Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 3»

МАТЕМАТИКА

Программные вопросы, контрольные задания и методические указания для студентов-заочников строительных специальностей экономического профиля

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(075.4)
ББК 221я7
М 34

Составители:
Т.Н. Гурина, О.А. Мороз, Л.А. Яблонская

Рецензенты:
В.В. Веременюк, Т.С. Яцкевич

Издание содержит перечень программных вопросов по всем разделам курса математики. В данной работе приводятся тексты контрольных задач, соответствующих программе и методические указания по их выполнению. Издание предназначено для студентов-заочников первого и второго курсов строительных специальностей экономического профиля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Общий курс математики является фундаментом математического образования специалиста, в рамках которого проводится ориентирование на приложение математических методов в профессиональной деятельности.

Цель преподавания математики состоит в том, чтобы ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения как теоретических, так и практических задач; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных задач и умение сформулировать задачи по специальности на математическом языке.

Основным методом изучения курса математики для студентов заочной формы обучения является самостоятельная работа над учебниками и рекомендованной литературой. В процессе изучения студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на контрольные задания позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него проблемы, на желательное направление дальнейшей работы.

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного и зеленого. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. Решение задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях.

4. Перед решением каждой задачи надо полностью написать ее условие.

5. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

6. После полученной прорецензированной контрольной работы, как недопущенной, так и допущенной к собеседованию, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

ПРОГРАММА КУРСА

Раздел 1. Элементы линейной и векторной алгебры

1. Матрицы (основные понятия). Линейные операции над матрицами, их свойства.
2. Умножение матриц. Свойства умножения.
3. Определители 2-го и 3-го порядков. Понятие определителя n-го порядка.
4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам ряда.
5. Свойства определителей.
6. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы.
7. Системы линейных уравнений. Основные определения. Матричная запись.
8. Невырожденные системы. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
9. Ранг матрицы. Теорема об инвариантности ранга матрицы.
10. Теорема Конекера–Капелли. Решение произвольных систем.
11. Системы однородных линейных уравнений.
12. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
13. Базис и координаты вектора.
14. Прямоугольная система координат. Линейные операции над векторами в линейной форме.
15. Скалярное произведение векторов; его свойства.
16. Векторное произведение векторов; его свойства.
17. Смешанное произведение векторов; его свойства.
18. Необходимое и достаточное условия компланарности векторов.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
3. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
4. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.

5. Канонические и параметрические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

6. Сведение общего уравнения прямой в пространстве к каноническим уравнениям.

7. Способы задания прямой на плоскости:

а) прямая, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору;

б) общее уравнение;

в) уравнение в отрезках;

г) уравнение прямой с угловым коэффициентом;

д) уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении.

8. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между прямыми.

9. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.

10. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.

11. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

12. Эллипс (определение, каноническое уравнение, исследование формы).

13. Гипербола (определение, каноническое уравнение, исследование формы).

14. Парабола (определение, каноническое уравнение, исследование формы).

15. Исследование общего уравнения линии второго порядка в случае отсутствия члена с произведением текущих координат.

16. Поверхности второго порядка.

Раздел 3. Введение в математический анализ

1. Числовая последовательность и ее предел.

2. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

3. Предел функции при $x \to a$ и при $x \to \infty$. Односторонние пределы.

4. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Связь между ними.

5. Свойства бесконечно малых функций.

6. Теорема о разложении функции, имеющей предел, на постоянную и бесконечно малую функцию.

7. Теорема об единственности предела функции. Предел суммы, произведения и частного функций.

8. Первый замечательный предел.

9. Второй замечательный предел.

10. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

11. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых.

12. Непрерывность функции в точке. Действия над непрерывными функциями.

13. Классификация точек разрыва.

14. Односторонняя непрерывность. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная. Геометрический и механический смысл.

2. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.

3. Основные правила дифференцирования.

4. Производная сложной функции.

5. Производные основных и элементарных функций.

6. Производная функции, заданной неявно.

7. Производная функции, заданной параметрически.

8. Логарифмическое дифференцирование.

9. Производные высших порядков.

10. Дифференциал функции, его свойства, геометрический смысл.

11. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

12. Дифференциалы высших порядков.

13. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.

14. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ (правило Лопиталя).

15. Раскрытие неопределенностей других видов по правилу Лопиталя.

16. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма).

17. Достаточное условие возрастания (убывания) функции.

18. Достаточные условия существования экстремума.
19. Выпуклость, вогнутость графика функции; достаточные условия.
20. Точки перегиба графика функции; достаточные условия.
21. Асимптоты графика функции.
22. Общая схема исследования функции и построения графика.
23. Наименьшее и наибольшее значения непрерывной на отрезке функции.

Раздел 5. Функции нескольких переменных

1. Функции двух и трех переменных как функции точки.
2. Геометрическое изображение функции двух переменных с помощью поверхностей и линий уровня.
3. Предел функции. Непрерывность в точке и в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных; геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
5. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
6. Частные производные высших порядков.
7. Экстремум функции двух переменных. Необходимые условия экстремума.
8. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
9. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.
10. Условный экстремум функции двух переменных. Экономический смысл множителей Лагранжа.

Раздел 6. Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл.
2. Таблица основных интегралов.
3. Основные свойства неопределенного интеграла.
4. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
5. Метод интегрирования по частям.
6. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование иррациональных функций.
9. Интегрирование тригонометрических функций.

10. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$.

11. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Раздел 7. Определенный интеграл

1. Задачи геометрического, физического и экономического содержания, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определение определенного интеграла. Основные свойства.
3. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.
4. Формула Ньютона–Лейбница.
5. Замена переменной в определенном интеграле.
6. Интегрирование по частям при вычислении определенного интеграла.
7. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.
8. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
9. Вычисление длины дуги плоской кривой.
10. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений.
11. Объем тела вращения.
12. Применения определенного интеграла в экономике.
13. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
14. Интегралы от неограниченных функций.
15. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Раздел 8. Дифференциальные уравнения

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (основные понятия).
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
4. Дифференциальные уравнения с однородными функциями.

5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли.

6. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

7. Линейные однородные уравнения $\boldsymbol{n}$-го порядка; свойства их решений.

8. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

9. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Раздел 9. Ряды

1. Числовой ряд. Сумма и остаток ряда.
2. Необходимый признак сходимости ряда.
3. Сравнение рядов с положительными членами.
4. Достаточные признаки сходимости Даламбера и Коши.
5. Интегральный признак Коши.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.
9. Свойства степенных рядов.
10. Ряды Тейлора и Маклорена.
11. Разложение функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1 \pm x)$, $(1 + x)^m$ в ряды Маклорена.
12. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

Раздел 10. Элементы теории вероятностей

1. Предмет теории вероятностей.
2. Элементы комбинаторного анализа (перестановки, размещения, сочетания).
3. Событие. Пространство элементарных событий. Классификация событий. Алгебра событий.

4. Относительная частота события.
5. Классическое определение вероятности.
6. Геометрическое определение вероятности.
7. Определение условной вероятности. Независимость событий.
8. Вероятность произведения событий.
9. Теоремы сложения и следствия из них.
10. Формула полной вероятности.
11. Вероятность гипотез. Формулы Байеса.
12. Последовательность независимых испытаний, схема Бернулли.
13. Предельные теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона.
14. Дискретные и непрерывные случайные величины.
15. Функция распределения и ее свойства.
16. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.
17. Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).
18. Закон биноминального распределения, закон Пуассона и их числовые характеристики.
19. Нормальный закон распределения.
20. Равномерное распределение.
21. Показательный закон распределения.

Раздел 11. Элементы математической статистики

1. Выборочный метод описания и анализа статистических данных.
2. Статистический вариационный ряд.
3. Интервальные статистические ряды.
4. Графическое представление статистических распределений выборки (полигон, гистограмма).
5. Эмпирическая функция распределения; ее основные свойства.
6. Основные числовые характеристики выборки.
7. Начальные и центральные моменты k-го порядка, их использование в статистике.
8. Точечные оценки неизвестных параметров распределения.
9. Интервальные оценки параметров распределения.
10. Доверительная вероятность, доверительный интервал.
11. Статистическая гипотеза. Критерий согласия Пирсона.
12. Корреляционная зависимость.

13. Линейное уравнение регрессии; определение его параметров методом наименьших квадратов.

14. Выборочный коэффициент корреляции; его свойства. Коэффициент детерминации.

Перечень рекомендуемой литературы

Учебники

1. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – Минск: Новое знание, 2006. – Ч. 1–3.

2. Белько, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика / И.В. Белько, Г.П. Свирид. – Минск: Новое знание, 2002.

3. Герасимович, А.И. Математический анализ / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

4. Герасимович, А.И. Математический анализ / А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.

5. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е.И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1982.

6. Красс, М.С. Математика в экономике / М.С. Красс. – М.: ИД ФБК – ПРЕСС, 2005.

7. Мацкевич, И.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика / И.П. Мацкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.

8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 ч. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1.

9. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 ч. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1987. – Ч. 2.

10. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике / Д. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2004. – Ч. 1.

11. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике / Д. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2004. – Ч. 2.

Задачники

12. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Е.И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

13. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Е.И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.

14. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986, 1997, 1999. – Ч. 1.

15. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986, 1997, 1999. – Ч. 2.

16. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1.

17. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

18. Индивидуальные задания по высшей математике: в 3 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

19. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике / А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задания 1–10. При условном делении экономики на три отрасли задана матрица коэффициентов прямых затрат A и вектор конечной продукции Y. Требуется:

1. Записать уравнение линейного межотраслевого баланса в координатной форме.
2. Найти плановые объемы выпуска валовой продукции отраслей. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом Гаусса. Решение системы записать в неправильных дробях.
3. Выполнить проверку результата.
4. Записать приближенный ответ с точностью до сотых.

1. $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}06\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}08\\ 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}05\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}41\\30\\24\end{bmatrix}$	2. $A=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}09\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}06\\ 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}05\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}56\\35\\28\end{bmatrix}$
3. $A=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}05\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}38\\27\\14\end{bmatrix}$	4. $A=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}26 & 0{,}2\\ 0{,}13 & 0{,}25 & 0{,}04\\ 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}03\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}25\\40\\20\end{bmatrix}$
5. $A=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}18\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}25\\17\\10\end{bmatrix}$	6. $A=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}25 & 0{,}12\\ 0{,}17 & 0{,}2 & 0{,}04\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}03\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}20\\13\\25\end{bmatrix}$
7. $A=\begin{bmatrix}0{,}45 & 0{,}36 & 0{,}08\\ 0{,}27 & 0{,}3 & 0{,}12\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}42\\30\\15\end{bmatrix}$	8. $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}05\\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}1\\ 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}03\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}25\\10\\16\end{bmatrix}$
9. $A=\begin{bmatrix}0{,}54 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}17 & 0{,}1\\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}09\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}30\\17\\10\end{bmatrix}$	10. $A=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}12 & 0{,}08\\ 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}05\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}40\\25\\19\end{bmatrix}$

Задания 11–20. Даны векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по формулам Крамера.

11. $\vec{a}=(1;7;3)$, $\vec{b}=(3;4;2)$, $\vec{c}=(4;8;5)$, $d=(7;32;14)$.
12. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(4;7;2)$, $\vec{c}=(6;4;2)$, $d=(14;18;6)$.
13. $\vec{a}=(1;4;3)$, $\vec{b}=(6;8;2)$, $\vec{c}=(3;1;4)$, $d=(21;18;33)$.
14. $\vec{a}=(2;7;3)$, $\vec{b}=(3;1;8)$, $\vec{c}=(2;-7;4)$, $d=(16;14;27)$.
15. $\vec{a}=(7;2;1)$, $\vec{b}=(4;3;5)$, $\vec{c}=(3;4;-2)$, $d=(2;-5;-13)$.
16. $\vec{a}=(2;4;1)$, $\vec{b}=(1;3;6)$, $\vec{c}=(5;3;1)$, $d=(24;20;6)$.
17. $\vec{a}=(10;3;1)$, $\vec{b}=(1;4;2)$, $\vec{c}=(3;9;2)$, $d=(19;30;7)$.
18. $\vec{a}=(8;2;3)$, $\vec{b}=(4;6;10)$, $\vec{c}=(3;-2;1)$, $d=(7;4;11)$.
19. $\vec{a}=(4;7;8)$, $\vec{b}=(9;1;3)$, $\vec{c}=(2;-4;1)$, $d=(1;-13;-13)$.
20. $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-1;3;2)$, $\vec{c}=(7;-3;5)$, $d=(6;10;17)$.

Задания 21–30. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды; 3) уравнения прямой A_1A_2; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) уравнения высоты A_4D, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) длину высоты A_4D; 7) координаты точки пересечения высоты A_4D с плоскостью $A_1A_2A_3$.

21. A_1 (3;1;4), A_2 (–1;6;1), A_3 (–1;1;6), A_4 (0;4;–1).
22. A_1 (3;–1;2), A_2 (–1;0;1), A_3 (1;7;3), A_4 (8;5;8).
23. A_1 (3;5;4), A_2 (5;8;3), A_3 (1;2;–2), A_4 (–1;0;2).
24. A_1 (2;4;3), A_2 (1;1;5), A_3 (4;9;3), A_4 (3;6;7).
25. A_1 (9;5;5), A_2 (–3;7;1), A_3 (5;7;8), A_4 (6;9;2).
26. A_1 (0;7;1), A_2 (2;–1;5), A_3 (1;6;3), A_4 (3;–9;8).
27. A_1 (5;5;4), A_2 (1;–1;4), A_3 (3;5;1), A_4 (5;8;–1).

28. A_1 (6;1;1), A_2 (4;6;6), A_3 (4;2;0), A_4 (1;2;6).

29. A_1 (7;5;3), A_2 (9;4;4), A_3 (4;5;7), A_4 (7;9;6).

30. A_1 (6;8;2), A_2 (5;4;7), A_3 (2;4;7), A_4 (7;3;7).

31. На прямой $x+2y=0$ найти точку, равноудаленную от начала координат и от прямой $x+2y-1=0$. Сделать чертеж.

32. Найти проекцию точки $A(1;3)$ на прямую, проходящую через точку $B(2;5)$ под углом 30° к оси Ox. Сделать чертеж.

33. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $x+y=0$ и отсекающей от координатных осей треугольник площадью 2 кв. ед. Сделать чертеж.

