

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра гидравлики

И.В. Качанов
В.В. Кулебякин
В.К. Недбальский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Часть 3

Минск
БНТУ
2012

УДК 532.5 – 533.6
ББК 30.123я7
К 30

Издается с 2010 года

Рецензенты:

доктор физико-математических наук С.П. Фисенко,
доктор физико-математических наук В.А. Бабенко

Качанов, И.В.

К 30 Механика жидкости и газа: курс лекций: в 4 ч. / И.В. Качанов,
В.В. Кулебякин, В.К. Недбальский. – Минск: БНТУ, 2012. – Ч. 3. – 56 с.

ISBN 978-985-525-769-2 (Ч. 3).

Издание содержит изложение основных разделов механики жидкости и газа в объеме курса лекций, предусмотренных учебным планом для строительных специальностей БНТУ. Может быть использовано в самостоятельной работе студентов, для подготовки к экзаменам и зачетам, при проведении лабораторных работ и практических занятий, окажет большую помощь студентам других специальностей, изучающих гидравлику.

Часть 2 настоящего издания вышла в 2011 г. в БНТУ.

УДК 532.5 – 533.6
ББК 30.123я7

ISBN 978-985-525-769-2 (Ч. 3)
ISBN 978-985-525-261-1

© Качанов И.В.,
Кулебякин В.В.,
Недбальский В.К., 2012
© БНТУ, 2012

1. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Одномерными называются потоки, в которых основные параметры течения (скорости, давление и др.) зависят лишь от одной геометрической координаты, направление которой совпадает с направлением вектора скорости. Примером такого течения является рассматривавшееся ранее движение жидкости в элементарной трубке тока, ввиду малости поперечного сечения которой скорость и давление в нем постоянны. Использование модели одномерных течений позволяет достаточно просто решать многие важные практические задачи.

Раздел прикладной гидромеханики, применяющий эту модель течения, называют *гидравликой*.

Для решения широкого круга инженерных задач плодотворной оказалась так называемая струйная модель потока. Согласно этой модели поток представляется состоящим из бесконечного множества элементарных жидких струек. При рассмотрении потока поперечные сечения в нем выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока в каждой точке сечения были направлены по нормали. В этом случае сечение потока называется *живым*. Вообще говоря, живое сечение представляет собой изогнутую поверхность, но если линии тока в элементарных жидких струйках, составляющих его, параллельны, то живое сечение будет плоским.

Ранее было показано, что объемный расход элементарной струйки жидкости может быть определен как

$$dQ = u dS,$$

где u – скорость (постоянная) в поперечном сечении элементарной жидкой струйки;

dS – площадь ее сечения.

В соответствии со струйной моделью расход потока можно определить как

$$Q = \iint_S u(r) dS. \quad (1.1)$$

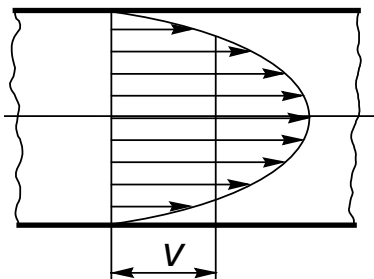


Рис. 1.1

Рассмотрим движение вязкой жидкости в трубе круглого поперечного сечения. Для реального течения вязкой жидкости распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эюра скоростей) будет неравномерным, в частности, может иметь вид, показанный на рис. 1.1.

Соответственно запись $u(r)$ в формуле (1.1) означает, что местные скорости в сечении трубы изменяются по радиусу, а $u(r)$ представляет собой закон изменения скорости, т. е. является математическим описанием эюры скоростей. Следовательно, для того чтобы вычислить расход по этой зависимости, необходимо знать уравнение эюры скоростей, которое, вообще говоря, априори неизвестно. С чисто математических позиций интеграл в правой части выражает объем эюры скорости. Представим теперь, что при неизменном расходе Q жидкость становится идеальной, т. е. теряет вязкость. Это, очевидно, приведет к перестройке эюры скоростей, причем, поскольку исчезнут силы вязкого трения, все частицы жидкости будут двигаться с некоторой одинаковой скоростью V . При этом ввиду того, что расход остается неизменным, объем новой эюры скоростей равен объему старой. Таким образом, реализуется условие $u(r) = V = \text{const}$ и соответственно получаем

$$Q = \iint_S V dS = V \iint_S dS = VS = \iint_S u(r) dS;$$

$$V = \frac{Q}{S}.$$

Скорость V , введенная таким образом, носит название среднерасходной либо средней скорости. Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того,

чтобы расход был равен своему истинному значению. Заменяв истинные, неравномерно распределенные по сечению скорости средней скоростью V и приняв давление постоянным по живому сечению, заменяем рассмотрение реального потока течением, в котором все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость. С физико-математической точки зрения использование понятия средней скорости позволяет свести задачу о движении жидкости в трубах и каналах к одномерной. Для такого течения решением упрощенной одномерной задачи является получение удобной для технических расчетов зависимости распределения давления по длине трубы.

Если поперечное сечение трубы или канала изменяется по длине, то поток является трехмерным, но в некоторых случаях приближенно может быть сведен к одномерной модели. Это возможно, если кривизна линий тока и углы их расхождения малы. Потоки, удовлетворяющие этим условиям, называют *плавно изменяющимися* (параллельно струйными), живые сечения их слабо искривлены и могут считаться плоскими. Выбирая продольную координату вдоль оси потока, проходящей через центры инерции живых сечений, плавно изменяющийся поток можно рассматривать как одномерный.

Рассмотрим свойства плавно изменяющегося движения несжимаемой жидкости в трубах и каналах с точки зрения перехода к одномерной модели. Если поток считать установившимся, то все производные по времени, входящие в уравнения движения, равны нулю. Если исходить из одномерной модели, то малы и могут быть приняты равными нулю также поперечные компоненты скорости u_y и u_z . Применительно к этому случаю система дифференциальных уравнений Навье–Стокса принимает вид

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Последние два уравнения полностью совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в пределах живого сечения движущейся жидкости давление распределено по гидростатическому закону. В частности, если объемной силой является сила тяжести, то для произвольной точки, находящейся в живом сечении, имеем

$$Y = 0;$$

$$Z = -g \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением вертикали и нормалью к вектору скорости.

Следовательно, в пределах живого сечения (для $X = \text{const}$) гидростатический напор постоянен:

$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const}$$

(либо $gz + \frac{P}{\rho} = \text{const}$).

Этот вывод приближенно справедлив для плавно изменяющихся течений и позволяет распространить уравнение Бернулли на поток конечных размеров при введении в него средних по сечению величин.

2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Одним из оказавшихся наиболее плодотворными путей решения инженерных задач расчета распределения давления при течении жидкостей в трубах и каналах, явилось обобщение уравнения Бернулли на установившийся поток вязкой жидкости. В основу этого метода положена струйная модель – представление о потоке как о совокупности элементарных струек, для каждой из которых справедливо уравнение Бернулли.

Предположим, что движение установившееся и поток в рассматриваемом сечении плавно изменяющийся (или одномерный). Определим энергию, переносимую за секунду массой элементарной струйки через ее сечение (т. е. удельную мощность струйки). Эта величина может быть найдена как произведение полной удельной

энергии струйки $(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2})$ на ее массовый расход $(\rho u dS)$.

В справедливости этого легко убедиться непосредственно. Действительно, размерность удельной энергии – Дж/кг, размерность массового расхода – кг/с, их произведение

$$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Таким образом, выражение для потока энергии в единицу времени (мощности потока) через сечение элементарной струйки выглядит как

$$dN = \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dS.$$

Соответствующая величина мощности всего потока исходя из струйной модели представляется выражением

$$N = \iint_S \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u \, dS .$$

Учитывая, что жидкость несжимаема:

$$N = \rho \iint_S \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) u \, dS + \frac{\rho}{2} \iint_S u^3 \, dS .$$

Поскольку поток жидкости плавно изменяющийся, то

$$gz + \frac{p}{\rho} = \text{const} .$$

Тогда, преобразуя выражение для потока энергии, получим

$$\rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \iint_S u \, dS = \rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) Q ;$$

$$N = \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho Q + \frac{\rho}{2} \iint_S u^3 \, dS .$$

В полученном соотношении второй член представляет собой поток кинетической энергии, переносимой в единицу времени через сечение S .

Разделим обе части полученного уравнения на массовый расход ρQ , т. е. отнесем это соотношение, как и уравнение Бернулли для струйки, к единице массы. Таким образом, имеем

$$E = \frac{N}{\rho Q} = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2Q} \iint_S u^3 \, dS .$$

Разделив и умножив третий член полученного выражения на квадрат средней скорости V^2 , с учетом того, что $Q = VS$, придем к соотношению

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \frac{1}{V^3 S} \iint_S u^3 dS.$$

Пусть

$$\frac{1}{V^3 S} \iint_S u^3 dS = \alpha,$$

тогда

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha V^2}{2}. \quad (2.1)$$

Величина α носит название *коэффициента кинетической энергии* либо *коэффициента Кориолиса*.

