

- уменьшить загрязняемость трубного пучка по воздушной стороне и увеличить длительность межремонтных периодов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Керн, Д. Развитые поверхности теплообмена: пер. с англ. / Д. Керн, А. Краус. – М.: Энергия, 1977. – 464 с.
2. Основы расчета и проектирования теплообменников воздушного охлаждения: справ. / под общ. ред. В. Б. Кунтыша, А. Н. Бессонного. – СПб.: Недра, 1996. – 512 с.
3. Теплоотдача и аэродинамическое сопротивление шахматных пучков из круглых труб с подогнутыми спиральными KLM-ребрами / В. Б. Кунтыш [и др.] // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2003. – № 11. – С. 10–14.
4. Кунтыш, В. Б. Анализ тепловой, объемной и массовой характеристик теплообменных секций аппаратов воздушного охлаждения / В. Б. Кунтыш, А. Э. Пиир // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2009. – № 5. – С. 3–6.
5. Кунтыш, В. Б. Основные способы энергетического совершенствования аппаратов воздушного охлаждения / В. Б. Кунтыш, А. Н. Бессонный, А. А. Бриль // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 1997. – № 4. – С. 41–44.
6. Теплообменная секция: пат. 2213920 России, МПК С2, F 28 D 3/02 / В. П. Мулин, И. И. Кочетов, Р. Ф. Теляев, В. Б. Кунтыш, В. И. Мелехов, А. В. Самородов; заявитель ЗАО «Октябрьскхиммаш». – № 2001119695; заявл. 16.07.2001; опубл. 15.07.2003 // Бюл. изобрет. / Роспатент. – 2003. – № 28. – С. 70.
7. Устройство для изготовления теплообменной трубы со спирально-навивными ребрами: заявка на полезную модель Респ. Беларусь, МПК В 21 D 11/06 / В. Б. Кунтыш, В. П. Мулин, Е. С. Санкович, А. Ш. Миннигалеев; заявитель Беларус. гос. технол. ун-т. – № и 20120381; заявл. 05.04.12.
8. Теплообменная ребристая труба: пат. 4814 Респ. Беларусь, МПК F 28 F 1/00 / В. Б. Кунтыш, В. И. Володин, Е. С. Санкович, В. П. Мулин, А. Э. Пиир, А. Ш. Миннигалеев, Г. Г. Баранов; заявитель Беларус. гос. технол. ун-т. – № и 20080322; заявл. 17.04.08; опубл. 30.10.08 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2008. – № 5. – С. 36.
9. Теплообменная биметаллическая ребристая труба: пат. 14907 Респ. Беларусь, МПК F 28 F 1/00 / В. Б. Кунтыш, Е. С. Санкович, В. П. Мулин, А. Ш. Миннигалеев, А. Э. Пиир, И. Р. Гаязов, А. Л. Соловьев; заявитель Беларус. гос. технол. ун-т. – № и 20091539; заявл. 28.10.09; опубл. 30.10.11 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2011. – № 4. – С. 58.
10. Способ и устройство для изготовления теплообменной трубы с KLM-ребрами: пат. 16177 Респ. Беларусь, МПК В 21 С 37/15 / В. Б. Кунтыш, В. П. Мулин, Е. С. Санкович, А. Э. Пиир, А. Ш. Миннигалеев, А. Л. Соловьев, О. В. Петрович; заявитель Беларус. гос. технол. ун-т. – № а 2010366; заявл. 11.03.10; опубл. 30.08.12 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2012. – № 4. – С. 44.

Представлена кафедрой энергосбережения,  
гидравлики и теплотехники

Поступила 12.11.2012

УДК 536.2 (075)

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Докт. физ.-мат. наук КУДИНОВ В. А.,  
инженеры КОТОВА Е. В., ЕРЕМИН А. В., КУЗНЕЦОВА А. Э.

*Самарский государственный технический университет*

Для определения требуемого сочетания свойств многослойных конструкций наилучшим образом подходят аналитические (приближенные ана-

литические) решения. Трудности получения аналитических решений краевых задач для многослойных конструкций связаны с необходимостью выполнения условий сопряжения в виде равенства температур и тепловых потоков в точках контакта слоев. Выполнение этих условий в случае применения точных аналитических методов приводит к необходимости решения характеристической системы в виде цепочного трансцендентного уравнения относительно собственных чисел краевой задачи, решение которого может быть получено лишь численными методами [1, 2].

Из приближенных аналитических методов решения достаточно широкое распространение получили ортогональные методы взвешенных невязок (Л. В. Канторовича, Бубнова – Галеркина и др.) [2–4]. Однако их применение к расчетам многослойных конструкций существенно сдерживается необходимостью построения систем координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. В настоящей работе рассматривается метод, позволяющий строить системы координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, независимо от числа контактирующих тел. Построение таких систем оказалось возможным благодаря принятию глобальной системы неизвестных функций времени (одинаковой для всех контактирующих тел), введение которой позволяет приводить многослойную конструкцию к однослойной с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды.

Для получения решений при малых и сверхмалых значениях временной переменной необходимо использовать большое число приближений, что в ортогональных методах приводит к необходимости решения алгебраических уравнений высоких степеней (относительно собственных чисел краевой задачи), точность решения которых даже при использовании современной компьютерной техники не всегда может удовлетворять потребностям практики. Наиболее эффективным в области малых значений временной переменной является метод, основанный на определении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий [3, 6]. В настоящей статье он применен для расчета температурного состояния последнего слоя многослойной системы, так как при малых и особенно сверхмалых значениях времени теплообмен протекает лишь в этом слое.