34. Вычислить величину меньшего угла между прямыми $3x+4y-2=0$ и $8x+6y+5=0$. Доказать, что точка $A\left(\frac{13}{14};-1\right)$ лежит на биссектрисе этого угла. Сделать чертеж.

35. Даны сторона прямоугольника $3x-4y+5=0$ и две его вершины $A(1;-3)$ и $C(1;2)$. Найти уравнения остальных сторон. Сделать чертеж.

36. Даны уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$ и точка $M(-1;0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения остальных трех сторон квадрата. Сделать чертеж.

37. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$, $x+y+5=0$ и пересекающей ось Ox под углом 30°. Сделать чертеж.

38. Найти точку, симметричную точке $M(5;2)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(1;0)$ и $M_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$. Сделать чертеж.

39. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек $A(1;1)$ и $B(2;0)$. Написать уравнение этой прямой. Сделать чертеж.

40. Даны две вершины $A(-4;4)$ и $B(4;-12)$ треугольника ABC и

точка $M(4;2)$ пересечения его высот. Найти вершину C. Сделать чертеж.

Задания 41–50. Вычислить пределы функций.

41.	
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-x^2+x-5}{3x^4+5x^3-2}$	2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^3-27}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^3+4x^2}$	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{5x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x\cos x}$	
42.	
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-3x+4}{2x^2-x^3-x}$	2. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-5}-2}{x^2-9x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}^2 3x}{\sin^3 5x}$	4. $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{1}{x-4}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x\sin x}$	
43.	
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{3x^4-x^2+2x}$	2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 7x}{\cos 2x-\cos 4x}$	4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{ctg}x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-2x}}{\mathrm{tg}3x}$	
44.	
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2+3x+1}{x^4-2x^2+4}$	2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

45.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+5}{x-x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+13x+3}{x^2+x-6}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg4x}{\cos 3x-\cos 9x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x^2-4}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\mathrm{tg}x}$

46.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+2x+7}{3x^2-x+10}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{x\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

47.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-6x+1}{x^4-x^2+3}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{4}{x-3}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{1-e^{-5x}}$

48.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2-4}{x^3-x^2+x+7}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+7x-10}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^{2x}}{x\cos x}$
49. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+3x}{2x^3-x^2+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x-3}-\sqrt{2x+1}}{x^2-2x-8}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{x\mathrm{tg}4x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 6x}{\ln\cos 2x}$
50. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-4}{2x^3+x^2-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2-7x-9}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{x^2+x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x+2}\right)^{4x-1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$

Задания 51–60. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций.

51. 1. $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; 2. $y=e^{\cos x}\cdot\sin^2 x$; 3. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}. \end{cases}$
52. 1. $y=\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^3$; 2. $y=\dfrac{\sin^3 x}{1+tgx}$; 3. $\begin{cases} x=2t^2+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$
53. 1. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$; 2. $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\cdot\mathrm{arctg}^2 x$; 3. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

54.		
1. $y=\sqrt[5]{x+x\sqrt[3]{x}}$;	2. $y=\sin^3 5x\cdot\sin^5 3x$;	3. $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\cos t. \end{cases}$
55.		
1. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-\sqrt{x}}}$;	2. $y=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}$;	3. $\begin{cases} x=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t, \\ y=2\ln\operatorname{ctg}t. \end{cases}$
56		
1. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$;	2. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}-x$;	3. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\left(t^2-1\right), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$
57.		
1. $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}$;	2. $y=\ln\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;	3. $\begin{cases} x=t\cdot\ln t, \\ y=\dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$
58.		
1. $y=\left(\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}$;	2. $y=\ln(1+x)+\arcsin\dfrac{x}{2}$;	3. $\begin{cases} x=e^t\cdot\cos t, \\ y=e^t\cdot\sin t. \end{cases}$
59.		
1. $y=\dfrac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$;	2. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;	3. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$
60.		
1. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;	2. $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}x+x$;	3. $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{1-t}. \end{cases}$

Задания 61–70. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

61. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$

62. $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

63. $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$

64. $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$

65. $y=\dfrac{2x-x^2}{x+1}$

66. $y=\dfrac{2x-x^2}{x-1}$

67. $y=\dfrac{6-2x^2}{x-2}$

68. $y=\dfrac{2x^2-2}{4-x}$

69. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

70. $y=-\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задания 71–80. Даны функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Найти: 1) градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0; 2) производную функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\overline{a}$.

71.	$u = \sqrt{x^2 - 2y + 4z}$; $M_0(1;-2;1)$; $\overline{a} = (-1;2;2)$.
72.	$u = \ln(3x^2 - 2y + z)$; $M_0(1;1;0)$; $\overline{a} = (0;4;3)$.
73.	$u = \dfrac{x}{\sqrt{x + y + z}}$; $M_0(1;1;2)$; $\overline{a} = (-3;0;4)$.
74.	$u = \sqrt{2x - y + z^2}$; $M_0(1;2;2)$; $\overline{a} = (3;0;-4)$.
75.	$u = \dfrac{z}{\sqrt{x + y}}$; $M_0(2;2;1)$; $\overline{a} = (1;-2;2)$.
76.	$u = ze^{x^2 - y^2}$; $M_0(1;-1;2)$; $\overline{a} = (-4;3;0)$.
77.	$u = \sqrt{x^2 - y + 5z}$; $M_0(3;0;-1)$; $\overline{a} = (2;-1;2)$.
78.	$u = (x^2 + 4y)e^{z^2 - 4x}$; $M_0(1;-2;2)$; $\overline{a} = (0;6;8)$.
79.	$u = \sqrt{3x + 4y + z^2}$; $M_0(3;4;0)$; $\overline{a} = (2;2;-1)$.
80.	$u = \ln(xy - x^2 + yz^3)$; $M_0(2;3;1)$; $\overline{a} = (6;0;-8)$.

Задания 81–90. Производятся два вида товаров, объемы производства которых x и y, цены на эти товары p_1 и p_2, соответственно, затраты на производство задаются функцией издержек $S = S(x, y)$. Определить при каких объемах производства данных товаров прибыль будет максимальной; найти ее максимальное значение.

№ задания	p_1	p_2	$S = S(x, y)$
81	6	10	$2x^2 - 4xy + 5y^2$
82	10	5	$4x^2 - 2xy + y^2$
83	6	4	$2x^2 + xy + 2y^2$
84	4	8	$x^2 - 3xy + 4y^2$
85	4	7	$3x^2 - 2xy + 2y^2$
86	6	8	$2x^2 - 4xy + 3y^2$
87	5	6	$x^2 - 3xy + 3y^2$
88	12	8	$4x^2 - 4xy + 2y^2$
89	8	5	$2x^2 - 2xy + 2y^2$
90	12	16	$x^2 + 2xy + 2y^2$

Задания 91–100. Найти неопределенные интегралы. В пунктах 1, 2 выполнить проверку дифференцированием.

91.	
1. $\int\left((2x+1)^8 + \frac{1}{\cos^2(1-x)}\right)dx$	2. $\int x \cdot e^{-x} dx$
3. $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$	4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$
92.	
1. $\int \frac{1 + x + \ln^5 2x}{x} dx$	2. $\int x \cdot \sin 5x dx$
3. $\int \frac{x^2 + 3}{x(4x^2 + 1)} dx$	4. $\int \cos^5 2x \cdot \sin^2 2x dx$
93.	
1. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}} + \sin\frac{1}{2}x\right)dx$	2. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

3. $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$	4. $\int \cos^2 3x \cdot \sin^3 3x dx$
94.	
1. $\int \frac{2\mathrm{arctg}^3 x + x}{1+x^2}dx$	2. $\int \ln^2 x dx$
3. $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-4x}dx$	4. $\int \sin^3 6x dx$
95.	
1. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} - x^2 e^{x^3} \right) dx$	2. $\int x \cdot \mathrm{tg}^2 x dx$
3. $\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}$	4. $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx$
96.	
1. $\int \frac{5+\mathrm{ctg}^3 2x}{\sin^2 2x}dx$	2. $\int (2x-1)e^{3x}dx$
3. $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$	4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$
97.	
1. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+x+3}{x^2}dx$	2. $\int \arccos 2x dx$
3. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$	4. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$
98.	
1. $\int \left(4^{2-3x} + \frac{1}{\cos^2 5x} \right) dx$	2. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$
3. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$	4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

99. 1. $\int\left(x\cdot e^{-x^2+1}-\frac{1}{3x^2+4}\right)dx$ 2. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ 3. $\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x+1)}$ 4. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$
100. 1. $\int\left(\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}-\frac{x}{x^2-7}\right)dx$ 2. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ 3. $\int\frac{6x^2+3x-1}{x^3-x^2+5x-5}dx$ 4. $\int\frac{dx}{5-4\sin x}$

Задания 101–105. Сменная производительность труда рабочего описывается функцией $f(t)$, где $t-$время в часах, $0\le t\le a$. Определить объем выпуска продукции в течение времени T бригадой из n человек.

Номер задания	Функция $f(t)$	a	T	n
101	$0{,}05t^2+0{,}2t+60$	8	30	6
102	$80-3t-t^2$	6	15	20
103	$70-0{,}5t+0{,}6t^2$	7	10	15
104	$-0{,}08t^2-0{,}6t+50$	10	20	8
105	$0{,}03t^2-0{,}2t+79$	5	10	25

Задания 106–110. Известно, что спрос на некоторый товар описывается функцией $q=f(p)$, а предложение данного товара характеризуется функцией $q=g(p)$. Найти величину излишка потребителя при покупке данного товара.

Номер задания	$q=f(p)$	$q=g(p)$
106	$q=\frac{8100}{p^3}$	$q=100p$

107	$q=\dfrac{3240}{p^3}$	$q=80p$
108	$q=\dfrac{200}{p^2}$	$q=25p$
109	$q=\dfrac{2500}{p^2}$	$q=\dfrac{100}{p}$
110	$q=\dfrac{1280}{p^4}$	$q=40p$

Задания 111–120. Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$.

111. $y\cdot y'+x=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$,	$y(1)=1$.
112. $y'\left(1-x^2\right)=xy+1$,	$y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.
113. $y'+y\cdot \mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$,	$y(0)=0$.
114. $y'=2y+e^x-x$,	$y(0)=\dfrac{1}{4}$.
115. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$,	$y(1)=1$.
116. $xdy=\left(\sqrt{x^2-y^2}+y\right)dx$,	$y(1)=0$.
117. $y'=e^{2x}-e^x y$,	$y(0)=1$.
118. $y'-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0$,	$y(0)=0$.
119. $y'=y\cdot \mathrm{tg}x+\cos x$,	$y(0)=0$.
120. $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$,	$y(2)=1$.

Задания 121–130. Найти общее решение дифференциального уравнения.

121. $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{x}$.	122. $y'' + 4y' = 4x \cdot \sin 2x$.
123. $y'' + 5y' + 6y = -5e^{-2x}$.	124. $y'' - 3y' + 2y = (x+1) \cdot e^{x}$.
125. $y'' - y' - 2y = x \cdot e^{2x}$.	126. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x$.
127. $y'' - 3y' + 2y = 2x \cdot \cos x$.	128. $y'' - 4y' + 3y = -\cos x$.
129. $y'' + 3y' + 2y = x \cdot \sin x$.	130. $y'' - 4y' = x \cdot e^{4x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задания 131–140. Исследовать числовой ряд на сходимость.

131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{n+3}{2n+5}\right)^{n}$.

132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^{n}}}$.

133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$.

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{5^{n}(2n-1)}$.

135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{n}$.

136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n+1}}{n^{2}\cdot(n+1)!}$.

137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^{n}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}}$.

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n}}{(n+3)!}$.

139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^{2}+5n+8}{3n^{2}-2}\right)^{n}$.

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot tg\,\dfrac{2\pi}{5^{n}}$.

Задания 141–150. Найти область сходимости степенного ряда.

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n}}{2^{n}(n+3)}$.

142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n}}{3^{n}\ln(n+1)}$.

143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{2n+1}(x+2)^{n}$.

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n-2)(x-3)^{n}}{(n+1)^{2}\cdot 2^{n+1}}$.

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{n}}{(n^{2}+1)\sqrt{n+1}}$.

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^{n}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)(x-5)^{n}}{3n-2}$.

148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{n}}{(n+1)5^{n+2}}$.

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n}}{(2n+1)3^{n+2}}$.

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^{n}}{(3n-2)^{2}\cdot 4^{n+1}}$.

151. В течение года три фирмы могут обанкротиться независимо друг от друга с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5. Найти вероятность того, что в конце года 1) обанкротятся ровно две фирмы; 2) хотя бы одна фирма.

152. Вероятность аудиторской проверки в течение года для Беларусбанка равна 0,8, а для Приорбанка – 0,9. Найти вероятность того, что в течение года будут проверены 1) оба банка; 2) хотя бы один банк.

153. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу по каждому из трех телеканалов соответственно равна 0,4; 0,6; 0,7. Какова вероятность того, что потребитель увидит рекламу 1) только по одному из каналов; 2) по всем трем каналам.

154. Вероятность получения заказа в текущем году для первой строительной фирмы равна 0,95, для второй – 0,8, для третьей – 0,5. Найти вероятность того, что в текущем году 1) ни одна фирма не получит заказа; 2) две фирмы получат заказ.

155. Надежность первой компании в течение времени t оценивается на уровне 95 %, второй – 70 %, третьей – 80 %. Найти вероятность того, что в течение времени t 1) все три компании не станут банкротами; 2) хотя бы две компании станут банкротами.

156. Вероятность того, что в течение недели покупатель посетит гипермаркет A, равна 0,85, а гипермаркет B – 0,9. Какова вероятность того, что в течение недели: 1) покупатель посетит оба магазина; 2) только один из них.

157. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй и третий вопрос, соответственно, равна 0,92; 0,8 и 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить 1) на все вопросы; 2) по крайней мере на два вопроса.

158. Вероятности того, что сальдо внешней торговли будет положительным для трех стран соответственно равны 0,74; 0,83 и 0,9. Найти вероятности событий: 1) только две страны будут иметь положительное сальдо; 2) все страны будут иметь отрицательное сальдо.

