки товара – 6 дней. Определить оптимальные параметры функционирования системы управления запасами при плановом дефиците, если по оценке менеджера упущенная прибыль, связанная с отсутствием товара и утратой доверия клиентов, составляет 20 ден.ед. в год за единицу товара.

Задача 14. Годовая потребность предприятия в сырье A составляет 300 т. В соответствии с технологическими требованиями в случае необходимости сырье A можно заменить сырьем B, цена которого за 1 т. на 50 ден.ед. больше. Условно-постоянные транспортно-заготовительные расходы на один заказ равны 150 ден.ед., издержки по содержанию 1 т. — 30 ден.ед. Время поставки заказа равно 1 месяц. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 15. Продукция используется с интенсивностью 30 ед./день. Стоимость хранения единицы продукции равна 0,05 ед./день, стоимость размещения заказа составляет 100 ден.ед. Дефицит продукции не допускается, стоимость закупки равна 10 ден.ед. за единицу продукции, объем закупки не превышает 500 единиц, и 8 ден.ед. в противном случае. Срок выполнения заказа 21 день. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 16. Система управления запасами предприятия описывается простейшей однономенклатурной бездефицитной моделью с конечной интенсивностью поступления заказа. Исходные данные: спрос – 450 шт./месяц; затраты на организацию поставки – 100 ден.ед.; стоимость хранения единицы товара в течение месяца – 2 ден.ед.; интенсивность поступления заказа – 200 шт./декаду; время выполнения заказа – 5 дней. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 17. Автомобильная компания разрабатывает стратегию сбыта новой модели автомобиля. Годовой спрос оценивается в 4000 единиц. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. ден.ед., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля. Анализ показал, что средние издержки заказа составляют 25 тыс.

ден.ед. на заказ. Время выполнения заказа – 8 дней. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 18. Спрос в течение месяца на электронагреватели составляет 95 штук. Стоимость 1 электронагревателя – 150 ден.ед. Издержки на хранение составляют 35% стоимости запасов в месяц. Время доставки заказа – 10 дней. Стоимость организации доставки партии 200 ден.ед. Определить оптимальные параметры функционирования системы. Определить моменты времени подачи первого и второго заказов, если в начальный момент времени магазин располагает 50 нагревателями.

Задача 19. Спрос на продукцию составляет 60 ед./месяц. Стоимость хранения единицы продукции равна 0,1 ед./день, стоимость размещения заказа составляет 150 ден.ед. Дефицит продукции не допускается, стоимость закупки равна 55 ден.ед. за единицу продукции, если объем закупки не превышает 700 единиц, и 45 ден.ед. в противном случае. Срок выполнения заказа 10 день. Определите оптимальные параметры функционирования системы.

Задача 20. Среднегодовой спрос на детали 300 шт. Стоимость оформления заказа 30 ден.ед. Годовая стоимость хранения запасов составляет 10% общей стоимости запасов данного товара. Цена закупки 1 детали равна 95ден.ед. Определить оптимальные параметры функционирования системы. Производитель предоставляет скидку в 7%, если фирма подает заказ более чем на 100 деталей. Выгодна ли такая скидка фирме?

4.4 АВС – анализ

Метод АВС («правило Парето» и «правило 80/20») – метод формирования и контроля за состоянием запасов, заключающийся в разбиении номенклатуры N реализуемых товарно-материальных ценностей на 3 неравноценных подмножества А, В и С на основании формального алгоритма.

Суть данного метода заключается в том, что вся номенклатура материальных ресурсов располагается в порядке убывания суммарной стоимости всех позиций на складе. При этом цену единицы продукции умножают на общее количество и составляют список в порядке убывания произведений. Далее подразделяют все позиции номенклатуры на 3 группы – А, В и С.

приходится преобладающая часть денежных средств, вложенных в запасы. На товары группы А, как правило, приходится 70-80% стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 20 %.

Группа В. Позиции номенклатуры, занимающие среднее положение в формировании запасов склада. По сравнению с позициями номенклатуры группы А они требуют меньшего внимания — производится обычный контроль текущего запаса на складе и своевременности заказа. На товары группы В, как правило, приходится 15% стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 30-40%.

Группа С. Позиции номенклатуры, составляющие большую часть запасов: на них приходится незначительная часть финансовых средств, вложенных в запасы. Как правило, по позициям группы С не ведется текущий учет, а проверка наличия осуществляется периодически (один раз в месяц, квартал или полугодие); расчеты оптимальной величины заказан периода заказа не выполняются. На товары группы С приходится 5-15 % стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 40-50%.

В зависимости от особенностей деятельности, специализации предприятия процентное соотношение между группами может колебаться. Предприятия, специализирующиеся на торговле товарами широкого потребления, обязаны учитывать случайный характер спроса отдельного потребителя и иметь в связи с этим относительно широкий ассортимент. Это обстоятельство обуславливает то, что для этого предприятия подавляющее количество товаров будет сконцентрировано в группе С. В свою очередь для предприятия, реализующего продукцию производственно-технического назначения, высокотехнологичные товары, группы В и С практически не имеют значения.

1 Эмпирический метод

Базируется на данных обследований. Условно в нем можно выделить несколько вариантов, но наибольший интерес представляет «классический» – «правило Парето», когда координаты точки А принимаются, например, следующими: $Y_А$=80%; $X_А$=20%, т.е. «80/20», а координаты точки В соответственно $Y_А+Y_Б$ = 95%, $X_А+X_Б$ = 50%, т.е. «95/50». Таким образом, точка А определяет границу 20% номенклатуры, точка (А + В) — 50% номенклатуры.

«95/50». Таким образом, точка А определяет границу 20% номенклатуры, точка (А + В) — 50% номенклатуры.

2 Дифференциальный метод

1. определяются общие затраты по всей номенклатуре C_{Σ};

2. рассчитывается средняя стоимость 1 товара номенклатуры $p=C_{\Sigma}/N$, где N – количество наименований товара;

3. все товары, затраты на которые в 6 раз и более превышают p, относятся к группе А;

4. товары, затраты на которые составляют 0,5p или меньше, относятся к группе С;

5. остальные попадают в группу В.

Достоинство дифференциального метода – простота; нет необходимости ранжировать товары по стоимости, т.е. располагать в порядке возрастания или убывания, и строить кумулятивную (интегральную или накопленную) зависимость C_{Σ} (i).

3 Аналитический метод

Точки А и В определяются по статистическим данным учета запасов на складе, как в первом методе, но координаты их не строго фиксированы, а зависят от характера зависимости $C_{\Sigma}=f(N)$.

Суть метода рассмотрим на следующем примере. Допустим, что для всей номенклатуры деталей N известны:

c_i – стоимость i-й детали,

q_i – количество (или оборот) i-й детали на складе в течение рассматриваемого интервала времени.

Рассчитаем затраты по каждой детали: $C_i=q_i*c_i$

Полученные значения C_i ранжируются — располагаются в убывающей последовательности: $C_a>C_b>...>C_i>...>C_m$.

Затем производится присвоение новых индексов: a=1, b=2, ..., m=N,
где N – общее количество наименований деталей (номенклатура),
т. е. $C_1>C_2>...>C_i>...>C_N$.

Для удобства расчетов вводятся относительные величины рассматриваемых стоимостных показателей q_i (в процентах), тем самым производится нормирование показателей:

$$q_i = \frac{C_i}{\sum_{i=1}^{N} C_i} * 100\%$$

Величины q_i суммируются нарастающим итогом $q_{\sum i}=\sum q_i$ и в зависимости от последующего способа определения номенклатурных групп представляются в виде графика (графический метод) или в слу применения аналитического метода в табличной форме – в виде пар значений ($q_{\sum i}$, i) для подбора аналитической зависимости: $q_{\sum i}=f(a_p;x)$ где a_p – коэффициенты,

x – номер детали, x = i,N.