В качестве конкретного примера найдем решение задачи теплопроводности для трехслойной пластины в следующей математической постановке (рис. 1):

$$\frac{\partial T_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$(\tau > 0; \quad x_{i-1} < x < x_i; \quad i = 1, 2, 3; \quad x_0 = 0; \quad x_3 = \delta);$$

$$T_i(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$T_3(\delta, \tau) = T_{\infty}; \quad (4)$$

$$T_i(x_i, \tau) = T_{i+1}(x_i, \tau) \quad (i=1,2); \quad (5)$$

$$\frac{\lambda_i \partial T_i(x_i, \tau)}{\partial x} = \frac{\lambda_{i+1} \partial T_{i+1}(x_i, \tau)}{\partial x} \quad (i=1,2), \quad (6)$$

где  $T_i$  – температура  $i$ -го слоя;  $x$  – координата;  $\tau$  – время;  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – толщины слоев;  $\delta$  – суммарная толщина трехслойной пластины;  $a_i$  – коэффициент температуропроводности  $i$ -го слоя;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{cr}$  – температура стенки при  $x = \delta$ ;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя.

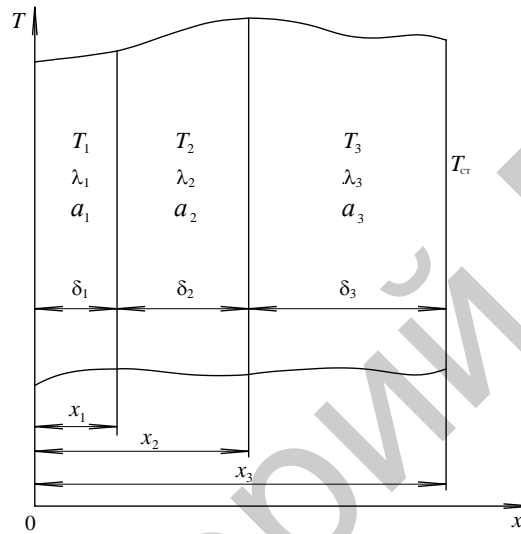


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta_i = \frac{T_i - T_{cr}}{T_0 - T_{cr}}; \quad \xi_i = \frac{x_i}{\delta}; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}, \quad (7)$$

где  $\Theta$  – относительная избыточная температура;  $\xi$  – безразмерная координата;  $Fo$  – число Фурье;  $a$  – наименьший из коэффициентов температуропроводности  $a_i$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Задача (1)–(6) с учетом (7) приводится к виду:

$$\frac{\partial \Theta_i(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (8)$$

$$(Fo > 0; \quad \xi_{i-1} < \xi < \xi_i; \quad i=1, 2, 3; \quad \xi_0 = 0; \quad \xi_3 = 1);$$

$$\Theta_i(\xi, 0) = 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta_1(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (10)$$

$$\Theta_3(1, Fo) = 0; \quad (11)$$

$$\Theta_i(\xi_i, Fo) = \Theta_{i+1}(\xi_i, Fo) \quad (i = 1, 2); \quad (12)$$

$$\frac{\lambda_i \partial \Theta_i(\xi_i, Fo)}{\partial \xi} = \frac{\lambda_{i+1} \partial \Theta_{i+1}(\xi_i, Fo)}{\partial \xi} \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

Решение задачи (8)–(13), следуя ортогональному методу Л. В. Канторовича, принимается в виде

$$\Theta_i(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^n f_k(Fo) \varphi_{ki}(\xi) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

где  $f_k(Fo)$  – неизвестные функции;  $\varphi_{ki}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – координатные функции, определяемые таким образом, чтобы заранее точно выполнялись граничные условия (10), (11) и условия сопряжения (12), (13).

Отличительной особенностью используемого здесь метода является принятие одинаковой системы неизвестных функций времени  $f_k(Fo)$  для каждого из контактирующих тел, что позволяет получать наиболее простого вида координатные функции  $\varphi_{ki}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3; k = \overline{1, n}$ ).

Способ построения систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, заключается в следующем. Вначале строится координатная функция для третьего слоя. Она принимается в таком виде, чтобы точно выполнялось граничное условие (11)

$$\varphi_{k3}(\xi) = 1 - \xi^{2k} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (15)$$

Координатная функция для второго слоя принимается в виде

$$\varphi_{k2}(\xi) = A_1 + A_2 \xi^{2k}, \quad (16)$$

где неизвестные коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  находятся из условий сопряжения (12), (13) между вторым и третьим слоями. После их определения соотношение (16) принимает вид

$$\varphi_{k2}(\xi) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) \xi_2^{2k} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \xi_5^{2k} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (17)$$

Координатная функция для первого слоя принимается в виде

$$\varphi_{k1}(\xi) = B_1 + B_2 \xi^{2k}, \quad (18)$$

где  $B_1, B_2$  – неизвестные коэффициенты.

Очевидно, что соотношение (14) при использовании в качестве координатной функции (18) точно удовлетворяет граничному условию (10). Незвестные коэффициенты  $B_1, B_2$  находятся из условий сопряжения (12), (13) между первым и вторым слоями. После их определения соотношение (18) будет

$$\varphi_{k1}(\xi) = 1 - \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \xi_1^{2k} - \left( 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \xi_2^{2k} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \xi^{2k} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (19)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при использовании в качестве координатных функций соотношений (15), (17), (19) соотношение (14) в любом приближении ( $k = \overline{1, n}$ ) точно удовлетворяет граничным условиям (10), (11) и условиям сопряжения (12), (13) при любых значениях неизвестных функций  $f_k(\text{Fo})$ .