Разделив обе части формулы (2.1) на ускорение свободного падения g , выразим это соотношение в размерностях длины, т. е. в форме напоров:

$$\frac{E}{g} = H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}.$$

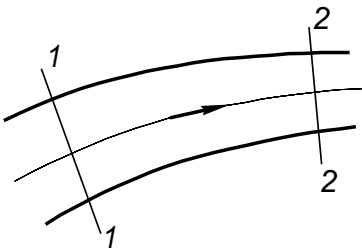


Рис. 2.1

Рассмотрим движение потока вязкой жидкости в канале от сечения 1-1 к сечению 2-2 (рис. 2.1). Обозначим удельную энергию потока в сечении 1-1 через E_1 , а в 2-2 – E_2 .

Так как жидкость вязкая, то процесс ее перемещения сопровождается диссипацией, т. е.

некоторая часть механической энергии необратимо расходуется на преодоление сил внутреннего трения и превращается в тепло, поэтому $E_2 < E_1$. Баланс энергии для выбранных сечений может быть записан в виде

$$E_1 = E_2 + \Delta e,$$

где Δe – потери энергии на трение.

Подставляя значения E_1 и E_2 , получаем

$$g z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} = g z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} + \Delta e.$$

Это и есть энергетическая форма уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости.

В практических приложениях чаще используют геометрическую форму уравнения Бернулли, выраженную в напорах:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta h,$$

где $\frac{\Delta e}{g} = \Delta h$ – потери напора.

Для газовых потоков (без учета сжимаемости), а также при расчетах систем гидравлического привода обычно используют уравнение Бернулли в форме давлений:

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho \alpha_1 V_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho \alpha_2 V_2^2}{2} + \Delta p,$$

где Δp – потери давления.

Обычно при этом член $\rho g z$ оказывается пренебрежимо малым по сравнению с остальными, тогда уравнение принимает вид

$$p_1 + \frac{\rho\alpha_1 V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\alpha_2 V_2^2}{2} + \Delta p.$$

Как уже упоминалось, коэффициент α носит название коэффициента кинетической энергии или коэффициента Кориолиса. Для выяснения физического смысла этой величины рассмотрим кинетическую энергию секундной массы потока несжимаемой жидкости, определяемую истинным распределением скоростей в сечении, т. е.

$$E_k^{\text{ист}} = \frac{\rho}{2} \iint_S u^3 dS. \quad (2.2)$$

Если бы скорости в сечении были бы распределены равномерно, то $u = V = \text{const}$ (V – средняя скорость в данном сечении) и кинетическая энергия потока была бы

$$E_k^{\text{ср}} = \frac{\rho}{2} \iint_S V^3 dS = \frac{\rho}{2} V^3 \iint_S dS = \frac{\rho V^3 S}{2}. \quad (2.3)$$

Разделив выражение (2.2) на (2.3), получим

$$\frac{E_k^{\text{ист}}}{E_k^{\text{ср}}} = \frac{1}{V^3 S} \iint_S u^3 dS = \alpha.$$

Следовательно, коэффициент Кориолиса представляет собой отношение истинного потока кинетической энергии, вычисленной по неравномерному распределению скоростей, к потоку кинетической энергии, определенному по средней скорости. В этой связи можно утверждать, что α корректирует ошибку, возникающую при вычислении кинетической энергии от замены истинного распределения скоростей условно равномерным. Очевидно, что его величина зависит от формы эпюры скорости, причем она всегда больше единицы. При ламинарном течении в трубах $\alpha_{\text{л}} = 2$, при турбулентном $\alpha_{\text{т}} = 1,02\text{--}1,04$. Следовательно, в турбулентном потоке скорости

в поперечном сечении распределены более равномерно, чем в ламинарном (эпюра скоростей турбулентного потока более «наполненная»).

В технических расчетах часто употребляют понятия пьезометрического и гидравлического уклонов, определяемых соотношениями: пьезометрический уклон

$$J_p = -\frac{d}{dL}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right);$$

гидравлический уклон

$$J_v = -\frac{d}{dL}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}\right),$$

где L – расстояние, отсчитываемое вдоль оси потока (строго говоря, вдоль линии тока).

Очевидно, что пьезометрический уклон равен гидравлическому уклону в случаях течения в цилиндрических трубах и равномерного течения в каналах, поскольку в этих течениях $V = \text{const}$. Отметим также, что гидравлический уклон суть величина существенно положительная, тогда как пьезометрический уклон может быть отрицательным (случай расширяющегося потока).

3. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ИХ СВЯЗЬ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Очевидно, что практическое использование уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости требует установить способ определения величины потерь напора Δh , обусловленных действием в потоке сил сопротивления. Однако уже в 80-х годах XIX века исследования, связанные с изучением сопротивления движению жидкости при течении в трубах, практически зашли в тупик. Опыты одних исследователей (немецкий инженер-строитель Г. Хаген, французский врач Ж. Пуазейль) показали, что потери напора, вызванные действием в потоке сил сопротивления, линейно зависят от скорости. В то же время не менее тщательные и точные опыты французского инженера А. Дарси свидетельствовали, что сопротивление пропорционально квадрату скорости. Возникшее противоречие тормозило развитие инженерной практики и требовало своего разрешения. Действительно, как показали в дальнейшем многочисленные эксперименты, механизм действия сил сопротивления различен для разных граничных условий и в разных режимах движения жидкостей.

Наблюдения, выполненные Г. Хагеном еще в 1855 г., дали возможность предположить, что характер движения в трубе может изменяться при достижении определенных условий. Эта гипотеза нашла блестящее подтверждение в классических опытах английского физика О. Рейнольдса, результаты которых были опубликованы в 1883–1884 г. и имели далеко идущие последствия для всей механики жидкости. Эти опыты доказали существование двух основных режимов течения жидкости. Первый режим – спокойный, слоистый, без перемешивания жидких частиц был назван *ламинарным*. Второй – бурный, хаотичный, приводящий к интенсивному перемешиванию частиц, позднее по предложению У. Томсона (лорда Кельвина) получил название *турбулентного*. Рейнольдс предположил, что увеличение скорости потока приводит к возникновению случайных возмущений, дестабилизирующих его структуру. Если под устойчивостью понимать способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости течения. При этом из двух категорий сил, действующих на жидкие частицы, а именно сил вязкого трения и сил инерции, первые играют стабилизирующую

роль, а вторые – дестабилизирующую. Таким образом, отношение этих сил может служить критерием устойчивости потока, т. е.

$$\text{Критерий устойчивости} = \frac{\text{Силы инерции}}{\text{Силы вязкого трения}}.$$

Сила инерции по 2-му закону Ньютона выражается формулой $F = ma$. Если выполнить оценку величины этой силы, используя характерные масштабы плотности ρ , скорости u , расстояния l , времени t , то получим

$$F_{\text{ин}} \cong \frac{\rho l^3 u}{t}.$$

Учитывая, что l/t есть не что иное, как скорость, оценка силы инерции

$$F_{\text{ин}} \cong \rho l^2 u^2.$$

Сила вязкого трения (по известной формуле Ньютона)

$$F_{\text{тр}} \cong \mu \frac{du}{dy} S.$$

Выполняя оценки аналогично предыдущим, получаем

$$F_{\text{тр}} \cong \mu \frac{u}{l} l^2 \cong \mu u l,$$

и безразмерный комплекс, характеризующий устойчивость течения, приобретает вид

$$\frac{F_{\text{ин}}}{F_{\text{тр}}} = \frac{\rho u l}{\mu}.$$

В дальнейшем это соотношение получило название числа или критерия Рейнольдса, т. е.

$$Re = \frac{\rho ul}{\mu},$$

где u – характерная скорость течения;

l – характерный линейный размер.

Для круглых труб характерный размер – их диаметр, характерной скоростью является средняя скорость. С учетом этого, имея в виду,

что $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, выражение для критерия Рейнольдса принимает вид

$$Re = \frac{Vd}{\nu}.$$

Одним из наиболее существенных результатов, полученных в опытах Рейнольдса, являлось то, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходил при одном и том же численном значении введенного им критерия, названного впоследствии критическим значением числа Рейнольдса ($Re_{кр}$). По данным многочисленных опытов, в круглых трубах $Re \approx 2300$. Это так называемое нижнее критическое число Рейнольдса, которое получают, если не принимать специальных мер по стабилизации потока. При принятии таких мер переход к турбулентному режиму течения можно существенно затянуть. В технических расчетах принято, что если число Рейнольдса, вычисленное по фактическим значениям параметров, меньше $Re_{кр} = 2300$, то режим ламинарный, и наоборот.