4. Графический метод

1. На оси ординат наносятся значения $q_{\sum i}$ на оси абсцисс – индексы 1,2,...,i,...,N, соответствующие присвоенным номерам позиций номенклатуры запасных частей.

2. Точки с координатами ($q_{\sum i}$; x) на графике соединяются плавной кривой OO`D, которая в общем случае является выпуклой.

3. Проводится касательная LM к кумулятивной кривой OO`D, параллельно прямой OD. Прямая OD соответствует равномерному распределению затрат по всей номенклатуре, т.е. характеризует величину показателя осредненной детали: $q_{ср\,A}=100/N$.

4. Абсцисса точки касания O', округленная до ближайшего целого значения отделяет от всей номенклатуры деталей первую группу N_A (группа А), в которую входят детали с показателями $q_i \geq q_A$. Т.о., к группе А относятся все позиции номенклатуры, для которых значение показателя $q_i \geq$ среднему значению показателя для всей номенклатуры N. Соответственно ордината точки O' – $q_{\sum A}$ указывает долю деталей группы А в процентах от величины в общем показателе $q_{\sum i}$.

5. Продолжим деление на группы оставшейся номенклатуры деталей, воспользовавшись вышеописанным приемом. Соединим точку O' с точкой D и проведем касательную к кривой O'O"D, параллельную прямой O'D. Абсцисса точки касания O" делит оставшуюся номенклатуру дета на группу В и группу С.

Для оставшейся номенклатуры величина показателя «осредненной» детали составит: $q_{срB} = \dfrac{100 - q_{\sum A}}{N - N_A}$

N_A – число деталей (номенклатура) группы А.

Таким образом, в группу В попадают детали с показателями q_B, подчиняющимися неравенству: $q_{ср\,A} > q_i \geq q_{ср\,B}$.

Если кривая OO'O"D невыпуклая, то невозможно выделить ни одну из групп деталей; если кривая O'O"D невыпуклая, то невозможно выделить группы B и C.

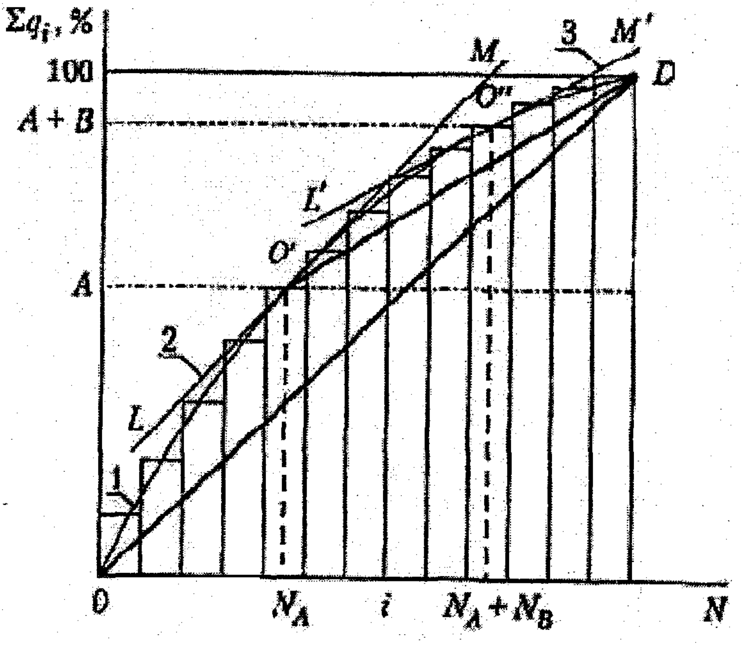


Рисунок 4.4 – Определение номенклатурных групп ABC: 1 – накопленные затраты на ЗЧ по всей номенклатуре деталей; 2 – касательная L-M к кривой OO'D; 3 – касательная L'-M' к кривой O'O"D

Пример. Пусть ассортимент торгового предприятия ограничен десятью товарами. В таблице 4.1 приведены данные о среднем приобретаемом количестве каждого товара за период, цене за единицу товара. В графе 4 содержится стоимость приобретаемых товаров, определяемая путем перемножения количества и цены. В зависимости от стоимости каждому товару присваивается свой ранг (максимальная стоимость – 1, минимальная – 10). Ранг товаров заносится в графу 5. Это ранжирование представляет собой первый этап анализа ABC.

Таблица 4.1 – Первый этап анализа ABC.

Товар	Количество, шт.	Цена, тыс. руб.	Стоимость, тыс. руб.	Ранг
1	2	3	4	5
Товар1	200	15	3000	6
Товар2	75	90	6750	5
Товар3	360	5	1800	10
Товар4	210	180	37800	1
Товар5	500	14	7000	4
Товар6	20	100	2000	9
Товар7	40	200	8000	3
Товар8	110	25	2750	7
Товар9	350	7	2450	8
Товар10	195	190	37050	2

На втором этапе анализа (таблица 4.2) товары в графе 1 упорядочиваются в соответствии с определенным рангом. В графе 2 приводится суммарное количество товаров нарастающим итогом. В графе 3 количественные показатели заменяются процентными. В графах 5 и 6 записаны данные тех же расчетов для стоимости товаров. На основании данных приведенных в графах 3 и 6, а также приведенных выше примерных процентных соотношений между группами по количеству и стоимости товары распределяются на три группы: А, В и С (графы 4, 7, 8).

При осуществлении управления запасами группы А следует обратить внимание прежде всего на:

– анализ рынка и структуры стоимости;
– детальную подготовку заказа товаров;
– постоянный контроль за реализацией;
– установление оптимальных страховых запасов.
– Для товаров из группы С рекомендуется использование простых управленческих процедур и максимальное снижение связанных с этим издержек.
– Для товаров из группы В рекомендуется средний уровень контроля и издержек с ним связанных.

Таблица 4.2 – Второй этап анализа ABC

Товар	Саккумулированное количество, шт.	Саккумулированное количество, %	Колич. соотношение групп, %	Саккумулированная стоимость, тыс. руб.	Саккумулированная стоимость, %	Стоимостное соотношение групп, %	Группа
1	2	3	4	5	6	7	8
4	210	10,1		37800	34,8		A
10	405	19,6	9,6	74850	68,9	68,9	A
7	445	21,5		82850	76,3		B
5	945	45,9		89850	82,7		B
2	1020	49,6	30,0	96600	88,9	20,0	B
1	1220	59,3		99600	91,7		C
8	1330	64,6		102350	94,4		C
9	1680	81,6		104300	96,5		C
6	1700	82,6		106800	98,3		C
3	2060	100,0	50,4	108600	100,0	11,1	C

Задание для самостоятельного выполнения 4.2

1) Изучить теоретические вопросы управления запасами при помощи метода ABC.
2) Выбрать исходные данные в соответствии с вариантом (табл. Б1).
3) Провести анализ запасов эмпирическим, дифференциальным, аналитическим и графическим методами.
4) Сделать выводы.

5. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Игра – математическая модель конфликтной ситуации. *Игроки* – стороны, участвующие в подобной ситуации. Если один из игроков не является сознательно действующим противником, то его называют «природа», а игры – «игры с природой» (статистические игры).

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей:

	B_1	B_2	...	B_j
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}
...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}

A_i – названия стратегий игрока А,

B_j – названия стратегий игрока В,

a_{ij} – значения выигрышей игрока А при выборе им i–й стратегии, а игроком В – j–й стратегии.

Алгоритм решения задачи теории игр состоит из 2 этапов.

Этап 1. Поиск решения в чистых стратегиях.