Найдем решение задачи (8)–(13) в нулевом приближении. Для этого потребуем, чтобы соотношение (14), в котором ограничимся одним членом ряда, удовлетворяло не уравнению (8), а некоторым осредненным уравнениям (проинтегрированным в пределах толщины каждого слоя)

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \left[ \frac{\partial \Theta_i(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} \right] d\xi = 0. \quad (20)$$

Подставляя (14) в (20), находим

$$\begin{aligned} f_1'(\text{Fo}) & \left[ \int_0^{\xi_1} (D - D_1 \xi^2) d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (D_2 - D_3 \xi^2) d\xi + \int_{\xi_2}^1 (1 - \xi^2) d\xi \right] + \\ & + 2f_1(\text{Fo}) \left[ D_1 \frac{a_1}{a} \int_0^{\xi_1} d\xi + D_2 \frac{a_2}{a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi + \frac{a_3}{a} \int_{\xi_2}^1 d\xi \right] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $f_1'$  – первая производная от функции  $f_1(\text{Fo})$  по переменной  $\text{Fo}$ .

Определяя интегралы в (21), относительно неизвестной функции  $f_1(\text{Fo})$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{df_1(\text{Fo})}{d\text{Fo}} + \nu f_1(\text{Fo}) = 0, \quad (22)$$

где

$$\nu = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

$$\mu_1 = \xi_1 \left( D - \frac{D_1}{3} \xi_1^2 \right) + D_2 (\xi_2 - \xi_1) - \frac{D_3}{3} (\xi_2^3 - \xi_1^3) + (1 - \xi_2) - \frac{1}{3} (1 - \xi_2^3) + \frac{2}{3};$$

$$\mu_2 = 2(a_1 D_1 \xi + a_2 D_3 (\xi_2 - \xi_1) + a_3 (1 - \xi_2)) / a;$$

$$D = 1 - \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \xi_1^{2k} - \left( 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \xi_2^{2k};$$

$$D_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}; \quad D_2 = 1 - \left( 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \xi_2^{2k}; \quad D_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

Интегрируя уравнение (22), находим

$$f_1(Fo) = C \exp(vFo), \quad (23)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Подставляя (23) в (14), получаем

$$\Theta_i(\xi, Fo) = C \exp(vFo) \varphi_{i1}(\xi) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C$  составим невязку начального условия (9) и проинтегрируем ее в пределах толщины каждого слоя

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [\Theta_i(\xi, 0) - 1] d\xi = 0. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (25), находим

$$\int_0^{\xi_1} [C(D - D_1 \xi^2) - 1] d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} [C(D_2 - D_3 \xi^2) - 1] d\xi + \int_{\xi_2}^1 [C(1 - \xi^2) - 1] d\xi = 0.$$

Определяя интегралы, относительно постоянной интегрирования  $C$  получаем алгебраическое линейное уравнение. Его решение  $C = 1/\mu_1$ .

После определения постоянной интегрирования решение задачи (8)–(13) в нулевом приближении принимает вид

$$\Theta_i(\xi, Fo) = \frac{\exp(vFo) \varphi_{i1}(\xi)}{\mu_1} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (26)$$

Если положить  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ;  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  (однослойная пластина), то соотношение (26) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1,5 \exp(-3 Fo)(1 - \xi^2). \quad (27)$$

Последняя формула совпадает с решением в нулевом приближении для однослойной пластины, приведенным в [2, 3]. Результаты расчетов по формуле (27) представлены на рис. 2.

Используя формулу (26), найдем решение конкретной задачи для трехслойной пластины при следующих исходных данных:

$$x_1 = 0,00086 \text{ м}; \quad x_2 = 0,00261 \text{ м}; \quad x_3 = 0,00502 \text{ м}; \quad \lambda_1 = 11 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ Вт/(м·К)}; \quad \lambda_3 = 1,1 \text{ Вт/(м·К)}; \quad a_1 = 3,624 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$a_2 = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad a_3 = 0,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \quad (28)$$

Анализ результатов расчетов по формуле (26) в сравнении с расчетом численным методом прогонки позволяет заключить, что в диапазоне чисел Фурье  $0,187 \leq Fo < \infty$  расхождение составляет около 12 % (рис. 3).

Для повышения точности найдем решение задачи (8)–(13) в первом приближении. Для этого составим невязки уравнений (8) и потребуем ортогональности невязок к координатным функциям первого приближения

$\varphi_{1i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (учитываем, что согласно (27) наименьшим является коэффициент температуропроводности  $a_3$ )

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \left[ \frac{\partial f_1(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \varphi_{1i}(\xi) - f_1(\text{Fo}) \frac{a_i}{a_3} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}(\xi)}{\partial \xi^2} \right] \varphi_{1i}(\xi) d\xi = 0.$$