Структуры ламинарного и турбулентного потоков различны, турбулентные пульсации порождают добавочные касательные напряжения и обуславливают увеличение потерь энергии в турбулентных потоках по сравнению с ламинарными течениями. Соответственно характер закономерностей, определяющих потери энергии, зависит от значения числа Re , причем в некоторых случаях удается получить эти закономерности аналитически, а в других приходится, пользуясь опытными данными, конкретизировать формулы эмпирическими коэффициентами.

4. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ

При рассмотрении уравнений Навье–Стокса для движения вязкой жидкости было отмечено, что прямое их интегрирование в большинстве случаев связано с практически непреодолимыми на сегодняшний день математическими трудностями. Однако известны и исключения. К их числу относится установившееся течение в круглой трубе, происходящее под действием постоянного перепада давлений, – течение Пуазейля. В данном случае воспользуемся иным способом решения этой задачи, позволяющим получить ясные физические представления о характеристиках течения.

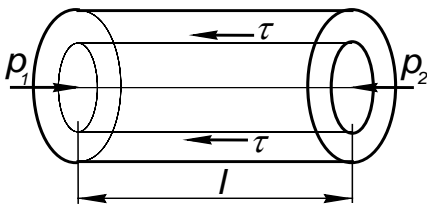


Рис. 4.1

Итак, рассмотрим установившееся ламинарное течение в горизонтальной трубе радиуса R , происходящее под действием постоянного перепада давлений (рис. 4.1). Двумя сечениями, отстоящими на расстоянии l друг от друга, выделим отсек трубопровода

и в нем цилиндр радиуса r . Так как течение установившееся, то сумма проекций на ось трубы всех сил, действующих на выделенный жидкий цилиндр, должна быть равна нулю. Иначе говоря, силам давления, приводящим частицы жидкости в движение, противодействуют силы трения, действующие на боковой поверхности цилиндра.

Сила давления

$$p_1 S - p_2 S = \Delta p S = \pi r^2 \Delta p .$$

Сила сопротивления (трения слоев жидкости): $2\pi r l \tau$, где τ – касательное напряжение трения.

Таким образом

$$\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$$

и

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2l}.$$

Откуда, в частности, следует, что касательные напряжения изменяются вдоль радиуса по линейному закону. В соответствии с формулой Ньютона для вязкости жидкости касательные напряжения определяются соотношением

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Знак «минус» в этом выражении объясняется тем, что касательные напряжения направлены противоположно течению.

Приравнявая правые части вышеуказанных формул, получаем

$$\frac{\Delta p r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Разделяя переменные

$$du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r dr$$

и интегрируя, получим

$$u = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C.$$

Постоянная интегрирования находится из условия прилипания (слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенке, не имеет скорости относительно стенки – «прилипает» к ней), т. е. при $r = R$ $u = 0$ и соответственно

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2.$$

Окончательно

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

либо

$$u = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (4.1)$$

Как следует из полученного соотношения, максимальная скорость движения частиц будет иметь место на оси трубы, т. е. при $r = 0$, а ее величина

$$u_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}.$$

Подставляя полученную зависимость в выражение (4.1), получим

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Таким образом, в поперечном сечении трубы скорости распределены по параболическому закону, т. е. эпюра скоростей представляет собой параболоид вращения.

Выражение для эпюры скоростей можно представить в виде

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2},$$

из чего следует, что безразмерная скорость (отношение скорости в любой точке сечения к скорости на оси потока) при ламинарном течении в трубе не зависит от расхода, рода жидкости, материала стенок трубы и при всех значениях $Re < Re_{кр}$ в сходственных точках поперечного сечения она одинакова.

Определим расход жидкости, протекающей через трубопровод:

$$Q = \iint_S u dS = 2\pi \int_0^R u(r) r dr,$$

где $u(r)$ – эпюра скоростей, а $2\pi r dr$ – площадь кольца радиусом r и толщиной dr , в пределах которого скорость можно считать постоянной (величина dr суть бесконечно малая).

Подставляя выражение для эпюры скоростей, получим

$$Q = \frac{2\pi \Delta p}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr.$$

Интегрируя по сечению трубы и имея в виду соотношение для скорости на оси трубы, получим

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu l} = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2} = \frac{1}{2} u_{\max} S = VS.$$

Полученное соотношение носит название формулы Хагена–Пуазейля, из него следует, в частности, что

$$u_{\max} = 2V.$$

Используя вышеприведенную формулу, можно получить уравнение для определения потерь давления при ламинарном режиме течения в круглой трубе:

$$\Delta p = \frac{8\mu l V}{R^2},$$

либо, заменив радиус трубы ее диаметром, получим

$$\Delta p = \frac{32\mu l V}{d^2}. \quad (4.2)$$

Для потерь напора с учетом того, что

$$\Delta p = \rho g \Delta h,$$

формула (4.2) принимает вид

$$\Delta h = \frac{32\mu l V}{\rho g d^2}.$$

Важнейший вывод, следующий из этого соотношения, можно сформулировать так: **потери давления (напора) при ламинарном течении в круглых трубах линейно зависят от средней скорости.**

Преобразуем полученное соотношение, а именно умножим числитель и знаменатель на $2V$, в результате получим

$$\Delta h = \frac{32 \cdot 2v}{Vd} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64v}{Vd} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Несколько забегая вперед, заметим, что полученное соотношение отражает закон сопротивления для ламинарного течения в круглой трубе:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления, определяемый формулой Дарси–Вейсбаха:

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

5. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Вопросы возникновения, развития и затухания турбулентности представляют собой наиболее сложный и наименее разработанный раздел гидродинамики как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. При этом следует понимать, что огромное большинство течений, реализующихся в различных технических устройствах и агрегатах, а также в окружающей среде, имеет турбулентный характер и, следовательно, практическое значение разработки адекватных теоретических моделей и экспериментальных исследований турбулентности сложно переоценить. Как ранее уже отмечалось, первые серьезные исследования перехода к турбулентности были выполнены О. Рейнольдсом в 1883 г. Опираясь на собственные классические опыты, Рейнольдс предположил, что общей причиной изменения слоистого (ламинарного) течения на завихряющееся является то обстоятельство, что при некоторых условиях стационарное движение становится неустойчивым, так что бесконечно малые возмущения могут привести к его переходу в волнистое движение.

Турбулентное перемешивание обуславливает увеличение сопротивления при течении в трубах, повышение сопротивления кораблей и самолетов, возрастание потерь энергии в турбинах и компрессорах. В то же время именно турбулентность дает возможность преодолеть повышение давления при течении в диффузоре или при течении вдоль крыла самолета. Если бы указанные течения были ламинарными, то все они непременно и быстро отрывались бы от стенки, а устройства, в которых они используются, действовали бы плохо.

Основной определяющей чертой турбулентного движения является его хаотичный, случайный характер. Это означает, что скорость и другие параметры в любой точке потока всегда зависят от времени, т. е. турбулентное движение является, в принципе, нестационарным. Более того, эти флуктуации параметров движения в данной точке являются хаотическими.

Впервые более-менее обоснованная гипотеза о физическом механизме турбулентного перемешивания была высказана английским ученым Л. Ричардсоном в 1922 г. Условно турбулентное движение принято рассматривать как совокупное движение отдельных структур, называемых молями либо вихрями, совершающими как поступательное, так и вращательное движение. При этом развитая

турбулентность представляет собой некую иерархию вихрей. При зарождении вихри имеют большие размеры, соизмеримые с размерами канала. Затем, за счет потери устойчивости, они распадаются на более мелкие, передавая им при этом свою энергию. Возникает каскадный процесс, в котором энергия осредненного потока последовательно передается вихрям все более мелких масштабов. В конечном итоге образуются вихри минимального масштаба, которые далее не разрушаются. При этом размер самых малых вихрей (турбулентных образований) определяется вязкостью среды. В таких вихрях кинетическая энергия турбулентности за счет сил вязкого трения превращается в тепло, т. е. происходит диссипация энергии. Это указывает на необратимый характер процесса.

Из сказанного выше ясно, что турбулентное течение по своей физической природе является движением неустановившимся, но, с другой стороны, непосредственные измерения свидетельствуют, что при турбулентном движении в потоке можно выделить основную, так называемую регулярную часть, на которую накладывается случайная часть течения.

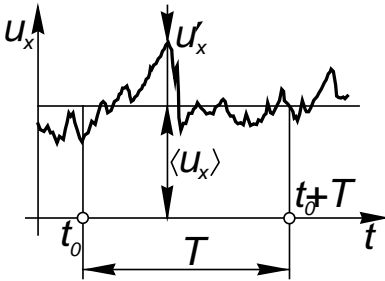


Рис. 5.1

при этом действительная (актуальная) мгновенная скорость может быть представлена, как

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x,$$

где \bar{u}_x — осредненная скорость, представляющая регулярную часть;

u'_x — пульсационная скорость или, короче, — пульсация, т. е. разность между мгновенным и осредненным значением скорости.