Этап 2. Поиск решения в смешанных стратегиях.

Этап 1. Для игрока А необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, т.е. определить $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ – *нижнюю чистую цену игры*. Ей соответствует *максиминная стратегия*.

Затем находится *верхняя чистая цена игры* $в = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, соответствующая *минимаксной стратегии* игрока В.

Если $\alpha = \beta = v$, то проект устойчив и игра имеет решение в чистых стратегиях, а стратегия, в которых достигается v – *оптимальная чистая стратегия*. v – *чистая цена игры*.

Если $\alpha \neq \beta$, то выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым.

Этап 2. Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий – *игра со смешанным расширением*. Стратегии, применённые с вероятностью $\neq 0$ – *активные стратегии*.

Для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры: $\alpha \le \nu \le \beta$. При этом условии величина ν – *цена игры.*

Решение задач теории игр в смешанных стратегиях основано на сведении формулировки задачи к постановке задачи линейного программирования.

Обозначим p_i – вероятность выбора i-й стратегии игроком А, q_j – вероятность выбора j-й стратегии игроком В. Для игрока А имеем следующую задачу линейного программирования.

$$f = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, & j = \overline{1,n}; \\ x_i \ge 0, & i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Для оптимального решения X^* выполняется

$$\nu = \frac{1}{f_{\min}}; \ p_i^* = x_i^* \nu, \ i = \overline{1,m}.$$

Принимая новые обозначения $y_j = \dfrac{q_j}{\nu}$ $(j = \overline{1,n})$, для игрока В имеем следующую задачу линейного программирования.

$$F = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, & i = \overline{1,m}; \\ y_j \ge 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Для оптимального решения Y^* выполняется

$$\nu = \frac{1}{F_{\max}}; \ q_j^* = y_j^* \nu, \ j = \overline{1,n}.$$

Пример. Предприятие имеет возможность планировать объем выпуска сезонной продукции А, Б, В. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее полностью реализуется по сниженным ценам. Все необходимые данные приведены в таблице 5.1. Установить объемы выпуска продукции к предстоящему сезону, обеспечивающие предприятию возможно большую сумму прибыли.

Таблица 5.1 – Исходные данные

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции	Отпускная цена единицы продукции		Объем реализации (тыс. ед.), если уровень спроса		
		в течение сезона	после уценки	повышенный	средний	пониженный
А	2	3	1,5	5	3	1
Б	5	6	4,5	7	4	2
В	3	4	2,5	6	5	3

Для составления платежной матрицы, построим платежные матрицы по каждому товару отдельно и сложим в одну общую. Составим матрицу для товара А:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Стратегий у предприятия 3: ориентироваться на повышенный спрос, средний и пониженный. Рассчитаем коэффициенты матрицы:

a_{11} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на повышенный спрос, полностью продав продукцию по цене в течение сезона: $a_{11} = 5 * (3 - 2) = 5$ тыс.ден.ед.

a_{12} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на средний спрос, продав часть продукции по цене в течение сезона, а остальную по заниженной:

$a_{12} = 3 * (3 - 2) + (5 - 3) * (1,5 - 2) = 3 - 1 = 2$ тыс.ден.ед.

a_{13} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на низкий спрос, продав часть продукции по цене в течение сезона, а остальную по заниженной:

$a_{12} = 1 * (3 - 2) + (5 - 1) * (1,5 - 2) = 1 - 2 = -1$ тыс.ден.ед.

$a_{21} = 3 * (3 - 2) = 3$ тыс.ден.ед.

$a_{22} = 3 * (3 - 2) = 3$ тыс.ден.ед.

$a_{23} = 1 * (3 - 2) + (3 - 1) * (1,5 - 2) = 1 - 1 = 0$ тыс.ден.ед.

$a_{31} = 1 * (3 - 2) = 1$ тыс.ден.ед.

$a_{32} = 1 * (3 - 2) = 1$ тыс.ден.ед.

$a_{33} = 1 * (3 - 2) = 1$ тыс.ден.ед.

Остальные расчеты сведем в таблицу 5.2:

Таблица 5.2 – Расчетная таблица

	Ориентация на повышенный, а попали на			Ориентация на средний, а попали на			Ориентация на пониженный, а попали на		
	повышенный	средний	пониженный	повышенный	средний	пониженный	повышенный	средний	пониженный
А	5	2	-1,0	3	3	0	1	1	1
Б	7	2,5	-0,5	4	4	1	2	2	2
В	6	4,5	1,5	5	5	2	3	3	3
∑	18	9	0	12	12	3	6	6	6

Матрицы для товаров А, Б, В:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\ Б=\begin{bmatrix}7 & 2{,}5 & -0{,}5\\ 4 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}6 & 4{,}5 & 1{,}5\\ 5 & 5 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow S=\begin{bmatrix}18 & 9 & 0\\ 12 & 12 & 3\\ 6 & 6 & 6\end{bmatrix}$$

	B_1	B_2	B_3	Min_j
A_1	18	9	0	0
A_2	12	12	3	3
A_3	6	6	**6**	**6**
Max_i	18	12	**6**	

$\alpha= 6$, $\beta=6$

Есть решение в чистых стратегиях – полностью ориентироваться на низкий спрос.

Решение, как для смешанной стратегии (вероятность должна для $p_3 = 1$)

Общая задача линейного программирования для одного из игроков и ее решение:

$$F=v\to max$$
$$18p_1+12p_2+6p_3\geq V$$
$$9p_1+12p_2+6p_3\geq V$$
$$3p_2+6p_3\geq V$$
$$p_1+p_2+p_3=1$$
$$p_1,p_2,p_3\geq 0$$

Ответы: $p_1=0$; $p_2= 0$; $p_3= 1$; $V=6$.

Задача линейного программирования в симметричной форме записи для одного из предприятий и ее решение:

$$F=x_1+x_2+x_3\to min$$
$$18x_1+12x_2+6x_3\geq 1$$
$$9x_1+12x_2+6x_3\geq 1$$
$$3x_2+6x_3\geq 1$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

Ответы: $x_1= 0$; $x_2=0$; $x_3=0{,}17$; $f=0{,}17$

Проверка: $\nu =1/f=1/0{,}17=6$

$$p_1=x_1 * \nu =0,\ p_2=x_2 * \nu =0,\ p_3=x_3 * \nu =1$$

Критерии выбора наилучшей стратегии

Критерий Вальда (максиминный критерий, ММ-критерий). Основан на принципе крайнего пессимизма. Принимающий решение считает, что какую бы стратегию он ни выбрал, природа реализует свое наихудшее состояние. В наихудших условиях лицо принимающее решение (ЛПР) находит наилучший выход. Таким образом, ЛПР для каждой стратегии A_i находит наименьший выигрыш $a_i = \min a_{ij}$. Затем среди наименьших выигрышей находит наибольший $a_{i0} = \max a_i = \max \min a_{ij}$

Критерий Сэвиджа. Основан на принципе минимизации максимального риска.

Риск ЛПР r_{ij} – выигрыш, который бы он получил, если бы знал, какое состояние реализует природа, и его реальный выигрыш.

$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$

$\beta_j = \max a_{ij}$

Матрица риска R имеет вид

	$П_1$	$П_2$	…	$П_j$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1j}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2j}
…	…	…	…	…
A_i	r_{i1}	r_{i2}	…	r_{ij}

ЛПР для каждой стратегии A_i находят максимальный риск r_i: $r_i = \max r_{ij}$

Затем из максимальных рисков выбирается минимальный:

$r_{i0} = \min r_i = \min \max r_{ij}$

Критерий Гурвица (критерий оптимизма-пессимизма). Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма.