159. Строительная отрасль выпускает акции трех видов *A*, *B* и *C*. Вероятности того, что акции через месяц поднимутся в цене соответственно равны 0,85; 0,9; 0,93. Какова вероятность того, что через месяц поднимутся в цене 1) акции только одного вида; 2) акции всех видов.

160. Предприятие состоит из трех независимо работающих подразделений. Предполагается, что вероятность их рентабельной работы за два месяца соответственно равна 0,65; 0,7; 0,82. Найти вероятность того, что в течение двух месяцев рентабельным будет 1) хотя бы одно из подразделений; 2) ровно два подразделения.

161. В бухгалтерии банка имеются два списка должников. В первом – фамилии 10 мужчин и 12 женщин, во втором – 8 мужчин и 4 женщин. Одна фамилия случайно переносится из первого списка во второй. Затем фамилия одного из должников случайно выбирается из второго списка. Найти вероятность того, что это будет фамилия мужчины.

162. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит аналогичный, равна 0,91, а при наличии конкурирующего – 0,32. Вероятность выпуска конкурентом товара равна 0,45. Найти вероятность того, что товар будет пользоваться спросом на рынке.

163. Лизинговая компания предоставляет в аренду на определенных условиях дорогостоящее оборудование с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в стране не будет ухудшаться в течение времени t. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то эта вероятность равна 0,65. Экономист-консультант полагает, что в течение времени t с вероятностью 0,72 ситуация в стране будет становиться хуже. Чему равна вероятность того, что лизинговая компания предоставит оборудование в аренду?

164. Отдел маркетинга полагает, что в ближайшее время ожидается рост спроса на услуги данной строительной фирмы с вероятностью 0,7. Фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтверждает предположение о росте спроса. Положительный про-

гноз фирмы сбывается на 90 %, а отрицательный – на 80 %. Найти вероятность того, что рост спроса действительно произойдет.

165. Три фирмы поставляют товар в данный регион в соотношении 2:3:5. Среди продукции первой фирмы высококачественные изделия составляют 85 %, у второй – 90 %, у третьей – 80 %. Взятый наугад товар оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он изготовлен третьей фирмой.

166. Курс евро повышается в течение полугода с вероятностью 0,7, остается неизменным с вероятностью 0,2 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса предприятие надеется получить прибыль с вероятностью 0,2, при неизменном курсе – с вероятностью 0,5, при понижении курса – с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что предприятие получит прибыль.

167. На заводе строительного оборудования первый цех выпускает 25 % всех изделий, второй – 45 %, третий – 30 %. В их продукции брак составляет соответственно 3 %, 2 %, 4 %. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие является дефектным?

168. У студента S есть три любимых места для прогулок, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что он встретит своего друга в первом месте, равна $\frac{1}{4}$, во втором $-\frac{1}{2}$, в третьем $-\frac{1}{5}$. Известно, что встреча произошла. Какова вероятность того, что студент S выбрал первое место?

169. Вероятность того, что коэффициент Джини G, который показывает равномерность распределения доходов среди населения страны, будет находиться в области $D_1 = [0;0,3]$ равна 0,07, в области $D_2 = [0,3;0,5] - 0,8$, в области $D_3 = [0,5;1] - 0,13$. Вероятности социальной нестабильности общества для коэффициента G из областей D_1, D_2, D_3 соответственно равны 0,015; 0,08; 0,6. Найти вероятность того, что данная страна социально стабильна.

170. Имеются две неотличимые по внешнему виду игральные кости: обычная и фальшивая, при случайном подбросе которой «шестерка» выпадает с вероятностью 1/3, «единица» – с вероятностью 1/9, а остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Подброшена наудачу выбранная кость и в результате выпала «четверка». Найти вероятность того, что была подброшена обычная игральная кость.

Задания 171–180. Непрерывная случайная величина (СВ) X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

1) коэффициент A;
2) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3) математическое ожидание СВ X;
4) вероятность события $X \in (a,b)$.

171. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{A}x^3, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$	$a=1, b=2$.
172. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ Ax-\frac{1}{3}, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$	$a=2, b=3$.
173. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ Ax^2, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$	$a=0, b=1$.
174. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A(x^2+x), & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$	$a=1, b=3$.

175.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{3\pi}{4}, \\ A\cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$	$a=\dfrac{3\pi}{4}, b=\dfrac{5\pi}{6}$.
176.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ A(1-\cos x), & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$	$a=0, b=\dfrac{\pi}{3}$.
177.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ A(x+1)^2, & -1<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$	$a=1, b=2$.
178.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ A(x^3+3x), & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$	$a=0, b=1$.
179.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ A(1+\sin x), & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$	$a=-\dfrac{\pi}{2}, b=-\dfrac{\pi}{4}$.
180.	$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ Ax^4, & 2<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$	$a=2{,}5, b=3$.

Задания 181–190. Зависимость выпуска валовой продукции (СВ *Y*) от стоимости основных фондов (СВ *X*) 50 предприятий представлена корреляционной таблицей.

Требуется:

1. Найти уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X*.
2. Найти уравнение прямой линии регрессии *X* на *Y*.
3. Построить графики полученных прямых.
4. Оценить тесноту корреляционной связи, используя выборочный коэффициент корреляции.

181.

X \ Y	0,8	2,4	4,0	5,6	7,2	m_i
0,7	2	1				3
2,1		6	5			11
3,5			3	20	3	26
4,9			4	3	1	8
6,3					2	2
m_j	2	7	12	23	6	50

182.

X \ Y	0,7	2,1	3,5	4,9	6,3	m_i
0,4	1	2				3
1,2	2	4	3			9
2,0			19	4	3	26
2,8			1	8	2	11
3,6					1	1
m_j	3	6	23	12	6	50

183.

X \ Y	0,8	2,0	3,2	4,4	5,6	m_i
0.6	3	4	1			8
1,4	1	5	10	8		24
2,2	1	3	1	5	1	11
3,0				2	3	5
3,8			1		1	2
m_j	5	12	13	15	5	50

184.

X \ Y	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	m_i
1,8	2	2				4
3,6		4	5			9
5,4		1	3	20	2	26
7,2			4	3	1	8
8,0					3	3
m_j	2	7	12	23	6	50

185.

X \ Y	0,6	1,2	1,8	2,4	4,0	m_i
1,4	1	1				2
2,8	2	10	2			14
4,2	1	3	19			23
5,6			4	4		8
7,0				1	2	3
m_j	4	14	25	5	2	50

186.

X \ Y	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	m_i
1,6	4	3	1			8
3,2	1	5	12	7		25
4,8	1	3	1	6		11
6,4			1	2	2	5
8,0					1	1
m_j	6	11	15	15	3	50

187.

X \ Y	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	m_i
1,1	1	2				3
2,2	1	5				6
3,3		1	20	8		29
4,4			6	1	3	10
5,5					2	2
m_j	2	8	26	9	5	50

188.

$X \backslash Y$	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	m_i
1,2	2	5				7
2,4		1	9	2		12
3,6		1	16	3	2	22
4,8			1	1	5	7
6,0					2	2
m_j	2	7	26	6	9	50

189.

$X \backslash Y$	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	m_i
1,9	1	2				3
3,8	3	6	3			12
5,7		2	18	4		24
7,6			1	7	1	9
9,5					2	2
m_j	4	10	22	11	3	50

190.

$X \backslash Y$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	m_i
0,5	3	2	1			6
1,0	1	2	7	1		11
1,5	1	3	2	18	2	26
2,0					5	5
2,5					2	2
m_j	5	7	10	19	9	50

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1

Решение задания типа 1–10

При условном делении экономики на три отрасли задана матрица коэффициентов прямых затрат $A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$ и вектор конечной продукции $\overline{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$. Требуется:

1. Записать уравнение линейного межотраслевого баланса в координатной форме.
2. Найти плановые объемы выпуска валовой продукции отраслей. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом Гаусса. Решение системы записать в неправильных дробях.
3. Выполнить проверку результата.
4. Записать приближенный ответ с точностью до сотых.

1. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид $\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}$, где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор валового выпуска продукции, $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – вектор конечного потребления, $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{3\times 3}$ – матрица прямых материальных затрат. Известны вектор конечного потребления $\overline{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$ и матрица прямых материальных затрат $A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$.

Подставим в уравнение Леонтьева $\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}$ векторы $\overline{x}, \overline{y}$ и матрицу A:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Используя правила умножения матриц, сложения векторов и определение равенства векторов, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 30 \\ x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 15 \\ x_3 = 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 40 \end{cases}.$$

Полученная система – это векторное уравнение линейного межотраслевого баланса в координатной форме.

Для решения этой системы приведем подобные члены:

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 = 30 \\ -0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}1x_3 = 15 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}8x_3 = 40 \end{cases}.$$

Все уравнения умножим на 10:

$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 300 \\ -2x_1 + 8x_2 - x_3 = 150 \\ -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 400 \end{cases}.$$

2. Решим полученную систему методом Гаусса. Основная его идея состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, где одно из уравнений содержит все неизвестные, второе – на одно неизвестное меньше, и т.д., последнее уравнение содержит лишь одно из неизвестных. Эти преобразования называют прямым ходом метода Гаусса.

Для удобства вычислений третье уравнение поставим первым, и оно будет ведущим на первом этапе вычислений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 400 \\ 9x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 300 \\ -2x_1 + 8x_2 - x_3 = 150 \end{cases}.$$

Исключим неизвестную x_1 из второго уравнения. Для этого умножим первое уравнение на 9 и прибавим ко второму:

$$-22x_2 + 69x_3 = 3900.$$

Исключим неизвестную x_1 из третьего уравнения. Для этого умножим первое уравнение на (–2) и прибавим к третьему:

$$12x_2 - 17x_3 = -650.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 400 \\ \quad -22x_2 + 69x_3 = 3900 \\ \quad\quad 12x_2 - 17x_3 = -650 \end{cases}.$$

Исключим неизвестную x_2 из третьего уравнения. Для этого второе уравнение разделим на 22, умножим на 12 и прибавим к третьему:

$$\left(\frac{69\cdot 12}{22} - 17\right)x_3 = \frac{3900\cdot 12}{22} - 650 \text{ или } 454x_3 = 32500 \text{ или } 227x_3 = 16250.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 400 \\ \quad -22x_2 + 69x_3 = 3900 \\ \quad\quad\quad 227x_3 = 16250 \end{cases}.$$

Замечание. Преобразования в методе Гаусса удобнее выполнять не с самой системой уравнений, а с расширенной матрицей системы, которая состоит из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -4 & -3 & 300 \\ -2 & 8 & -1 & 150 \\ -1 & -2 & 8 & 400 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{третью строку}\\ \text{поставим первой}\end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 8 & 400 \\ 9 & -4 & -3 & 300 \\ -2 & 8 & -1 & 150 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{умножим первую строку на 9}\\ \text{и прибавим ко второй}\end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 8 & 400 \\ 0 & -22 & 69 & 3900 \\ -2 & 8 & -1 & 150 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{умножим первую строку на } (-2)\\ \text{и прибавим к третьей}\end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 8 & 400 \\ 0 & -22 & 69 & 3900 \\ 0 & 12 & -17 & -650 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{вторую строку разделим на 22,}\\ \text{умножим на 12 и прибавим к третьей}\end{array}\right|.$$

Используя полученную матрицу, выпишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 400 \\ \quad -22x_2 + 69x_3 = 3900 \\ \qquad\quad 227x_3 = 16250. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Обратный ход заключается в том, что из последнего уравнения находят неизвестную x_3, затем из второго – x_2, а из первого – x_1. Выполним это:

$$x_3 = \frac{16250}{227},$$

$$x_2 = \frac{69}{22}x_3 - \frac{3900}{22} = \frac{69 \cdot 16250}{22 \cdot 227} - \frac{3900}{22} = \frac{1121250 - 3900 \cdot 227}{22 \cdot 227} = \frac{235950}{22 \cdot 227},$$

$$x_1 = -2x_2 + 8x_3 - 400 = -\frac{2 \cdot 235950}{22 \cdot 227} + \frac{8 \cdot 16250}{227} - 400 = \frac{390500}{22 \cdot 227}.$$

Итак, решение системы в неправильных дробях будет иметь вид: $x_1 = \dfrac{390500}{4994}$, $x_2 = \dfrac{235950}{4994}$, $x_3 = \dfrac{16250}{227}$. Они будут выражать плановые объемы выпуска валовой продукции отраслей.

3. Выполним проверку полученного результата. Для этого подставим эти значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 9 \cdot \dfrac{390500}{4994} - 4 \cdot \dfrac{235950}{4994} - 3 \cdot \dfrac{16250}{227} = 300 \\ -2 \cdot \dfrac{390500}{4994} + 8 \cdot \dfrac{235950}{4994} - \dfrac{16250}{227} = 150 \\ -\dfrac{390500}{4994} - 2 \cdot \dfrac{235950}{4994} + 8 \cdot \dfrac{16250}{227} = 400 \end{cases}.$$

Вычисляя, получаем верные равенства.

4. Запишем приближенный ответ с точностью до сотых: $x_1 = \dfrac{390500}{4994} \approx 790{,}49$; $x_2 = \dfrac{235950}{4994} \approx 47{,}25$; $x_3 = \dfrac{16250}{227} \approx 71{,}59$.

Решение задания типа 11–20

Даны векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по формулам Крамера.

Например, $\vec{a} = (1;2;0)$, $\vec{b} = (3;-1;4)$, $\vec{c} = (-2;0;1)$, $\vec{d} = (1;3;2)$.

Решение. Для того, чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образовывали базис, необходимо показать, что векторы некомпланарны, т.е. их смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ отлично от нуля.

Вычислим смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ с помощью определителя третьего порядка:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -23.$$

Поскольку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -23 \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве R_3.

Следовательно, любой вектор $\vec{d}$ этого пространства единственным образом можно представить в виде $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где (x, y, z) – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами:

$$\begin{cases} d_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ d_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ d_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = 1 \cdot x + 3 \cdot y - 2 \cdot z \\ 3 = 2 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z \\ 2 = 0 \cdot x + 4 \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}.$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z – координаты вектора $\vec{d}$ в новом базисе.