На рис. 5.1 показан типичный вид экспериментально полученной зависимости от времени проекции скорости на ось X в некоторой точке турбулентного потока при сохраняющихся неизменными граничных условиях.

Как следует из графика, особенностью этого процесса является его непериодичность,

Если предположить, что для рассматриваемого турбулентного движения существует такой, достаточно большой по сравнению с периодом пульсаций, но малый по сравнению с характерным для осредненного турбулентного движения интервалом времени (периодом колебательного процесса, временем прохождения течением определенной длины и т. д.) постоянный период осреднения T , то

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t, x, y, z) dt.$$

Причем для квазистационарных течений выбор величины T должен быть осуществлен таким образом, чтобы повторное осреднение не изменяло бы уже осредненную величину, т. е.

$$\overline{\overline{u}} = \overline{u},$$

что означает

$$\overline{\overline{u}}_x = \overline{u}_x + \overline{u}'_x,$$

и, следовательно,

$$\overline{u}'_x = 0.$$

Наиболее важной характеристикой течения при его расчете является поле скоростей. Но, как показано выше, в любой точке потока при турбулентном течении скорость выступает как случайная величина, что исключает возможность чисто теоретического расчета турбулентного течения в настоящее время. Именно это приводит к необходимости перехода к осредненному описанию, использующему не действительные мгновенные, а осредненные величины скоростей и давлений. Осреднение скоростей и давлений производится путем интегрирования функций $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ по промежутку времени T . Это время иногда определяется как частное от деления характерного масштаба на скорость турбулентных

пульсаций. Под масштабом турбулентных пульсаций понимают расстояние, на котором пульсации претерпевают заметное изменение. Так, например, при турбулентном движении в трубах наибольший масштаб пульсаций равен диаметру трубы. Аналогичное вышеприведенной формуле определение можно записать и для осредненного давления.

Очевидно также, что

$$\overline{u_x'^2} \neq 0, \quad \overline{u_y'^2} \neq 0, \quad \overline{u_z'^2} \neq 0.$$

Эти величины используются для характеристики интенсивности турбулентности.

Фундаментальное значение при этом имеет то обстоятельство, что пульсационное движение со скоростями u'_x , u'_y , u'_z влияет на осредненное движение таким образом, что в осредненном движении увеличивается сопротивление возникновению деформаций. Иначе говоря, действие пульсационного движения проявится в кажущемся увеличении вязкости или в появлении дополнительной *турбулентной* вязкости, величина которой определяется не свойствами жидкости, а взаимодействием пульсаций скорости.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим, например, изменение импульса вдоль оси x для участка контрольной поверхности, перпендикулярного к этой оси. За промежуток времени dt через единицу площади этой поверхности проходит масса $\rho u dt$, которая переносит с собой количество движения $\rho u^2 dt$. При этом величина u представляет проекцию на ось x мгновенной (актуальной) скорости турбулентного течения:

$$u = \bar{u} + u'.$$

Среднее по времени за интервал T значение потока импульса можно получить, используя вышеприведенную формулу для осредненных значений. При этом очевидно, что

$$u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + \overline{u'^2}.$$

Осреднив это выражение с использованием приведенных ранее правил, для потока импульса в направлении оси x через единичную

площадку в единицу времени, равного (в соответствии с теоремой импульсов) напряжению в направлении оси x , получим

$$-\rho \overline{u^2} = -\rho (\overline{u^2} + \overline{u'^2}).$$

Таким образом, пульсационное движение вызывает появление дополнительного нормального напряжения, обусловленного средним значением количеств движения пульсаций скорости u' .

Рассмотрим теперь составляющую количества движения снова вдоль оси x , но для участка контрольной поверхности, перпендикулярного к оси y . За время dt через единицу площади проходит масса $\rho v dt$ (v – компонента мгновенной скорости в направлении оси y). Поскольку мы вычисляем составляющую импульса вдоль оси x , то количество движения, переносимое этой массой, равно $\rho v u dt$. Среднее по времени значение этой составляющей потока импульса будет $\rho \overline{uv}$. Для его вычисления нужно осреднить произведение мгновенных скоростей:

$$uv = (\overline{u} + u')(\overline{v} + v') = \overline{u}\overline{v} + \overline{u}v' + u'\overline{v} + u'v'.$$

Учитывая приведенные выше правила, получим для потока импульса в единицу времени через единичную площадку выражение

$$\overline{\rho uv} = \rho \overline{u}\overline{v} + \rho \overline{u'v'}.$$

Взятое со знаком «минус» оно представляет собой касательное напряжение в направлении оси x , действующее на площадку, перпендикулярную оси y . Так же, как в случае нормальных напряжений, вследствие наложения пульсационного движения возникает дополнительное касательное напряжение, обусловленное средним от количеств движения пульсаций, $\rho \overline{u'v'}$.

Аналогичные дополнительные напряжения получаются и на площадках, перпендикулярных другим координатным осям. Совокупность всех девяти дополнительных напряжений составляет тензор турбулентного трения, а сами дополнительные напряжения называются *турбулентными напряжениями Рейнольдса*.

6. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ОСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

Как уже отмечалось, сложность турбулентного движения делает невозможным строгое математическое рассмотрение течений при заданных граничных условиях. Одной из возможных альтернатив является переход от истинной картины, детали которой нам неизвестны, к рассмотрению осредненного турбулентного течения, т. е., по существу, замена принципиально неустановившегося движения квазистационарным. Переход, предложенный в свое время О. Рейнольдсом, состоит в том, что в уравнениях движения вязкой жидкости и уравнении неразрывности истинные значения параметров заменяются их осредненными значениями:

$$u = \bar{u} + u';$$

$$v = \bar{v} + v';$$

$$w = \bar{w} + w',$$

где u , v , w – действительные (актуальные) мгновенные скорости потока в данной точке;

\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} – осредненные во времени скорости;

u' , v' , w' – отклонения действительных скоростей от осредненных или *пульсации* скоростей.

Представление об операции осреднения изложено ранее, здесь отметим лишь некоторые свойства этого преобразования.

Если в результате проведенного в данной точке в разные моменты времени осреднения какой-либо характеризующей течение функции получаются те же значения осредненной функции, то такое осредненное течение называется стационарным, а само турбулентное движение – *квазистационарным*:

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi'} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi}, \quad \overline{\overline{\varphi'}} = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\overline{\varphi}} = 0.$$

В дальнейшем будем иметь дело исключительно с квазистационарными турбулентными движениями и осредненное значение $\bar{\varphi}$ будет функцией только координат. При этом если ψ является еще одной пульсирующей функцией времени и координат, то очевидно, что

$$\overline{\overline{\varphi\psi}} = \overline{\varphi}\overline{\psi}.$$

Из определения операции осреднения следует также, что среднее значение производной от некоторой функции по координате равно производной от среднего значения этой функции:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Этим свойством обладает и производная по времени

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}.$$

Используя указанные свойства операции осреднения, можно получить дифференциальные уравнения осредненного движения несжимаемой вязкой жидкости. Возьмем для примера уравнение движения Навье–Стокса лишь для одной проекции скорости (на ось x) и уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и, пользуясь последним из них, перепишем первое в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u.$$

Произведем над обеими частями этого уравнения операцию осреднения, учитывая ее свойства и то, что $\rho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, в результате получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}.$$

Отдельно рассмотрим входящие в уравнение средние значения от произведений проекций скоростей:

$$\overline{uu} = (\bar{u} + u')(\bar{u} + u') = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + \overline{u'^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2};$$

$$\overline{uv} = (\bar{u} + u')(\bar{v} + v') = \bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + \bar{u}'\bar{v} + \overline{u'v'} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'};$$

$$\overline{uw} = (\bar{u} + u')(\bar{w} + w') = \bar{u}\bar{w} + \bar{u}w' + \bar{u}'\bar{w} + \overline{u'w'} = \bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}.$$

После произведенных преобразований уравнение осредненного движения может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\ & + \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Заметим, что осреднение уравнения неразрывности дает

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

С использованием этого осредненного уравнения неразрывности уравнение осредненного движения можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\ + \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Проделав те же операции с двумя другими уравнениями Навье–Стокса, для проекций скорости можно получить еще два дифференциальных уравнения осредненного движения. Совместно с осредненным уравнением неразрывности они образуют систему **уравнений Рейнольдса** для осредненных скоростей и давления в турбулентных течениях.