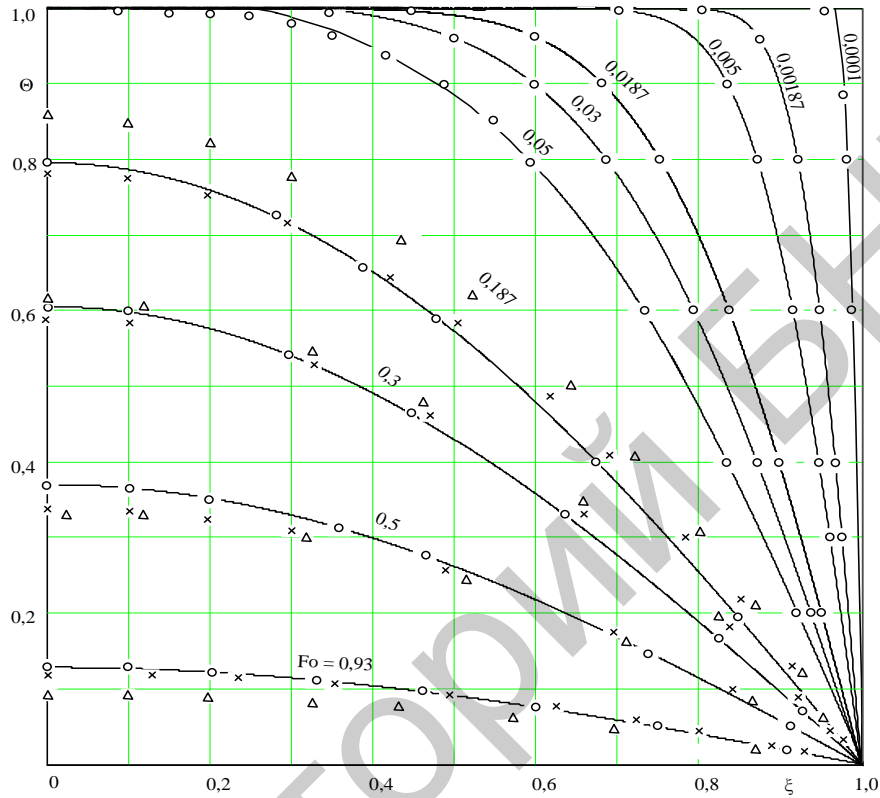


Рис. 2. Распределение температуры в трехслойной пластине, приведенной к однослойной:  $\Delta$  – по формуле (26) (нулевое приближение);  $\times$  – по формуле (33) (первое приближение); — – по формуле (14) (восьмое приближение);  $\circ$  – точное решение [5]

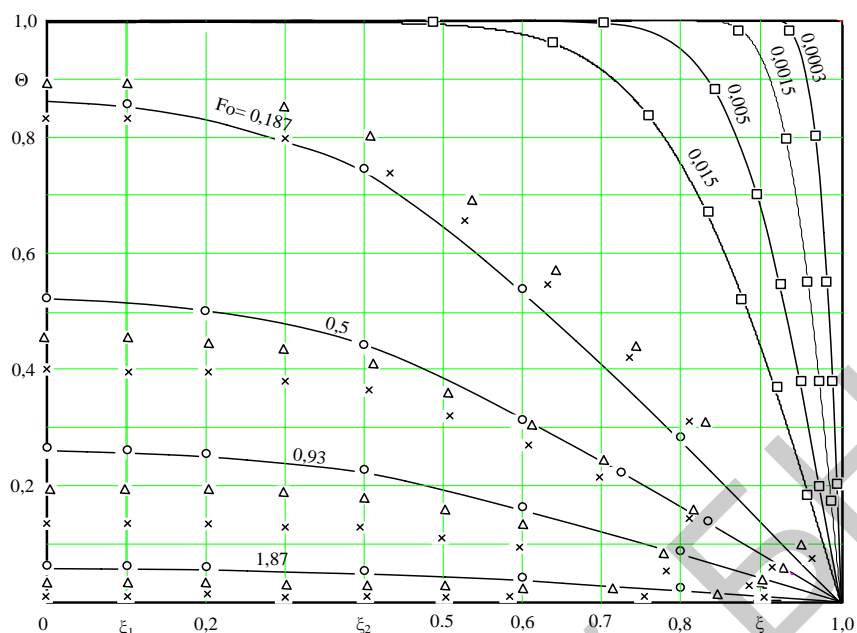


Рис. 3. Распределение температуры в трехслойной пластине:  
 × – по формуле (26) (нулевое приближение); Δ – по формуле (31) (первое приближение);  
 — по формуле (14) (восьмое приближение); ○ – метод прогонки; □ – точное решение [5]  
 Последнее соотношение можно переписать в виде

$$f_1'(Fo) \left[ \int_0^{\xi_1} (D - D_1 \xi^2) \varphi_{11} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (D_2 - D_3 \xi^2) \varphi_{12} d\xi + \int_{\xi_2}^1 (1 - \xi^2) \varphi_{13} d\xi \right] +$$

$$+ 2f_1(Fo) \left( D_1 \frac{a_1}{a_3} \int_0^{\xi_1} \varphi_{11} d\xi + D_2 \frac{a_2}{a_3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi_{12} d\xi + \int_{\xi_2}^1 \varphi_{13} d\xi \right) = 0.$$

Определяя интегралы в последнем соотношении, относительно неизвестной функции  $f_1(Fo)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$df_1(Fo)/dFo + \nu_1 f_1(Fo) = 0, \quad (29)$$

где  $\nu_1 = \mu_4 / \mu_3$ ;  $\mu_3 = 0,516004$ ;  $\mu_4 = 1,042163$ .

Интегрируя уравнение (29), находим

$$f_1(Fo) = C_1 \exp(\nu_1 Fo), \quad (30)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Подставляя (30) в (14), получаем

$$\Theta_i(\xi, Fo) = C_1 \exp(\nu_1 Fo) \varphi_{1i}(\xi) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_1$  составим невязку начального условия (9) и потребуем ортогональности невязки к координатным функциям  $\varphi_{1i}$  ( $i = 1, 2, 3$ )



$$\int_0^{\xi_1} [C_1(D - D_1\xi^2) - 1] \varphi_{11} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} [C_1(D_2 - D_3\xi^2) - 1] \varphi_{12} d\xi + \int_{\xi_2}^1 [C_1(1 - \xi^2) - 1] \varphi_{13} d\xi = 0. \quad (32)$$

Определяя интегралы в (32), относительно постоянной интегрирования  $C_1$  получаем алгебраическое линейное уравнение. Его решение  $C_1 = 1/\mu_3$ .