Наилучшей по Гурвицу является стратегия A_{i0}, соответствующая числу a_{i0}, которое рассчитывается как: $a_{i0} = \max a_i$

$a_i = \gamma \cdot \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \cdot \max_j a_{ij}$

γ – коэффициент пессимизма, $0 \le \gamma \le 1$. При $\gamma = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\gamma = 1$ – критерий пессимизма Вальда.

Критерий недостаточного основания Лапласа. Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии ЛПР в платёжной матрице определяется как

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}.$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$W = \max W_i$.

Критерий Байеса (критерий максимального математического ожидания выигрыша). Используется, когда имеются вероятности, с которыми реализуются состояния природы p_j, которые рассчитываются на основе статистических данных или определяются экспертным путем.

Для каждой стратегии A_i рассчитывается ожидаемый выигрыш

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

Наилучшей по Байесу, будет стратегия A_i, соответствующая наибольшему ожидаемому выигрышу: $\overline{a_{i0}} = \max \overline{a_i} = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$

Задание для самостоятельного решения 5.1

Определите, имеет ли платёжная матрица

а) доминируемые или дублирующие стратегии;

б) решение в чистых стратегиях.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	N+1	N+2
A_2	4	$\log_2 N$	N^2	3
A_3	6	1	3	N
A_4	1	2	3	4

где N – порядковый номер в списке группы.

Задание для самостоятельного решения 5.2

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 10, 8. 6, 4 и 2 ден.ед. соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции (таблица 5.3).

Таблица 5.3 – Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (ден.ед.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, ден.ед.	Полная себестоимость единицы продукции, ден.ед.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	8	4	6
III	6	3+0,1*N	3,5-0,1*N
IV	4	2	2
V	2	4-0,1*N	1+0,1*N

N –номер студента в списке группы.

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию: Y=8–0.3X, где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ден.ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, ден.ед.

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (таблица 5.4).

Таблица 5.4 – Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, ден.ед.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	8	0,33
10	6	0,25
10	4	0,2
10	2	0,18
8	10	0,4
8	8	0,35
8	6	0,32
8	4	0,28
8	2	0,25
6	10	0,52
6	8	0,48
6	6	0,4
6	4	0,35
6	2	0,3
4	10	0,6
4	8	0,58
4	6	0,55
4	4	0,5
4	2	0,4
2	10	0,9
2	8	0,85
2	6	0,7
2	4	0,65
2	2	0,4

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Задание для самостоятельного решения 5.3
Критерии выбора наилучшей стратегии

В матрице:

	S_1	S_2	S_3
P_i	0,7	0,2	0,1
A_1	20+N	18	32-N
A_2	26	17+N/2	9
A_3	40-N	16	N-1

где N – номер студента в списке группы.

γ=0,3.

Определить оптимальные стратегии и значения выигрышей при выборе оптимальных стратегий по критериям Байеса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа.

Задание 5.4

1. Выбрать исходные данные в соответствии с заданным вариантом (таблица 5.5).
2. Составить платежную матрицу и матрицу рисков.
3. Определить оптимальные стратегии по различным критериям.
4. Произвести выбор и обоснование наиболее оптимальной стратегии, сделать выводы.

Таблица 5.5 – Исходные данные

Вариант	Вероятности спроса				Спрос потребителей по кварталам года (тыс. ед.)				Доход от продажи единицы изделия	Издержки от нереализованной единицы продукции
	q_1	q_2	q_3	q_4	a_1	a_2	a_3	a_4		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,1	0,2	0,2	0,5	10	15	20	25	15	5
2	0,3	0,2	0,2	0,3	15	20	25	30	17	6
3	0,1	0,2	0,3	0,4	10	12	20	25	20	7
4	0,3	0,1	0,2	0,4	5	10	15	17	22	8
5	0,1	0,2	0,2	0,5	10	20	30	40	18	6
6	0,3	0,2	0,2	0,3	20	25	30	35	19	6
7	0,1	0,2	0,3	0,4	10	12	20	25	21	7
8	0,3	0,1	0,2	0,4	5	10	15	17	23	7
9	0,1	0,2	0,2	0,5	15	20	25	30	22	6
10	0,3	0,2	0,2	0,3	10	12	20	25	20	5
11	0,1	0,2	θ,2	0,5	10	17	20	25	17	8
12	0,3	0,2	0,2	0,3	15	20	25	30	17	6
13	0,1	0,2	0,3	0,4	10	12	20	25	26	7
14	0,2	0,2	0,2	0,4	5	10	15	15	24	8

Продолжение таблицы 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
15	0,1	0,2	0,2	0,5	10	20	10	40	18	6
16	0,1	0,4	0,2	0,1	40	25	30	45	19	6
17	0,1	0,2	0,3	0,4	10	12	20	25	21	7
18	0,3	0,1	0,2	0,4	5	10	18	17	23	7
19	0,1	0,2	0,2	0,5	15	20	25	30	22	6
20	0,3	0,2	0,2	0,3	10	14	20	25	19	9
21	0,3	0,2	0,2	0,3	10	13	22	25	20	5
22	0,1	0,2	0,2	0,5	15	17	20	25	17	8
23	0,3	0,2	0,2	0,3	15	20	25	25	15	6
24	0,1	0,2	0,3	0,4	14	12	20	25	26	7
25	0,2	0,2	0,2	0,4	5	10	15	15	31	8
26	0,1	0,2	0,2	0,5	10	20	11	40	18	6
27	0,1	0,4	0,2	0,1	40	25	15	45	19	6
28	0,1	0,2	0,3	0,4	10	12	20	25	21	7
29	0,3	0,1	0,2	0,4	5	9	18	17	23	7
30	0,1	0,2	0,2	0,5	15	20	25	29	12	6
31	0,3	0,2	0,2	0,3	9	14	20	25	34	9

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ

При оценке долгосрочных инвестиционных проектов решения принимаются на основе численного значения одного из критериев выбора этих проектов, например чистой настоящей стоимости (net present value – NPV). Инвестиционный проект со сроком реализации t лет может быть описан денежным потоком $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_t)$. Тогда чистая настоящая стоимость определяется по формуле

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} \frac{Z_t}{(1+i)^t} \qquad (6.1)$$

где i – ставка дисконтирования.

Однако для более обоснованного принятия решений следует также учитывать устойчивость этой оценки, под которой понимается степень влияния изменения различных параметров денежного потока, ставки процента и т.д. на колебания значений NPV. Чем слабее это влияние, тем выше устойчивость оценки и тем выше должна быть степень доверия к ней при принятии решений.

Риск реализации долгосрочного инвестиционного проекта состоит в том, что доходы и расходы по данному проекту могут подвергаться существенным колебаниям. Поэтому устойчивость инвестиционного проекта тесно связана с риском его реализации, так как чем выше степень устойчивости, тем меньше его риск.

Устойчивость проекта предполагает учет влияния факторов риска исполнения долгосрочного инвестиционного проекта, которые могут приводить к тому, что проект, который на момент принятия решения о его исполнении является выгодным, например, по критерию максимизации NPV, в будущем может как принести повышенный доход, так и обеспечить получение пониженных доходов, которые приведут к тому, что NPV проекта будет отрицательной, и проект перестанет быть выгодным для инвестора. Чем выше устойчивость, тем ниже неблагоприятное влияние факторов риска на изменение параметров денежного потока проекта.

Существуют 2 подхода к оценке устойчивости инвестиционного проекта:

1. ***Аналитический подход.*** Его идея состоит в том, что формируются математические выражения, которые в явной форме представляют соотношение параметров денежного потока и численного значения критерия оценки проекта, например NPV. Изменяя значение параметра, можно определить соответствующее изменение NPV и оценить ее чувствительность.