Сопоставив эти уравнения с общими уравнениями в напряжениях

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z},$$

можем представить себе правые части системы осредненных уравнений как результат подстановки на место p_{xx} , p_{yx} и т. д. суммы вязких напряжений, определенных обобщенным законом Ньютона, и дополнительных турбулентных напряжений, возникающих за счет наличия в потоке пульсаций:

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + p'_{xx};$$

$$p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + p'_{yx} \text{ и т. д.,}$$

причем эти дополнительные турбулентные напряжения, получившие название **рейнольдсовых**, образуют, так же как вязкие напряжения, симметричный тензор второго ранга:

$$\begin{pmatrix} -\overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho u'w'} \\ -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho v'w'} \\ -\overline{\rho w'u'} & -\overline{\rho w'v'} & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в осредненном турбулентном потоке к обычным вязким напряжениям добавляются напряжения, зависящие от пульсаций скорости. Физически это объясняется тем, что между разными участками турбулентного потока происходит обмен количеством движения, обусловленный перемешиванием частиц. Перенос количества движения вызывает дополнительное торможение либо ускорение отдельных масс жидкости, т. е. приводит к возникновению турбулентных напряжений.

Поскольку исходная система уравнений Навье–Стокса являлась замкнутой (четыре уравнения и четыре неизвестных u, v, w, p), то появление дополнительных членов в уравнениях Рейнольдса приводит к тому, что она превращается в незамкнутую. Возникает новая проблема «замыкания системы уравнений Рейнольдса», т. е. необходимы дополнительные предположения о связи турбулентных напряжений с другими характеристиками потока.

Представим, что турбулентные напряжения подчинены закону, аналогичному обобщенному закону Ньютона, тогда, например, в случае плоского прямолинейного и параллельного оси x осредненного течения со скоростью \bar{u} , являющейся функцией только от y , получим

$$p_{xy} = -\overline{\rho u'v'} = A \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Величину A можно рассматривать как коэффициент эффективной **турбулентной** вязкости, обусловленной не микропереносом молекул, а возникающим между соседними слоями осредненного движения макропереносом (пульсационным) количества движения конечных объемов жидкости. Если в частном случае движения в плоской трубе предположить, что A – постоянная величина, рассчитать и измерить сопротивление трубы аналогично тому, как это было сделано при ламинарном режиме течения, то полученные величины A окажутся в десятки тысяч раз превосходящими величину коэффициента молекулярной динамической вязкости μ . Вместе с тем измерения показывают, что величина A в отличие от μ не является постоянной, зависящей от рода жидкости или ее турбулентного течения. Величина A сильно изменяется поперек сечения трубы от малых значений у стенки трубы до некоторого максимума примерно на расстоянии полурадуса от стенки и затем вновь убывает до оси трубы.

7. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Современная теория турбулентности не располагает возможностями теоретическим путем получить уравнения для определения напряжений Рейнольдса. Поэтому достаточно эффективным способом, позволяющим замкнуть систему уравнений движения, является привлечение полуэмпирических соотношений, связывающих эти напряжения с осредненными по времени компонентами скорости \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} .

Одна из первых таких эмпирических гипотез была выдвинута Ж. Буссинеском, который предложил выражать турбулентные напряжения трения аналогично закону трения Ньютона, т. е.

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy},$$

где η – коэффициент турбулентной вязкости или турбулентного обмена.

В отличие от молекулярной турбулентная вязкость характеризует не физические свойства жидкости, а зависит от распределения осредненной скорости и статистических свойств пульсационного движения. Поэтому она не является физической константой, подобно динамическому коэффициенту вязкости μ , а может изменяться как в пространстве, так и во времени. Важно также отметить (как это было сделано в предыдущем разделе), что даже на небольших удалениях от твердых границ турбулентная вязкость существенно превосходит молекулярную ($\eta \gg \mu$).

В целом (с учетом вклада в трение молекулярной вязкости) для турбулентного потока можно записать

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \eta \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Однако представление Буссинеска не приводит к решению задачи ввиду того, что, к сожалению, на сегодняшний день отсутствуют

прямые методы определения турбулентной вязкости. Таким образом, чтобы использовать путь, указанный Буссинеском, необходимо попытаться найти связь между коэффициентом турбулентной вязкости и полем осредненных скоростей.

Первый заметный успех в этом направлении был достигнут в 1925 г. Л. Прандтлем, который предложил ввести понятие так называемого *пути перемешивания (смешения)*. В соответствии с гипотезой Прандтля, каждый турбулентный моль (вихрь) жидкости переносит некоторое количество движения, которое сохраняется постоянным на длине пути перемешивания. Другими словами, длина пути перемешивания в некоторой степени аналогична длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов, и определяет путь, который проходит моль жидкости, прежде чем он перемешивается с другими жидкими образованиями и передаст свой импульс. Такого рода перемешивание – его называют *турбулентным перемешиванием* – сопровождается переносом сквозь границу между слоями жидкости импульса, энергии, тепла, различных примесей и т. д. При этом перенос импульса обуславливает трение между слоями, перенос тепла – турбулентную теплопроводность, перенос примесей – турбулентную диффузию. Механизм этого турбулентного перемешивания (переноса) одинаков для любой субстанции.

Для того, чтобы показать, как вводится в расчет длина пути перемешивания l , рассмотрим турбулентный поток, движущийся вдоль стенки. Скорость жидкости изменяется поперек потока по эпюре, изображенной на рис. 7.1. Пусть некоторая масса жидкости из слоя, находящегося на расстоянии y от стенки, перемещается перпендикулярно осредненной скорости в слой жидкости, расположенный на расстоянии $y + l$ от стенки. Если предположить, что при перемещении эта масса жидкости сохранила ту же скорость $\bar{u}(y)$, то при переходе в вышерасположенный слой ее скорость будет отличаться на величину

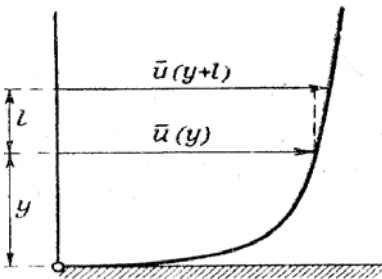


Рис. 7.1

$$\bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) \cong \bar{u}(y) + l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{u}(y) \cong l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

$$u' \approx l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Эту величину можно рассматривать как величину, пропорциональную пульсации скорости u' , поскольку именно она является физическим условием возникновения пульсаций. Что касается пульсационной скорости v' , то можно представить, что жидкие частицы, попадающие в рассматриваемый слой сверху и снизу (с разных сторон), будут двигаться в нем либо сближаясь, либо удаляясь друг от друга с относительной скоростью $2l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Это дает

основание полагать, что пульсационная скорость v' также должна иметь величину порядка

$$v' \approx l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Таким образом, дополнительное турбулентное напряжение выражается формулой, получившей название формулы Прандтля:

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

где l – длина пути перемешивания.

Обозначив

$$\eta = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|,$$

можно переписать полученное соотношение в форме

$$\tau_t = \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

по своей структуре формально совпадающей с формулой Ньютона для вязкого напряжения:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

При этом величина η также имеет размерность динамического коэффициента вязкости, однако численное значение η в турбулентных потоках превышает соответствующую величину μ в десятки, а иногда – в сотни тысяч раз. Величину η называют обычно **турбулентной вязкостью**, и она отличается от молекулярной вязкости еще и тем, что изменяется при переходе от одной точки потока к другой.

Может показаться, что формула Прандтля не имеет каких-либо существенных преимуществ по сравнению с формулой Буссинеска, поскольку единственным очевидным результатом является замена одной, не поддающейся вычислению величины η , другой – l . Однако это не так, поскольку величину l оценить проще, чем η . Для ее оценки существуют общие соображения, в частности, l не может быть больше размера канала и должна стремиться к нулю вблизи твердой стенки (поперечное движение у стенки невозможно). Длина пути перемешивания в разных местах турбулентного потока, вообще говоря, неодинакова. Вычислить эту длину без каких-либо дополнительных предположений невозможно, но в отдельных случаях для нее можно найти приближенную оценку, дающую неплохие практические результаты.

Количественная закономерность для пути перемешивания в турбулентном движении около твердой стенки позднее была установлена Г. Карманом с использованием принципа подобия пульсационных скоростей:

$$l = \chi \frac{\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}{\left| \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right|},$$

где χ – эмпирическая безразмерная постоянная.

Согласно предложенной Карманом формуле длина пути перемешивания зависит не от модуля скорости, а от распределения скоростей. Постоянная χ может быть определена только из опыта и представляет собой универсальную константу, одинаковую для всех турбулентных течений. Для турбулентного касательного напряжения при этом справедливо соотношение

$$\tau_T = \rho \chi^2 \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2}.$$

8. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

Расчет турбулентного течения в трубах относится к широко распространенным инженерным задачам. Одним из важных элементов расчета является нахождение закона распределения осредненных скоростей в поперечном сечении безграничной плоской трубы.

По Прандтлю, поток вблизи стенки при турбулентном течении условно разбивается на две области (двухслойная модель Прандтля): турбулентное ядро, в котором определяющими являются турбулентные напряжения Рейнольдса, и тонкий вязкий подслой (ламинарный либо пристенный подслой), непосредственно прилегающий к стенке, в котором влияние турбулентности, наоборот, мало, а касательные напряжения обусловлены молекулярной вязкостью в соответствии с законом трения Ньютона.