После определения постоянной интегрирования  $C_1$  решение задачи (8)–(13) в первом приближении находится из (31). Если положить  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ;  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ , то соотношение (31) приводится к виду

$$\Theta(\xi, Fo) = 1,25 \exp(-2,5 Fo)(1 - \xi^2). \quad (33)$$

Формула (33) совпадает с решениями в первом приближении для однослойной пластины, приведенными в [2–4].

Результаты расчетов по формулам (26), (27), (31), (33) даны на рис. 2, 3. Их анализ позволяет заключить, что точность решения в первом приближении по сравнению с нулевым существенно повышается. И в частности, расхождение с точным решением (рис. 2) не превышает 3 %.

Для дальнейшего повышения точности найдем решение задачи (8)–(13) во втором приближении. Составляя невязку уравнений (8) и требуя ортогональности невязки к координатным функциям  $\varphi_{1i}(\xi)$  и  $\varphi_{2i}(\xi)$  ( $i=1, 2, 3$ ), находим

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \left[ f'_1 \varphi_{1i} + f'_2 \varphi_{2i} - \frac{a_i}{a_3} (f_1 \varphi_{1i}'' + f_2 \varphi_{2i}'') \right] \varphi_{ji} d\xi = 0 \quad (j=1, 2), \quad (34)$$

где  $\varphi_{1i}''$ ,  $\varphi_{2i}''$  – вторые производные от функций  $\varphi_{1i}(\xi)$  и  $\varphi_{2i}(\xi)$  по переменной  $\xi$ .

Соотношение (34) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_1} (f'_1 \varphi_{11} + f'_2 \varphi_{21}) \varphi_{11} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (f'_1 \varphi_{12} + f'_2 \varphi_{22}) \varphi_{12} d\xi + \int_{\xi_2}^1 (f'_1 \varphi_{13} + f'_2 \varphi_{23}) \varphi_{13} d\xi - \\ & - \frac{a_1}{a_3} \int_0^{\xi_1} (f_1 \varphi_{11}'' + f_2 \varphi_{21}'') \varphi_{11} d\xi - \frac{a_2}{a_3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (f_1 \varphi_{12}'' + f_2 \varphi_{22}'') \varphi_{12} d\xi - \int_{\xi_2}^1 (f_1 \varphi_{13}'' + f_2 \varphi_{23}'') \varphi_{13} d\xi = 0; \\ & \int_0^{\xi_1} (f'_1 \varphi_{11} + f'_2 \varphi_{21}) \varphi_{21} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (f'_1 \varphi_{12} + f'_2 \varphi_{22}) \varphi_{22} d\xi + \int_{\xi_2}^1 (f'_1 \varphi_{13} + f'_2 \varphi_{23}) \varphi_{23} d\xi - \\ & - \frac{a_1}{a_3} \int_0^{\xi_1} (f_1 \varphi_{11}'' + f_2 \varphi_{21}'') \varphi_{21} d\xi - \frac{a_2}{a_3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (f_1 \varphi_{12}'' + f_2 \varphi_{22}'') \varphi_{22} d\xi - \int_{\xi_2}^1 (f_1 \varphi_{13}'' + f_2 \varphi_{23}'') \varphi_{23} d\xi = 0. \end{aligned}$$

Определяя интегралы в последних соотношениях, относительно неизвестных функций  $f_1(Fo)$  и  $f_2(Fo)$  с учетом исходных данных (27) получаем следующую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1 f_1' + b_2 f_2' + b_3 f_1 + b_4 f_2 &= 0; \\ l_1 f_1' + l_2 f_2' + l_3 f_1 + l_4 f_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где  $b_1 = 0,494399$ ;  $b_2 = 0,585074$ ;  $b_3 = 0,958027$ ;  $b_4 = 1,49522$ ;  $l_1 = 0,585074$ ;  $l_2 = 0,702963$ ;  $l_3 = 1,22521$ ;  $l_4 = 2,17489$ .

Частные решения системы уравнений (35) разыскиваются в виде:

$$f_1(\text{Fo}) = A \exp(r\text{Fo}); \quad f_2(\text{Fo}) = D \exp(r\text{Fo}), \quad (36)$$

где  $A, D, r$  – некоторые постоянные.

Подставляя (36) в (35), находим:

$$\left. \begin{aligned} A(0,494399r + 0,958027) + D(0,585074r + 1,49522) &= 0; \\ A(0,585074r + 1,22521) + D(0,702963r + 2,17489) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Система однородных алгебраических уравнений (37) имеет нетривиальное решение в случае, если определитель ее равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0,494399r + 0,958027 & 0,585074r + 1,49522 \\ 0,585074r + 1,22521 & 0,702963r + 2,17489 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

Из (38) получаем следующее характеристическое уравнение:  $0,005232r^2 + 0,157067r + 0,25164 = 0$ . Его корни:  $r_1 = -1,698214$ ;  $r_2 = -28,320207$ .

Подставляя величину корня  $r_1$  в систему уравнений (37), получаем:

$$\left. \begin{aligned} 0,113714 A_1 + 0,475086 D_1 &= 0; \\ 0,230316 A_1 + 0,962233 D_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Для однородной системы (39) можно положить  $A_1 = \text{const} = 1$ . Тогда  $D_1 = -0,239355$ .

Аналогично, подставляя  $r_2$  в (37), находим:  $A_2 = 1$ ;  $D_2 = -0,881653$ .