Достоинство подхода: математическое (аналитическое) выражение степени влияния параметров денежного потока на NPV (ее чувствительность по отношению к изменениям этих параметров) позволяет легко и быстро оценить устойчивость проекта.

Недостаток подхода: в ряде случаев получить такие зависимости в явном виде сложно.

Конкретные методики могут базироваться на вычислении как частных производных, так и их разностных аналогов.

Частная производная NPV по ставке процента определяется по формуле (6.2):

$$\frac{\partial NPV}{\partial i}=\frac{\partial}{\partial i}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{Z_t}{(1+i)^t}\right)=\sum_{t=0}^{T}Z_t*\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{1}{(1+i)^t}\right)=-\frac{1}{1+i}*\sum_{t=0}^{T}\frac{t*Z_t}{(1+i)^t} \quad (6.2)$$

Если производная отрицательна, то при увеличении ставки процента NPV уменьшается, и наоборот. Размер изменения будет зависеть от значения полученного выражения. При небольшом изменении ставки процента изменение NPV будет примерно пропорционально значению производной. Поэтому если численное значение производной невелико, то можно говорить о достаточно высокой устойчивости (т.е. низкой чувствительности) изменения инвестиционного проекта и изменения ставки процента.

Для большинства практических ситуаций частная производная будет достаточно велика. Кроме того, этот показатель имеет существенный недостаток: его численные значения зависят от единиц измерения, поэтому следует использовать другой показатель, не имеющий таких недостатков. Таким показателем, используемым для оценки относительного изменения, является *коэффициент эластичности NPV по ставке процента:*

$$\varepsilon_{NPV}(i) = \frac{\partial NPV}{\partial i} * \frac{i}{NPV}, \tag{6.3}$$

который можно интерпретировать как меру риска изменения ставки процента. Он показывает, на сколько процентов изменится NPV при изменении ставки процента на 1%.

С учетом того, что частная производная NPV по ставке процента меняется медленно, в практических расчетах следует ожидать резкого увеличения эластичности по мере уменьшения значения NPV по абсолютному значению. Это можно объяснить тем, что риск получения недостаточного дохода по долгосрочному инвестиционному проекту резко увеличивается, если ожидаемое значение NPV невелико. Для практически значимых величин ставок процента коэффициент эластичности по ставке процента, как правило, будет >1, что также свидетельствует о неустойчивости инвестиционных проектов при колебаниях ставок процента.

2. Имитационный подход. Данный подход к анализу чувствительности предполагает расчет и попарное сравнение численных значений NPV реализаций проекта при различных условиях. Можно представить зависимость между изменением параметров денежного потока и изменением NPV в виде таблицы или графика. При этом различают:

1. моделирование пошагового изменения параметров денежного потока инвестиционного проекта – проведение последовательных расчетов NPV при относительно небольших изменениях параметров денежного потока и выделение на этой основе интервалов изменения рассматриваемых параметров, в пределах которых NPV проекта остается положительной и проект является относительно устойчивым к изменениям параметров в указанных интервалах. При этом численно оценивается чувствительность NPV к указанным изменениям параметров денежного потока.

2. *метод Монте-Карло* – компьютерное моделирование распределений параметров денежного потока и оценку влияния параметров этих распределений на изменение NPV и риск реализации проекта. В этом случае чувствительность NPV может оцениваться на основе вероятностных моделей. При использовании указанных методов анализа чувствительности количественная мера степени влияния рассматриваемых факторов на значение NPV будет представлена в виде таблицы значений или графиков.

Достоинства данного подхода: относительная простота и возможность компьютерной реализации и получение исходной информации для управления в условиях неблагоприятного значения отдельных факторов. Недостаток подхода: часто невозможно оценить комплексное влияние всех рассматриваемых факторов или их групп, поскольку это упирается в принципиальные трудности построения многомерных таблиц в компьютере и требует больших затрат труда и времени на проведение подобных расчетов.

При проведении расчетов по методу Монте-Карло предполагается, что известны значения всех параметров, определяющих величину отдельных компонент денежного потока инвестиционного проекта, кроме тех, которые рассматриваются в качестве факторов риска, и случайное распределение которых моделируется на ЭВМ.

Организационно метод Монте-Карло, как метод имитационного компьютерного моделирования, можно описать следующей последовательностью основных этапов:

1. Определение основных показателей оценки инвестиционного проекта, по которым будет измеряться риск. К числу таких показателей относятся NPV проекта, ставка внутреннего процента, индекс доходности, период окупаемости или другие по желанию инвестора, предполагающего осуществить рассматриваемый проект.

2. Выделение параметров, которые будут рассматриваться как случайные величины, и для которых будет проведено компьютерное моделирование соответствующих распределений, а также выбор формы распределения. Можно выделить для анализа те компоненты

денежного потока, которые, по мнению инвестора, менеджера или эксперта в соответствующей области, наиболее подвержены риску. В принципе можно рассмотреть как случайные все параметры всех компонент денежного потока, но это связано с двумя проблемами.

1. увеличение числа выделенных случайных параметров может привести к противоречивым результатам вследствие коррелированности рассматриваемых параметров;

2. это может потребовать больше времени для выполнения всего комплекса расчетов.

3. Формирование значений выбранных параметров или отдельных компонент денежного потока на основе выбранного закона распределения. Как правило, в качестве такого распределения используют нормальное распределение, но можно использовать и другие формы распределений. При этом для моделирования значений соответствующей случайной переменной применяются специальные пакеты прикладных программ, либо можно воспользоваться встроенными возможностями пакета Microsoft Excel.

4. Расчеты денежного потока на основе моделированных значений соответствующих параметров потока и определение значения NPV проекта и других критериальных показателей для каждого полученного в результаты имитации варианта численного значения выделенного параметра.

5. Последовательное многократное повторение действий, выполняемых по этапу 3 и 4.

6. Определение ожидаемого значения NPV проекта, дисперсии и стандартного отклонения как мер риска и других показателей полученного распределения данного показателя. К их числу можно отнести наибольшее и наименьшее значение NPV, коэффициент вариации, вероятность реализации отрицательного значения NPV.

7. Анализ основных результатов или в форме количественных значениях показателей или в форме различных графиков (частотных гистограмм).

Задание 6.1 Аналитический подход

Пусть рассматривается проект, который может обеспечить максимальный выпуск X единиц в год некоторой продукции и имеет период полезного использования, равный пяти годам. Цена реализации единицы продукции составляет Y ден.ед. Данные по вариантам представлены в таблице 6.1. Ради простоты считаем, что она не меняется по годам периода полезного использования проекта. Выпуск продукции по годам различается в зависимости от коэффициента использования производственных мощностей (таблица 8.2). Известны условно-переменные и условно-постоянные расходы, связанные с осуществлением проекта, которые определяются по статьям калькуляции. Их перечень носит условный характер как для условно-постоянных расходов, так и для условно-переменных расходов (таблица 6.3). В частности, в числе условно-постоянных расходов учтены расходы на рекламу в нулевом году, а также дополнительные расходы по организации и подготовке исполнения проекта, которые относятся не к инвестиционным расходам, а к расходам по исполнению проекта, т.е. принадлежат операционному потоку расходов. В числе статей условно-переменных расходов рассматриваются расходы материалов и энергоресурсов, а также и расходы по управлению и обслуживанию соответствующей техники и технологических процессов. Заработная плата учтена в условно-постоянных расходах. Обычно это делается в том случае, когда она не может быть нормирована на единицу выполненной работы и производимой продукции. В противном случае она должна быть учтена в числе статей условно-переменных расходов.

Таблица 6.1 – Значения максимального выпуска единиц в год (X) и цены реализации единицы продукции (ден.ед.)