Решаем полученную систему методом Крамера, в соответствии с которым:

1) система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$ – определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов системы, не равен 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0 .$$

2) неизвестные x, y, z находим по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – определители третьего порядка, составленные из определителя системы Δ заменой коэффициентов, стоящих в системе перед x, y, z, свободными членами соответственно:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -38,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x = \frac{-38}{-23} = \frac{38}{23}, \quad y = \frac{-7}{-23} = \frac{7}{23}, \quad z = \frac{-18}{-23} = \frac{18}{23}.$$

Проверка:

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot\frac{38}{23}+3\cdot\frac{7}{23}-2\cdot\frac{18}{23}=1, \quad 1=1, \\ 2\cdot\frac{38}{23}-1\cdot\frac{7}{23}+0\cdot\frac{18}{23}=3, \quad 3=3, \\ 0\cdot\frac{38}{23}+4\cdot\frac{7}{23}+1\cdot\frac{18}{23}=2, \quad 2=2. \end{array}\right\}$$

Получили тождества. Следовательно, система решена верно.

Ответ: 1) векторы $\vec{a}=(1;2;0)$, $\vec{b}=(3;-1;4)$, $\vec{c}=(-2;0;1)$ образуют базис; 2) вектор $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ имеет следующее разложение:

$$\vec{d} = \frac{38}{23}\vec{a}+\frac{7}{23}\vec{b}+\frac{18}{23}\vec{c}\,.$$

Решение типового задания 21–30

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды; 3) уравнения прямой A_1A_2; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) уравнения высоты A_4D, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) длину высоты A_4D; 7) координаты точки пересечения высоты A_4D с плоскостью $A_1A_2A_3$.

Например, $A_1(3;5;4)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(0;7;2)$, $A_4(2;3;7)$.

1. Для нахождения площади грани $A_1A_2A_3$ воспользуемся геометрическим смыслом модуля векторного произведения $\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|$, равного площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$ как на сторонах.

Найдем векторное произведение

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 6\vec{j} + 18\vec{k}\ .$$

Тогда искомая площадь грани $A_1A_2A_3$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 18^2} = \sqrt{106}\ \text{(ед}^2\text{)}.$$

2. Объем пирамиды найдем, используя геометрический смысл модуля смешанного произведения $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)$, равного объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ как на ребрах.

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 38.$$

Так как объем пирамиды составляет шестую часть объема соответствующего параллелепипеда, то

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6} \cdot 38 = \frac{19}{3}\ \text{(ед}^3\text{)}.$$

3. Чтобы найти уравнения прямой A_1A_2, используем уравнения прямой в пространстве, проходящей через две известные точки A_1 и A_2 :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Уравнения прямой A_1A_2 принимают вид:

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-5}{9-5} = \frac{z-4}{4-4} \text{ или } \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-4}{0}.$$

4. Для получения уравнения грани $A_1A_2A_3$ используем уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A_1, A_2, A_3:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашей задаче

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель вычислим методом разложения по элементам первой строки:

$$-8(x-3) - (-6)(y-5) + 18(z-4) = 0.$$

Раскрыв скобки, и приведя подобные, получаем

$$-8x + 6y + 18z - 78 = 0,$$

сократив на (–2), искомое уравнение будет иметь вид:

$$4x - 3y - 9z + 39 = 0.$$

5. Чтобы найти уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, используем канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через известную точку A_4 с направляющим вектором $\vec{s}(m;n;p)$:

$$\frac{x-x_4}{m}=\frac{y-y_4}{n}=\frac{z-z_4}{p}.$$

Так как высота перпендикулярна грани $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ можно использовать нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, координатами которого являются коэффициенты при x, y, z в полученном уравнении грани $A_1A_2A_3$: $\vec{n}(4;-3;-9)$.

Итак, уравнения высоты примут вид:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-7}{-9}.$$

6. Для вычисления длины высоты A_4D примем формулу расстояния от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

$$|A_4D|=\frac{|ax_4+by_4+cz_4+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где a, b, c, d – коэффициенты и свободный член из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$.

Таким образом,

$$|A_4D|=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 3-9\cdot 7+39|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-9)^2}}=\frac{25}{\sqrt{106}}.$$

Координаты точки пересечения высоты A_4D с плоскостью $A_1A_2A_3$ получаются как результат решения системы, составленной из уравнения грани $A_1A_2A_3$ и уравнений высоты A_4D.

Запишем уравнения высоты A_4D в параметрической форме:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-7}{-9}=t,$$

где t – параметр, тогда $\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-3t+3 \\ z=-9t+7 \end{cases}.$

Решая систему

$$\begin{cases} 4x-3y-9z+39=0 \\ x=4t+2 \\ y=-3t+3 \\ z=-9t+7 \end{cases},$$

найдем значение параметра t. Подставляя выражения x, y, z в первое уравнение, получим:

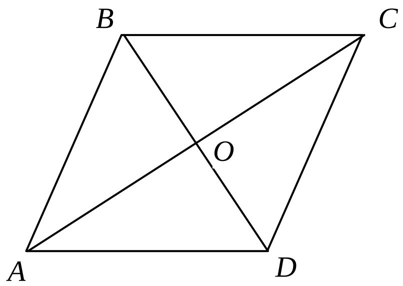
$$4(4t+2)-3(-3t+3)-9(-9t+7)+39=0 \quad \Rightarrow \quad 106t=25 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{25}{106}.$$

Искомые координаты точки пересечения:

$$x=4\cdot\frac{25}{106}+2=\frac{312}{106}=\frac{156}{53};\; y=-3\cdot\frac{25}{106}+3=\frac{243}{106};\; z=-9\cdot\frac{25}{106}+7=\frac{517}{106}.$$

Решение задания типа 31–40

Условие. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали. Сделать чертеж.



Решение. Пусть $2x-5y-1=0$ – уравнение стороны *AB*. Так как прямые $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ имеют одинаковые нормальные векторы $\vec{n}=(2;-5)$, следовательно, они параллельны. Поэтому $2x-5y-34=0$ – уравнение противоположной стороны *DC*. Одна из диагоналей, например, *AC* имеет уравнение $x+3y-6=0$. Вершина ромба *A* является точкой пересечения прямых *AB* и *AC*, следовательно ее можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ x+3y-6=0 \end{cases},$$

откуда *A*(3;1).

Вершину ромба *C* получим решением системы, составленной из уравнения прямых *DC* и *AC*:

$$\begin{cases} 2x-5y-34=0 \\ x+3y-6=0 \end{cases},$$

откуда *C*(12;–2).

Точка *O* пересечения диагоналей является серединой отрезка *AC*, поэтому ее координаты можно найти по формулам:

$$x_0=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2};\quad y_0=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

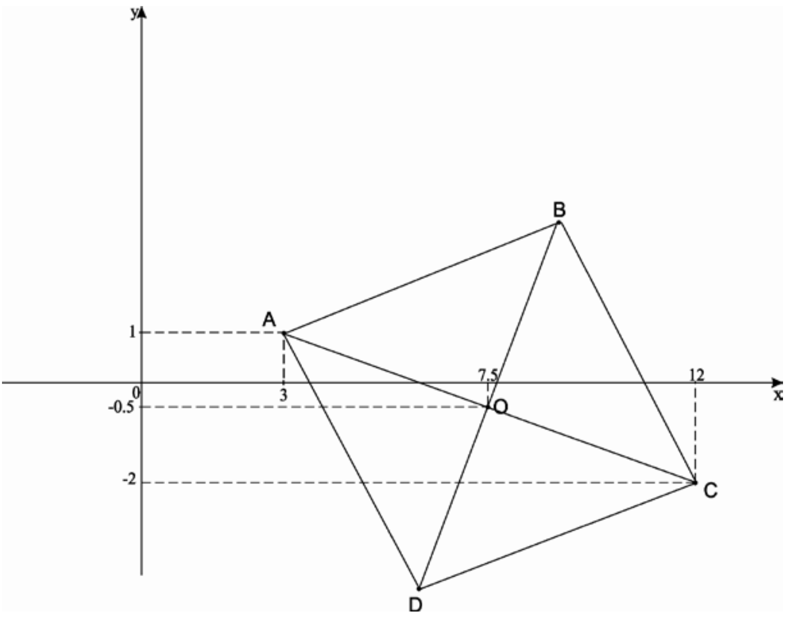
Таким образом, $O\left(\frac{15}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Так как диагонали ромба перпендикулярны, то угловой коэффициент искомой диагонали $k_{BD} = -\dfrac{1}{k_{AC}}$. Угловой коэффициент прямой AC (k_{AC}), найдем из ее уравнения: $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$, откуда $k_{AC} = -\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $k_{BD} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$.

Уравнение диагонали BD найдем, зная угловой коэффициент $(k_{BD} = 3)$ и точку $O\left(\dfrac{15}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, лежащую на ней: $y - y_0 = k_{BD}(x - x_0)$, т.е. $y + \dfrac{1}{2} = 3\left(x - \dfrac{15}{2}\right)$ или $3x - y - 23 = 0$.

Ответ: $3x - y - 23 = 0$.

Выполним чертеж:



Решения заданий типа 41–50

Теоретический справочник

При вычислении пределов используются следующие свойства пределов:

1^0. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, где $c-\text{const}$, т.е. предел постоянной равен самой постоянной.

2^0. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = B$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} (u(x)+v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x) + \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = A+B$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} (u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = A\cdot B$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = B \neq 0$.

Из свойств 1^0 и $2^0_б$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot u(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$, где $c-\text{const}$, т.е. постоянную можно выносить за знак предела.

3^0. Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) +$.

4^0. Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{u(x)} = \infty$.

5^0. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}$.

6^0. Для всех элементарных функций $f(x)$ в любой точке их области определения имеет место равенство: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. предел функции находят непосредственной подстановкой предельного значения аргумента.

Из свойства 2^0 следует, что предел суммы, произведения, частного двух функций равен, соответственно, сумме, произведению и частному пределов этих функций, если функции имеют конечные пределы (в случае частного предел знаменателя не равен нулю). Если $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ приводит к неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; если $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ приводит к неопределенности типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$; если $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)}$ приводит к неопределенности типа $\left(1^\infty\right)$. Чтобы вычислить такие пределы, т.е. «раскрыть неопределенность», необходимо провести дополнительные преобразования.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + x + 4}{2x^3 + x^2 - 4x + 7}$.

Числитель и знаменатель дроби являются многочленами и при $x \to \infty$ стремятся к бесконечности и, следовательно, имеем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия такой неопределенности вынесем в числителе и знаменателе x^3.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \left| \begin{array}{l} \text{сократим} \\ \text{на } x^3 \end{array} \right| =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\left|\begin{array}{l}\text{используем}\\ \text{свойство } 2^0.\text{в)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}=\left|\begin{array}{l}\text{используем}\\ \text{свойства}\\ \text{пределов } 1^0-4^0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{5-0+0+0}{2+0-0+0}=\frac{5}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда многочлен, стоящий в числителе имеет меньшую степень по сравнению с многочленом, стоящим в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+3}{x^3+x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}=0\cdot\frac{5-0+0}{1+0-0}=0\cdot 5=0.$$

Рассмотрим случай, когда многочлен, стоящий в числителе имеет большую степень по сравнению с многочленом, стоящим в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+4}{3x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1-0+0}{3+0-0}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}x=\infty\,.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-1}$.

Определим, имеет ли место неопределенность. Для этого в выражение, стоящее под пределом подставим $x=1$: $\dfrac{3\cdot1^2-2\cdot1-1}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}$.

Т.о. имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель:

$$3x^2-2x-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x+1)(x-1),$$

знаменатель:

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

и подставим это в предел

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\left|\begin{array}{l}\text{сократим на}\\ \text{множитель }(x-1)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+1}{x^2+x+1}=\frac{3\cdot1+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}\,.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}=\left|\frac{\sqrt{3-2}-1}{3^2-4\cdot 3+3}=\frac{0}{0}-\text{неопределенность}\right|.$$

Домножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю: $\left(\sqrt{x-2}+1\right)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\left|\begin{matrix}\text{сократим}\\ \text{на }(x-3)\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\frac{1}{(3-1)\left(\sqrt{3-2}+1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Если при раскрытии неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, дробь содержит тригонометрические функции, то в этом случае используют первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 2x}=\left|\frac{\mathrm{tg}(3\cdot 0)}{\sin(2\cdot 0)}=\frac{0}{0}\quad-\text{неопределенность}\right|.$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 2x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}.$$

Отдельно вычислим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\left|\begin{array}{l}\text{Обозначим}\\ 3x=t.\ \text{Если}\\ x\to 0,\ \text{то}\\ t=3x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\left|\begin{array}{l}2x=z.\\ \text{Если } x\to 0,\\ \text{то } z=2x\to 0\end{array}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}=\frac{1}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\cos x-\cos 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}1-\cos 4x=2\sin^2 2x\\ \cos x-\cos 7x=2\sin 4x\sin 3x\end{array}\right|=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{2\sin 4x\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

При раскрытии неопределенности 1^{∞} используют второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x+1}$.

Вычислим отдельно предел основания:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{5x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5-\frac{1}{x}\right)}{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{5-0}{5+0}=1$$

и предел показателя $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$, получаем неопределенность 1^{∞}.

Преобразуем выражение в скобках к виду $1+\alpha(x)$:

$$\frac{5x-1}{5x+2}=\frac{(5x+2)-3}{5x+2}=1+\left(\frac{-3}{5x+2}\right),$$

т.е. $\alpha(x)=\dfrac{-3}{5x+2}$. Из второго замечательного предела следует, что $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$, поэтому преобразуем показатель степени так, чтобы он содержал сомножитель $\dfrac{1}{\alpha(x)}=-\dfrac{5x+2}{3}$. Таким образом

$$\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x+1}=\left(\left(1+\left(\frac{-3}{5x+2}\right)\right)^{\frac{5x+2}{-3}}\right)^{\frac{-3(2x+1)}{5x+2}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{-3}{5x+2}\right)\right)^{\frac{5x+2}{-3}}\right)^{\frac{-3(2x+1)}{5x+2}}=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-3}{5x+2}\right)\right)^{\frac{5x+2}{-3}}=e\right|=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(2x+1)}{5x+2}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{5x+2}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}}=e^{-3\cdot\frac{2}{5}}=e^{-\frac{6}{5}}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{3}{x-2}}=\left(1^{\infty}\right)$.