С учетом найденных значений постоянных  $A_i, D_i, r_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) соотношения (36) примут вид:

$$f_1(\text{Fo}) = A_1 e^{r_1 \text{Fo}} + A_2 e^{r_2 \text{Fo}}; \quad f_2(\text{Fo}) = D_1 e^{r_1 \text{Fo}} + D_2 e^{r_2 \text{Fo}}. \quad (40)$$

Чтобы найти общее решение системы уравнений (35), умножим частное решение, включающее корень  $r_1$ , на произвольную постоянную  $C_1$ , а решение, включающее корень  $r_2$ , – на постоянную  $C_2$ . Подставляя полученные общие решения в (14) (при  $n = 2$ ), находим

$$\Theta_i(\xi, \text{Fo}) = (C_1 A_1 e^{r_1 \text{Fo}} + C_2 A_2 e^{r_2 \text{Fo}}) \varphi_{1i} + (C_1 D_1 e^{r_1 \text{Fo}} + C_2 D_2 e^{r_2 \text{Fo}}) \varphi_{2i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (41)$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  составляется невязка начального условия (9) и требуется ортогональность невязки к координатным функциям  $\varphi_{1i}(\xi)$  и  $\varphi_{2i}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [(C_1 A_1 + C_2 A_2) \varphi_{1i} + (C_1 D_1 + C_2 D_2) \varphi_{2i} - 1] \varphi_{ji} d\xi = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (42)$$

Соотношение (42) относительно неизвестных  $C_1$  и  $C_2$  приводится к следующей системе двух алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\xi_1} (E_1\varphi_{11} + E_2\varphi_{21} - 1)\varphi_{11}d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (E_1\varphi_{12} + E_2\varphi_{22} - 1)\varphi_{12}d\xi + \\ & \quad + \int_{\xi_2}^1 (E_1\varphi_{13} + E_2\varphi_{23} - 1)\varphi_{13}d\xi = 0; \\ & \int_0^1 (E_1\varphi_{11} + E_2\varphi_{21} - 1)\varphi_{21}d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} (E_1\varphi_{12} + E_2\varphi_{22} - 1)\varphi_{22}d\xi + \\ & \quad + \int_{\xi_2}^1 (E_1\varphi_{13} + E_2\varphi_{23} - 1)\varphi_{23}d\xi = 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $E_1 = C_1A_1 + C_2A_2$ ;  $E_2 = C_1D_1 + C_2D_2$ .

Определяя интегралы, находим:

$$\left. \begin{aligned} & 0,356267C_1 + 0,214339C_2 + 0,645874 = 0; \\ & 0,4191102C_1 + 0,346957C_2 + 0,795890 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Из решения системы уравнений (43) получаем:  $C_1 = 1,642377$ ;  $C_2 = -3,631466$ .

После определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  решение задачи (8)–(13) во втором приближении находится из (41). Если положить  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ;  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  (однослойная пластина), то соотношение (41) приводится к виду

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & (1,55e^{-2,47Fo} + 3,3e^{-25,52Fo})(1 - \xi^2) - \\ & - (0,28e^{-2,47Fo} + 2,9048A_2e^{-25,52Fo})(1 - \xi^4). \end{aligned} \quad (44)$$

Соотношение (44) совпадает с решением аналогичной задачи во втором приближении, приведенном в [2–4].

Аналогично можно получить решение задачи (8)–(13) и в любом последующем приближении.

Результаты расчетов по формуле (14) в нулевом, первом и восьмом приближениях в сравнении с точным решением [5] даны на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне числа Фурье  $0,001 \leq Fo < 0,01$  полученные по формуле (14) значения температур в восьмом приближении отличаются от их точных величин не более чем на 2 %, а для чисел Фурье  $0,01 \leq Fo < \infty$  они практически совпадают с точными. При этом из решения характеристического уравнения были получены следующие собственные числа:  $\lambda_1 = -2,4674011027$ ;  $\lambda_2 = -22,2066099025$ ;  $\lambda_3 = -61,6850275455$ ;  $\lambda_4 = -120,903753244$ ;  $\lambda_5 = -200,477960523$ ;  $\lambda_6 = -322,185335578$ ;  $\lambda_7 = -647,223264386$ ;  $\lambda_8 = -2422,85064772$ .

Точные значения собственных чисел:  $\lambda_1 = 2,467401100272$ ;  $\lambda_2 = 22,2066099024$ ;  $\lambda_3 = 61,685027506$ ;  $\lambda_4 = 120,902653$ ;  $\lambda_5 = 199,859$ ;  $\lambda_6 = 298,555$ ;  $\lambda_7 = 416,99$ ;  $\lambda_8 = 555,16$ .

Результаты расчетов по формуле (14) для трехслойной конструкции в сравнении с расчетом по методу прогонки даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что отличие температур в восьмом приближении от их значений, полученных по методу прогонки, в диапазоне чисел Фурье  $0,187 \leq Fo < \infty$  не превышает 0,5 %.

Применительно к решению задачи для трехслойной конструкции в восьмом приближении получены следующие значения собственных чисел:  $\lambda_1 = 1,614384$ ;  $\lambda_2 = 23,29944$ ;  $\lambda_3 = 61,66503$ ;  $\lambda_4 = 121,1786$ ;  $\lambda_5 = 223,15143$ ;  $\lambda_6 = 352,645262$ ;  $\lambda_7 = 688,46335$ ;  $\lambda_8 = 2552,72532$ .