Вариант	X	Y	Вариант	X	Y
1	8000	30	16	9400	31
2	8400	30	17	9000	36
3	8700	31	18	7400	31
4	8600	28	19	8700	28
5	8500	29	20	8600	29
6	9000	27	21	8500	27
7	8200	30	22	9000	30
8	7900	29	23	8200	29
9	7800	32	24	7900	32
10	7700	28	25	7400	31
11	7600	29	26	7200	20
12	9000	27	27	7600	25
13	9100	35	28	9000	27
14	9200	30	29	8700	35
15	9300	22	30	9000	35

Таблица 6.2 – Исходные данные 1

Период	0	1	2	3	4	5
Коэффициент использования мощности	0	60%	80%	90%	95%	100%
Максимальный объем выпуска, шт.	X	X	X	X	X	X
Ожидаемая цена реализации, ден.ед.	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Инвестиции, ден.ед.	45000	-	-	-	-	-

Таблица 6.3 – Расходы по проекту, ден.ед.

Период	0	1	2	3	4	5
Условно-постоянные расходы, ден.ед.						
Аренда производственных помещений	0	45 000	45 000	45 000	45 000	45 000
Отопление	0	500	500	500	500	500
Заработная плата	0	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000
Реклама	8 000	6 000	6 000	8 000	9 000	9 000
Дополнительные организационные расходы	1 500	0	0	0	0	0
Условно-переменные расходы на ед. продукции, ден.ед.						
Материалы		6	6	6	7	7
Энергоресурсы		2	2	3	3	3
Транспорт		3	3	3	3	3
Управленческие расходы		1	1	1	1	1
Материально-техническое обслуживание		2	2	2	2	2

1. Сформировать денежный поток по данному инвестиционному проекту (таблица 6.4).

Таблица 6.4 – Денежный поток проекта

Период	0	1	2	3	4	5
Поток доходов						
Поток операционных расходов						
Инвестиционные расходы						
Денежный поток						

2. Определите значение чистой настоящей стоимости проекта при изменении ставки расчетного процента от 0% до 50% с шагом 5% (при определении NPV можно использовать функцию ЧПС). Результаты расчетов занести в таблицу 6.5. На основании полученных данных построить график чистой настоящей стоимости в рассматриваемом интервале изменения ставки расчетного процента.

Таблица 6.5 – Чистая настоящая стоимость проекта при изменении ставки расчетного процента

Ставка %	0%	5%	10%	…	50%
Чистая настоящая стоимость, ден.ед.					

3. Определить ставку внутреннего процента для данного проекта, используя функцию «Побор параметра» (ставка внутреннего процента – ставка процента (дисконта), при которой чистая приведенная стоимость капитальных вложений будет равна нулю).

4. Определить значение коэффициента эластичности чистой настоящей стоимости по ставке процента (формула (6.3)). Результаты расчетов представьте в таблице 6.6.

Таблица 6.6 – Эластичность чистой настоящей стоимости проекта по ставке расчетного процента

Ставка процента	Чистая настоящая стоимость проекта (ден.ед.)	Значение производной	Коэффициент эластичности
5%			
10%			
…			
50%			

5. Провести анализ чувствительности рассматриваемого проекта к изменению следующих 2-х факторов: цена реализации продукции и расходы материалов на единицу продукции. Результаты расчетов представить в таблице 6.7. Ставку процента взять равную ставке внутреннего процента.

Таблица 6.7 – Чувствительность проекта к двум факторам

Расходы материалов на единицу продукции (ден.ед.)	Цена реализации единицы продукции (ден.ед.)					
	20	25	30	35	40	45
2						
4						
6						
8						
10						
12						

6. Построить диаграмму зависимости от двух факторов (вид диаграммы – поверхность).

7. По результат расчетов сделать вывод.

Задание для самостоятельного решения 6.2
Метод Монте-Карло

1. Используя данные предыдущего задания, провести компьютерное моделирование случайного распределения цены продукции в каждом году от 1-го до 5-го на основе двух заданных параметров: ожидаемого значения цены и стандартного отклонения цены (таблица 6.8). При компьютерном моделировании цен следует использовать встроенные возможности пакета «Microsoft Excel» по имитации случайных величин на основе нормального распределения («Генерация случайных чисел» в опции «Анализ данных» меню «Сервис»). Всего выполнить 100 итераций. Результаты привести в таблице 6.9.

Таблица 6.8 – Исходные данные 1

Период	0	1	2	3	4	5
Стандартное отклонение цены реализации	0	1	1	2	2	2
Ставка дисконтирования	12%					
Ставка налога на прибыль	30%					
Собственный капитал, ден.ед.	40000					
Кредит, ден.ед.	20000					
Ставка по кредиту	15%					

Таблица 6.9 – Вероятные значение цен (в соответствии с нормальным законом распределения)

Итерация	Цена реализации, ден.ед.				
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
...					
100					

2. Используя полученные значения цены каждого периода и заданные значения остальных параметров денежного потока, сформировать денежные потоки инвестиционного проекта соответствующие полученным значениям цен на каждой итерации. Формирование расчетных компонент денежного потока на каждой итерации осуществить с учетом суммы предоставляемого кредита и выплат в счет его погашения и уплаты процентов по формулам:

Используя полученные значения денежных потоков, провести расчеты чистой настоящей стоимости проекта и ставки внутреннего процента. Результаты расчетов привести в таблице 6.10.

Таблица 6.10 – Полученные варианты денежного потока (ден.ед.)

Итерация	Денежный поток по периодам, ден.ед.						NPV
	0	1	2	3	4	5	
1							
2							
3							
...							
100							

3. Используя полученные конкретные распределения значений чистой настоящей стоимости проекта и ставки внутреннего процента, определить основные характеристики риска рассматриваемого проекта (таблица 6.11).

Таблица 6.11 – Характеристики риска по чистой настоящей стоимости

Ожидаемое значение чистой настоящей стоимости (NPV)	
Стандартное отклонение чистой настоящей стоимости	
Коэффициент вариации для чистой настоящей стоимости	
Вероятность отрицательного значения чистой настоящей стоимости	
Наибольшее значение чистой настоящей стоимости проекта	

4. Построить частотную гистограмму значений чистой настоящей стоимости. Для этого все полученные на ста итерациях значения NPV проекта разделить на группы следующим образом. В первую группу включим те значения чистой настоящей стоимости, которые не превосходят нуля, а далее с шагом 5 000 сформировать группы значений NPV.

5. Сделать выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балашевич, В.А. Экономико-математическое моделирование производственных систем: учебное пособие для вузов / В.А. Балашевич, А.М. Андронов. – Минск: Універс'тэцкае, 1995. – 240 с.

2. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / П.В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2002. – 208 с.

3. Костевич, Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений / А.С. Костевич. – Минск: ООО «Новое знание», 2003. – 424 с.

4. Красс, М.С., Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 464 с.

5. Новицкий, Н.И. Сетевое планирование и управление производством / Н.И. Новицкий: учеб.-практ. пособие. – М.: Новое знание, 2004. – 159с.

6. Похабов, В.И. Экономико-математические методы и модели. (Практикум): учебное пособие для студентов экономических специальностей / В.И. Похабов, Д.Г. Антипенко, М.Н. Гриневич. – Минск: БНТУ, 2003. – 130 с.

7. Фролькис, В.А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов/ В.А. Фролькис. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

8. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / под ред. А.В. Кузнецова. – 2-изд. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.

9. Юферева, О.Д. Экономико-математические методы и модели: сборник задач / О.Д. Юферева – Минск: БГЭУ, 2002. – 103 с.