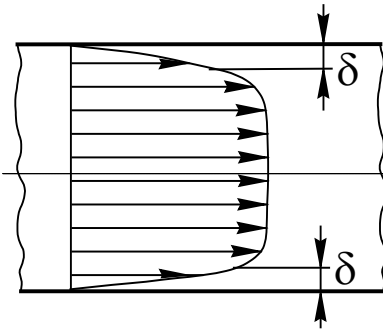


Рис. 8.1

На рис. 8.1 приведен примерный вид поля осредненных скоростей (эпюра скорости) при турбулентном течении в трубопроводе. Следует обратить внимание на большую заполненность эпюры (большую равномерность) по сравнению с соответствующим профилем для ламинарного течения. Это

объясняется тем, что вследствие интенсивного перемешивания частиц жидкости за счет турбулентных пульсаций происходит обмен количеством движения между слоями и, как следствие, более равномерное распределение скоростей в поперечном сечении.

В непосредственной близости от стенки в пределах пристенного подслоя решающее влияние на течение оказывают жесткость стенки, ее непроницаемость и свойство прилипания частиц жидкости. На самой стенке справедливы условия:

$$u = v = w = 0;$$

$$u' = v' = w' = 0;$$

$$\rho \overline{u'v'} = 0.$$

Таким образом, для области в пределах вязкого подслоя можно записать

$$\tau = \tau_w = \mu \frac{du}{dy},$$

где τ_w – касательное напряжение на стенке (отбрасываем черточки, обозначающие осреднение (здесь и в дальнейшем)). Заметим, что в этом случае напряжение трения между любыми слоями в осредненном движении постоянно и равно напряжению трения на стенке.

Интегрирование этого выражения дает линейный профиль скоростей у стенки:

$$\mu \cdot u = y\tau_w + C.$$

Учитывая, что при $y = 0$ $u = 0$, получим $C = 0$. Следовательно:

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y.$$

Имея в виду, что

$$\mu = \nu\rho,$$

после подстановки получаем

$$u = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu}. \quad (8.1)$$

Величина $\frac{\tau_w}{\rho}$ имеет размерность квадрата скорости, хотя по своей природе состоит из динамических величин: напряжения и плотности. По этой причине корень квадратный из нее, т. е.

$$\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = v_* ,$$

называют динамической скоростью либо скоростью трения. Подставляя выражение для динамической скорости в формулу (8.1), получим

$$u = v_*^2 \frac{y}{\nu} \quad \text{или} \quad \frac{u}{v_*} = \frac{y v_*}{\nu} .$$

На границе ламинарного подслоя $y = \delta$, т. е.

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* \delta}{\nu} .$$

В правой части стоит безразмерное выражение, аналогичное числу Рейнольдса, построенному по динамической скорости и толщине подслоя. Тщательные опыты И. Никурадзе показали, что эта величина приблизительно равна 11,5; тогда для оценки толщины ламинарного подслоя получается выражение

$$\delta = 11,5 \frac{\nu}{v_*} .$$

Очевидно, что этим соотношением можно воспользоваться лишь в случае, когда известна динамическая скорость.

Перейдем теперь к установлению закона распределения осредненных скоростей в турбулентном ядре потока. В этой области определяющую роль играют турбулентные касательные напряжения, и, следовательно, можно воспользоваться формулой Прандтля с использованием длины пути смешения:

$$\tau' = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 .$$

Замечая, что расстояние у данной точки потока от поверхности есть единственная характерная для потока длина, Прандтль положил путь смешения пропорциональным у, т. е.

$$l = ky,$$

где коэффициент пропорциональности k представляет собой некоторую постоянную, численное значение которой определяется из опыта (выполненные измерения показывают, что $k \approx 0,4$).

Для дальнейшего необходимо также сделать предположение о распределении турбулентных касательных напряжений в рассматриваемой области течения. Вообще говоря, они являются величинами переменными, однако в области, расположенной достаточно близко к стенке, величины касательных напряжений изменяются незначительно, и можно полагать их постоянными и равными касательному напряжению на стенке, т. е. $\tau' = \tau_w$.

При этих допущениях формула Прандтля принимает вид

$$\tau_w = \rho k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

или, с введением динамической скорости:

$$v_*^2 = k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Преобразуя полученное выражение и разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение

$$du = \frac{v_*}{k} \frac{dy}{y}$$

и после интегрирования:

$$u = \frac{v_*}{k} \ln y + C.$$

Таким образом, *линейный профиль скоростей при ламинарном движении в подслое трансформируется в логарифмический для турбулентного движения в ядре потока*. При определении постоянной интегрирования C нельзя использовать граничное условие на стенке, поскольку в непосредственной близости от нее полученное уравнение несправедливо, а там имеет место линейный профиль скорости. Единственной возможностью определения этой постоянной является сращивание полученного решения с линейным.

На границе ламинарного подслоя (со стороны турбулентного ядра) имеем

$$u_{\text{л}} = \frac{v_*}{k} \ln \delta_{\text{л}} + C,$$

где $\delta_{\text{л}}$ – толщина подслоя;

$u_{\text{л}}$ – скорость на его границе. С другой стороны, из линейности профиля вблизи стенки следует, что

$$u_{\text{л}} = \alpha v_*,$$

где $\alpha = \frac{v_* \delta}{v}$ – постоянная, характеризующая число Re , построенное по толщине подслоя и динамической скорости (измерена в опытах И. Никурадзе и составляет $\alpha \approx 11,5$).

Отсюда величина постоянной C определится как

$$C = \alpha v_* - \frac{v_*}{k} \ln \left(\frac{\alpha v}{v_*} \right) = v_* \left(\alpha - \frac{1}{k} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{k} \ln \frac{v}{v_*}.$$

Подставляя это значение в формулу для профиля скорости, получим

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y v_*}{v} + \alpha - \frac{1}{k} \ln \alpha.$$

Переходя от натуральных логарифмов к десятичным и подставив численные значения постоянных $\alpha \approx 11,5$ и $k \approx 0,4$, получим универсальный закон распределения скоростей вблизи твердой стенки при турбулентном режиме течения:

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \log \frac{yu_*}{\nu} + 5,5.$$

Принципиальное значение имеет тот факт, что логарифмическая формула сохраняет свою форму для всех чисел Re , или, как принято говорить, универсальна. Структура ее такова, что влияние числа Рейнольдса, т. е. вязкости, полностью входит в масштабы длин

$l_* = \frac{\nu}{u_*}$ и скоростей $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$; это и делает формулу универсальной.

Поэтому вышеуказанные масштабы принято называть универсальными. Строго говоря, полученное соотношение выводится для плоских труб, но опыт показывает, что оно оказывается справедливым и для круглых труб, что подтверждает экспериментально установленный факт о независимости распределения скорости от причин, обуславливающих возникновение касательных напряжений (вязкости, шероховатости). Константы k и α представляют две основные эмпирические постоянные, характеризующие турбулентное движение. Применяя вышеуказанный закон распределения скоростей к оси трубы, где $u = u_{\max}$, а $y = R$, и произведя почленное вычитание полученных соотношений, придем к выражению для профиля скоростей:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 5,75 \log \frac{R}{y}.$$

Таким образом, проведенный упрощенный теоретический анализ позволяет выявить основные закономерности распределения скоростей при турбулентном движении в круглой трубе.

Использование двухслойной модели, т. е. разделение потока на турбулентное ядро и пристенный ламинарный подслой, приводит к

специфической классификации стенок труб. Если толщина пристенного подслоя больше выступов шероховатости, трубы называют *гидравлически гладкими*, в противном случае – *шероховатыми*.

Заметим, что гипотеза о пропорциональности пути смешения расстоянию от стенки не вполне согласуется с данными опытов. На рис. 8.2 приведены зависимости, характеризующие распределение длины пути перемешивания в поперечном сечении круглой трубы по данным опытов И. Никурадзе (кружки) и по формулам, предложенным другими авторами. В соответствии с результатами экспериментов, значение l достигает максимума на оси трубы. Из графика следует, что гипотеза Прандтля (прямая 1) не согласуется с опытными данными в области потока вблизи оси трубы.