При малых и сверхмалых значениях временной переменной до момента времени, пока фронт температурного возмущения, двигаясь от внешней поверхности последнего слоя  $\xi = 1$  (точка задания граничного условия первого рода), не достигает поверхности контакта между предпоследним и последним слоями, теплообмен протекает как бы в однослойной пластине. Для получения аналитического решения применительно к этому (последнему) слою многослойной системы применим метод, основанный на определении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий [6]. При его использовании процесс теплообмена разделяется на две стадии по времени  $0 < Fo \leq Fo_1$  и  $Fo_1 \leq Fo < \infty$ . Для этого вводится движущаяся во времени граница (фронт температурного возмущения), разделяющая исходную область  $0 \leq \xi \leq 1$  (однослойная пластина) на две подобласти  $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$  и  $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$ , где  $q_1(Fo)$  – функция, определяющая продвижение границы раздела во времени. При этом в области, расположенной за пределами фронта температурного возмущения, сохраняется начальная температура. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей поверхности контакта между предпоследним и последним слоями, т. е. когда  $Fo = Fo_1$ . Во второй стадии (стадия регулярного режима) изменение температуры происходит по всему объему тела ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Отметим, что для этой стадии процесса решение было получено выше в виде (14). Следовательно, с использованием данного метода будем находить решение лишь для первой стадии процесса (для малых и сверхмалых значений времени).

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$c\gamma \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < \delta); \quad (45)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (46)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (47)$$

$$T(\delta, \tau) = T_{ст}, \quad (48)$$

где  $c$  – теплоемкость;  $\gamma$  – плотность;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{ст}$  – температура стенки при  $x = \delta$ ;  $\delta$  – толщина пластины;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Задача (45)–(48) в безразмерных переменных будет:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (49)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (50)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (51)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \quad (52)$$

где  $\Theta = (T - T_0) / (T_{ст} - T_0)$ ;  $\xi = x / \delta$ ;  $Fo = a\tau / \delta^2$ ;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

После введения фронта температурного возмущения  $q_1(Fo)$  и новой независимой переменной  $\rho = 1 - \xi$  математическая постановка задачи (49)–(52) для первой стадии процесса приводится к виду (рис. 4):

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 < \rho < 1); \quad (53)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (54)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (55)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (56)$$

Отметим, что граничное условие (51) в задаче (53)–(56) не требуется, так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой стадии. Соотношения (55), (56) представляют условия тепловой изоляции подвижной границы.

Решение задачи (53)–(56) принимается в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1) \rho^k, \quad (57)$$

где  $a_k(q_1)$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (54)–(56). После их нахождения соотношение (57) будет

$$\Theta(\rho, Fo) = \left(1 - \frac{\rho}{q_1}\right)^2. \quad (58)$$

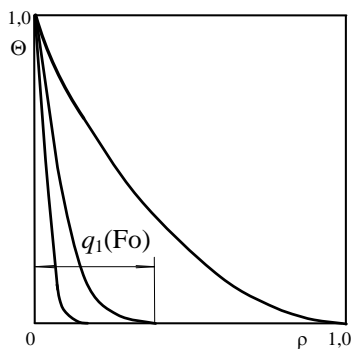


Рис. 4. Расчетная схема теплообмена

Для определения неизвестной функции времени  $q_1(Fo)$  составим невязку уравнения (53) и проинтегрируем ее в пределах толщины термического слоя

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} d\rho = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} d\rho. \quad (59)$$

Определяя интегралы в (59), находим

$$q_1 dq_1 = 6dFo. \quad (60)$$

Интегрируя уравнение (46), при начальном условии  $q_1(0) = 0$  получаем

$$q_1(Fo) = \sqrt{12Fo}. \quad (61)$$

Положив  $q_1(Fo_1) = 1$ , находим время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\rho = 1$ , которое будет  $Fo_1 = 0,08333$ .

Соотношения (58), (61) представляют решение задачи (53)–(56) в первом приближении. Анализ результатов расчетов безразмерной температуры по формуле (58) в сравнении с точным решением для однослойной пластины в диапазоне чисел Фурье  $0,0001 < Fo < 0,05$  позволяет заключить, что расхождение составляет 3–4 %.

Для повышения точности решения задачи (53)–(56) необходимо увеличивать число членов ряда  $a_k(q_1)$  (57). Появляющиеся при этом дополнительные неизвестные коэффициенты находятся из дополнительных граничных условий, определяемых с использованием заданных граничных условий (54)–(56) и дифференциального уравнения (53). Их физический смысл состоит в выполнении решением (57) уравнения (53) на границе области ( $\rho = 0$ ) и на фронте температурного возмущения  $q_1(\rho)$ . Так как область перемещения фронта температурного возмущения включает весь диапазон изменения пространственной переменной  $0 \leq \rho \leq 1$ , то, следовательно, чем большее число дополнительных граничных условий будет использовано, тем лучше будет выполняться уравнение (53) в этом же диапазоне изменения координаты  $\rho$ . Отметим, что в каждом последующем приближении вводятся три новых дополнительных граничных условия. Общие формулы их получения при любом числе приближений имеют вид:

$$\frac{\partial^i \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^i} = 0; \quad \frac{\partial^i \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^i} = 0; \quad \frac{\partial^{i+1} \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^{i+1}} = 0 \quad (i = 2, 4, 6, \dots), \quad (62)$$

где  $i$  – число приближений.

Найдем решение задачи (53)–(56) во втором приближении. Формулы (62) в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \rho^3} = 0. \quad (63)$$

Используя основные (54)–(56) и дополнительные (63) граничные условия, можно найти уже шесть неизвестных коэффициентов  $a_k(q_1)$  ( $k = \overline{0, 5}$ ) ряда (57). Для их определения будем иметь цепочную систему шести алгебраических линейных уравнений, из которой они легко могут быть найдены. После определения коэффициентов  $a_k(q_1)$  соотношение (57) во втором приближении принимает вид

$$\Theta(\rho, Fo) = \left(1 - \frac{3\rho}{2q_1}\right) \left(1 - \frac{\rho}{q_1}\right)^4. \quad (64)$$

Подставляя (64) в (53) и определяя интеграл в пределах от  $\rho = 0$  до  $\rho = q_1(Fo)$ , относительно неизвестной функции  $q_1(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_1 dq_1 = 10 dFo. \quad (65)$$