Приложения А

Таблица А1. Построение сетевого графика

Работа	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t
А1	-	7	-	9	-	4	-	7	-	8	-	4
А2	-	3	-	5	-	6	-	2	-	2	-	2
А3	-	1	-	2	-	9	-	5	-	7	-	5
А4	А1	2	-	3	-	2	-	3	А1	4	-	8
А5	А1	5	А1	4	А1	5	А1	4	А1	2	А1	1
А6	А1	9	А1	7	А1	2	А1	9	А1	5	А1	2
А7	А3	4	А4	5	А3	1	А3,А4	1	А2,А6	7	А1,А2	1
А8	А3	4	А4	1	А3	2	А3,А4	4	А2,А6	3	А1,А2	3
А9	А4	4	А8	4	А3	7	А4	8	А3	4	А1,А2	6
А10	А4	7	А8	3	А4,А9	5	А4	6	А3	3	А1,А2	3
А11	А8	2	А5	6	А5,А11,А13	3	А2,А6,А7	2	А4	3	А4	7
А12	А2,А6,А7	5	А5	1	А2,А6,А7	2	А2,А6,А7	7	А5,А7	7	А5,А6,А7	5
А13	А2,А6,А7	6	А11	3	А4,А8,А9	6	А8,А9,А12	5	А5,А7	5	А6,А7	7
А14	А11,А13	8	А2,А6,А12	9	А4,А8,А9	4	А5,А11,А13	2	А5,А7	9	А3,А10,А11	9
А15	А9	3	А2,А6,А12	4	А4,А8,А9	7	А8,А9,А12	1	А11,А12	2	А3,А10,А11	4
А16	А5,А10	2	А3,А7,А9	2	А10,А16	8	А8,А9,А12	5	А10	7	А15	7
А17	А5,А10	4	А3,А7,А9	7	А15,А16	6	А10,А16	8	А8,А9,А14	8	А9,А14	8
А18	А12,А14,А17	7	А10,А17	6								
А19			А13,А14	8								

Окончание таблицы А1

Работа	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t	Предш. работа	t
A1	-	7	-	7	-	8	-	7	-	3	-	4
A2	-	5	-	9	-	4	-	4	-	9	-	7
A3	-	9	-	6	-	2	-	9	-	4	-	5
A4	A1	6	-	4	-	5	A1	3	-	7	-	2
A5	A1	9	A1	4	A1	2	A1	6	A1	5	A1	5
A6	A3	5	A1	7	A1	6	A1	8	A1	8	A1	6
A7	A3	7	A1	5	A2,A3,A6	9	A2,A6	9	A2,A6	4	A2	9
A8	A3	4	A2,A7	2	A2,A3,A7	8	A3	5	A2,A6	7	A2	3
A9	A4	2	A4	8	A3	9	A3	4	A2,A3,A6	4	A4	6
A10	A2,A5,A6	3	A5	3	A3	4	A3	8	A4	9	A5	2
A11	A2,A5,A6	8	A5	9	A3	2	A4	2	A4	3	A3,A4,A6,A8	4
A12	A2,A5,A6	4	A9	3	A4	4	A7,A9	7	A5	5	A3,A4,A6,A8	8
A13	A8	3	A9	5	A5,A7	7	A7,A9	6	A7,A12	9	A9	3
A14	A9,A10	6	A10	8	A8,A9,A13	9	A10	5	A8,A9	6	A12,A13	7
A15	A7,A12	9	A3,A6,A8,A11,A12	6	A11,A12	7	A10	3	A8,A9	8		
A16							A5,A11,A12	8	A11,A15	5		

Таблица А2 – Оптимизация сетевого графика по времени

Работа	Предш. работа	Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3			Вариант 4			Вариант 5			Вариант 6			Вариант 7		
		t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k
A1	-	8	6	0,04	6	4	0,02	10	6	0,05	6	4	0,03	6	4	0,04	16	10	0,02	10	6	0,02
A2	-	4	3	0,03	10	6	0,04	20	12	0,01	18	14	0,05	18	12	0,03	12	7	0,01	4	3	0,03
A3	A1	3	1	0,02	12	5	0,01	12	5	0,02	10	5	0,03	10	6	0,01	10	6	0,06	3	1	0,02
A4	A1	4	2	0,06	8	4	0,06	14	6	0,03	8	4	0,01	8	5	0,05	8	5	0,03	5	2	0,06
A5	A2,A3	7	4	0,05	6	3	0,02	16	10	0,01	6	4	0,02	10	7	0,05	3	2	0,01	7	4	0,05
A6	A2,A3,A4	7	5	0,01	10	7	0,05	6	4	0,04	10	6	0,04	7	4	0,02	2	1	0,04	7	5	0,01
Макс. доп. кол-во вложенных средств (В)		8			12			10			9			14			7			10		

Продолжение таблицы А2

Работа	Предш. работа	Вариант 8			Вариант 9			Вариант 10			Вариант 11			Вариант 12			Вариант 13			Вариант 14		
		t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k
A1	-	6	10	0,1	24	20	0,2	10	6	0,5	14	8	0,2	18	25	0,3	10	10	0,3	12	5	0,1
A2	-	22	7	0,15	18	12	0,4	20	14	0,3	20	12	0,1	16	12	0,4	22	7	0,15	25	14	0,3
A3	A1	18	6	0,3	6	4	0,1	8	5	0,6	12	7	0,4	6	4	0,1	18	6	0,3	8	10	0,6
A4	A1	14	5	0,5	16	14	0,35	16	12	0,2	16	10	0,25	16	14	0,35	19	7	0,2	16	12	0,2
A5	A2,A3	10	2	0,2	8	5	0,5	12	7	0,45	5	3	0,3	10	5	0,5	10	2	0,2	9	7	0,4
Макс. доп. кол-во вложенных средств (В)		24			10			12			16			11			25			15		

Окончание таблицы А2

Работа	Предш. работа	Вариант 15			Вариант 16			Вариант 17			Вариант 18			Вариант 19			Вариант 20			Вариант 21		
		t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k	t	d	k
A1	-	10	6	0,8	24	18	0,2	20	10	0,4	16	12	0,45	24	18	0,3	20	14	0,1	24	18	0,2
A2	-	20	12	0,6	17	14	0,4	16	12	0,5	10	8	0,2	17	13	0,1	10	6	0,3	17	12	0,4
A3	-	12	5	0,2	28	22	0,6	38	30	0,2	24	16	0,1	30	20	0,15	24	16	0,5	28	20	0,2
A4	A1	14	8	0,3	18	10	0,1	14	10	0,1	18	14	0,4	16	10	0,4	12	8	0,2	16	10	0,1
A5	A1,A2	6	4	0,35	12	8	0,7	10	8	0,15	20	15	0,1	12	12	0,2	18	12	0,25	12	9	0,5
Макс. время выполнения комплекса операций (T0)		20			34			36			28			32			29			30		