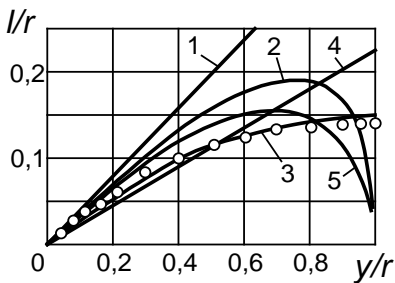


Рис. 8.2

Также существенно отличаются от опытных результатов выражения для длины пути смешения, предложенные другими авторами: Т. Карманом (кривая 2), Конаковым (кривая 4), Саткевичем (кривая 5). Достаточно близка к экспериментальным данным зависимость Альтшуля (кривая 3), описывающая длину пути перемешивания формулой

$$l = k_1 \left[\frac{2y}{R} - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right].$$

Очевидно одно – подход Прандтля, дающий возможность получить логарифмический профиль скоростей в турбулентном ядре, справедлив в не слишком удаленной от стенки области потока. Следует иметь в виду также несоответствие экспериментальным данным теоретических представлений о ламинарном подслое как об области, в которой отсутствуют пульсации. Пульсации скорости, и в особенности давления, проникают и в этот слой, но подчиняются там своим закономерностям. Не вполне обосновано и предположение о том, что в ядре потока физическая (молекулярная) вязкость не

играет никакой роли. В то же время, предлагая формулы для распределения скоростей и толщины ламинарного подслоя, полуэмпирические теории дают возможность получить соотношения для расчетов сопротивления труб турбулентному движению жидкости, т. е. определяют связь между коэффициентом сопротивления λ и числом Рейнольдса

$Re = \frac{u_{cp} d}{\nu}$, рассчитанным по среднерасходной скорости, диаметру трубы и кинематическому коэффициенту вязкости жидкости. В частности, с использованием логарифмического профиля скоростей была получена универсальная формула сопротивления, справедливая в весьма широком диапазоне чисел Re :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8,$$

численные значения коэффициентов в которой были уточнены по результатам многих опытов (λ – коэффициент гидравлического сопротивления, определение которого приведено в следующем разделе).

Наряду с выведенными полуэмпирическими соотношениями: логарифмическим профилем скоростей и логарифмической формулой сопротивления, большую роль продолжают играть чисто эмпирические *степенные* профили скоростей и формул сопротивления. К числу последних относится формула Блазиуса, которая представляет собой частный случай общей степенной формулы сопротивления

$$\lambda = \frac{C}{Re^m} :$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}},$$

применимость которой, как показывают результаты экспериментов, ограничена значениями $Re < 10^5$ (т. е. областью так называемого гладкостенного течения – без проявления шероховатости поверхности).

Как показывают опыты, с возрастанием критерия Рейнольдса показатель степени m и коэффициент C в формуле сопротивления

меняются, причем m – убывает. Пользуясь экспериментальной формулой Блазиуса, Карман из соображений размерности показал, что этому закону сопротивления соответствует степенной профиль скоростей:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/7},$$

получивший в дальнейшем наименование закона *одной седьмой*.

Точно так же общей степенной формуле сопротивления соответствует степенной же закон распределения скоростей:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^n,$$

причем можно установить связь между показателями степени m и n :

$$m = \frac{2n}{n+1}.$$

Как уже отмечалось, с возрастанием Re численные значения показателя степени уменьшаются. В частности, хорошо согласуются с опытом зависимости

$$\frac{u}{u_*} = 8,74 \left(\frac{yu_*}{\nu} \right)^{1/7} \quad \text{при} \quad 40 \leq \frac{yu_*}{\nu} \leq 700,$$

$$\frac{u}{u_*} = 9,60 \left(\frac{yu_*}{\nu} \right)^{1/8} \quad \text{при} \quad 80 \leq \frac{yu_*}{\nu} \leq 1100.$$

9. ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ (НАПОРА) ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ

Напомним, что рассмотрение закономерностей как ламинарного, так и турбулентного течения в трубах помимо познавательных имеет цели сугубо практические: получить соотношения, определяющие законы сопротивления в трубопроводных сетях и создающие возможность выполнения инженерных гидравлических расчетов. Для ламинарного течения эта задача решается с помощью формулы Хагена–Пуазейля. Из рассмотрения особенностей турбулентного течения становится ясным, что вследствие его чрезвычайной сложности получение аналогичного соотношения чисто теоретическим путем в настоящее время невозможно.

Как было показано, выражение для турбулентных касательных напряжений (напряжений Рейнольдса) имеет вид

$$\tau = \rho \overline{u'v'}.$$

Из соображений размерности можно утверждать, что существует связь между средней скоростью и касательным напряжением на стенке трубы вида

$$\tau_w = k\rho V^2,$$

где k – коэффициент пропорциональности;
 V – среднерасходная (средняя) скорость.

Аналогичная зависимость имеет место в определении так называемого коэффициента трения $C_f = \frac{\tau}{\rho V^2 / 2}$, причем в принятых

обозначениях $C_f = 2k$.

С другой стороны, из условия динамического равновесия движущегося под действием постоянного перепада давления Δp жидкого цилиндра длиной l в трубе диаметром d

$$\Delta p = 4 \frac{l}{d} \tau_w,$$

и после подстановки в это выражение связи напряжения трения на стенке со средней скоростью, получим

$$\Delta p = 4k \frac{l}{d} \rho V^2$$

или

$$\Delta p = 8k \frac{l}{d} \frac{\rho V^2}{2}.$$

В такой форме записи выражение $\frac{\rho V^2}{2}$ имеет четкий физический смысл. Это так называемое динамическое давление потока, обусловленное средней скоростью, или кинетическая энергия потока, заключенная в единице объема.

Обозначим величину $8k = \lambda$ (соответственно получим, что $\lambda = 4C_f$) и назовем ее коэффициентом гидравлического сопротивления, тогда

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho V^2}{2}$$

(причем из условия динамического равновесия $\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho V^2$), либо, используя определение напора, для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Полученное соотношение носит название формулы Дарси–Вейсбаха и является, по существу, определением коэффициента гидравлического сопротивления λ .

Ранее отмечалось, что если в преобразованной формуле Хагена–Пуазейля обозначить величину $\frac{64}{\text{Re}}$ буквой λ , то получается формула Дарси–Вейсбаха. В этом смысле формула Дарси–Вейсбаха может быть признана универсальной, т. е. пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Закон сопротивления для турбулентного течения, полученный с помощью полуэмпирических теорий, использующий логарифмический профиль скоростей в турбулентном ядре потока и хорошо подтвержденный экспериментально, был приведен в предыдущем разделе.

Зависимость

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

дает искомую связь $\lambda = \lambda(\text{Re})$ в неявном виде, неудобном для использования. И. Никурадзе предложил пользоваться следующей степенной зависимостью:

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}},$$

графически представленной на рис. 9.1 и обеспечивающей хорошее совпадение с экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Re . Также на рис. 9.1 приведена для сравнения зависимость

$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}$, соответствующая широко используемой в гидравлике

формуле Блазиуса. Отметим, что все кривые на рисунке построены в логарифмических координатах, т. е. в виде

$$\lg(1000\lambda) = f(\lg \text{Re}).$$

Таким образом, криволинейные степенные зависимости в этих координатах представляются прямыми, причем в левом нижнем углу пунктиром показана прямая, соответствующая закону сопротивления $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ при ламинарном движении.

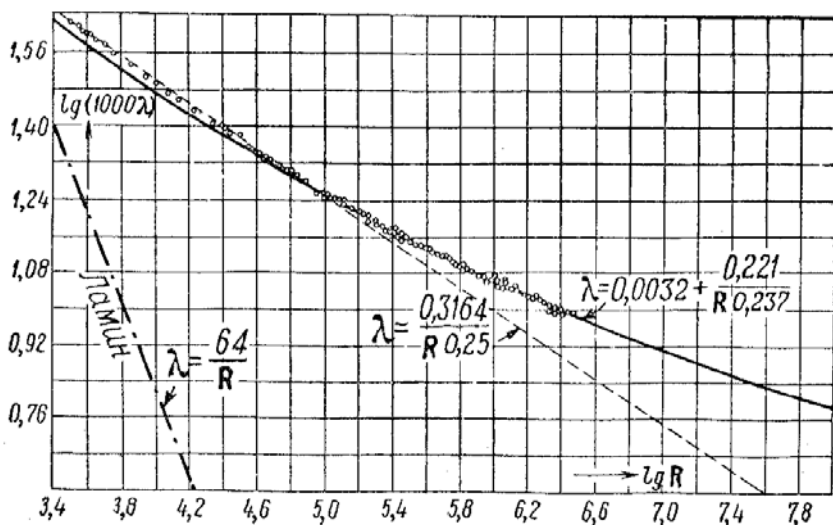


Рис. 9.1

Результаты, представленные выше, относились в основном к движению в *гладкой* трубе со строго цилиндрической поверхностью. На практике приходится иметь дело с более или менее шероховатыми трубами и с неточной цилиндричностью внутренней поверхности – волнистостью.

Несколько идеализируя и обобщая понятие шероховатости, представим себе, что внутренняя поверхность трубы покрыта бугорками, имеющими вид зерен примерно одинакового размера. Условимся среднюю высоту бугорков шероховатости называть *абсолютной* шероховатостью, а отношение высоты бугорка к радиусу (или диаметру) трубы – *относительной* шероховатостью. В дальнейшем предполагается, что относительная шероховатость сравнительно невелика (не превышает 3–4 %).