Выражение в скобках запишем в виде $1+\alpha(x)=7-3x=1+(6-3x)$, т.е. $\alpha(x)=6-3x$. Следовательно, показатель степени должен содержать сомножитель $\dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{6-3x}$:

$$\lim_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+(6-3x))^{\frac{1}{6-3x}\cdot\frac{3(6-3x)}{x-2}}=\left|\lim_{x\to 2}(1+(6-3x))^{\frac{1}{6-3x}}=e\right|=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(6-3x)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3\cdot 3(x-2)}{x-2}}=e^{-9}.$$

Для раскрытия неопределенностей типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ удобно использовать правило Лопиталя–Бернулли: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, т.е. предел отношения функций в случае неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ равен пределу отношения производных этих функций.

Для применения правила Лопиталя–Бернулли необходимо научиться вычислять производные функций.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\arcsin x}{e^{2x}-e^{x}}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-\arcsin x}{e^{2x}-e^{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sin 3x-\arcsin x)'}{\left(e^{2x}-e^{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\cos 3x-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2e^{2x}-e^{x}}=\frac{3\cos 0-\dfrac{1}{\sqrt{1-0}}}{2e^{0}-e^{0}}=\frac{3-1}{2-1}=2.$$

Правило Лопиталя–Бернулли при вычислении предела можно применять несколько раз.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^3}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)'}{(6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Решения заданий типа 51–60

Теоретический справочник

Дифференцированием функции $y=f(x)$ называют нахождение ее производной $y'=\dfrac{dy}{dx}$, которое выполняется с помощью правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций.

Правила дифференцирования

1^0. $(c)' = 0$, где c – постоянная;

2^0. $(x)' = 1$;

Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то:

3^0. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4^0. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

5^0. $(c \cdot u)' = c(u)'$;

6^0. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$;

7^0. Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ сложная функция, то: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in R$
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

9. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

13. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Пример 1. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Заменяя корни степенями с дробными показателями, получаем $y = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2+x^{\frac{2}{3}}}$. По правилу дифференцирования дроби (6^0) и суммы (3^0) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2+x^{\frac{2}{3}}}\right)' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right) - x^{\frac{1}{2}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)'}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right) - x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2} =$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{6}}}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2}=\left|\begin{array}{c}\text{приведем}\\ \text{подобные}\\ \text{члены}\end{array}\right|=\frac{x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2}=\left|\begin{array}{l}\text{преобразуем,}\\ \text{умножив}\\ \text{числитель и}\\ \text{знаменатель}\\ \text{на } \ x^{\frac{1}{2}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}\right)\cdot x^{\frac{1}{2}}}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{6}x^{\frac{2}{3}}}{\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}=\frac{6-\sqrt[3]{x^2}}{6\cdot\left(2+\sqrt[3]{x^2}\right)^2\cdot\sqrt{x}}.$$

Пример 2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

Решение. По правилу дифференцирования дроби (6^0), используя табличные формулы (6,7) и применяя правило дифференцирования сложной функции (7^0), получим

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot 2\sin^2 x-\cos x\cdot\left(2\sin^2 x\right)'}{\left(2\sin^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot 2\sin^2 x-\cos x\cdot 2\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x}{4\sin^4 x}=\frac{-2\sin^3 x-4\sin x\cdot\cos^2 x}{4\sin^4 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{преобразуем}\\ \text{числитель}\end{array}\right|=\frac{-2\sin x\left(\sin^2 x+2\cos^2 x\right)}{4\sin^4 x}=\left|\begin{array}{l}\text{сократим}\\ \text{на } 2\sin x\end{array}\right|=$$

$$-\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{2\sin^3 x}=\left|\begin{array}{c}\text{заменим}\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\end{array}\right|=-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$$

Пример 3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Используя правило дифференцирования произведения (4^0), правило дифференцирования сложной функции (7^0) и табличные формулы (1, 12), получим

$$\frac{dy}{dx} = \left(x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} \right)' = (x)' \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} \right)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{1+1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\left(2-x^2\right) \cdot 2\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\left(2-x^2\right) \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 4. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $\begin{cases} x = \cos^2 \frac{t}{2}, \\ y = \ln \sin \frac{t}{2}. \end{cases}$

Решение. В этом примере функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, причем функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$, тогда по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Следовательно, нужно найти производные от x и y по параметру t:

$$x'_t = \left(\cos^2 \frac{t}{2} \right)' = 2 \cdot \cos\frac{t}{2} \cdot \left(\cos\frac{t}{2} \right)' = 2\cos\frac{t}{2} \cdot \left(-\sin\frac{t}{2} \right) \cdot \left(\frac{t}{2} \right)' =$$

$$-2\cos\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left|\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\sin t\,;$$

$$y'_t=\left(\ln\sin\frac{t}{2}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\left(\sin\frac{t}{2}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)'=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{-\frac{1}{2}\sin t}=-\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\sin t}.$$

Ответ: $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\sin t},\\ x=\cos^2\dfrac{t}{2}.\end{cases}$

Решение задания типа 61–70

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\dfrac{x^2-x}{2-x}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение. Исследование функций и построение их графиков проводится по следующей схеме:

1) найти область определения функции $D(y)$; исследовать функцию на четность и нечетность;

2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить характер разрыва;

3) найти асимптоты графика функции;

4) найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;

5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;

6) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
7) построить график функции.

1. Область определения функции: $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Проверим функцию на четность, нечетность: $y(-x)=\dfrac{x^2+x}{2+x}\neq -y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$. Значит функция ни четная, ни нечетная.

2. Точка разрыва x = 2, причем $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2-x}{2-x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-x}{2-x}=-\infty$, следовательно, x = 2 является вертикальной асимптотой графика функции.

3. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$, для этого вычислим

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x(2-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{2x-x^2}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-x}=-1.$$

Таким образом, прямая $y=-x-1$ является наклонной асимптотой графика функции.

4. Интервалы возрастания, убывания и экстремумы определим по следующей схеме:

а) находим первую производную $f'(x)$;

б) находим критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x)$=0 или $f'(x)$ не существует;

в) область определения разбиваем критическими точками на конечное число интервалов монотонности, в каждом из которых $f'(x)$ имеет строго определенный знак;

г) в соответствии с достаточными условиями определяем интервалы возрастания, убывания функции и ее экстремумы.

Итак,

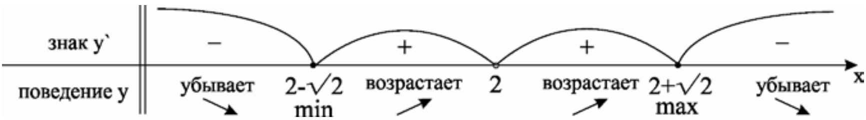
а) $y'=\left(\dfrac{x^2-x}{2-x}\right)'=\dfrac{(x^2-x)'(2-x)-(2-x)'(x^2-x)}{(2-x)^2}=$

$$=\frac{(2x-1)(2-x)+x^2-x}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2-2+x+x^2-x}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}=$$

$$=-\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2}.$$

б) критические точки находим из уравнения $-\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2}=0$.
Отсюда $x^2-4x+2=0$, следовательно, $x_1=2-\sqrt{2}$, $x_2=2+\sqrt{2}$.

в) область определения разбиваем критическими точками на интервалы монотонности следующим образом:



г) вычисляем экстремумы функции:

$$y_{\min}=y\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2-2+\sqrt{2}}{2-2+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3;$$

$$y_{\max}=y\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2-2-\sqrt{2}}{2-2-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}-3.$$

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и ее точки перегиба. Вычислим y'':

$$y''=-\left(\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2}\right)'=-\frac{\left(x^2-4x+2\right)'(2-x)^2-\left(x^2-4x+2\right)\cdot\left((2-x)^2\right)'}{(2-x)^4}=$$

$$= -\frac{(2x-4)(2-x)^2 + 2(2-x)\left(x^2-4x+2\right)}{(2-x)^4} =$$

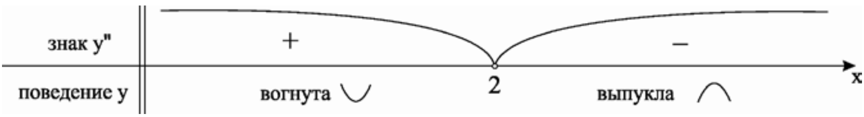
$$= -\frac{2(2-x)\left((x-2)(2-x)+x^2-4x+2\right)}{(2-x)^4} =$$

$$= -\frac{2(2-x)\left(2x-4-x^2+2x+x^2-4x+2\right)}{(2-x)^4} = \frac{4}{(2-x)^3}.$$

Найдем точки, в которых $y''(x)$=0 или $y''(x)$ не существует:

$y'' = \dfrac{4}{(2-x)^3} = 0$ – нет решений, y'' не существует, если $(2-x)^3 = 0$, откуда $x = 2$.

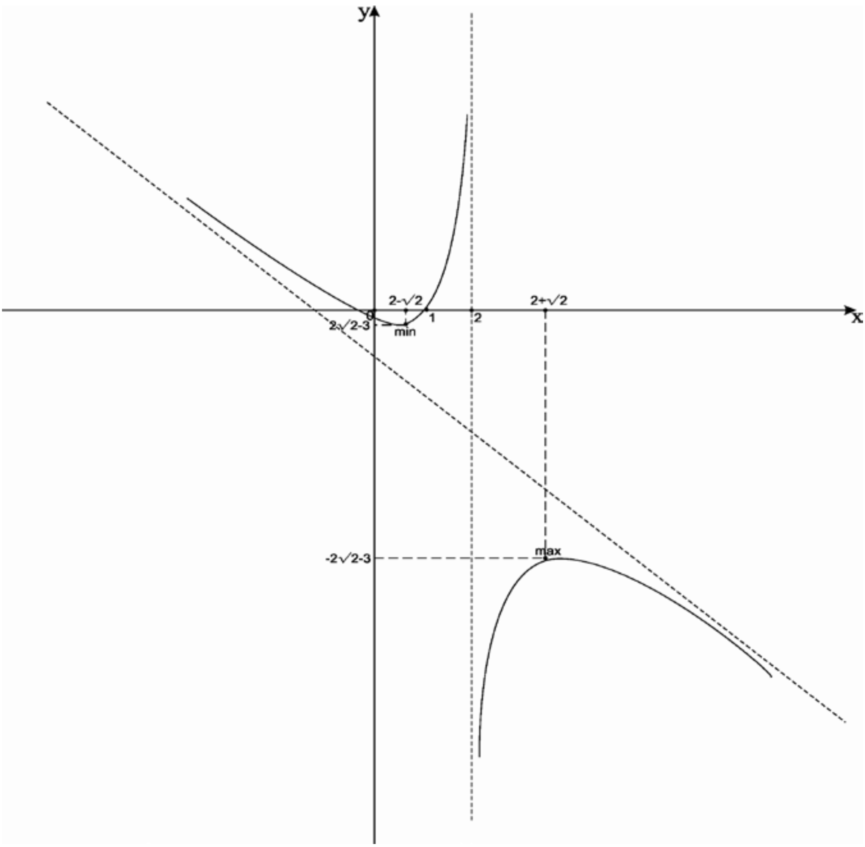
Находим интервалы знакопостоянства для y'':



Так как $x = 2$ не входит в $D(y)$, то точек перегиба графика нет.

6. Найдем точки пересечения графика с осями координат: если $x = 0$, то $y = 0$, если $y = 0$, то $x^2 - x = 0$ или $x = 0$ и $x = 1$. Следовательно, график проходит через точки $(0;0)$, $(1;0)$.

7. Используя полученные результаты исследования, строим график функции.


y
x
0
2-√2
2+√2
1
2
2√2-3
min
max
-2√2-3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

Решение заданий типа 71–80

Даны функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Найти: 1) градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0; 2) производную функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$.

Например, $u = (3x - y^2 + z)e^{3y-2z}$, $M_0(-1;2;3)$, $\bar{a} = (-6;8;0)$.

Решение.

1. Градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 – это вектор

$$\overline{\operatorname{grad} u(M_0)} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\bar{k},$$

где $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ – значения частных производных функции $u = f(x, y, z)$ по переменным x, y, z соответственно, в точке M_0.

Найдем частные производные функции $u = (3x - y^2 + z)e^{3y-2z}$. Частная производная по переменной x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменных y и z и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x}$. Таким образом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3y-2z}(3x - y^2 + z)'_x = 3e^{3y-2z}.$$

При вычислении $\frac{\partial f}{\partial y}$ (частной производной по переменной y) переменные x и z считают постоянными. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(3x-y^2+z\right)_y'\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot e^{3y-2z}\cdot\left(3y-2z\right)_y'=$$

$$=-2y\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot 3e^{3y-2z}=\left(9x-3y^2+3z-2y\right)e^{3y-2z}.$$

При вычислении $\frac{\partial f}{\partial z}$ (частной производной по переменной z) переменные x и y считают постоянными. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(3x-y^2+z\right)_z'\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot\left(e^{3y-2z}\right)_z'=$$

$$=1\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot e^{3y-2z}\left(-2\right)=\left(1-6x+2y^2-2z\right)e^{3y-2z}.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0\left(-1;2;3\right)$:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}=3e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=3;$$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}=\left(-9-3\cdot 4+3\cdot 3-2\cdot 2\right)e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=-16;$$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}=\left(1-6\cdot\left(-1\right)+2\cdot 4-2\cdot 3\right)e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=9.$$

Тогда $\overline{\operatorname{grad} u\left(M_0\right)}=3\bar{i}-16\bar{j}+\bar{k}$.

2. Производная функции $u=f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u\left(M_0\right)}{\partial\bar{a}}=\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}=3$, $\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}=-16$, $\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}=9$ вычислены в предыдущем задании этой задачи, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, которые вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Для вектора $\overline{a} = (-6;8;0)$ $\cos\alpha = \dfrac{-6}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2}} = \dfrac{-6}{10}$; $\cos\beta = \dfrac{8}{10}$; $\cos\gamma = 0$. Тогда производная функции по направлению вектора $\overline{a}$ в точке M_0

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \overline{a}} = 3 \cdot \left(-\frac{6}{10}\right) - 16 \cdot \frac{8}{10} + 9 \cdot 0 = -\frac{146}{10} = -14{,}6.$$

Решения заданий типа 81–90

Производятся два вида товаров, объемы производства которых x и y, цены на эти товары p_1 и p_2, соответственно, затраты на производство задаются функцией издержек $S = S(x, y)$. Определить при каких объемах производства данных товаров прибыль будет максимальной; найти ее максимальное значение.