Таблица А3 – Оптимизация сетевого графика по ресурсам

Р – работа

ПР – предшествующая работа

М – максимальное количество рабочих

Вариант 1

Р	ПР	t	r	М
А1	-	3	6	10
А2	-	2	4	
А3	-	5	3	
А4	А1	2	3	
А5	А2	3	4	
А6	А2	4	4	
А7	А3	2	3	

Вариант 2

Р	ПР	t	r	М
А1	-	6	4	10
А2	-	4	3	
А3	-	6	5	
А4	А1	5	3	
А5	А3	4	4	
А6	А2,А5	7	6	

Вариант 3

Р	ПР	t	r	М
А1	-	6	4	10
А2	-	4	3	
А3	-	6	5	
А4	А1	5	3	
А5	А3	4	4	
А6	А2,А5	7	6	

Вариант 4

Р	ПР	t	r	М
А1	-	5	4	12
А2	-	7	5	
А3	А1	4	4	
А4	А1	3	6	
А5	А2,А4	2	5	
А6	А2,А4	5	3	
А7	А3,А5	2	4	

Вариант 5

Р	ПР	t	r	М
А1	-	3	6	20
А2	-	6	8	
А3	-	5	5	
А4	А1	4	5	
А5	А1	3	4	
А6	А2	4	3	
А7	А3	3	4	
А8	А3	6	5	
А9	А6,А7	5	6	

Вариант 6

Р	ПР	t	r	М
А1	-	6	4	16
А2	-	4	3	
А3	-	3	11	
А4	А1	12	6	
А5	А1	4	5	
А6	А3	4	2	
А7	А3	5	7	
А8	А2,А5,А6	6	5	
А9	А7,А8	3	2	

Вариант 7

Р	ПР	t	r	М
А1	-	3	7	14
А2	-	7	5	
А3	А1	3	4	
А4	А2	2	5	
А5	А2	6	5	
А6	А2	4	3	
А7	А3,А4	5	4	
А8	А3,А4	4	6	
А9	А5,А8	3	3	

Вариант 8

Р	ПР	t	r	М
А1	-	3	5	17
А2	-	6	8	
А3	-	5	5	
А4	А1	4	4	
А5	А1	3	4	
А6	А2	4	3	
А7	А3	3	4	
А8	А3	6	5	
А9	А6,А7	5	4	

Вариант 9

Р	ПР	t	r	М
А1	-	4	8	18
А2	-	8	9	
А3	-	6	5	
А4	А1	5	4	

Вариант 10

Р	ПР	t	r	М
А1	-	4	8	18
А2	-	11	9	
А3	-	10	5	
А4	А1	5	4	

Вариант 11

Р	ПР	t	r	М
А1	-	5	10	20
А2	-	8	9	
А3	-	8	5	
А4	А1	5	6	

Вариант 12

Р	ПР	t	r	М
А1	-	5	6	15
А2	-	7	9	
А3	-	6	5	
А4	А1	5	3	

Окончание таблицы А3

A5	A1	2	10		A5	A1	2	1		A5	A1	2	10		A5	A1	2	1	
A6	A3	2	3		A6	A2,A5	9	7		A6	A3	2	4		A6	A2,A5	9	5	
A7	A3	3	12		A7	A3	3	2		A7	A3	4	12		A7	A3	3	2	
A8	A2,A3,A5	4	12		A8	A6,A7	4	8		A8	A2,A3,A5	4	12		A8	A6,A7	3	8	
Вариант 13					Вариант 14					Вариант 15					Вариант 16				
Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М
A1	-	4	7		A1	-	2	9		A1	-	6	5		A1	-	6	6	
A2	-	7	3		A2	-	3	6		A2	-	7	3		A2	-	3	5	
A3	-	2	5		A3	-	4	2		A3	-	2	4		A3	-	4	2	
A4	A1	8	4		A4	A1	3	5		A4	A1	10	4		A4	A1	3	5	
A5	A1	10	3	15	A5	A1	5	4	15	A5	A1	3	3	18	A5	A1	5	6	12
A6	A1	1	4		A6	A2,A5	2	3		A6	A1	1	6		A6	A2,A5	9	3	
A7	A2,A6	3	7		A7	A2,A5	6	4		A7	A2,A6	3	7		A7	A2,A5	6	3	
A8	A2,A6	2	5		A8	A2,A5	3	3		A8	A2,A6	2	5		A8	A2,A5	3	3	
A9	A4	4	4		A9	A3,A8	2	1		A9	A4	4	4		A9	A3,A8	8	1	
A10	A3,A8	5	6		A10	A4,A6	4	6		A10	A3,A8	5	6		A10	A4,A6	10	6	
Вариант 17					Вариант 18					Вариант 19					Вариант 20				
Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М	Р	ПР	t	r	М
A1	-	8	10		A1	-	5	6		A1	-	9	8		A1	-	7	12	
A2	-	7	5		A2	-	3	6		A2	-	7	3		A2	-	3	5	
A3	-	6	5		A3	-	9	2		A3	-	2	4		A3	-	6	9	
A4	A1	8	4		A4	A1	3	5		A4	A1	10	8		A4	A1	3	5	
A5	A1	10	3	20	A5	A1	6	5	17	A5	A1	5	3	22	A5	A1	5	6	18
A6	A1	2	8		A6	A2,A5	2	3		A6	A1	1	6		A6	A2,A5	9	6	
A7	A2,A6	3	7		A7	A2,A5	15	4		A7	A2,A6	3	10		A7	A2,A5	9	3	
A8	A2,A6	2	6		A8	A2,A5	7	8		A8	A2,A6	6	5		A8	A2,A5	3	9	
A9	A4	4	4		A9	A3,A8	2	1		A9	A4	4	9		A9	A3,A8	10	5	
A10	A3,A8	5	6		A10	A4,A6	4	9		A10	A3,A8	1	6		A10	A4,A6	10	6	

Приложение Б

Таблица Б1– Модели управления запасами

Q – количество, шт.

C – цена, у.е.

Товар	B1		B2		B3		B4		B5		B6		B7		B8		B9		B10	
	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C
Товар 1	200	15	20	30	140	70	40	15	120	30	140	70	120	15	120	55	400	15	400	15
Товар 2	75	90	30	80	125	30	115	90	30	300	125	67	30	90	250	25	214	33	214	90
Товар 3	360	5	200	65	160	65	260	59	200	85	160	65	200	59	25	230	210	15	210	59
Товар 4	210	180	100	50	120	250	220	18	200	50	120	250	200	18	125	65	100	65	100	18
Товар 5	500	14	140	40	300	200	100	12	140	40	30	200	140	12	410	25	220	125	220	12
Товар 6	20	100	10	200	320	20	130	25	50	39	32	420	50	25	320	15	320	110	320	32
Товар 7	40	200	150	20	210	85	150	20	150	20	125	185	150	20	100	245	155	180	155	125
Товар 8	110	25	250	20	100	110	200	25	50	220	100	110	50	25	145	120	360	85	360	100
Товар 9	350	350	20	100	150	55	450	20	320	100	130	55	320	20	225	25	100	20	100	130
Товар 10	195	195	190	190	190	190	290	95	190	190	390	90	190	95	220	35	125	IS	125	390

Товар	B11		B12		B13		B14		B15		B16		B17		B18		B19		B20	
	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C	Q	C
Товар 1	120	15	315	25	70	70	400	15	180	30	50	70	140	15	100	55	120	15	400	15
Товар 2	30	90	214	80	100	30	214	90	222	300	115	67	125	90	90	25	30	33	214	90
Товар 3	200	5	210	65	260	65	210	59	210	85	275	65	160	59	39	230	200	15	210	59
Товар 4	200	180	125	50	220	250	100	18	115	50	220	250	120	18	125	65	200	65	100	18
Товар 5	140	14	220	40	250	200	220	12	220	40	100	200	300	12	300	25	140	125	220	12
Товар 6	50	100	300	200	65	20	320	25	320	39	100	420	320	25	320	15	50	110	320	32
Товар 7	150	200	155	20	150	85	155	20	169	20	150	185	210	20	50	245	150	180	155	125
Товар 8	50	25	360	20	200	110	360	25	360	220	200	110	100	25	145	120	50	85	360	100
Товар 9	320	350	90	75	450	55	100	20	154	100	450	55	150	20	75	25	320	20	100	130
Товар 10	190	195	125	190	255	190	125	95	110	190	290	90	190	95	180	35	190	IS	125	390

Учебное издание

ПОХАБОВ Валерий Иннокентьевич
ПОПОВА Наталья Дмитриевна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Пособие для студентов экономических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Подписано в печать 30.07.2009.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 4,36. Тираж 100. Заказ 504.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.