Рассмотрение типичных для труб с зернистой шероховатостью экспериментальных данных, полученных И. Никурадзе в опытах с искусственной песочной шероховатостью и показанных на рис. 9.2, дает возможность сделать определенные выводы, а именно:

- относительная шероховатость не влияет на критическое число $Re_{кр}$ перехода ламинарного режима в турбулентный; для различных относительных шероховатостей кривые сопротивления сходят с уже

известной нам прямой для ламинарного режима $\lambda = 64/Re$ при одном и том значении Re ;

- переходный режим также почти не зависит от относительной шероховатости;

- чем меньше относительная шероховатость, тем в большем диапазоне чисел Рейнольдса наблюдается обычное турбулентное движение, соответствующее гладким трубам (зависимость Блазиуса);

- с возрастанием Re всегда наступает режим течения (при любой шероховатости), когда коэффициент сопротивления перестает зависеть от Re ; причем чем меньше относительная шероховатость, тем при больших значениях числа Рейнольдса это происходит. При этом численные значения коэффициента сопротивления растут вместе с шероховатостью.

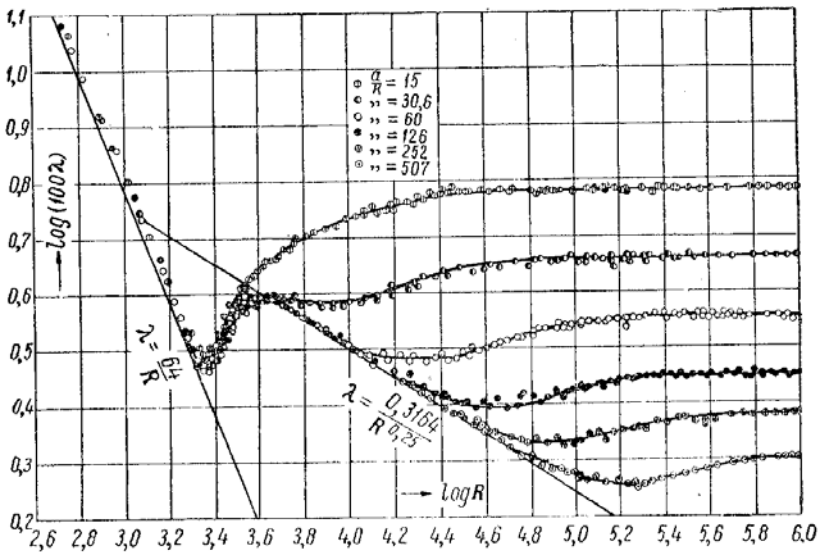


Рис. 9.2

Этим основным результатам можно дать наглядное теоретическое и истолкование, если сопоставить высоту бугорков шероховатости с толщиной ламинарного подслоя δ_n . Рассмотрим три случая.

Первый предельный режим: бугорки шероховатости погружены в ламинарный подслой, наличие этих бугорков не нарушает его ламинарности, обтекание их происходит без отрывов и вихреобразований. В этом случае с точки зрения гидравлического сопротивления нет разницы между гладкой и шероховатой трубами. **Шероховатая труба является гидродинамически гладкой.** Эксперименты показывают, что высота зерен Δ , образующих шероховатость, при этом удовлетворяет соотношению

$$0 \leq \frac{\Delta \cdot v_*}{\nu} \leq 5,$$

где $v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ – динамическая скорость;

ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Коэффициент сопротивления

$$\lambda = \lambda(\text{Re}).$$

Второй предельный режим: бугорки шероховатости выходят за пределы ламинарного подслоя. Отрывное обтекание бугорков приводит к повышению сопротивления поверхности трубы из-за сопротивления их как плохо обтекаемых тел. Как известно, это сопротивление не зависит от Re и пропорционально квадрату скорости набегающего потока. Этот режим можно назвать **режимом развитой шероховатости (квадратичным режимом сопротивления)**. При этом размеры зерен шероховатости Δ соответствуют величинам, определяемым как

$$\frac{\Delta \cdot v_*}{\nu} \geq 70,$$

а коэффициент сопротивления

$$\lambda = \lambda(\Delta/d).$$

Промежуточный режим: когда высота бугорков шероховатости имеет примерно ту же величину, что и толщина ламинарного подслоя (шероховатость и толщина ламинарного подслоя – величины одного порядка), при этом элементы шероховатости частично выступают из ламинарного подслоя. По отношению к этому режиму оба рассмотренных выше являются предельными. В этом случае гидравлическое сопротивление труб зависит и от числа Рейнольдса, и от шероховатости поверхности:

$$\lambda = \lambda(\Delta/d, Re),$$

а высота зерен шероховатости находится в диапазоне

$$5 \leq \frac{\Delta \cdot v_*}{\nu} \leq 70.$$

Таким образом, каждому значению числа Рейнольдса при течении в трубе соответствуют определенные границы относительной шероховатости, в которых можно пользоваться теми или другими формулами. В частности, для режима развитой шероховатости в рамках полуэмпирической теории с использованием логарифмического профиля скоростей можно получить закон сопротивления (формула Никурадзе):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{R}{\Delta} + 1,74,$$

где R – радиус трубы;

Δ – высота зерен шероховатости.

Наряду с приведенными формулами для определения коэффициента гидравлического сопротивления разными исследователями к настоящему времени получены иные полу- или эмпирические соотношения, в достаточной степени удовлетворяющие практике. Так, Альтшуль, рассматривая турбулентный поток в трубе как единое целое, т. е. не выделяя в нем ламинарный подслей, получил зависимость для закона сопротивления, справедливую для всех трех зон турбулентного режима:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,04 \lg \left(\frac{2,82}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{2,5d} \right).$$

Однако очевидно, что для практического использования эта формула неудобна, поскольку величина λ входит в неявном виде. Поэтому, используя некоторые допущения, Альтшуль предложил приближенную формулу, дающую достаточно точные результаты для всех трех турбулентных режимов:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

Если трубы достаточно гладкие и, следовательно, $\Delta/d \ll 68/\text{Re}$, то эта формула практически совпадет с эмпирической формулой Блазиуса для гладкостенного режима течения $\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}$.

В случае полного (развитого) режима шероховатости, а это обычно соответствует достаточно большим значениям числа Рейнольдса: $\Delta/d \gg 68/\text{Re}$, и формула Альтшуля переходит в эмпирическое соотношение Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}$$

для так называемой квадратичной зоны сопротивления.

Понятие средней высоты бугорков шероховатости Δ , которое мы использовали и которое фигурирует в приведенных формулах, недостаточно четко определено. Действительно очевидно, что на распределение скоростей около стенки и, следовательно, на гидравлическое сопротивление влияет не только средняя высота выступов, но и их форма и распределение вдоль обтекаемой поверхности. Поэтому на практике пользуются эквивалентной шероховатостью, под которой понимают такую высоту песчинок в опытах Никурадзе, которая создает сопротивление, равное (или эквивалентное) сопротивлению данного действительного трубопровода.

В заключение приведем наиболее удобные для практического использования расчетные формулы для коэффициента гидравлического сопротивления (законы сопротивления) во всех рассмотренных режимах течения в круглой трубе.

Режим течения	Границы зоны	Расчетные формулы
Ламинарный	$Re < 2300$	$\lambda = 64/Re$
Турбулентный, гладкостенный	$4 \cdot 10^3 < Re < 20 \frac{d}{\Delta}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$ $\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$
Турбулентный, промежуточный, с частичным проявлением шероховатости	$20 \frac{d}{\Delta} \leq Re \leq 500 \frac{d}{\Delta}$	$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$
Турбулентный, развитая шероховатость, квадратичный	$Re \geq 500 \frac{d}{\Delta}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{2\Delta} + 1,74$ $\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}$

Для промышленных труб с неравномерной шероховатостью в формулы, приведенные в таблице, следует подставлять значения эквивалентной шероховатости, которые можно найти в гидравлических справочниках с учетом технологии изготовления труб, материала стенок, времени их эксплуатации.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Одномерная модель течения вязкой несжимаемой жидкости.	3
2. Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости.	7
3. Режимы движения жидкости, их связь с гидравлическим сопротивлением.	13
4. Ламинарное течение в круглых трубах.	16
5. Основные особенности турбулентных течений.	21
6. Уравнения Рейнольдса для осредненного турбулентного движения.	26
7. Полуэмпирические соотношения в теории турбулентности.	32
8. Турбулентное течение вблизи твердой стенки.	37
9. Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах.	46

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
КУЛЕБЯКИН Виталий Васильевич
НЕДБАЛЬСКИЙ Викентий Константинович

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Часть 3

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка А.Г. Занкевич

Подписано в печать 23.03.2012.

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,54. Тираж 100. Заказ 1067.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013. Минск.