Например, $p_1 = 8$ (у. е.), $p_2 = 10$ (у. е.), $S(x, y) = x^2 + xy + y^2$ (у. е.).

Решение. Так как товары производятся в объемах x и y, то функция прибыли $P(x, y)$ будет иметь вид $P(x, y) = p_1 x + p_2 y - S(x, y)$ или $P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$. Требуется найти значения переменных x и y, при которых эта функция примет максимальное значение, при условии, что $x \geq 0, y \geq 0$. Т.е. надо найти максимум функции двух переменных $P(x, y)$.

Для этого найдем точки возможного экстремума этой функции, т.е. точки в которых

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

В нашей задаче $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 8 - 2x - y$; $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 10 - x - 2y$, поэтому система имеет вид:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0 \\ 10 - x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, находим $x_0 = 2, \quad y_0 = 4$, т.е. точка $M_0(2;4)$ является точкой возможного экстремума. Если в точке M_0 определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$ и $\dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x^2} < 0$, то точка M_0 является точкой локального максимума функции $P(x,y)$. Здесь $\dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x \partial y}$ – значения частных производных второго порядка функции $P(x,y)$ в точке M_0.

Вычислим эти частные производные:

$$\frac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x^2} = (8 - 2x - y)_x' = -2;$$

$$\frac{\partial^2 P(M_0)}{\partial y^2} = (10 - x - 2y)_y{}' = -2\,;$$

$$\frac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x \partial y} = (8 - 2x - y)_y{}' = -1\,.$$

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$ и $\frac{\partial^2 P(M_0)}{\partial x^2} = -2 < 0$, значит, точка $M_0(2;4)$ является точкой экстремума функции прибыли $P(x, y)$. Это означает, что, если объемы производства товаров первого и второго видов будут равны 2 и 4, соответственно, то прибыль будет максимальной и ее значение

$$P_{\max} = P(M_0) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 4 - 2 \cdot 4 - 16 = 28 \text{ (у. е.)}.$$

Решения заданий типа 91–100

Теоретический справочник

Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$ – это определение множества функций $F(x) + c$, где $F(x)$ – первообразная, т.е. $F'(x) = f(x)$; c – произвольная постоянная.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,.$$

При интегрировании используют свойства неопределенных интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла

1^0. $\int dF(x) = F(x) + c$

2^0. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3^0. $\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx, \quad c \neq 0$

4^0. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов

Пусть $u = u(x)$ дифференцируемая функция.

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5. $\int \sin u du = -\cos u + c$

6. $\int \cos u du = \sin u + c$

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + c$

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + c$

9. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + c, \quad a \neq 0$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c, \quad |a| > |u|$

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|, \quad a \neq 0$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + c, \quad a \neq 0$.

Решения заданий типа 91–100

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int\left((1-2x)^3-\frac{1}{2}\text{tg}4x\right)dx$. Результат проверить дифференцированием.

Решение.

$$\int\left((1-2x)^3-\frac{1}{2}\text{tg}4x\right)dx=\left|\begin{array}{l}\text{применим}\\ \text{свойство } 4^0\end{array}\right|=\int(1-2x)^3dx-\int\frac{1}{2}\text{tg}4xdx.$$

Найдем каждый интеграл отдельно.

$$\int(1-2x)^3dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{т.к.подынтегральная функция и дифференциал имеют}\\ \text{разные аргументы, сделаем замену переменной}\quad 1-2x=t.\\ \text{Дифференцируя последнее равенство, получим:}\\ d(1-2x)=dt\Rightarrow -2dx=dt\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{2}.\end{array}\right|=$$

$$=\int t^3\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right)=\left|\text{свойство } 3^0\right|=-\frac{1}{2}\int t^3dt=\left|\begin{array}{l}\text{табличный}\\ \text{интеграл } 2\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+c_1=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{возвратимся к прежней}\\ \text{переменной } x,\text{ учитывая,}\\ \text{что } t=1-2x\end{array}\right|=-\frac{1}{8}(1-2x)^4+c_1.$$

Найдем второй интеграл.

$$\int\frac{1}{2}\text{tg}4xdx=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\text{tg}4xdx=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{т.к. у подынтегральной функции}\\ \text{и дифференциала разные аргументы,}\\ \text{сделаем замену переменной}\quad 4x=t\Rightarrow\\ x=\dfrac{t}{4},\quad dx=\dfrac{1}{4}dt.\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\operatorname{tg}t\cdot\frac{1}{4}dt=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{8}\int\operatorname{tg}t\;dt=\frac{1}{8}\int\frac{\sin t}{\cos t}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{функции}\sin t\text{ и }\cos t\text{ связаны операцией}\\ \text{дифференцирования, поэтому сделаем}\\ \text{замену переменной}\cos t=z, d\cos t=dz\Rightarrow\\ \Rightarrow-\sin tdt=dz\Rightarrow\sin tdt=-dz\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{-dz}{z}=\left|\begin{array}{l}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{dz}{z}=\left|\begin{array}{l}\text{табличный}\\ \text{интеграл 3}\end{array}\right|=-\frac{1}{8}\ln|z|+c_2=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{возвратимся к исходной переменной}\\ x,\text{ учитывая, что }z=\cos t, t=4x\end{array}\right|=-\frac{1}{8}\ln|\cos 4x|+c_2.$$

Итак,

$$\int\left((1-2x)^3-\frac{1}{2}\operatorname{tg}4x\right)dx=-\frac{1}{8}(1-2x)^4+c_1+\frac{1}{8}\ln|\cos 4x|-c_2=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{обозначим}\\ c_1-c_2=c\end{array}\right|=-\frac{1}{8}(1-2x)^4+\frac{1}{8}\ln|\cos 4x|+c.$$

Проверка результата дифференцированием:

$$\left(-\frac{1}{8}(1-2x)^4+\frac{1}{8}\ln|\cos 4x|+c\right)'=-\frac{1}{8}\cdot 4(1-2x)^3\cdot(-2)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos 4x}\cdot(-\sin 4x)\cdot 4=$$

$$= (1-2x)^3 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}4x .$$

Верно.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int x \cdot \cos^2 x\, dx$. Результат проверить дифференцированием.

Решение.

$$\int x \cdot \cos^2 x\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array} \right| = \int x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} \text{свойство} \\ 3^0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int (x + x\cos 2x)dx = \left| \begin{array}{c} \text{свойство} \\ 4^0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x \cdot \cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} \text{первый} - \text{табличный} \\ \text{интеграл 2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int x \cdot \cos 2xdx .$$

Найдем $\int x \cdot \cos 2xdx$ с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu ,$$

где функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ выберем таким образом, чтобы интеграл $\int vdu$ получился табличный.

$$\int x\cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } u = x,\ du = dx. \\ \text{Тогда } dv = \cos 2xdx,\ \int dv = \int \cos 2xdx \\ v = \int \cos 2xdx = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x dx = x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x d2x =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{свойство } 3^0\\ \text{и табличный}\\ \text{интеграл } 5\end{array}\right| = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c\ .$$

Окончательно

$$\int x\cdot\cos^2 x dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) + c =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c\ .$$

Проверка результата дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c\right)' =$$

$$\frac{1}{4}\cdot 2x + \frac{1}{4}(\sin 2x + x\cdot\cos 2x\cdot 2) - \frac{1}{8}\sin 2x\cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cdot\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot x = x\cdot\cos^2 x\ .$$

Верно.

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{3x^2}{x^3-3x+2}dx$.

Решение.

$$\int\frac{3x^2}{x^3-3x+2}dx = \left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right| = 3\int\frac{x^2}{x^3-3x+2}dx\ .$$

Подынтегральная функция $\dfrac{x^2}{x^3-3x+2}$ является правильной дробью, т.к. степень числителя строго меньше степени знаменателя. Разложим знаменатель на простейшие множители, решив кубическое уравнение $x^3-3x+2=0$. Подстановкой убеждаемся, что $x = 1$ – корень данного уравнения. Разделим многочлен x^3-3x+2 на $x-1$:

$$\frac{x^3-3x+2}{x-1}=x^2+x-2\,.$$

Решая квадратное уравнение $x^2+x-2=0$, находим его корни $x_1=1$ и $x_2=-2$. Тогда $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, а $x^3-3x+2=$ $=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$.

Запишем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей с неизвестными коэффициентами A, B, C:

$$\frac{x^2}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\,.$$

Правую часть приведем к общему знаменателю и сравним числители обеих частей:

$$x^2=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2\,.$$

Придавая переменной x произвольные значения, получим значения коэффициентов A, B, C:

при $x=1$: $1=3B\Rightarrow B=\dfrac{1}{3}$,

при $x=-2$: $4=9C\Rightarrow C=\dfrac{4}{9}$,

при $x=0$: $0=-2A+2B+C\Rightarrow A=\dfrac{5}{9}$.

Таким образом, исходная подынтегральная дробь разложится на сумму:

$$\frac{x^2}{x^3-3x+2}=\frac{\frac{5}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{4}{9}}{x+2}.$$

Возвратимся к интегралу:

$$3\int\frac{x^2}{x^3-3x+2}dx=3\int\left(\frac{\frac{5}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{4}{9}}{x+2}\right)dx=\left|\begin{matrix}\text{свойства}\\ 3^0 \text{ и } 4^0\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+2}=\left|\begin{matrix}\text{свойство дифференциала}\\ d(x\pm c)=dx, c-\text{const}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int(x-1)^{-2}d(x-1)+\frac{4}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\left|\begin{matrix}\text{табличные}\\ \text{интегралы}\\ 3, 1, 3\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+c.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной дробью. Разложим ее знаменатель на простейшие множители, используя формулу разности квадратов:

$$1-x^4=\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)=(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right).$$

Тогда подынтегральная функция разложится на сумму простейших дробей с неизвестными коэффициентами A, B, C, D:

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Правую часть приведем к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2=A(1+x)\left(1+x^2\right)+B(1-x)\left(1+x^2\right)+(Cx+D)(1-x)(1+x).$$

Придавая переменной x произвольные значения, получим значения коэффициентов A, B, C, D:

при $x=1$: $\quad 1=4A\Rightarrow A=\frac{1}{4}$,

при $x=-1$: $\quad 1=4B\Rightarrow B=\frac{1}{4}$,

при $x=0$: $\quad 0=A+B+D\Rightarrow 0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+D\Rightarrow D=-\frac{1}{2}$,

при $x=2$: $\quad 4=15A-5B-6C-3D\Rightarrow 4=\frac{15}{4}-\frac{5}{4}-6C+\frac{3}{2}\Rightarrow C=0$.

Итак, получим разложение

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{2}}{1+x^2}.$$

Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{2}}{1+x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}\text{свойства}\\ 3^0 \text{ и } 4^0\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\left|\begin{matrix}\text{свойство дифференциала}\\ d(1-x)=-dx,\ d(1+x)=dx\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x)}{1-x}+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+x)}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\left|\begin{array}{c}\text{табличные}\\ \text{интегралы}\\ 3{,}3{,}9\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-x|+\frac{1}{4}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c\,.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}+\sqrt[4]{3x}}$.

Интегралы от иррациональных функций находятся с помощью подстановок, позволяющих избавиться от иррациональности.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x}+\sqrt[4]{3x}}=\left|\begin{array}{l}\text{замена }\sqrt[4]{3x}=t\Rightarrow 3x=t^4,\ x=\dfrac{t^4}{3}\\ dx=d\,\dfrac{t^4}{3}\Rightarrow dx=\dfrac{4}{3}t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{4}{3}t^3dt}{t^2+t}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right|=\frac{4}{3}\int\frac{t^3}{t^2+t}dt=\frac{4}{3}\int\frac{t^3}{t(t+1)}dt=\frac{4}{3}\int\frac{t^2}{t+1}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{в числителе добавим}\\ \text{и вычтем единицу}\end{array}\right|=\frac{4}{3}\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=\frac{4}{3}\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=$$

$$=\frac{4}{3}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 4^0\end{array}\right|=\frac{4}{3}\int tdt-\frac{4}{3}\int dt+\frac{4}{3}\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{табличные}\\ \text{интегралы}\\ 2{,}1{,}3\end{array}\right|=\frac{4}{3}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{4}{3}t+\frac{4}{3}\ln|t+1|+c=\left|\begin{array}{l}\text{возвратимся к переменной }x,\\ \text{учитывая, что }t=\sqrt[4]{3x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{3x}+\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt[4]{3x}+1\right)+c\,.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$.

Если подынтегральная функция является дробно-рациональной от функций $\sin x$ и $\cos x$, то применяют подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, откуда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dx}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}=\left|\begin{array}{l}\text{замена } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\left|\begin{array}{l}\text{запишем подынтегральную}\\ \text{функцию в виде одной дроби}\end{array}\right|=$$

$$\int\frac{1+t^2}{2t}dt=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 3^0\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\left|\begin{array}{c}\text{свойство}\\ 4^0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int tdt=\left|\begin{array}{c}\text{табличные}\\ \text{интегралы}\\ 3,\ 2\end{array}\right|=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+c=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{возвратимся к переменной } x,\\ \text{учитывая, что } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+c.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$.

Выделим у функции в нечетной степени в качестве множителя первую степень и внесем полученную функцию под знак дифференциала.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \text{то } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{замена переменной} \\ \sin x = t \end{array} \right| = \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{табличные} \\ \text{интегралы} \\ 2 \end{array} \right| = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

Решение заданий типа 101–110

Теоретический справочник

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-либо первообразная этой функции, то для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ справедлива формула Ньютона–Лейбница (1).

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Определенный интеграл используется для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел, в приложениях физики и техники, при моделировании экономических процессов.

Объем q произведенной продукции за промежуток времени от a до b при производительности труда $f(t)$ вычисляется по формуле (2).

$$q = \int_a^b f(t)dt\,. \tag{2}$$

Потребительский излишек CS при покупке данного товара – превышение общей стоимости, которую потребитель готов уплатить за все единицы товара, над его реальными расходами на их приобретение, вычисляется по формуле (3).

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q)dQ - P^* \cdot Q^*\,, \tag{3}$$

где Q – количество товара;

P – цена единицы товара;

$f(Q)$ – функция спроса;

$(P^*; Q^*)$ – точка равновесия (состояние рыночного равновесия характеризуют такие цены и количество, при которых объем спроса совпадает с величиной предложения).