Интегрируя уравнение (65), при начальном условии  $q_1(0) = 0$  находим

$$q_1(Fo) = \sqrt{20Fo}. \quad (66)$$

Положив в (66)  $q_1(Fo_1) = 1$ , находим время окончания первой стадии процесса во втором приближении  $Fo_1 = 0,05$ . Результаты расчетов перемещения фронта температурного

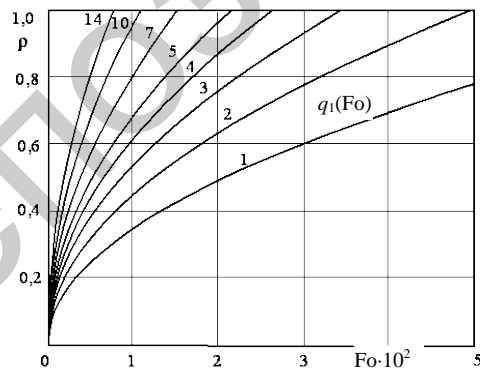


Рис. 5. Кривые перемещения фронта температурного возмущения:  
1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14 – номер приближения

возмущения по координате  $\rho$  во времени  $Fo$  позволяют заключить, что с увеличением числа приближений величина времени  $Fo_1$ , при котором фронт температурного возмущения достигает координаты  $\rho = 1$ , уменьшается. И в пределе при  $n \rightarrow \infty$   $Fo_1 = 0$ . Этот результат находится в полном соответствии с гипотезой о бесконечной скорости распространения теплоты, лежащей в основе вывода параболического уравнения (53) (рис. 5).

Соотношения (64), (66) представляют решение задачи (53)–(56) во втором приближении. Анализ результатов расчетов по формуле (64) позволяет заключить, что во втором приближении происходит значительное повышение точности решения задачи (отклонение от точного не превышает 1–2 %).

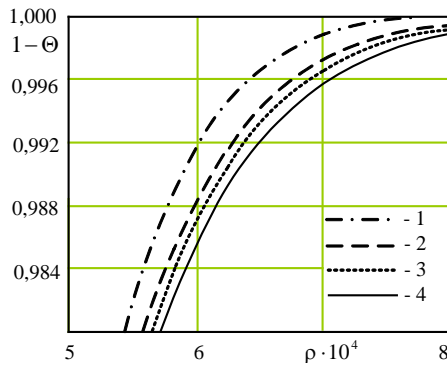


Рис. 6. Изменение температуры в пластине ( $Fo = 3 \cdot 10^{-8}$ ): 1 – третье приближение; 2 – седьмое; 3 – четырнадцатое; 4 – точное решение [5]

Для оценки точности получаемых решений при сверхмалых значениях времени по формуле (57) были выполнены расчеты в третьем, седьмом и четырнадцатом приближениях при  $Fo = 3 \cdot 10^{-8}$ . Результаты расчетов в сравнении с точным решением приведены на рис. 6. Их анализ позволяет заключить, что значения температур, полученных по формуле (57), отличаются от точных их значений в третьем приближении на 0,31 %, в седьмом – на 0,03 % и в четырнадцатом – на 0,0004 %.

При необходимости число приближений можно увеличить и, следовательно, имеется возможность получения решений практически с заданной степенью точности, без каких-либо ограничений на величину числа Фурье в области малых и сверхмалых его значений.

Можно заметить, что соотношения (58), (64) представлены в виде произведения искомой функции времени  $q_1(Fo)$  в отрицательной степени на координатную функцию, зависящую лишь от пространственной переменной, т. е. вид решения формально такой же, как и в методе Л. В. Канторовича (соотношения (33), (44)). Дальнейшие выкладки отличаются лишь тем, что верхним пределом интегрирования в соотношении (59) является переменная величина  $q_1(Fo)$ , тогда как в соотношениях (20), (34) этот предел для каждого из контактирующих тел представляется константой. Таким образом, применяя, по существу, один и тот же подход, можно получать простые аналитические выражения для описания температурного состояния одно- и многослойных конструкций во всем диапазоне времени нестационарного процесса (включая малые и сверхмалые его значения) практически с заданной степенью точности.

## ВЫВОДЫ

1. На основе использования ортогонального метода Л. В. Канторовича даны теоретические положения метода построения аналитических решений краевых задач теплопроводности для многослойных конструкций. Применяя глобальную систему неизвестных функций времени, многослойная конструкция приводится к однослойной с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды, что позволяет строить аналитические решения путем использования систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения.



2. Разработана методика построения систем координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения при любом числе контактирующих тел. Для их построения используется рекуррентный метод, при котором координатные функции строятся последовательно, переходя от слоя к слою, начиная с последнего, при использовании всякий раз метода неопределенных коэффициентов. Реализация такого метода построения координатных функций возможна лишь при использовании глобальной системы неизвестных функций времени.

3. На основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий применительно к последнему слою многослойной системы получено аналитическое решение задачи теплопроводности, позволяющее выполнять оценку температурного состояния конструкции для малых и сверхмалых значений времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б е л я е в, Н. М. Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1982. – 304 с.
2. К у д и н о в, В. А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М.: Высш. шк., 2005. – 429 с.
3. К у д и н о в, В. А. Теплообмен при течении Куэтта с учетом теплоты трения / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2011. – № 2. – С. 43–51.
4. Ц о й, П. В. Методы расчета задач тепломассопереноса / П. В. Цой. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 432 с.
5. Л ы к о в, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
6. К у д и н о в, В. А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 280 с.

Представлена кафедрой теоретических основ теплотехники и гидромеханики

Поступила 19.09.2012