Решение задания типа 101–105

Сменная производительность труда рабочего описывается функцией

$$f(t) = -0{,}2t^3 + 2t^2\,,$$

где t – время в часах, $0 \le t \le 7$. Определить объем выпуска продукции в течение 22 рабочих дней бригадой, состоящей из 10 человек.

Решение. Воспользуемся формулой (2). Тогда количество продукции, произведенной одним рабочим за 7 часов,

$$q_1 = \int_0^7 \left(-0{,}2t^3 + 2t^2\right)dt = \left|\text{формула } 1\right| = \left(-0{,}2 \cdot \frac{t^4}{4} + 2 \cdot \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^7 =$$

$$= -0{,}2\cdot\frac{7^4}{4}+2\cdot\frac{7^3}{3}\approx 108{,}6 \text{ (усл. ед.).}$$

Объем продукции, выпущенной в течении 22 рабочих дней бригадой из 10 человек,

$$q = q_1\cdot 22\cdot 10 \approx 108{,}6\cdot 220 = 23892 \text{ (усл. ед.)}$$

Ответ: 23892 (усл. ед.).

Решение задания типа 106–110

Известно, что спрос на некоторый товар описывается функцией $q=\dfrac{8000}{p^3}m$, а предложение данного товара характеризуется функцией $q=500p$. Найти величину излишка потребителя при покупке данного товара.

Решение. Для расчета излишка потребителя сначала определим параметры рыночного равновесия $\left(p^*,q^*\right)$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} q=\dfrac{8000}{p^3} \\ q=500p \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение на первое

$$\frac{500p\cdot p^3}{8000}=1 \Rightarrow p^4=16 \Rightarrow \begin{cases} p^*=2 \\ q^*=1000 \end{cases}.$$

Запишем формулу для вычисления потребительского излишка (3), где $f\left(q\right)$ – функция, обратная функции $q=\dfrac{8000}{p^3}$, т.е.

$$f(q)=\sqrt[3]{\frac{8000}{q}}=20q^{-\frac{1}{3}}.$$

Тогда

$$CS=\int_0^{1000}20q^{-\frac{1}{3}}dq-2\cdot 1000=\left.\frac{20\cdot q^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^{1000}-2000=$$

$$30\cdot\sqrt[3]{1000^2}-2000=3000-2000=1000.$$

Ответ: 1000 (у. е.).

Решение заданий типа 111–120

Теоретический справочник

Дифференциальным уравнением I-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=y(x)$ и ее производную $y'=y'(x)$, т.е. уравнение вида

$$F(x,y,y')=0 \text{ или } y'=f(x,y).$$

Общим решением дифференциального уравнения называется такая функция $y=\varphi(x,c)$, $c-\mathrm{const}$, определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале (a,b), которая обращает данное уравнение в тождество, т.е.

$$F(x,\varphi(x,c),\varphi'(x,c))\equiv 0.$$

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего при конкретном значении произвольной постоянной c, которую можно определить из условия $y(x_0)=y_0$, называемое начальным условием.

Чтобы решить дифференциальное уравнение I порядка, нужно определить его вид, найти его общее решение, а затем частное решение.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения I порядка $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy = ydx$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=1$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение, разделив обе его части на dx:

$$\left(\sqrt{xy}-x\right)\frac{dy}{dx} = y \text{ или } \left(\sqrt{xy}-x\right)y' = y .$$

Затем разделим обе части уравнения на $\sqrt{xy}-x \neq 0$:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{xy}-x} .$$

Разделив правую часть уравнения (и числитель, и знаменатель) на $x \neq 0$, получим $y' = \dfrac{y/x}{\sqrt{y/x}-1}$ – однородное дифференциальное уравнение I порядка, т.к. оно имеет вид $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Сделаем замену переменной: $\dfrac{y}{x} = u, \quad y = xu, \quad y' = u + xu'$. Тогда исходное уравнение примет вид $u + xu' = \dfrac{u}{\sqrt{u}-1}$ или $xu' = \dfrac{u}{\sqrt{u}-1} - u$ или $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u - u\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1}$. Пользуясь свойством пропорции, соберем возле дифференциалов соответствующие переменные:

$$\frac{\sqrt{u}-1}{2u - u\sqrt{u}}du = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{\sqrt{u}-1}{2u-u\sqrt{u}}\,du = \int \frac{dx}{x}.$$

Найдем интеграл, стоящий слева:

$$\int \frac{\sqrt{u}-1}{2u-u\sqrt{u}}\,du = \left| \begin{matrix} \text{замена переменной} \\ \sqrt{u}=t,\, u=t^2,\, du=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{t-1}{2t^2-t^3}\cdot 2tdt =$$

$$= \int \frac{(t-1)\cdot 2t}{t\left(2t-t^2\right)}dt = -\int \frac{2(1-t)}{2t-t^2}dt = -\int \frac{d\left(2t-t^2\right)}{2t-t^2} =$$

$$= -\ln\left|2t-t^2\right| + c_1 = -\ln\left|2\sqrt{u}-u\right| + c_1.$$

Найдем интеграл, стоящий справа: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_2$. Следовательно, $-\ln\left|2\sqrt{u}-u\right| + c_1 = \ln|x| + c_2$, или, возвращаясь к прежним переменным и обозначая $c_2 - c_1 = c$, получим $-\ln\left|2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + c$. Преобразуем последнее равенство, используя свойство логарифма $\ln a + \ln b = \ln a\cdot b$, и получим общее решение $\ln\left|2\sqrt{xy}-y\right| + c = 0$. Подставив в последнее соотношение начальное условие $x=1,\, y=1$, найдем конкретное значение произвольной постоянной: $\ln\left|2\sqrt{1}-1\right| + c = 0$ или $c=0$. Тогда частное решение примет вид $\ln\left|2\sqrt{xy}-y\right| = 0$ или $2\sqrt{xy}-y=1$.

Ответ: $2\sqrt{xy}-y=1$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения I порядка $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 4$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x \cdot (x-1) \neq 0$:

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)} \quad \text{или} \quad y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{(x-1)}.$$

Данное уравнение является линейным, т.к. имеет вид $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ и решается заменой $y = u \cdot v$, где $u = u(x), v = v(x)$ – неизвестные функции; $y' = u' \cdot v + uv'$.

Подставляя выражения для y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' + \frac{1}{x(x-1)} \cdot u \cdot v = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие функцию u:

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x(x-1)} \cdot v\right) = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

В качестве функции v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $v' + \frac{1}{x(x-1)} \cdot v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x(x-1)}$. Интегрируем последнее соотношение, разделяя переменные:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x(x-1)} \text{ или } \ln|v| = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx,$$

$$\ln|v| = \ln|x| - \ln|x-1|,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|,$$

$$v = \frac{x}{x-1}.$$

Тогда функция u определится из уравнения $u'v = \frac{x(2x-1)}{x-1}$. Подставляя найденную функцию $v = v(x)$, получим $u' \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$ или $\frac{du}{dx} = 2x-1$ или $du = (2x-1)dx$. Интегрируя последнее уравнение, найдем функцию $u = u(x)$: $u = x^2 - x + c$. Итак, общее решение имеет вид $y = u \cdot v$ или $y = \left(x^2 - x + c\right) \cdot \frac{x}{x-1}$. Подставляя начальные данные $x = 2,\quad y = 4$, получаем уравнение $4 = (4 - 2 + c) \cdot \frac{2}{1}$, откуда $c = 0$. Частное решение имеет вид $y = x^2$.

Решение заданий типа 121–130

Теоретический справочник

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, где p и q – некоторые числа, $f(x) \neq 0$ – заданная функция. Общее решение данного уравнения представляет собой сумму общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения $(y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0)$ и частного решения y^* данного неоднородного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения II порядка $y'' + 4y' - 5y = 12x \cdot e^x$.

Решение. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = y_0 + y^*$. Запишем соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y' - 5y = 0$ и составим для него характеристическое уравнение: для этого заменим y'' на λ^2; y' на λ, y на $\lambda^0 = 1$. Получим квадратное уравнение $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ с корнями $\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -5. \end{array}\right.$

Т.к. корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение y_0 однородного уравнения будет $y_0 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ или для нашего примера $y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x}$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения y^* будем искать в том же виде, какова правая часть, но с неопределенными коэффициентами, и с учетом кратности корней характеристического уравнения, а именно, $y^* = (Ax + B)e^{\alpha x} \cdot x^s$. В нашем случае $\alpha = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Таким образом, $y^* = (Ax + B)e^{x} \cdot x$.

Определим неизвестные коэффициенты *A* и *B*. Для этого найдем $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$:

$$\left(y^*\right)' = \left(\left(Ax^2 + Bx\right)e^x\right)' = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right)e^x,$$

$$\left(y^*\right)'' = (2Ax + 2A + B)e^x + \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right)e^x,$$

и подставим значения y^*, $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение:

$$\left(2Ax + 2A + B + Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right)e^x + 4\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right)e^x -$$

$$-5\left(Ax^2 + Bx\right)e^x = 12xe^x.$$

Сократим обе части равенства на $e^x \neq 0$ и приведем подобные слагаемые: $2A + 6B + 12Ax = 12x$. Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x: $12A = 12$;

при x^0: $2A + 6B = 0$.

Получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 2A + 6B = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$A = 1,$$

$$B = -\frac{1}{3}.$$

Итак, $y^* = \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x \cdot x$ или $y^* = \left(x^2 - \frac{x}{3}\right)e^x$. Окончательно, общее решение уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} + \left(x^2 - \frac{x}{3}\right)e^x$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения II порядка $y'' + 2y' + y = 3x \cdot \cos x$.

Решение. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = y_0 + y_0^*$. Запишем соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = -1$. Т.к. корни характеристического уравнения действительные и кратные, то общее решение y_0 однородного уравнения будет $y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ или в нашем случае $y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Частное решение y^* будем искать в том же виде, какова правая часть $f(x)$, но с неопределенными коэффициентами A, B, C, D: $y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$.

Найдем $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$:

$$\left(y^*\right)' = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x =$$

$$= (A + Cx + D)\cos x + (C - Ax - B)\sin x .$$

$$\left(y^*\right)'' = C\cos x - (A + Cx + D)\sin x - A\sin x + (C - Ax - B)\cos x =$$

$$= (2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x .$$

Подставим y^*, $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение и, приведя подобные слагаемые, получим:

$$(2C + 2A + 2D + 2Cx)\cos x + (-2A + 2C - 2B - 2Ax)\sin x = 3x\cos x .$$

Сравним коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases} 2C + 2A + 2D + 2Cx = 3x \\ -2A + 2C - 2B - 2Ax = 0 \end{cases}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной x; получим систему

$$\begin{cases} 2C = 3 \\ 2C + 2A + 2D = 0 \\ -2A = 0 \\ -2A + 2C - 2B = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $A = 0$, $C = 3/2$, $B = 3/2$, $D = -3/2$.

Тогда $y^* = \frac{3}{2}\cos x + \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sin x$.

Окончательно, общее решение уравнения примет вид:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{3}{2}\cos x + \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sin x .$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 3

Решение заданий типа 131–140

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4n^2+5}}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Данный числовой ряд является знакоположительным рядом, следовательно, для его исследования на сходимость можно применить радикальный признак Коши. Согласно этому признаку, если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если же $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. В нашем примере $u_n=\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4n^2+5}}{2n+1}\right)^n$. Применяя радикальный признак Коши,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4n^2+5}}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4n^2+5}}{2n+1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{под знаком арктангенса}\\ \text{числитель и знаменатель}\\ \text{разделим на } n\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{учитывая, что } \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \text{ получим}\end{array}\right|==\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Очевидно, что $\frac{\pi}{4}<1$, следовательно, данный ряд является сходящимся.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}{3n+7}$.

Решение. Данный числовой ряд является знакоположительным рядом, поэтому для его исследования на сходимость можно применить признак Даламбера. По признаку Даламбера, если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. Здесь u_{n+1} – член ряда с номером $(n+1)$ получается из формулы u_n, заменой n на $(n+1)$.

В нашем примере $u_n=\frac{\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}{3n+7}$, тогда

$$u_{n+1}=\frac{\sqrt{2(n+1)+1}\cdot 5^{n+1}}{3(n+1)+7}=\frac{\sqrt{2n+3}\cdot 5^n\cdot 5}{3n+10}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}\cdot 5^n\cdot 5}{3n+10}\div\frac{\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}{3n+7}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}\cdot 5^n\cdot 5(3n+7)}{(3n+10)\cdot\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}=\left|\text{сократим на } 5^n\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{3n+7}{3n+10}=$$

$$=5\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{3n+10}=5\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{3+\frac{10}{n}}=$$

$$=\begin{vmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{n}=0, & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{n}=0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0, & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0 \end{vmatrix}=5.$$

Очевидно, что 5 > 1, значит, данный ряд является расходящимся.

Решение заданий типа 141–150

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}$.

Решение. Данный ряд является обобщенным степенным рядом вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, где коэффициент $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}$, $a=-3$.

Областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ с точностью до границ, является интервал с центром в точке $x=a$ и радиусом R: $(a-R;a+R)$, где R – радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ на концах интервала при $x=a-R$ и $x=a+R$ необходимо исследовать отдельно. В нашем примере

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}>0,$$

тогда

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5(n+1)+4}\cdot 2^{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{5n+9}\cdot 2^{n+2}}>0.$$

Вычислим радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{5n+9}\cdot 2^{n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+9}\cdot 2^{n+2}}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n+9}{5n+4}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5+\frac{9}{n}}{5+\frac{4}{n}}}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n}=0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0\end{array}\right|=2.$$

Тогда интервал сходимости имеет вид $(-3-2;-3+2)$ или $(-5;-1)$.

Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала. Пусть $x=-5$, тогда подставив это значение в степенной ряд, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}$ или, преобразовав его, имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot\sqrt{5n+4}}$. Мы получили числовой знакочередующийся ряд, который исследуется признаком Лейбница.

Согласно признаку Лейбница, если в знакочередующемся ряде выполняются два условия:

1) члены ряда с возрастанием номера n, убывают по абсолютной величине;

2) предел абсолютной величины общего члена ряда равен нулю при $n\to\infty$, то такой ряд является сходящимся.

Проверим выполнимость условий Лейбница в нашем примере:

1) $|u_1|=\frac{1}{2\sqrt{9}}$, $|u_2|=\frac{1}{2\sqrt{13}}$, $|u_3|=\frac{1}{2\sqrt{17}}$, $|u_4|=\frac{1}{2\sqrt{21}}$, …, $|u_n|=\frac{1}{2\sqrt{5n+4}}$, $|u_{n+1}|=\frac{1}{2\sqrt{5n+9}}$, …

Очевидно, что члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{2\sqrt{9}}>\frac{1}{2\sqrt{13}}>\frac{1}{2\sqrt{17}}>\frac{1}{2\sqrt{21}}>\ldots>\frac{1}{2\sqrt{5n+4}}>\frac{1}{2\sqrt{5n+9}}>\ldots$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{5n+4}} = 0$.

Оба условия признака Лейбница выполняется, следовательно, при $x=-1$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}}$ сходится.

Пусть $x=-1$, тогда данный степенной ряд станет числовым знакоположительным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{5n+4}}$.

К исследованию этого ряда на сходимость применим признак сравнения с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится, если $\alpha>1$ и расходится если $\alpha\le 1$.

Для нашего примера используем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, здесь $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$, значит, данный ряд расходится.

Сравнение выполним посредством вычисления предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{5n+4}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5n+4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5+\frac{4}{n}}} =$$

$\left|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}=0\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, так как предел получился отличным от 0 и ∞, значит, исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ведет себя так же, как и тот ряд, с которым проводилось сравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, т.е. в нашем случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{5n+4}}$ расходится, а это означает, что при $x=-1$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{5n+4}\cdot 2^n}$ расходится. Итак, область сходимости данного степенного ряда: $x\in[-5;-1)$.

Решение задания типа 151–160

Производится залп из трех орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,9, вторым – 0,85, третьим – 0,95. Какова вероятность 1) хотя бы одного попадания в цель; 2) ровно двух попаданий.

Решение. Обозначим события A_i = {попадание i-м орудием в цель}, i = 1, 2, 3. Из условия задачи вероятности этих событий $P(A_1)=0{,}9;\ P(A_2)=0{,}85;\ P(A_1)=0{,}95$. Соответственно, вероятности противоположных событий $P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1$; $P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}85=0{,}15$; $P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}95=0{,}05$.

1) Требуется найти вероятность события A = {хотя бы одно попадание в цель}. Противоположное событие $\overline{A}=\{\text{нет ни одного попадания в цель}\}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$.

Так как события $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ независимы, то применима теорема умножения вероятностей:

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}15\cdot 0{,}05=0{,}00075.$$

Известно, что $P(A)+P(\overline{A})=1$. Отсюда

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}00075=0{,}99925.$$

2) Событие $B=\{\text{произошло ровно два попадания в цель}\}$ в алгебре событий с помощью событий A_1,A_2,A_3 можно записать как $B=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3$. Так как события A_i и $\overline{A}_i$, i = 1, 2, 3 независимы и несовместны, то по теоремам сложения и умножения вероятностей получим:

$$P(B)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3)=$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$

$$0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}05+0{,}9\cdot 0{,}15\cdot 0{,}95+0{,}1\cdot 0{,}85\cdot 0{,}95=0{,}247.$$

Решение задания типа 161–170

В продажу поступило 40 % телевизоров с первого завода, 50 % – со второго, 10 % – с третьего. Вероятность того, что телевизор, изготовленный на первом заводе, имеет дефект, равна 0,1. Для телевизоров, изготовленных на втором и третьем заводах, эти вероятности соответственно равны 0,15 и 0,2. 1) Какова вероятность приобрести исправный телевизор? 2) Приобретен исправный телевизор. Найти вероятность того, что он поступил с первого завода.

Решение.

1) Пусть событие A = {случайно купленный телевизор оказался исправным}. Это событие может произойти с одной из следующих гипотез: H_1 = {телевизор выпущен первым заводом}, H_2 = {телевизор выпущен вторым заводом}, H_3 = {телевизор выпущен третьим заводом}.

Из условия задачи вероятности гипотез $P(H_1)=\dfrac{40}{100}=0{,}4$; $P(H_2)=\dfrac{50}{100}=0{,}5$; $P(H_3)=\dfrac{10}{100}=0{,}1$.

При этом должно выполняться равенство $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$, что действительно так: 0,4 + 0,5 + 0,1 = 1.

Вычислим условные вероятности:

$$P_{H_1}(A)=\left\{\begin{matrix}\text{вероятность покупки исправного телевизора,}\\ \text{если он изготовлен } 1-\text{ым заводом}\end{matrix}\right\}=1-0{,}1=0{,}9.$$

Аналогично $P_{H_2}(A)=1-0{,}15=0{,}85$ и $P_{H_3}(A)=1-0{,}2=0{,}8$. Вероятность того, что наудачу купленный телевизор без дефекта, по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H3}(A)=$$

$$=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}5\cdot 0{,}85+0{,}1\cdot 0{,}8=0{,}865.$$

2) Пересчитаем вероятность гипотезы H_1 = {телевизор выпущен первым заводом}, если известно, что событие A = {случайно куп-

ленный телевизор оказался исправным} произошло, т.е. найдем условную вероятность $P_A(H_1)$.

По формуле Байеса $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}865}=0{,}416$.

Решение задания типа 171–180

Непрерывная СВ X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A\left(x^3-3x^2+3x\right), & 0<x\le 2.\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) коэффициент A;
2) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3) математическое ожидание СВ X;
4) вероятность события $X\in(1,2)$.

Решение

1. Из непрерывности функции распределения $F(x)$ и свойства $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ следует, что $\lim\limits_{x\to 2}A\left(x^3-3x^2+3x\right)=A(8-3\cdot 4+3\cdot 2)=2A\equiv 1$. Откуда $A=\dfrac{1}{2}$.

2. Плотность распределения вероятностей $f(x)$ найдем из формулы $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\left(3x^2-6x+3\right), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

3. Математическое ожидание $M(X)$ непрерывной СВ определяется формулой $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$. Так как функция $f(x)$ задана тремя различными выражениями на трех интервалах, то несобственный интеграл разобьется на сумму трех интегралов:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int\limits_{0}^{2} x\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-6x+3\right)dx+\int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}\left(3x^3-6x^2+3x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cdot 16-2\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 4\right)=1.$$

4. Вероятность события $X\in(1;2)$ найдем по формуле $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. В нашем случае $a=1; b=2$ и поэтому $P(1<X<2)=\frac{1}{2}\left(2^3-3\cdot 2^2+3\cdot 2\right)-\frac{1}{2}(1-3+3)=\frac{1}{2}$.

Решение задания типа 181–190

Зависимость выпуска валовой продукции (с.в. Y) от стоимости основных фондов (с.в. X) 50 предприятий представлена корреляционной таблицей

X \ Y	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7	m_i
0,6	1					1
1,8	2	5				7
3,0	1	6	8	5		20
4,2			9	8		17
5,4				2	3	5
m_j	4	11	17	15	3	n = 50

В первом столбце таблицы указаны наблюдаемые значения с.в. X (x_i), в последнем столбце – соответствующие частоты наблюдаемых значений (m_i). В первой строке таблицы указаны наблюдаемые значения с.в. Y (y_j), в последней строке – соответствующие частоты (m_j) появление этих значений. На пересечении строк и столбцов таблицы указаны частоты (m_{ij}) появления пары (x_i,y_j).

Требуется:

1. Найти уравнение прямой линии регрессии Y на X.
2. Найти уравнение прямой линии регрессии X на Y.
3. Построить графики полученных прямых.
4. Оценить тесноту корреляционной связи, используя выборочный коэффициент корреляции.

Решение.

1. Эмпирическую линейную функцию регрессии Y на X ищем в виде $y_x = a + bx$.

Используя метод наименьших квадратов, получим расчетные формулы для определения неизвестных параметров a и b, а именно, систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a + b\overline{x} = \overline{y} \\ a\overline{x} + b\overline{x^2} = \overline{x \cdot y}, \end{cases}$$

где выборочные средние $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x^2}$ и $\overline{x \cdot y}$ вычисляются по формулам:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i \ ;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} m_j \cdot y_j \ ;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i^2 \ ;$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij} \cdot x_i \cdot y_j \ .$$

В нашем случае

$$\overline{x} = \frac{1}{50}\left(0,6 \cdot 1 + 1,8 \cdot 7 + 3,0 \cdot 20 + 4,2 \cdot 17 + 5,4 \cdot 5\right) = 3,432;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{50}\left(0,3 \cdot 4 + 0,9 \cdot 11 + 1,5 \cdot 17 + 2,1 \cdot 15 + 2,7 \cdot 3\right) = 1,524;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}\left(0,6^2 \cdot 1 + 1,8^2 \cdot 7 + 3,0^2 \cdot 20 + 4,2^2 \cdot 17 + 5,4^2 \cdot 5\right) = 12,9744;$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{50}\big(0,6 \cdot 0,3 \cdot 1 + 1,8 \cdot 0,3 \cdot 2 + 1,8 \cdot 0,9 \cdot 5 + 3,0 \cdot 0,3 \cdot 1 + 3,0 \cdot 0,9 \cdot 6 +$$

$$+ 3,0 \cdot 1,5 \cdot 8 + 3,0 \cdot 2,1 \cdot 5 + 4,2 \cdot 1,5 \cdot 9 + 4,2 \cdot 2,1 \cdot 8 + 5,4 \cdot 2,1 \cdot 2 + 5,4 \cdot 2,7 \cdot 3\big) =$$

$$= 5,7528.$$

Подставив данные значения в систему уравнений, получим

$$\begin{cases} a + b \cdot 3,432 = 1,524 \\ a \cdot 3,432 + b \cdot 12,9744 = 5,7528 \end{cases}.$$

Решая систему, получим оценки параметров $a = 0,0246$ и $b = 0,4369$.

Окончательный вид уравнения регрессии *Y* на *X*: $y_x = 0,0246 + 0,4369x$.

2. Уравнение прямой линии регрессии *X* на *Y* ищем в виде $x_y = c + dy$, где числовые параметры c и d найдем из системы

$$\begin{cases} c + d\overline{y} = \overline{x} \\ c\overline{y} + d\,\overline{y^2} = \overline{x \cdot y} \end{cases}.$$

Выборочное среднее $\overline{y^2}$ вычислим по формуле $\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} m_j y_j^2$, а именно

$$\overline{y^2} = \frac{1}{50}\left(0{,}3^2 \cdot 4 + 0{,}9^2 \cdot 11 + 1{,}5^2 \cdot 17 + 2{,}1^2 \cdot 15 + 2{,}7^2 \cdot 3\right) = 2{,}7108 .$$

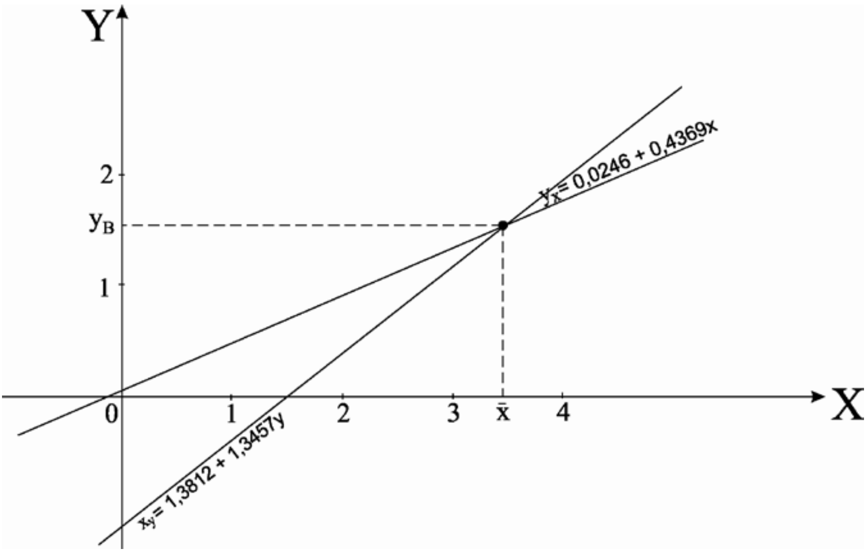
Подставив значения $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x^2}$ и $\overline{x \cdot y}$ в систему, получим:

$$\begin{cases} c + d \cdot 1{,}524 = 3{,}432 \\ c \cdot 1{,}524 + d \cdot 2{,}7108 = 5{,}7528 \end{cases}.$$

Откуда $c = 1{,}3812$ и $d = 1{,}3457$.

Окончательный вид уравнения регрессии X на Y: $x_y = 1{,}3812 + 1{,}3457 y$.

3. Построим графики найденных прямых регрессий.



4. Определим выборочный коэффициент корреляции r_B по формуле

$$r_B = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где выборочные средние квадратические отклонения σ_x и σ_y вычисляются по формулам $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$, $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$.

В нашем случае

$$\sigma_x = \sqrt{12{,}9774 - (3{,}432)^2} = 1{,}0949, \; \sigma_y = \sqrt{2{,}7108 - (1{,}524)^2} = 0{,}6231.$$

Тогда $r_B = \dfrac{5{,}7528 - 3{,}432 \cdot 1{,}524}{1{,}0949 \cdot 0{,}6231} = 0{,}7658$.

На практике теснота корреляционной связи оценивается по значению коэффициента r_B следующим образом:

$|r_B| < 0{,}1$ – пренебрежимо малая;

$0{,}1 \le |r_B| < 0{,}3$ – слабая;

$0{,}3 \le |r_B| < 0{,}7$ – существенная;

$0{,}7 \le |r_B| < 0{,}9$ – большая;

$|r_B| \ge 0{,}9$ – очень большая, близкая к функциональной.

Так как в нашем случае $r_B = 0{,}7658 > 0{,}7$, то теснота связи между случайными величинами X и Y большая.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Программные вопросы, контрольные задания
и методические указания для студентов-заочников
строительных специальностей экономического профиля

С о с т а в и т е л и :
ГУРИНА Татьяна Николаевна
МОРОЗ Ольга Александровна
ЯБЛОНСКАЯ Людмила Алексеевна

Технический редактор Д.А. Исаев
Компьютерная верстка Д.А. Исаева

Подписано в печать 25.08.2011.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,33 . Уч.-изд. л. 4,95. Тираж 100. Заказ 642.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.